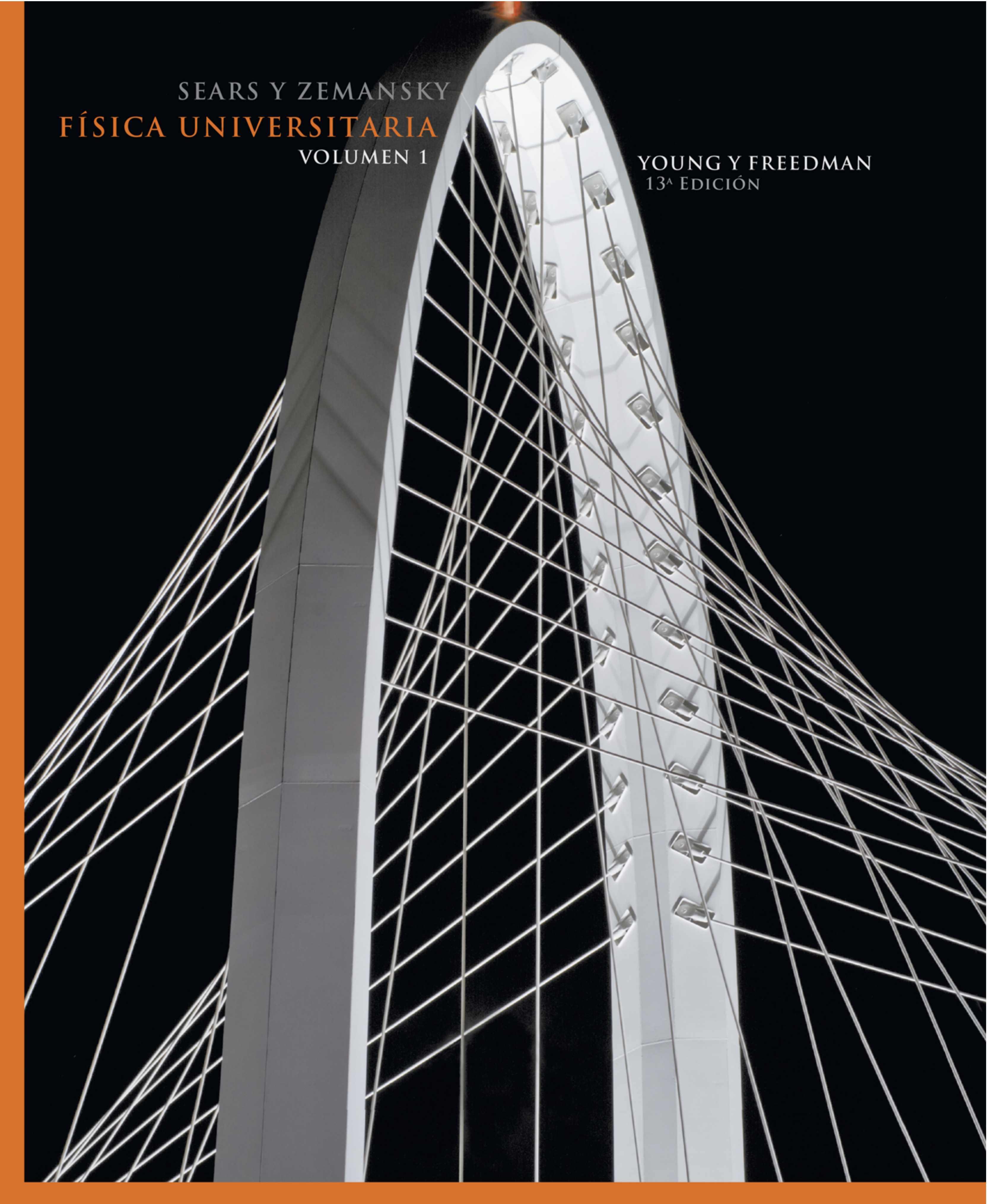


ALWAYS LEARNING

PEARSON

SIMULACIONES PhET (en inglés)

Disponible en el eText de Pearson y en el área de estudio de MasteringPhysics 

La edición en español consta de dos volúmenes. El volumen 1 incluye los capítulos 1 a 20; el volumen 2 incluye los capítulos 21 a 44.

Sección		Página
1.6	Estimation	10
1.7	Vector Addition	13
2.4	*Forces in 1 Dimension	47
2.4	*The Moving Man	49
2.5	Lunar Lander	52
3.2	Maze Game	76
3.3	*Projectile Motion	79
3.4	Ladybug Revolution, Motion in 2D	87
5.2	Lunar Lander	146
5.3	Forces in 1 Dimension, Friction, *The Ramp	149
6.2	*The Ramp	181
6.3	Molecular Motors, Stretching DNA	188
7.3	*The Ramp	222
7.5	*Energy Skate Park	229
9.3	Ladybug Revolution	286
10.6	Torque	326
12.3	Balloons & Buoyancy	380
13.2	Lunar Lander	406
13.4	My Solar System	412
14.2	Motion in 2D	443
14.3	*Masses & Springs	446
14.5	*Pendulum Lab	453
15.8	Fourier: Making Waves, Waves on a String	495
16.6	Sound, Wave Interference	529
17.6	States of Matter	566
17.7	The Greenhouse Effect	570
18.3	Balloons & Buoyancy, Friction, Gas Properties	599
18.6	States of Matter	612
21.2	Balloons and Static Electricity, John Travoltage	691
21.6	*Charges and Fields, Electric Field of Dreams, Electric Field Hockey	708
21.7	Microwaves	711
23.2	*Charges & Fields	761
24.5	Molecular Motors, Optical Tweezers and Applications, Stretching DNA	806
25.3	Resistance in a Wire	825
25.4	Battery Voltage, Signal Circuit	829
25.5	Battery-Resistor Circuit, *Circuit Construction Kit (AC+DC), *Circuit Construction Kit (DC Only), Ohm's Law	834
25.6	Conductivity	838
26.4	*Circuit Construction Kit (AC+DC), *Circuit Construction Kit (DC Only)	866
27.3	Magnet and Compass, Magnets and Electromagnets	891
28.5	Faraday's Electromagnetic Lab, Magnets and Electromagnets	933
29.2	Faraday's Electromagnetic Lab, Faraday's Law, Generator	962
31.3	*Circuit Construction Kit (AC+DC), Faraday's Electromagnetic Lab	1031
32.3	Radio Waves & Electromagnetic Fields	1061
32.5	Microwaves	1070
34.4	*Geometric Optics	1131
34.6	Color Vision	1142
35.2	*Wave Interference	1168
36.2	*Wave Interference	1192
38.1	Photoelectric Effect	1262
38.4	Fourier: Making Waves, Quantum Wave Interference	1274
39.2	Davisson-Germer: Electron Diffraction	1287
39.2	Rutherford Scattering	1294
39.3	Models of the Hydrogen Atom	1297
39.3	Neon Lights and Other Discharge Lamps	1304
39.4	Lasers	1307
39.5	Blackbody Spectrum, The Greenhouse Effect	1310
40.1	Fourier: Making Waves	1328
40.1	Quantum Tunneling and Wave Packets	1337
40.3	Double Wells & Covalent Bonds, Quantum Bound States	1343
40.4	Quantum Tunneling and Wave Packets	1347
41.5	Stern-Gerlach Experiment	1383
42.1	Double Wells and Covalent Bonds	1406
42.2	The Greenhouse Effect	1409
42.4	Band Structure, Conductivity	1417
42.6	Semiconductors, Conductivity	1422
43.1	Simplified MRI	1444
43.3	Alpha Decay	1450
43.7	Nuclear Fission	1464

*Indica un tutorial asociado disponible en la biblioteca de MasteringPhysics.

Actividades ActivPhysics OnLine™ (en inglés)

www.masteringphysics.com

1.1 Analyzing Motion Using Diagrams
1.2 Analyzing Motion Using Graphs
1.3 Predicting Motion from Graphs
1.4 Predicting Motion from Equations
1.5 Problem-Solving Strategies for Kinematics
1.6 Skier Races Downhill
1.7 Balloonist Drops Lemonade
1.8 Seat Belts Save Lives
1.9 Screeching to a Halt
1.10 Pole-Vaulter Lands
1.11 Car Starts, Then Stops
1.12 Solving Two-Vehicle Problems
1.13 Car Catches Truck
1.14 Avoiding a Rear-End Collision
2.1.1 Force Magnitudes
2.1.2 Skydiver
2.1.3 Tension Change
2.1.4 Sliding on an Incline
2.1.5 Car Race
2.2 Lifting a Crate
2.3 Lowering a Crate
2.4 Rocket Blasts Off
2.5 Truck Pulls Crate
2.6 Pushing a Crate Up a Wall
2.7 Skier Goes Down a Slope
2.8 Skier and Rope Tow
2.9 Pole-Vaulter Vaults
2.10 Truck Pulls Two Crates
2.11 Modified Atwood Machine
3.1 Solving Projectile Motion Problems
3.2 Two Balls Falling
3.3 Changing the *x*-Velocity
3.4 Projectile *x*- and *y*-Accelerations
3.5 Initial Velocity Components
3.6 Target Practice I
3.7 Target Practice II
4.1 Magnitude of Centripetal Acceleration
4.2 Circular Motion Problem Solving
4.3 Cart Goes Over Circular Path
4.4 Ball Swings on a String
4.5 Car Circles a Track
4.6 Satellites Orbit
5.1 Work Calculations
5.2 Upward-Moving Elevator Stops
5.3 Stopping a Downward-Moving Elevator
5.4 Inverse Bungee Jumper
5.5 Spring-Launched Bowler
5.6 Skier Speed
5.7 Modified Atwood Machine
6.1 Momentum and Energy Change
6.2 Collisions and Elasticity
6.3 Momentum Conservation and Collisions
6.4 Collision Problems
6.5 Car Collision: Two Dimensions
6.6 Saving an Astronaut
6.7 Explosion Problems
6.8 Skier and Cart
6.9 Pendulum Bashes Box
6.10 Pendulum Person-Projectile Bowling
7.1 Calculating Torques
7.2 A Tilted Beam: Torques and Equilibrium
7.3 Arm Levers
7.4 Two Painters on a Beam
7.5 Lecturing from a Beam
7.6 Rotational Inertia
7.7 Rotational Kinematics
7.8 Rotoride–Dynamics Approach
7.9 Falling Ladder
7.10 Woman and Flywheel Elevator–Dynamics Approach
7.11 Race Between a Block and a Disk
7.12 Woman and Flywheel Elevator–Energy Approach
7.13 Rotoride–Energy Approach
7.14 Ball Hits Bat
8.1 Characteristics of a Gas
8.2 Maxwell-Boltzmann Distribution–Conceptual Analysis
8.3 Maxwell-Boltzmann Distribution–Quantitative Analysis
8.4 State Variables and Ideal Gas Law
8.5 Work Done By a Gas
8.6 Heat, Internal Energy, and First Law of Thermodynamics
8.7 Heat Capacity
8.8 Isochoric Process
8.9 Isobaric Process
8.10 Isothermal Process
8.11 Adiabatic Process
8.12 Cyclic Process–Strategies
8.13 Cyclic Process–Problems
8.14 Carnot Cycle
9.1 Position Graphs and Equations
9.2 Describing Vibrational Motion
9.3 Vibrational Energy
9.4 Two Ways to Weigh Young Tarzan
9.5 Ape Drops Tarzan
9.6 Releasing a Vibrating Skier I
9.7 Releasing a Vibrating Skier II
9.8 One-and Two-Spring Vibrating Systems
9.9 Vibro-Ride
9.10 Pendulum Frequency
9.11 Risky Pendulum Walk
9.12 Physical Pendulum
10.1 Properties of Mechanical Waves
10.2 Speed of Waves on a String
10.3 Speed of Sound in a Gas
10.4 Standing Waves on Strings
10.5 Tuning a Stringed Instrument: Standing Waves
10.6 String Mass and Standing Waves
10.7 Beats and Beat Frequency
10.8 Doppler Effect: Conceptual Introduction
10.9 Doppler Effect: Problems
10.10 Complex Waves: Fourier Analysis
11.1 Electric Force: Coulomb's Law
11.2 Electric Force: Superposition Principle
11.3 Electric Force: Superposition Principle (Quantitative)
11.4 Electric Field: Point Charge
11.5 Electric Field Due to a Dipole
11.6 Electric Field: Problems
11.7 Electric Flux
11.8 Gauss's Law
11.9 Motion of a Charge in an Electric Field: Introduction
11.10 Motion in an Electric Field: Problems
11.11 Electric Potential: Qualitative Introduction
11.12 Electric Potential, Field, and Force
11.13 Electrical Potential Energy and Potential
12.1 DC Series Circuits (Qualitative)
12.2 DC Parallel Circuits
12.3 DC Circuit Puzzles
12.4 Using Ammeters and Voltmeters
12.5 Using Kirchhoff's Laws
12.6 Capacitance
12.7 Series and Parallel Capacitors
12.8 *RC* Circuit Time Constants
13.1 Magnetic Field of a Wire
13.2 Magnetic Field of a Loop
13.3 Magnetic Field of a Solenoid
13.4 Magnetic Force on a Particle
13.5 Magnetic Force on a Wire
13.6 Magnetic Torque on a Loop
13.7 Mass Spectrometer
13.8 Velocity Selector
13.9 Electromagnetic Induction
13.10 Motional emf
14.1 The *RL* Circuit
14.2 The *RLC* Oscillator
14.3 The Driven Oscillator
15.1 Reflection and Refraction
15.2 Total Internal Reflection
15.3 Refraction Applications
15.4 Plane Mirrors
15.5 Spherical Mirrors: Ray Diagrams
15.6 Spherical Mirror: The Mirror Equation
15.7 Spherical Mirror: Linear Magnification
15.8 Spherical Mirror: Problems
15.9 Thin-Lens Ray Diagrams
15.10 Converging Lens Problems
15.11 Diverging Lens Problems
15.12 Two-Lens Optical Systems
16.1 Two-Source Interference: Introduction
16.2 Two-Source Interference: Qualitative Questions
16.3 Two-Source Interference: Problems
16.4 The Grating: Introduction and Qualitative Questions
16.5 The Grating: Problems
16.6 Single-Slit Diffraction
16.7 Circular Hole Diffraction
16.8 Resolving Power
16.9 Polarization
17.1 Relativity of Time
17.2 Relativity of Length
17.3 Photoelectric Effect
17.4 Compton Scattering
17.5 Electron Interference
17.6 Uncertainty Principle
17.7 Wave Packets
18.1 The Bohr Model
18.2 Spectroscopy
18.3 The Laser
19.1 Particle Scattering
19.2 Nuclear Binding Energy
19.3 Fusion
19.4 Radioactivity
19.5 Particle Physics
20.1 Potential Energy Diagrams
20.2 Particle in a Box
20.3 Potential Wells
20.4 Potential Barriers

SEARS Y ZEMANSKY

FÍSICA UNIVERSITARIA

Volumen 1

Décimo tercera edición

HUGH D. YOUNG
CARNEGIE MELLON UNIVERSITY

ROGER A. FREEDMAN
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SANTA BARBARA

COLABORACIÓN DE
A. LEWIS FORD
TEXAS A&M UNIVERSITY

TRADUCCIÓN
Antonio Enríquez Brito
Traductor especialista en ciencias

REVISIÓN TÉCNICA
Gabriela Del Valle Díaz Muñoz
Luz María García Cruz
Héctor Luna García
Ricardo Paez Hernández
José Antonio Eduardo Roa Neri
Alberto Rubio Ponce
Departamento de Ciencias Básicas
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
MÉXICO

Antonio Gen Mora
Departamento de Física y Matemáticas
Universidad Iberoamericana
MÉXICO

Armando Tuñón Caballero
Departamento de Ciencias Naturales
Universidad Tecnológica de Panamá
PANAMÁ

Jorge Stephany
Departamento de Física
Universidad Simón Bolívar
VENEZUELA



PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

YOUNG, HUGH D. y FREEDMAN, ROGER A.

Física universitaria volumen 1
Décimo tercera edición

PEARSON, México, 2013

ISBN: 978-607-32-2124-5
Área: Ciencias

Formato: 21.5 × 27.5 cm Páginas: 744

Authorized translation from the English language edition, entitled *UNIVERSITY PHYSICS WITH MODERN PHYSICS 13th* Edition, by *HUGH D. YOUNG, ROGER A. FREEDMAN, contributing author A. LEWIS FORD*, published by Pearson Education, Inc., publishing as Addison-Wesley, Copyright © 2012. All rights reserved.
ISBN 9780321696861.

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, titulada *UNIVERSITY PHYSICS WITH MODERN PHYSICS 13a* edición por *HUGH D. YOUNG, ROGER A. FREEDMAN, con la colaboración de A. LEWIS FORD*, publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Addison-Wesley, Copyright © 2012. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español
Dirección general: Philip De la Vega
Dirección Educación Superior: Mario Contreras
Editor sponsor: Gabriela López Ballesteros
gabriela.lopezballesteros@pearson.com
Editor de desarrollo: Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de producción: Enrique Trejo Hernández
Gerencia Editorial Educación
Superior Latinoamérica: Marisa de Anta

DÉCIMO TERCERA EDICIÓN, 2013

D.R. © 2013 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5o piso
Col. Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN 978-607-32-2124-5
ISBN e-book 978-607-32-2125-2
ISBN e-chapter 978-607-32-2126-9

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 16 15 14 13



www.pearsonenespañol.com **isbn 978-607-32-2124-5**

CONTENIDO ABREVIADO

MECÁNICA

1 Unidades, cantidades físicas y vectores 1
2 Movimiento rectilíneo 35
3 Movimiento en dos o en tres dimensiones 69
4 Leyes del movimiento de Newton 104
5 Aplicación de las leyes de Newton 134
6 Trabajo y energía cinética 176
7 Energía potencial y conservación de la energía 207
8 Momento lineal, impulso y colisiones 241
9 Rotación de cuerpos rígidos 278
10 Dinámica del movimiento de rotación 308
11 Equilibrio y elasticidad 344
12 Mecánica de fluidos 373
13 Gravitación 402
14 Movimiento periódico 437

ONDAS/ACÚSTICA

15 Ondas mecánicas 472
16 Sonido y oído 509

TERMODINÁMICA

17 Temperatura y calor 551
18 Propiedades térmicas de la materia 590
19 Primera ley de la termodinámica 624
20 Segunda ley de la termodinámica 652

APÉNDICES

A El sistema internacional de unidades A-1
B Relaciones matemáticas útiles A-3
C El alfabeto griego A-4
D Tabla periódica de los elementos A-5
E Factores de conversión de unidades A-6
F Constantes numéricas A-7

Respuestas a los problemas con número impar A-9

Desarrollo de **habilidades**

El presente texto le permitirá desarrollar las habilidades básicas y avanzadas que le ayudarán a resolver una gran variedad de problemas de física.

Las estrategias para resolver problemas indican a los estudiantes cómo enfocar tipos específicos de problemas.

El **gran conjunto** de ejemplos del texto facilita a los estudiantes la exploración, con exhaustivo detalle, de la solución de problemas desafiantes.

Consistencia

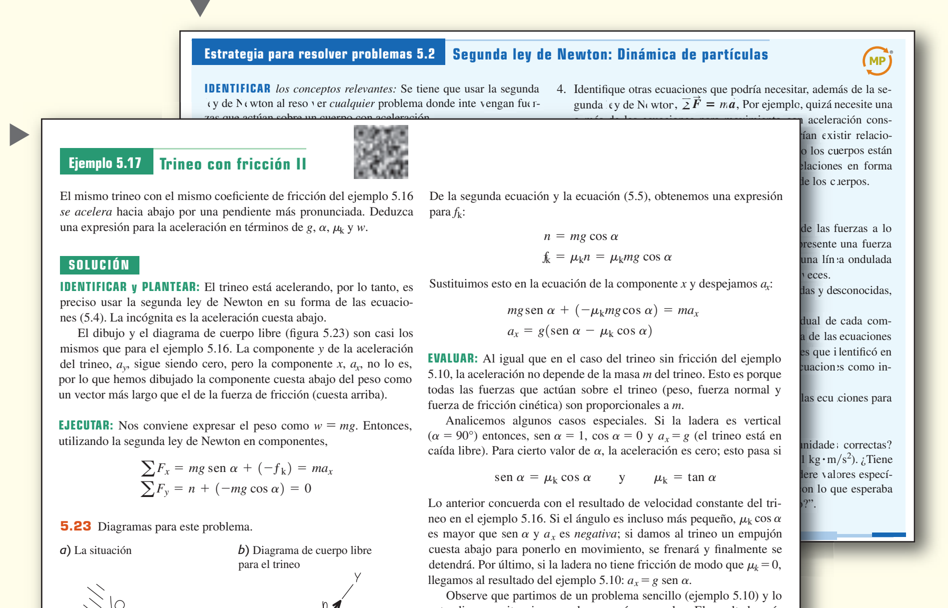
El formato de **Identificar/Plantear/Ejecutar/Evaluar**, aplicado en todos los ejemplos, fomenta en los estudiantes el hábito de solucionar de manera reflexiva los problemas, trascendiendo el aspecto puramente matemático.

Enfoque

Se revisaron **todos los ejemplos y las estrategias para resolver problemas** para hacerlos más concisos.

Ayuda visual

En la mayoría de los ejemplos se usa con frecuencia un **diagrama manuscrito** que muestra lo que el estudiante debe dibujar.



Estrategia para resolver problemas 5.2 Segunda ley de Newton: Dinámica de partículas

Ejemplo 5.17 Trineo con fricción II

El mismo trineo con el mismo coeficiente de fricción del ejemplo 5.16 *se acelera* hacia abajo por una pendiente más pronunciada. Deduzca una expresión para la aceleración en términos de g, α, μ_k y w.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El trineo está acelerando, por lo tanto, es preciso usar la segunda ley de Newton en su forma de las ecuaciones (5.4). La incógnita es la aceleración cuesta abajo.

El dibujo y el diagrama de cuerpo libre (figura 5.23) son casi los mismos que para el ejemplo 5.16. La componente y de la aceleración del trineo, a_y, sigue siendo cero, pero la componente x, a_x, no lo es, por lo que hemos dibujado la componente cuesta abajo del peso como un vector más largo que el de la fuerza de fricción (cuesta arriba).

EJECUTAR: Nos conviene expresar el peso como $w = mg$. Entonces, utilizando la segunda ley de Newton en componentes,

$$\sum F_x = mg \operatorname{sen}\alpha + (-f_k) = ma_x$$
$$\sum F_y = n + (-mg\cos\alpha) = 0$$

5.23 Diagramas para este problema.

a) La situación *b)* Diagrama de cuerpo libre para el trineo

De la segunda ecuación y la ecuación (5.5), obtenemos una expresión para f_k:

$$n = mg\cos\alpha$$
$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg\cos\alpha$$

Sustituimos esto en la ecuación de la componente x y despejamos a_x:

$$mg\operatorname{sen}\alpha + (-\mu_k mg\cos\alpha) = ma_x$$
$$a_x = g(\operatorname{sen}\alpha - \mu_k\cos\alpha)$$

EVALUAR: Al igual que en el caso del trineo sin fricción del ejemplo 5.10, la aceleración no depende de la masa m del trineo. Esto es porque todas las fuerzas que actúan sobre el trineo (peso, fuerza normal y fuerza de fricción cinética) son proporcionales a m.

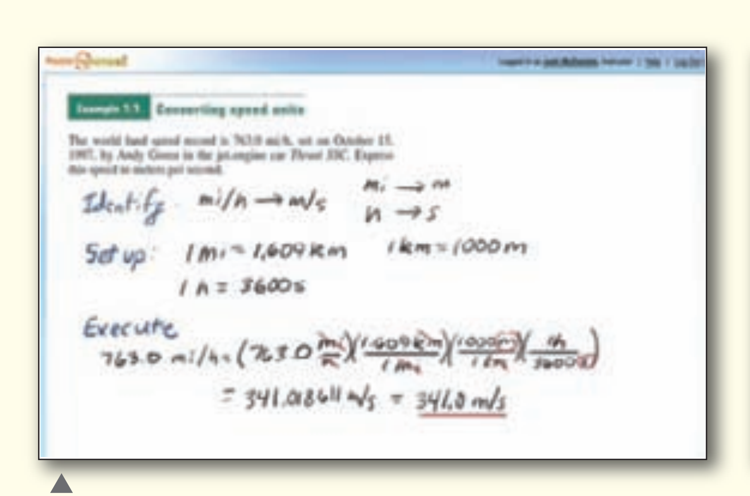
Analicemos algunos casos especiales. Si la ladera es vertical ($\alpha = 90°$) entonces, $\operatorname{sen}\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$ y $a_x = g$ (el trineo está en caída libre). Para cierto valor de α, la aceleración es cero; esto pasa si

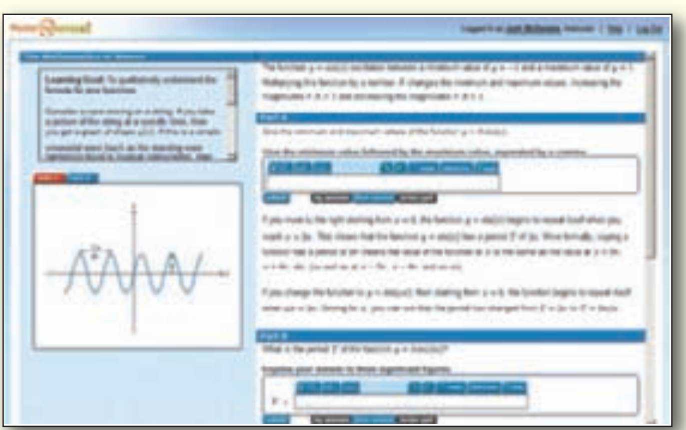
$$\operatorname{sen}\alpha = \mu_k\cos\alpha \quad \text{y} \quad \mu_k = \tan\alpha$$

Lo anterior concuerda con el resultado de velocidad constante del trineo en el ejemplo 5.16. Si el ángulo es incluso más pequeño, $\mu_k\cos\alpha$ es mayor que $\operatorname{sen}\alpha$ y a_x es *negativa*; si damos al trineo un empujón cuesta abajo para ponerlo en movimiento, se frenará y finalmente se detendrá. Por último, si la ladera no tiene fricción de modo que $\mu_k = 0$, llegamos al resultado del ejemplo 5.10: $a_x = g\operatorname{sen}\alpha$.

Observe que partimos de un problema sencillo (ejemplo 5.10) y lo extendimos a situaciones cada vez más generales. El resultado más general, el de este ejemplo, incluye *todos* los anteriores como casos especiales. No memorice este resultado, pero trate de entender cómo se obtuvo y qué significa.

Suponga ahora que se da al trineo un empujón inicial colina *arriba*. Ahora se invierte la dirección de la fuerza de fricción cinética, así que la aceleración es distinta del valor cuesta abajo. Resulta que la expresión para a_x es la misma que para la bajada, solo que el signo menos cambia a signo más. ¿Puede demostrarlo?





¡NUEVO! **Solución tutorial en video en inglés de todos los ejemplos** MasteringPhysics y el eText de Pearson presentan en video soluciones y explicaciones de los ejemplos del libro.

¡NUEVO! **Tutoriales de revisión de matemáticas** MasteringPhysics ofrece un amplio conjunto de tutoriales en inglés de revisión de tareas de matemáticas, que cubren temas de cálculo diferencial e integral, así como de álgebra y trigonometría.

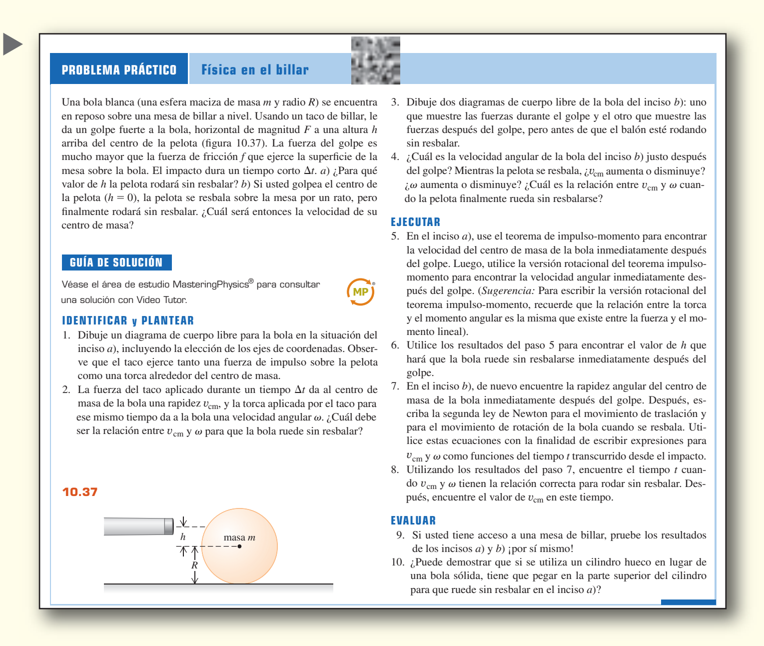
Desarrollo de **confianza**

Desarrolle confianza al resolver problemas mediante diversas opciones de práctica.

¡NUEVO! Problemas prácticos Al principio de cada conjunto de problemas, un problema práctico ayuda a los estudiantes a transitar, con facilidad y confianza, de los problemas rutinarios a otros con un alto grado de dificultad.

Cada problema práctico tiene una dificultad moderada e incluye varios conceptos que generalmente pertenecen a capítulos anteriores. En lugar de una solución completa, se presenta una guía de solución consistente en preguntas y sugerencias.

La solución completa se explica en **Video Tutor** (en inglés), incluido en el área de estudio de MasteringPhysics (en inglés) y en el eText de Pearson.


PROBLEMA PRÁCTICO Física en el billar

Una bola blanca (una esfera maciza de masa m y radio R) se encuentra en reposo sobre una mesa de billar a nivel. Usando un taco de billar, le da un golpe fuerte a la bola, horizontal de magnitud F a una altura h arriba del centro de la pelota (figura 10.37). La fuerza del golpe es mucho mayor que la fuerza de fricción f que ejerce la superficie de la mesa sobre la bola. El impacto dura un tiempo corto Δt. *a)* ¿Para qué valor de h la pelota rodará sin resbalar? *b)* Si usted golpea el centro de la pelota ($h = 0$), la pelota se resbala sobre la mesa por un rato, pero finalmente rodará sin resbalar. ¿Cuál será entonces la velocidad de su centro de masa?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.

IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la bola en la situación del inciso *a*), incluyendo la elección de los ejes de coordenadas. Observe que el taco ejerce tanto una fuerza de impulso sobre la pelota como una torca alrededor del centro de masa.
2. La fuerza del taco aplicado durante un tiempo Δt da al centro de masa de la bola una rapidez v_{cm}, y la torca aplicada por el taco para ese mismo tiempo da a la bola una velocidad angular ω. ¿Cuál debe ser la relación entre v_{cm} y ω para que la bola ruede sin resbalar?
3. Dibuje dos diagramas de cuerpo libre de la bola del inciso *b*): uno que muestre las fuerzas durante el golpe y el otro que muestre las fuerzas después del golpe, pero antes de que el balón esté rodando sin resbalar.
4. ¿Cuál es la velocidad angular de la bola del inciso *b*) justo después del golpe? Mientras la pelota se resbala, ¿v_{cm} aumenta o disminuye? ¿ω aumenta o disminuye? ¿Cuál es la relación entre v_{cm} y ω cuando la pelota finalmente rueda sin resbalarse?

EJECUTAR

5. En el inciso *a*), use el teorema de impulso-momento para encontrar la velocidad del centro de masa de la bola inmediatamente después del golpe. Luego, utilice la versión rotacional del teorema impulso-momento para encontrar la velocidad angular inmediatamente después del golpe. (*Sugerencia:* Para escribir la versión rotacional del teorema impulso-momento, recuerde que la relación entre la torca y el momento angular es la misma que existe entre la fuerza y el momento lineal).
6. Utilice los resultados del paso 5 para encontrar el valor de h que hará que la bola ruede sin resbalarse inmediatamente después del golpe.
7. En el inciso *b*), de nuevo encuentre la rapidez angular del centro de masa de la bola inmediatamente después del golpe. Después, escriba la segunda ley de Newton para el movimiento de traslación y para el movimiento de rotación de la bola cuando se resbala. Utilice estas ecuaciones con la finalidad de escribir expresiones para v_{cm} y ω como funciones del tiempo t transcurrido desde el impacto.
8. Utilizando los resultados del paso 7, encuentre el tiempo t cuando v_{cm} y ω tienen la relación correcta para rodar sin resbalar. Después, encuentre el valor de v_{cm} en este tiempo.

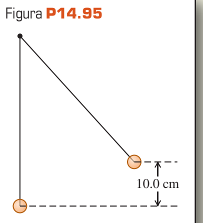
EVALUAR

9. Si usted tiene acceso a una mesa de billar, pruebe los resultados de los incisos *a*) y *b*) ¡por sí mismo!
10. ¿Puede demostrar que si se utiliza un cilindro hueco en lugar de una bola sólida, tiene que pegar en la parte superior del cilindro para que ruede sin resbalar en el inciso *a*)?

10.37

14.95 • **PA** En la figura P14.95, la esfera superior se suelta del reposo, choca contra la esfera inferior estacionaria y queda unida a ella. Ambas cuerdas tienen 50.0 cm de longitud. La esfera superior tiene una masa de 2.00 kg y está inicialmente 10.0 cm más alta que la inferior, cuya masa es de 3.00 kg. Calcule la frecuencia y el desplazamiento angular máximo del movimiento después del choque.

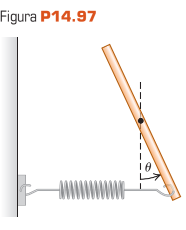
Figura **P14.95**



14.96 •• **PA** **BIO** *T. rex.* Modele la pierna del *T. rex* del ejemplo 14.10 (sección 14.6) como dos varillas uniformes con longitud de 1.55 m cada una y unidas rígidamente por un extremo. La varilla inferior tiene masa M, y la superior, $2M$. El objeto compuesto pivota en torno a la parte superior de la varilla de arriba. Calcule el periodo de oscilación de este objeto para oscilaciones de amplitud pequeña. Compare su resultado con el del ejemplo 14.10.

14.97 •• **CALC** Una varilla metálica delgada y uniforme con masa M pivota sin fricción sobre un eje que pasa por su punto medio y es perpendicular a la varilla. Un resorte horizontal con constante de fuerza k se conecta al extremo inferior de la varilla, y el otro extremo del resorte se fija a un soporte rígido. La varilla se desplaza un ángulo pequeño Θ con respecto a la vertical (figura P14.97) y se suelta. Demuestre que se mueve en MAS angular y calcule su periodo. (*Sugerencia:* Suponga que Θ es suficientemente pequeño para que las aproximaciones sen $\Theta \approx \Theta$ y $\cos \Theta \approx 1$ sean válidas. El movimiento es armónico simple si $d^2\theta/dt^2 = -\omega^2\theta$ y el periodo es entonces $T = 2\pi/\omega$).

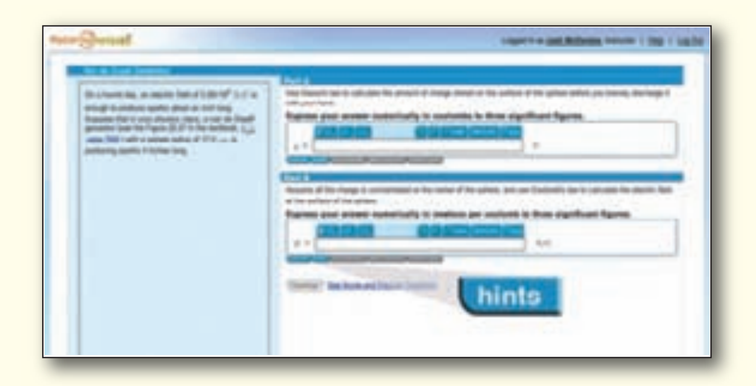
Figura **P14.97**



A petición de los profesores, los **Conjuntos de problemas** incluyen ahora un mayor número de problemas relacionados con el campo de la biomédica (BIO), problemas más difíciles que requieren de cálculo (CALC) y más problemas relacionados con material de capítulos anteriores (PA).

Aproximadamente el 20% de los problemas son nuevos o modificados. Estas revisiones se efectuaron con base en datos sobre el rendimiento de los estudiantes en Estados Unidos, obtenidos con MasteringPhysics.

El nivel de dificultad se indica mediante un sistema de clasificación de tres puntos, basado en información obtenida de MasteringPhysics.



¡NUEVO! Problemas de fin de capítulo mejorados en MasteringPhysics (en inglés) Los problemas seleccionados de fin de capítulo ofrecen ahora apoyo adicional, como sugerencias en las estrategias de solución de problemas, repaso y práctica de matemáticas, y vínculos con el texto. Estos nuevos problemas puente relacionan los tutoriales guiados (en inglés) y los problemas tradicionales que se asignan como tarea.

Física **en la vida diaria**

Profundice el conocimiento de la física estableciendo conexiones con el mundo real.

Aplicación Los tendones son resortes no ideales
Los músculos ejercen fuerzas a través de los tendones que los sujetan a los huesos. Un tendón está formado por fibras largas, rígidas y elásticas de colágeno. La figura muestra cómo los tendones de las patas traseras de un ualabí (un canguro pequeño) se estiran como respuesta a la fuerza aplicada. El tendón no presenta el sencillo comportamiento rectilíneo de un resorte ideal, de modo que el trabajo realizado se tiene que calcular por integración [ecuación (6.7)]. Observe que el tendón ejerce menos fuerza mientras se relaja que cuando se alarga. Como resultado, el tendón relajado solo efectúa aproximadamente el 93% del trabajo realizado para estirarlo.



Aplicación Momento de inercia del ala de un ave
Cuando un ave aletea, hace girar sus alas arriba y abajo alrededor del hombro. Un colibrí tiene alas pequeñas con un momento de inercia pequeño, de modo que puede hacer que sus alas se muevan rápidamente (hasta 70 aleteos por segundo). En contraste, el cóndor de Los Andes (*Vultur gryphus*) tiene alas muy grandes que son difíciles de mover debido a su gran momento de inercia. Los cóndores efectúan un aleteo por segundo aproximadamente en el despegue, pero la mayoría de las veces prefieren planear mientras mantienen sus alas fijas.





Aplicación Escuchar un flujo turbulento
El flujo normal de sangre en la aorta humana es laminar, pero una leve perturbación como una patología cardiaca puede hacer que el flujo se vuelva turbulento. La turbulencia hace ruido; por eso, una técnica diagnóstica útil consiste en escuchar el flujo de sangre con un estetoscopio.



¡NUEVO! Aplicaciones de la física ▶
A lo largo del texto se incluyen fotografías que muestran la aplicación de la física en situaciones reales, con especial énfasis en aplicaciones biomédicas y de interés general.



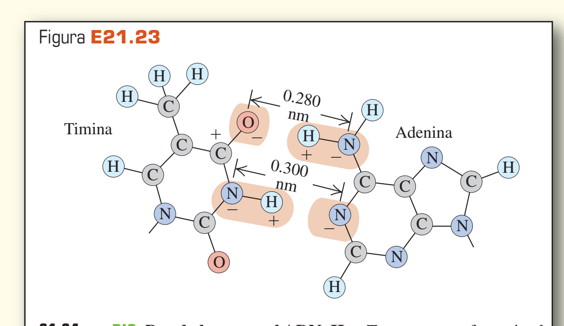
◀ **¡NUEVO! Simulaciones PhET y tutoriales (en inglés)**
Dieciséis tutoriales PhET facilitan al estudiante realizar conexiones entre los fenómenos de la vida real y la física subyacente. Se presentan 76 simulaciones PhET en el área de estudio de MasteringPhysics y en el eText de Pearson.

También está disponible el repertorio completo de aplicaciones de ActivPhysics (en inglés) y los tutoriales basados en simulaciones.

¡NUEVO! Demostraciones y tutoriales en video en inglés
Videos de demostración de "ensayo y error" de conceptos clave de física despiertan el interés del estudiante al solicitarle que realice un pronóstico antes de ver el resultado. Estos videos están disponibles en el área de estudio de MasteringPhysics (en inglés) y en el eText de Pearson. Un conjunto de tutoriales basados en estos videos animan a los estudiantes a resolver problemas relacionados.

Problemas de fin de capítulo basados en el campo de la biomédica ▶
Para satisfacción de los estudiantes de las ciencias médicas, el texto agrega un número considerable de problemas basados en situaciones biológicas y biomédicas.

Figura **E21.23**



21.24 •• BIO **Par de bases en el ADN, II.** Tome como referencia el ejercicio 21.23. La figura E21.24 muestra el enlace de las moléculas de citosina y guanina. Las distancias entre O—H y H—N son de 0.110 nm. En este caso, suponga que el enlace se debe solo a las fuerzas a lo largo de las combinaciones O—H—O, N—H—N y O—H—N, y suponga también que estas tres combinaciones son paralelas entre sí. Calcule la fuerza *neta* que ejerce la citosina sobre la guanina debido a las tres combinaciones anteriores. ¿Esta fuerza es de atracción o de repulsión?

Obtenga la diferencia con **MasteringPhysics®**

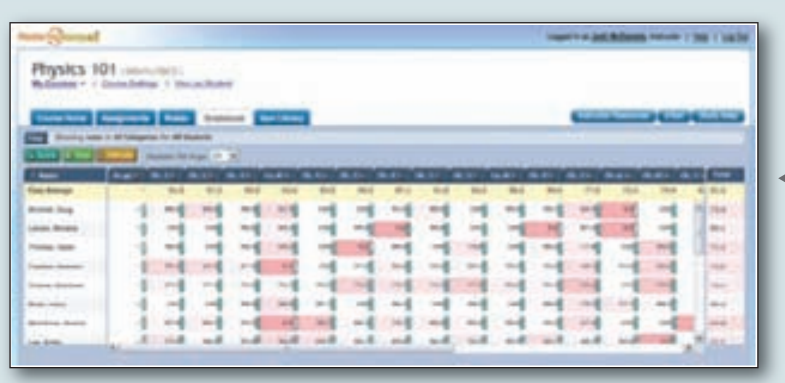


www.masteringphysics.com

MasteringPhysics (en inglés) es el sistema tutorial científico, de tareas y de evaluación más efectivo y utilizado, disponible en línea.

¡NUEVO! Tareas prediseñadas

En todos los capítulos del libro, MasteringPhysics ahora incluye tareas prediseñadas que cubren el material con una combinación probada de tutoriales y problemas de fin de capítulo con dificultad regulada. Los profesores pueden usar estas tareas tal como se presentan, o bien, tomarlas como el punto inicial de una modificación.



Libro de calificaciones

- Todas las tareas se califican automáticamente.
- El sombreado rojo identifica a los estudiantes vulnerables y las tareas con alto grado de dificultad.



Aprovechamiento del grupo en las tareas

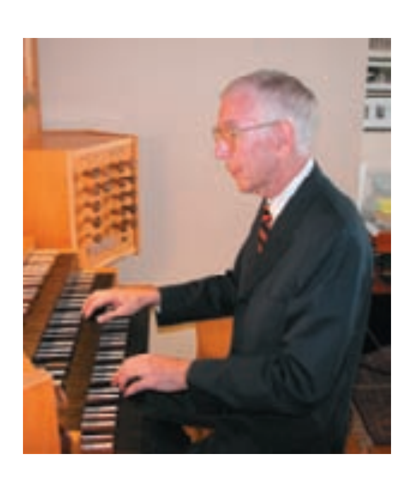
Haga clic sobre un problema para conocer el paso que se dificulta más a sus alumnos, e incluso las respuestas erróneas más comunes. Compare los resultados de cada etapa con el promedio nacional en Estados Unidos o con su grupo anterior.



Diagnóstico con calificaciones

Esta pantalla le ofrece un diagnóstico semanal en la modalidad de su preferencia. Con tan solo dar un solo clic, la gráfica presenta un resumen de los problemas más difíciles, los estudiantes vulnerables, la distribución de calificaciones e incluso de las mejoras en las calificaciones durante el curso.

SOBRE LOS AUTORES



Hugh D. Young es profesor emérito de física en la Universidad Carnegie Mellon. Cursó sus estudios de licenciatura y posgrado en esa institución, donde obtuvo su doctorado en teoría de partículas fundamentales bajo la dirección de Richard Cutkosky, hacia el final de la carrera académica de este último. Se unió al equipo docente de Carnegie Mellon en 1956 y se retiró en 2004. También fue profesor visitante en la Universidad de California en Berkeley.

La carrera del profesor Young se ha centrado por completo en la docencia en el nivel de licenciatura. Ha escrito varios libros de texto para ese nivel, y en 1973 se convirtió en coautor de los bien conocidos libros de introducción a la física de Francis Sears y Mark Zemansky. Además de su colaboración en el libro *Física universitaria* de Sears y Zemansky, es autor del texto de *College Physics*, de Sears y Zemansky.

El profesor Young cursó un grado de bachiller como ejecutante de órgano en Carnegie Mellon en 1972 y, durante varios años, ha sido organista asociado en la Catedral de San Pablo, en Pittsburgh, ciudad en la que ofrece numerosos recitales. Durante el verano viaja mucho con su esposa Alice, en especial al extranjero y a la zona desértica de los cañones del sur de Utah.



Roger A. Freedman es profesor de física en la Universidad de California, en Santa Bárbara (UCSB). El doctor Freedman estudió su licenciatura en los campus de San Diego y Los Ángeles, y realizó su investigación doctoral en teoría nuclear en la Universidad de Stanford bajo la dirección del profesor J. Dirk Walecka. Se incorporó al cuerpo docente de la UCSB en 1981, después de haber sido durante tres años profesor e investigador en la Universidad de Washington.

En la UCSB el doctor Freedman ha impartido cátedra tanto en el Departamento de Física como en la Escuela de Estudios Creativos, un organismo que da cabida a los estudiantes universitarios altamente dotados y motivados. Ha publicado artículos sobre física nuclear, física de partículas elementales y física de láseres. En los años recientes ha trabajado para hacer de las conferencias de física una experiencia más interactiva a través de sistemas de respuestas en el salón de clases.

Durante la década de 1970, el doctor Freedman trabajó como rotulista de un libro cómico y colaboró durante algunos años en la organización del San Diego Comic-Con (actualmente la convención más grande de la cultura popular). Ahora, cuando no está en el aula o trabajando afanosamente ante una computadora, el doctor Freedman se dedica a volar (tiene licencia de piloto comercial) o conducir, en compañía de su esposa Caroline, su automóvil convertible Nash Metropolitan, modelo 1960.

A. Lewis Ford es profesor de física en la Universidad A&M de Texas. Cursó la licenciatura en Rice University en 1968, y obtuvo un doctorado en física química de la Universidad de Texas, en Austin, en 1972. Después de cursar un año de posdoctorado en la Universidad de Harvard, se unió en 1973 a la Universidad A&M de Texas como profesor de física, donde ha permanecido desde entonces. El área de investigación del profesor Ford es la física atómica teórica, con especialidad en colisiones atómicas. En la Universidad A&M de Texas ha impartido una amplia variedad de cursos de licenciatura y posgrado, pero sobre todo de introducción a la física.

AL ESTUDIANTE

CÓMO TRIUNFAR EN FÍSICA SI SE INTENTA DE VERDAD

Mark Hollabaugh *Normandale Community College*

La física estudia lo grande y lo pequeño, lo viejo y lo nuevo. Es una disciplina que se ocupa de una gran parte del mundo que nos rodea, desde los átomos y las galaxias, hasta los circuitos eléctricos y la aerodinámica. Es probable que el lector esté siguiendo este curso de introducción a la física, basado en el cálculo, porque lo requiera para materias posteriores que planee tomar en su carrera de ciencias o ingeniería. Su profesor desea que usted aprenda física y goce la experiencia; además, tendrá mucho interés en ayudarlo a aprender esta fascinante disciplina. Por ello, su profesor eligió el presente libro para el curso. También por esa razón, los doctores Young y Freedman me pidieron que escribiera esta sección introductoria. ¡Queremos que triunfe!

El objetivo de esta sección de *Física universitaria* es darle algunas ideas que lo ayuden en su aprendizaje. Se harán sugerencias específicas de cómo utilizar el libro después de realizar un análisis breve de los hábitos generales y de las estrategias de estudio.

Preparación para este curso

Si en el bachillerato estudió física, es probable que aprenda los conceptos más rápido que quienes no lo hicieron, porque estará familiarizado con el lenguaje de esta disciplina. Asimismo, si tiene estudios avanzados de matemáticas, comprenderá con mayor rapidez los aspectos matemáticos de la física. Aun si tuviera un nivel adecuado de matemáticas, encontrará útiles algunos libros como el de Arnold D. Pickar, *Preparing for General Physics: Math Skill Drills and Other Useful Help (Calculus Version)*. Es posible que su profesor asigne tareas de este repaso de matemáticas como auxilio para su aprendizaje.

Aprender a aprender

Cada uno de nosotros tiene un estilo diferente de aprendizaje y un medio preferido para hacerlo. Entender cuál es el suyo lo ayudará a centrase en los aspectos de la física que tal vez le planteen dificultades, y a emplear los componentes del curso que lo ayudarán a vencerlas. Sin duda, querrá dedicar más tiempo a aquellos aspectos que le impliquen más problemas. Si usted aprende escuchando, las conferencias serán muy importantes. Si aprende con explicaciones, entonces será de gran ayuda trabajar con otros estudiantes. Si le resulta difícil resolver problemas, dedique más tiempo a aprender cómo hacerlo. Asimismo, es importante desarrollar buenos hábitos de estudio. Quizá lo más importante que podrá hacer por usted mismo sea programar de manera regular el tiempo adecuado en un ambiente libre de distracciones.

Responda las siguientes preguntas para usted mismo:

- ¿Soy capaz de utilizar los conceptos matemáticos fundamentales del álgebra, la geometría y la trigonometría? (Si no es así, planee un programa de repaso con ayuda de su profesor).
- En cursos similares, ¿qué actividad me ha dado más problemas? (Dedique más tiempo a ello). ¿Qué ha sido lo más fácil para mí? (Inicie con esto; le ayudará a ganar confianza).

- ¿Entiendo mejor el material si leo el libro antes o después de la clase? (Quizás aprenda mejor si revisa rápidamente el material, asiste a clase y luego lee con más profundidad).
- ¿Dedico el tiempo adecuado a estudiar física? (Una regla práctica para una clase de este tipo es dedicar, en promedio, 2.5 horas de estudio fuera del aula por cada hora de clase que reciba. Esto significa que para un curso con cinco horas de clase programadas a la semana, debe destinar de 10 a 15 horas semanales al estudio de la física).
- ¿Estudio física diariamente? (¡Distribuya esas 10 a 15 horas a lo largo de toda la semana!). ¿A qué hora estoy en mi mejor momento para estudiar física? (Elija un horario específico del día y respételo).
- ¿Trabajo en un lugar tranquilo en el que pueda mantener mi concentración? (Las distracciones romperán su rutina y harán que pase por alto aspectos importantes).

Trabajar con otros

Es raro que los científicos e ingenieros trabajen aislados unos de otros; más bien, trabajan de forma cooperativa. Aprenderá más física y el proceso será más ameno si trabaja con otros estudiantes. Tal vez algunos profesores formalicen el uso del aprendizaje cooperativo o faciliten la formación de grupos de estudio. Es posible que desee constituir su propio grupo informal de estudio con miembros de su clase que vivan en su vecindario o residencia estudiantil. Si tiene acceso al correo electrónico, úselo para estar en contacto con los demás. Su grupo de estudio será un excelente recurso cuando se prepare para los exámenes.

Las clases y los apuntes

Un factor importante de cualquier curso universitario es el de las clases. Esto es especialmente cierto en física, ya que será frecuente que su profesor realice demostraciones de principios físicos, simulaciones por computadora o que proyecte videos. Todas estas son actividades de aprendizaje que lo ayudarán a comprender los principios básicos de la física. No falte a clases, y si lo hace por alguna razón especial, pida a un amigo o miembro de su grupo de estudio que le dé los apuntes y le diga lo que pasó.

En clase, tome notas rápidas y entre a los detalles después. Es muy difícil tomar notas palabra por palabra, de modo que solo escriba las ideas clave. Si su profesor utiliza un diagrama del libro de texto, deje espacio en el cuaderno para este y agréguelo más tarde. Después de clase, complete sus apuntes con la cobertura de cualquier faltante u omisión, anotando los conceptos que necesite estudiar posteriormente. Haga referencias a las páginas del libro de texto, número de ecuación o de sección.

Asegúrese de hacer preguntas en clase, o hable con su profesor durante sus horas de asesoría. Recuerde que la única pregunta "fuera de lugar" es la que no se hace. En su universidad quizás haya asistentes de profesores o tutores para ayudarlo con las dificultades que encuentre.

Exámenes

Presentar un examen es estresante. Pero si se preparó de manera adecuada y descansó bien, la tensión será menor. La preparación para un examen es un proceso continuo; comienza en el momento en que termina el último examen. Debe analizar su examen inmediatamente y comprender los errores que haya cometido. Si resolvió un problema y cometió errores importantes, pruebe lo siguiente: tome una hoja de papel y divídala en dos partes con una línea de arriba hacia abajo. En una columna escriba la solución adecuada del problema, y en la otra escriba lo que hizo y por qué, si es que lo sabe, y la razón por la que su propuesta de solución fue incorrecta. Si no está seguro de por qué cometió el error o de la forma de evitarlo, hable con su profesor. La física se construye de manera continua sobre ideas fundamentales y es importante corregir de inmediato cualquier mal entendido. Cuidado: si se prepara en el último minuto para un examen, no retendrá en forma adecuada los conceptos para el siguiente.

AL PROFESOR

PREFACIO

Este libro es el producto de más de seis décadas de liderazgo e innovación en la enseñanza de la física. Cuando en 1949 se publicó la primera edición de *Física universitaria*, de Francis W. Sears y Mark W. Zemansky, su énfasis en los principios fundamentales de la física y la forma de aplicarlos fue un aspecto revolucionario entre los libros de la disciplina cuya base era el cálculo. El éxito de *Física universitaria* en generaciones de varios millones de estudiantes y profesores de todo el mundo da testimonio del mérito de este enfoque y de las muchas innovaciones posteriores.

Al preparar esta decimotercera edición, mejoramos y desarrollamos aún más el texto de *Física universitaria* para asimilar las mejores ideas de la investigación educativa con respecto a la enseñanza basada en la solución de problemas y la pedagogía visual y conceptual; este libro es el primero que incluye problemas mejorados en forma sistemática, y en utilizar el sistema de tareas y enseñanza en línea de mayor uso en el mundo, además de estar probado pedagógicamente.

Lo nuevo en esta edición

- Incluidos en cada capítulo, los **Problemas prácticos** constituyen una transición entre los ejemplos conceptuales y los problemas más desafiantes del final del capítulo. Cada problema práctico posee cierta dificultad y varios conceptos que a menudo incorporan ideas de capítulos anteriores. En lugar de una solución individual, se proporciona un formato como **Guía de solución** que consiste en preguntas y sugerencias que mejoran la capacidad de los estudiantes para plantear y resolver problemas desafiantes con seguridad.
- **Se revisaron todos los ejemplos y estrategias de solución de problemas** para mejorar la concisión y claridad para los estudiantes de la actualidad.
- El **núcleo de los capítulos de física moderna** (capítulos 38 a 41, del volumen 2) se revisó minuciosamente para comunicar una idea más precisa, en lugar del enfoque histórico del material. Los capítulos 42 a 44 también se revisaron de manera significativa.
- **El capítulo de mecánica de fluidos ahora precede a los capítulos de gravitación y movimiento periódico**, de modo que este último aparece inmediatamente antes del capítulo de ondas mecánicas.
- A lo largo del texto, se incluyen **aplicaciones adicionales de ciencias de la vida**, la mayoría en forma de fotografías al margen, con subtítulos explicativos, para ayudar a los estudiantes a ver cómo la física está conectada con los avances y descubrimientos en las ciencias de la vida.
- El **texto se ha simplificado** para manejar un lenguaje más conciso y enfocado.
- **Con los datos de MasteringPhysics, los cambios al contenido de final de capítulo** incluyen lo siguiente:
  - **Del 15 al 20% de los problemas son nuevos.**
  - Se incrementó el número y se elevó el nivel de los **problemas que requieren cálculo**.
  - La mayoría de los capítulos incluyen de **cinco a siete problemas relacionados con ciencias de la vida.**
  - Se incrementó el número de **problemas acumulativos** (aquellos que incorporan conceptos de capítulos anteriores).
- **Más de 70 simulaciones PhET en inglés** se vinculan con el eText de Pearson y se presentan en el sitio web Study Area de MasteringPhysics (con íconos en el texto impreso). Estas poderosas simulaciones permiten al estudiante interactuar productivamente con los conceptos de física que está aprendiendo.
- **Los videos tutoriales en inglés relacionan el contenido clave del texto con la vida cotidiana:**
  - **Docenas de videos tienen demostraciones de "pausa y pronóstico" de conceptos claves de física** e incorporan una evaluación conforme el estudiante progresa, para comprometerlo activamente en la comprensión de las ideas conceptuales clave que subyacen en los principios físicos.

- **Todos los ejemplos del libro se acompañan de una solución en video**, que lleva al estudiante a través del proceso de solución de problemas, ofreciendo un asistente de enseñanza virtual las 24 horas.
- **Hay acceso directo a todos estos videos a través de enlaces dentro de Pearson eText.** Muchos aparecen también en el área de estudio dentro de MasteringPhysics.

Características clave de *Física universitaria*

- **Conjuntos de problemas** profundos y extensos cubren un amplio rango de dificultad y ayudan tanto a comprender la física como a desarrollar habilidad para resolver problemas. Muchos problemas se basan en situaciones complejas de la vida real.
- Este texto ofrece un mayor número de **Ejemplos** que cualquier otro texto del tema basado en el cálculo, lo que permite explorar la solución de problemas desafiantes que no se tratan en otros libros.
- Se aplica un **enfoque de solución de problemas** (consistente en **identificar**, **plantear, ejecutar** y **evaluar**), basado en investigación. Dicho enfoque no solo se aplica en cada problema, sino también en las Estrategias de solución de problemas y en los Manuales de soluciones y las Guías de estudio del estudiante y del profesor. Este enfoque sistemático enseña a los estudiantes a resolver problemas a partir de la reflexión y no solo aplicando las matemáticas de manera directa.
- Las **Estrategias de solución de problemas** preparan a los estudiantes para enfocar tipos específicos de problemas.
- Las **figuras** usan un estilo gráfico simplificado, enfocado en la situación física, e incorporan **notas explicativas**. Ambas técnicas han demostrado tener un efecto muy positivo en el aprendizaje.
- Las figuras que ilustran las soluciones de los ejemplos a menudo tienen la forma de **dibujos a lápiz** en blanco y negro, para simular lo que un estudiante dibujaría al resolver un problema.
- Los párrafos que aparecen bajo el título de **Cuidado** se enfocan en los errores comunes y las áreas problemáticas que enfrentan los estudiantes.
- Las preguntas bajo el título **Evalúe su comprensión** al final de una sección permiten a los estudiantes verificar su conocimiento del tema y usar un formato de clasificación de opciones múltiples para identificar errores comunes.
- Los **resúmenes visuales** al final de cada capítulo presentan las ideas principales en palabras, ecuaciones y diagramas breves, los cuales ayudan a los estudiantes a repasar más efectivamente.

Material complementario para el profesor (en inglés)

Nota: *Por conveniencia, todos los siguientes materiales para el profesor se pueden descargar del área de instructor (Instructor Area), por medio de la barra de navegación de la izquierda de MasteringPhysics (www.masteringphysics.com).*

Los **manuales de soluciones para el profesor**, que elaboraron A. Lewis Ford (Texas A&M University) y Wayne Anderson, contienen soluciones completas y detalladas de todos los problemas de final de capítulo. Todas siguen de manera consistente el método de identificar, plantear, ejecutar y evaluar que se utiliza en el libro. Descárguelas desde MasteringPhysics Instructor Area o desde el Instructor Resource Center (www.pearsonhighered.com/irc).

MasteringPhysics® (www.masteringphysics.com) es el sistema de tareas y enseñanza de física más avanzado, eficaz y de mayor uso en el mundo. Con ocho años de desarrollo, pone a disposición de los profesores un repertorio de problemas de final de capítulo probados extensivamente, así como tutoriales enriquecedores, integrados por varios pasos, que incorporan varios tipos de respuestas, retroalimentación sobre los errores y ayuda individualizada (lo que comprende sugerencias o problemas más sencillos, si así se solicita); todo ello bajo el auspicio de la base de datos más grande del mundo de solución de problemas. Investigación publicada patrocinada por NSF y varios estudios subsiguientes revelan que MasteringPhysics tiene resultados contunden-

tes de enseñanza. MasteringPhysics permite que los profesores elaboren con rapidez una amplia variedad de tareas con el grado de dificultad y la duración adecuados; además, les brinda herramientas eficientes para que analicen las tendencias de la clase y el trabajo de cualquier estudiante con un detalle sin precedente.

MasteringPhysics ofrece retroalimentación instantánea e individualizada y guía para más de 100,000 estudiantes diariamente. Un gran número de herramientas y un sólido soporte hacen a MasteringPhysics rápido y fácil de aprender para profesores y estudiantes. Pruebas extensivas en los salones de clase muestran que, al final de su curso, ocho de cada nueve estudiantes recomiendan MasteringPhysics como el modo preferido para estudiar y hacer tareas.

MasteringPhysics facilita a los profesores:

- Elaborar rápidamente tareas que combinen problemas normales de fin de capítulo y tutoría (mediante problemas tutoriales de varios pasos que ofrecen retroalimentación sobre los errores del usuario, así como problemas más sencillos cuando así se solicite).
- Ampliar las tareas para incluir el rango máximo de actividades disponibles calificadas automáticamente, que van desde problemas numéricos con valores al azar, respuestas algebraicas y dibujos elaborados a mano.
- Elegir un amplio rango de problemas probados a nivel nacional (en Estados Unidos), que brindan estimaciones precisas de dificultad y tiempo de terminación.
- Después de concluida una tarea, se podrán identificar rápidamente no solo los problemas más difíciles para los estudiantes, sino también los tipos de problemas individuales donde los estudiantes tuvieron más dificultad.
- Comparar los resultados de la clase con el promedio mundial del sistema para cada problema asignado, con la finalidad de identificar los temas que se deben incluir en la enseñanza justo a tiempo.
- Verificar a detalle el trabajo de un estudiante particular, incluyendo el tiempo dedicado a cada problema, respuestas incorrectas en cada paso, el tipo de ayuda solicitada y cuántos problemas de práctica realizó.

ActivPhysics OnLine™ (al cual se accede a través del área de estudio dentro de www.masteringphysics.com) ofrece la biblioteca más completa integrada por más de 420 applets probados y actualizados para entrega en la web usando las tecnologías más avanzadas en línea. Además, ofrece un conjunto de applets basados en tutoriales desarrollados por los pioneros de la educación Alan Van Heuvelen y Paul d'Alessandris. Los íconos al margen a través del texto dirigen a los estudiantes a ejercicios específicos para complementar el análisis del libro.

Los ejercicios en línea están diseñados para animar a los estudiantes a confrontar errores, indagar las razones cualitativas de los procesos físicos, experimentar cuantitativamente y aprender a pensar críticamente. El tan aclamado conjunto de ejercicios ActivPhysics OnLine ayuda a los estudiantes a trabajar conceptos complejos y a comprenderlos con más claridad.

El **Banco de pruebas** incluye más de 2,000 problemas de alta calidad, que comprenden respuestas de opción múltiple y de verdadero/falso; también se incluyen preguntas normales de acuerdo con el tipo de tarea. Los archivos de pruebas están disponibles tanto en formato Word como en TestGen (un programa fácil de usar, que permite crear y editar concursos y exámenes). Este recurso se descarga de MasteringPhysics Instructor Area o del Instructor Resource Center (www.pearsonhighered.com/irc).

Material complementario para el estudiante (en inglés)



MasteringPhysics® (www.masteringphysics.com) es el sistema de tareas, enseñanza y evaluación basado en años de investigación sobre cómo resuelven problemas de física los estudiantes y acerca de las áreas donde requieren ayuda. Los estudios revelan que los alumnos que recurren a MasteringPhysics™ mejoran de manera significativa sus calificaciones, en comparación con los que realizan sus tareas de la forma tradicional. MasteringPhysics™ logra esto al dar a los estudiantes retroalimentación instantánea y específica sobre sus respuestas erróneas, proponer a solicitud de ellos problemas más

sencillos cuando no logran avanzar, y asignar una calificación parcial. Este sistema socrático individualizado de tutoría, disponible las 24 horas del día y los siete días de la semana, es recomendado por nueve de cada 10 alumnos a sus compañeros como el modo más eficaz de aprovechar el tiempo para estudiar. Requiere la compra de un código de acceso.

eText de Pearson está disponible a través de MasteringPhysics. Este recurso permite a los estudiantes el acceso al texto dondequiera que haya una conexión a Internet. El eText de Pearson comprende el texto completo, incluyendo figuras que se pueden agrandar para mejorar la claridad. El eText permite a los estudiantes consultar definiciones y términos para ayudarse con el vocabulario y la lectura del material. Los estudiantes también podrán tomar notas en el eText usando la opción de anotación en la parte superior de cada página.

Servicios de enseñanza de Pearson (www.pearsontutorservices.com). Cada suscripción a MasteringPhysics permite al estudiante tener acceso a los servicios de tutoría de Pearson, generados por Smarthinking, Inc. Con su ID y su clave de MasteringPhysics, los estudiantes se comunican con profesores altamente calificados que ofrecen tutoría adicional interactiva en línea sobre conceptos importantes de física. Se aplican algunas restricciones; es una oferta sujeta a cambios.



ActivPhysics OnLine™ (al cual se accede a través del área de estudio dentro de www.masteringphysics.com) ofrece a los estudiantes un conjunto de tutoriales con base en applets (véase párrafos atrás).

Agradecimientos a la edición en español

Pearson Educación agradece a los profesores usuarios de esta obra, y a los centros de estudio, por su apoyo y retroalimentación, elemento fundamental para esta nueva edición de *Física universitaria* de Sears y Zemansky.

Argentina

Instituto Tecnológico de Buenos Aires
Jorge O. Ratto

Universidad Católica Argentina
Facultad de Ciencias Agrarias – Ciudad Autónoma de Buenos Aires
Roberto Fratantoni
Facultad de Ingeniería – Ciudad Autónoma de Buenos Aires
Jorge Clot

Universidad de Buenos Aires
María Cristina Menikheim

Universidad Nacional Arturo Jauretche
José Enrique Carrizo

Universidad Nacional de Córdoba
Carlos Andrés Cataldi

Colombia

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Andrés Felipe Londoño Sierra
Aura Sofía Morales Mejía
Carlos Andrés Collazos Morales
Carmen Eugenia Fonseca Cuenca
Cecilio Silveira Cabrera
César Alberto Castellanos García
Eduardo Silva Sánchez
Eliseo Pérez Medina
Fabio Vélez Uribe
Germán Ernesto Montoya Vargas
Gonzalo Jiménez Escobar
Guillermo Alfonso Rojas Sánchez
Heindel Ricardo Otero Arévalo
Jaime José Isaza Ceballos
José Raúl Panqueva Sánchez
Julián Camilo Rodríguez Rondón
Luis Alejandro Ladino Gaspar
Luis Fernando Villamarín Guerrero
Olga Lucía Godoy Morales
Rafael Guzmán Escandón
Rodrigo Alonso Bermúdez Cortés
Raúl Alberto Ruiz Fandiño

Escuela de Ingeniería de Antioquia
Amalia Betancur R.
Eugenio Giraldo Tobón
Guillermo Miranda P.
Ricardo Restrepo A.
Walter Ospina M.

Escuela Militar de Aviación Marco Fidel Suárez
Ángel María Cundar Erazo

Pontificia Universidad Javeriana – Bogotá
Beynor Antonio Páez Sierra
Fernando Vega Salamanca
Gustavo Antonio Mejía Cortés

Pontificia Universidad Javeriana – Cali
Alberto Pretel Vega
Carlos Alberto Lozano Zapata
Luis Alfredo Rodríguez Saucedo
Luis Gerardo Pedraza Saavedra

Universidad Autónoma de Occidente
Alexander Osorio Caicedo
David Fernando Ramírez Moreno
Giovanni Medina Vargas
Jesús Roberto Soto
Mónica María Rico Castro
Robert Sánchez Cano

Universidad Católica de Colombia
Álvaro Damián Gómez Granja
Ana Elsa Tenjo Tenjo
Javier Francisco Novegil González Anleo
José Alberto Rodríguez Ortiz
Juan Carlos Palacios Caicedo
Queeny Madueño Pinto
William Andrés Castro López

Universidad De La Salle
Alejo Martínez Harley
Álvaro Mauricio Bustamante Lozano
Carlos Arturo Jiménez Orjuela
César Arturo Torres Leal
César Augusto Ramos Burgos
Daniel Abdon Varela Muñoz
Daniel Felipe Noguera Poveda
Diana Consuelo Jaimes Fuentes
Germán Moncada Méndez
Héctor Alcides Escucha Hernández
Hernán Pineda Rey
Jorge Alberto Dueñas Suaterna
José Arturo Celis Gil
Juan Oswaldo Rodríguez Quitian
Luis Hernando Barbosa
Mauricio Vinasco Téllez
Myriam Herrera Paloma
Óscar Javier Avella González
Ruby Margoth Cuervo Osses

Universidad de Los Andes
Alejandra Catalina Valencia González
Alejandro García Varela
Alonso Botero Mejía
Andrés Fernando Reyes Lega
Andrés Reyes
Beatriz Eugenia Sabogal Martínez
Bernardo Gómez Moreno
Carlos Arturo Ávila Bernal
Carlos Roberto Hernández Rodríguez
Chad Leidy
Ferney Javier Rodríguez Dueñas
Gabriel Téllez Acosta
Jaime Ernesto Forero Romero
Jorge Luis Galán
José M. Rolando Roldán
Juan Manuel Pedraza Leal
Luis Quiroga Puello
Manu Forero Shelton
Natalia Gómez Pérez
Nohora Galán
Yenny Hernández

Universidad de Medellín
Andrés Quintero Zea
Carlos Alberto Rodríguez Ortiz
Carlos Andrés Arredondo Orozco
Gilmar Rolando Anaguano Jiménez
Gloria Eugenia Campillo Figueroa
Jaime Humberto Hoyos Barrios
Jairo Madrigal Argaez
Jorge Alberto Ceballos Robledo
Jorge Hernán Quintero Orozco
José Simón Restrepo Restrepo
Juan Carlos Morales Vega
Leonardo Charry Rodríguez
Luis Fernando Pemberthy Múnera
Octavio Enrique Barrera Arenas
Pablo Andrés Cuartas Restrepo
Paola Andrea Buitrago Cadavid
Sebastián Palomino Ángel
Sandra Milena Vergara Pérez

Universidad EAFIT
Álvaro A. Velásquez T.
Augusto Carmona Valencia
Carlos Alberto Avendaño Pérez
Carlos Mario Cartagena Marín
Claudia Palacio Espinosa
Daniel Velásquez Prieto
Héctor Fabián Betancur Montoya
Jhon Rober Atencio Urieta
Jorge David Caro
José David Rincón Cuéllar
José Ignacio Marulanda B.
Juan Carlos Castrillón Trujillo
Juan Manuel Jaramillo O.
Luciano Ángel Toro
Luis Alejandro Gómez Ramírez
Mario Elkin Vélez Ruiz
Oscar Meneses Cardona
René Restrepo Gómez
Ricardo Andrés Smith Arbeláez
Roberto E. Lorduy Gómez
Víctor Hugo Camargo Suárez
Yhefferson Fernando Gutiérrez Loaiza

Universidad Libre – Bogotá
Álvaro Miguez Pulido
Fernando Rojas Molano
Fredy Mesa Rodríguez
Germán Forero Roncancio
Israel Caicedo Suárez
Jairo Ernesto Sierra
Jorge René Silva
Sara García González

Universidad Militar Nueva Granada
Jairo Bautista Mesa

Universidad Pontificia Bolivariana
Ángel Salazar
Consuelo Arango Vásquez
Fredy Pérez
Héctor Lorduy
Johnson Garzón
José León
Juan Carlos Zapata
Luis Alfonso Bernal
Luz Aída Sabogal
Rosio Elejalde
Rubén Arboleda Vélez

España

Universidad de Oviedo
Sergio Luis Palacios Díaz

Universidad de Vigo
Mohamed Boutinguiza Larosi
Stefano Chiussi

México

Distrito Federal

Instituto Tecnológico Autónomo de México
Francisco Villa López
Marcelo Carlos Mejía Olvera

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey Campus Santa Fe
Martín Pérez

Instituto Politécnico Nacional ESIME Zacatenco
Fernando Bucio Sánchez

UPIICSA
Arturo Hidalgo Aguilar
Edgar García Manrique
Enrique Jiménez López
Faustino Rafael Netzahuatl Campos
Fausto Cote Gutiérrez
Irma Salas Juárez
Ismael Rodríguez Flores
Jesús Roda Santana
Jesús Velasco
José Enrique González Islas
José María Alfonso Ochoa Cano
Juan Carlos Pacheco Morales
Julio David Cruz Ruiz
Manuel Muñoz Orozco
Rubén Beltrán de Paz
Víctor Manuel Sánchez López
UPIITA
Acsa Zaray Mota
Antonio Aburto Barragán
Israel Reyes Ramírez
Jesús Manuel Picazo Rojas
Roberto Mota Esteves
Rodrigo Pelayo Ramos

Universidad Anáhuac, Campus Norte
Alexander Rechetcov

Universidad del Valle de México
Juan Andrés Aspiazu Fabián

Universidad Iberoamericana
Adolfo Finck Pastrana
Alfredo Sandoval Villalbazo
Anabel Arrieta Ostos
Antonio Gen Mora
Bernardo Cervantes Sodi
Carmen González Mesa
Claudia Camacho Zúñiga
Domitila González Patiño
Enrique Sánchez Aguilera
Fabián Rodolfo Estrada Guerrero
Fausto Cervantes Ortiz
Gustavo Soto de la Vega
Ignacio Santiago Prieto
Jorge Cervantes
José A. Heras
José Jorge Cayente Romero
José Luis Morales Hernández
Lorena Arias Montaño
Lorena Arias Ochoa
Luis Olivares Q.
Luis R. de la Vega Ballesteros
Manuel Flores Bravo
Mauricio Rodríguez
Oliverio Jilrik Mercado
Ricardo Ondarzaronira
Roberto Mota Esteves
Rodrigo Pelayo Ramos
Víctor Velasco

Estado de México

Instituto Tecnológico de Tlalnepantla
Laura N. Palacios Grijalva

Tecnológico de Estudios Superiores de Coacalco
Aurelio Sánchez López
David Sánchez Huitrón

Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec
David Martínez Romero
Edgar Corona Organiche
Eva Valdez Alemán
Jesús Adrián Vargas Castillo
Leticia Vera Pérez
Mauricio Javier Zárate Sánchez
Miguel Ángel González Pérez
Víctor E. Vivanco Cid

Universidad Autónoma del Estado de México
Gustavo Quintana Carapia
Miriam Sánchez Pozos
Raymundo Escamilla Sánchez

Universidad Nacional Autónoma de México
FES Aragón
Mario Yáñez Gutiérrez
Noé González Rosas
Rodolfo Zaragoza Buchain
FES Cuautitlán C-4
Adolfo García Gómez
Ana María Terreros de la Rosa
Baruch Arriaga Morales
Eduardo Carrizales Ramírez
Jesús Felipe Lanuza García
Roberto Reyes Arce
Yolanda Benítez Trejo

Jalisco

Centro de Educación Técnica Industrial, Colomos
Kathya Vidrio Montes

Instituto Tecnológico Superior de Zapopan
Edgar Ignacio Sánchez Rangel

Universidad de Guadalajara
CUCEI
Francisco José De Anda Ramírez
Javier W. Lau Sánchez
Mario Flores Pérez
Marco Aurelio Martínez Aguilera
José Guzmán Hernández
Rubén Bautista Navarro
Vladimir Camelo Avedoy
José Nieves Carrillo Castillo
Faustino Omar García Concepción
Alma Leticia Rodríguez Domínguez
Marisela Elena Rodríguez Santiago
Samuel Rosalio Cuevas
Isabel Sainz Abascal
Adalberto Zamudio Ojeda

CUTONALA
Porfirio Pérez Cisneros

Universidad del Valle de México
Campus Zapopan
Miguel Arturo Barreiro González
Jorge Eduardo Aguilar Rosas
Adolfo Gallegos
Campus Guadalajara Sur
Eduardo Jacobo Arroyo

Michoacán

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Morelia
Orlando González Pérez

Instituto Tecnológico de Morelia
Leonel Magaña Mendoza

Nayarit

Universidad Autónoma de Nayarit
César Arroyo Villa
Rubén Emanuel Peña Santos
Domingo Gómez de la Cruz
Enrique R. Núñez Figueroa

Nuevo León

Universidad Autónoma de Nuevo León
Manuel Banda Puente
Marco Antonio Mendoza García
Nora Elia Rodríguez Elizondo
Rogelio M. de la Rosa Villarreal

Querétaro

Instituto Tecnológico de Querétaro
Adrián Herrera Olalde
Manuel Francisco Jiménez Morales
Mario Alberto Montante Garza

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Querétaro
Juan José Carracero
Lucio López Cavazos

San Luis Potosí

Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Alejandro Corpus Cordero

Sinaloa

Escuela Físico Matemáticas Culiacán
Jesús Armando Domínguez Molina

Instituto Tecnológico de Culiacán
Rocío Gómez Sainz

Instituto Tecnológico de los Mochis
Carla Rebeca Mendoza Casanova
Héctor Manuel Barroso Morales

Instituto Tecnológico de Mazatlán
Arturo Astorga Ramos
María Magdalena Cázarez Quintero

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Sinaloa
Juan Bernardo Castañeda
Eduardo Soberanes Lugo

Veracruz

Instituto Tecnológico de Veracruz
Luigi Amalfi Castellanos
Martha Bibiana Arriaga López

Universidad Veracruzana
Mariano Azzur Hernández Contreras
Verónica García Valenzuela

Yucatán

Instituto Tecnológico de Mérida
Alejandro Ulises Rodríguez Padilla
Manuel Jesús Castro Álvarez

Universidad Anáhuac Mayab
Sergio Ricardo Arjona Marrufo

Universidad Marista de Mérida
Francisco Javier Espinosa Faller

Universidad Modelo
Alvar A. Paredes Puerto

Uruguay

Universidad ORT Uruguay
Efrain Buksman

Venezuela

Universidad Católica Andrés Bello
Iván Escalona
Jorge Benedictto
José Manuel Marino
Juan Carlos Lavado
Oscar Rodríguez
Rafael Degugliemo

Universidad Central de Venezuela
Cristian Murati
Freddy Pérez
Leonardo Araujo
Miguel Bosch

Universidad de Carabobo – Valencia
Aníbal Aguilera
Elimar Hernández
María Teresa Cruz
Pedro Salazar
Reymer Romero
Thamara Fernández
Víctor Barrios
Víctor Medina

Universidad de Oriente
Núcleo Barcelona
Eduardo Bass
Lilibeth Rodríguez

Núcleo Nueva Esparta
Cirilo Larez

Universidad José María Vargas
José Ernesto León
Samuel Garaicochea

Universidad Metropolitana
Carmen Sainz
Guillermo Chacin
Luis Álvarez
Mirna Guevara

Universidad Simón Bolívar
Ana Fariñas
Carlos Vásquez
Claudia Colonnello
Dinorah Herrera
Douglas Mundarain
Eduardo Aloma
Elram Figueroa
Esteban Isasi
Félix Rodríguez
Ilich Idler
Jacinto Liendo
Jaime Wong
Jean Pierre Gallinar
Jesús Pineda
Jorge Ovalle
Jorge Stephany
José Ruiz
Luis Emilio Guerrero
Mario Caicedo
Rafael Angulo
Ricardo Castel
Rita Gianvittorio
Sergio Rojas

Agradecimientos

Queremos agradecer a los cientos de revisores y colegas que han hecho comentarios y sugerencias invaluables durante la vida de este libro. El éxito continuo de *Física universitaria* se debe en gran medida a sus contribuciones.

Edward Adelson (Ohio State University), Ralph Alexander (University of Missouri at Rolla), J. G. Anderson, R. S. Anderson, Wayne Anderson (Sacramento City College), Alex Azima (Lansing Community College), Dilip Balamore (Nassau Community College), Harold Bale (University of North Dakota), Arun Bansil (Northeastern University), John Barach (Vanderbilt University), J. D. Barnett, H. H. Barschall, Albert Bartlett (University of Colorado), Marshall Bartlett (Hollins University), Paul Baum (CUNY, Queens College), Frederick Becchetti (University of Michigan), B. Bederson, David Bennum (University of Nevada, Reno), Lev I. Berger (San Diego State University), Robert Boeke (William Rainey Harper College), S. Borowitz, A. C. Braden, James Brooks (Boston University), Nicholas E. Brown (California Polytechnic State University, San Luis Obispo), Tony Buffa (California Polytechnic State University, San Luis Obispo), A. Capecelatro, Michael Cardamone (Pennsylvania State University), Duane Carmony (Purdue University), Troy Carter (UCLA), P. Catranides, John Cerne (SUNY at Buffalo), Tim Chupp (University of Michigan), Shinil Cho (La Roche College), Roger Clapp (University of South Florida), William M. Cloud (Eastern Illinois University), Leonard Cohen (Drexel University), W. R. Coker (University of Texas, Austin), Malcolm D. Cole (University of Missouri at Rolla), H. Conrad, David Cook (Lawrence University), Gayl Cook (University of Colorado), Hans Courant (University of Minnesota), Bruce A. Craver (University of Dayton), Larry Curtis (University of Toledo), Jai Dahiya (Southeast Missouri State University), Steve Detweiler (University of Florida), George Dixon (Oklahoma State University), Donald S. Duncan, Boyd Edwards (West Virginia University), Robert Eisenstein (Carnegie Mellon University), Amy Emerson Missourn (Virginia Institute of Technology), William Faissler (Northeastern University), William Fasnacht (U.S. Naval Academy), Paul Feldker (St. Louis Community College), Carlos Figueroa (Cabrillo College), L. H. Fisher, Neil Fletcher (Florida State University), Robert Folk, Peter Fong (Emory University), A. Lewis Ford (Texas A&M University), D. Frantszog, James R. Gaines (Ohio State University), Solomon Gartenhaus (Purdue University), Ron Gautreau (New Jersey Institute of Technology), J. David Gavenda (University of Texas, Austin), Dennis Gay (University of North Florida), James Gerhart (University of Washington), N. S. Gingrich, J. L. Glathart, S. Goodwin, Rich Gottfried (Frederick Community College), Walter S. Gray (University of Michigan), Paul Gresser (University of Maryland), Benjamin Grinstein (UC San Diego), Howard Grotch (Pennsylvania State University), John Gruber (San Jose State University), Graham D. Gutsche (U.S. Naval Academy), Michael J. Harrison (Michigan State University), Harold Hart (Western Illinois University), Howard Hayden (University of Connecticut), Carl Helrich (Goshen College), Laurent Hodges (Iowa State University), C. D. Hodgman, Michael Hones (Villanova University), Keith Honey (West Virginia Institute of Technology), Gregory Hood (Tidewater Community College), John Hubisz (North Carolina State University), M. Iona, John Jaszczak (Michigan Technical University), Alvin Jenkins (North Carolina State University), Robert P. Johnson (UC Santa Cruz), Lorella Jones (University of Illinois), John Karchek (GMI Engineering & Management Institute), Thomas Keil (Worcester Polytechnic Institute), Robert Kraemer (Carnegie Mellon University), Jean P. Krisch (University of Michigan), Robert A. Kromhout, Andrew Kunz (Marquette University), Charles Lane (Berry College), Thomas N. Lawrence (Texas State University), Robert J. Lee, Alfred Leitner (Rensselaer Polytechnic University), Gerald P. Lietz (De Paul University), Gordon Lind (Utah State University), S. Livingston, Elihu Lubkin (University of Wisconsin, Milwaukee), Robert Luke (Boise State University), David Lynch (Iowa State University), Michael Lysak (San Bernardino Valley College), Jeffrey Mallow (Loyola University), Robert Mania (Kentucky State University), Robert Marchina (University of Memphis), David Markowitz (University of Connecticut), R. J. Maurer, Oren Maxwell (Florida International University), Joseph L. McCauley (University of Houston), T. K. McCubbin, Jr. (Pennsylvania State University), Charles McFarland (University of Missouri at Rolla), James Mcguire (Tulane University), Lawrence McIntyre (University of Arizona), Fredric Messing (Carnegie-Mellon University), Thomas Meyer (Texas A&M University), Andre Mirabelli (St. Peter's College, New Jersey), Herbert Muether (S.U.N.Y., Stony Brook), Jack Munsee (California State University, Long Beach), Lorenzo Narducci (Drexel University), Van E. Neie (Purdue University), David A. Nordling (U. S. Naval Academy), Benedict Oh (Pennsylvania State University), L. O. Olsen, Jim Pannell (DeVry Institute of Technology), W. F. Parks (University of Missouri), Robert Paulson (California State University, Chico), Jerry Peacher (University of Missouri at Rolla), Arnold Perlmutter (University of Miami), Lennart Peterson (University of Florida), R. J. Peterson (University of Colorado, Boulder), R. Pinkston, Ronald Poling (University of Minnesota), J. G. Potter, C. W. Price (Millersville University), Francis Prosser (University of Kansas), Shelden H. Radin, Roberto Ramos (Drexel University), Michael Rapport (Anne Arundel Community College), R. Resnick, James A. Richards, Jr., John S. Risley (North Carolina State University), Francesc Roig (University of California, Santa Barbara), T. L. Rokoske, Richard Roth (Eastern Michigan University), Carl Rotter (University of West Virginia), S. Clark Rowland (Andrews University), Rajarshi Roy (Georgia Institute of Technology), Russell A. Roy (Santa Fe Community College), Dhiraj Sardar (University of Texas, San Antonio), Bruce Schumm (UC Santa Cruz), Melvin Schwartz (St. John's University), F. A. Scott, L. W. Seagondollar, Paul Shand (University of Northern Iowa), Stan Shepherd (Pennsylvania State University), Douglas Sherman (San Jose State), Bruce Sherwood (Carnegie Mellon University), Hugh Siefkin (Greenville College), Tomasz Skwarnicki (Syracuse University), C. P. Slichter, Charles W. Smith (University of Maine, Orono), Malcolm Smith (University of Lowell), Ross Spencer (Brigham Young University), Julien Sprott (University of Wisconsin), Victor Stanionis (Iona College), James Stith (American Institute of Physics), Chuck Stone (North Carolina A&T State

University), Edward Strother (Florida Institute of Technology), Conley Stutz (Bradley University), Albert Stwertka (U.S. Merchant Marine Academy), Kenneth Szpara-DeNisco (Harrisburg Area Community College), Martin Tiersten (CUNY, City College), David Toot (Alfred University), Somdev Tyagi (Drexel University), F. Verbrugge, Helmut Vogel (Carnegie Mellon University), Robert Webb (Texas A & M), Thomas Weber (Iowa State University), M. Russell Wehr, (Pennsylvania State University), Robert Weidman (Michigan Technical University), Dan Whalen (UC San Diego), Lester V. Whitney, Thomas Wiggins (Pennsylvania State University), David Willey (University of Pittsburgh, Johnstown), George Williams (University of Utah), John Williams (Auburn University), Stanley Williams (Iowa State University), Jack Willis, Suzanne Willis (Northern Illinois University), Robert Wilson (San Bernardino Valley College), L. Wolfenstein, James Wood (Palm Beach Junior College), Lowell Wood (University of Houston), R. E. Worley, D. H. Ziebell (Manatee Community College), George O. Zimmerman (Boston University)

Además, nos gustaría hacer algunos agradecimientos individuales.

Quiero dar gracias de todo corazón a mis colegas de Carnegie Mellon, en especial a los profesores Robert Kraemer, Bruce Sherwood, Ruth Chabay, Helmut Vogel y Brian Quinn, por las diversas conversaciones estimulantes sobre pedagogía de la física y por su apoyo y ánimo durante la preparación de las ediciones sucesivas de este libro. También estoy en deuda con las muchas generaciones de estudiantes de Carnegie Mellon que me ayudaron a aprender lo que es la buena enseñanza y la correcta escritura, al indicarme lo que funciona y lo que no. Siempre es un placer y un privilegio expresar mi gratitud a mi esposa Alice y a nuestros hijos Gretchen y Rebecca por su amor, apoyo y sostén emocional durante la elaboración de las distintas ediciones del libro. Que todos los hombres y mujeres sean bendecidos con un amor como el de ellos. —H.D.Y.

Me gustaría agradecer a mis colegas del pasado y el presente en UCSB, incluyendo a Rob Geller, Carl Gwinn, Al Nash, Elisabeth Nicol y Francesc Roig, por su apoyo sincero y sus abundantes y útiles pláticas. Tengo una deuda de gratitud en especial con mis profesores Willa Ramsay, Peter Zimmerman, William Little, Alan Schwettman y Dirk Walecka por mostrarme qué es una enseñanza clara y comprometida de la física, y con Stuart Johnson por invitarme a ser coautor de *Física universitaria* a partir de la novena edición. Quiero dar gracias en especial al equipo editorial de Addison Wesley y a sus socios: a Nancy Whilton por su visión editorial; a Margot Otway por su gran sentido gráfico y cuidado en el desarrollo de esta edición; a Peter Murphy por sus contribuciones en los ejemplos; a Jason J.B. Harlow por la lectura cuidadosa del manuscrito, y a Chandrika Madhavan, Steven Le y Cindy Johnson por mantener el flujo editorial y de producción. Sobre todo, expreso mi gratitud y amor a mi esposa Caroline, a quien dedico mi contribución al libro. Hey, Caroline, al fin terminó la nueva edición. ¡Vámonos a volar! —R.A.F.

Por favor, ¡díganos lo que piensa!

Son bienvenidos los mensajes de estudiantes y profesores, en especial sobre errores y deficiencias que encuentren en esta edición. Dedicamos mucho tiempo y esfuerzo a la elaboración del mejor libro que podemos escribir, y esperamos que ayude al lector a enseñar y a aprender física. A la vez, usted nos ayudará si nos hace saber qué es lo que necesita mejorarse… Por favor, siéntase en libertad para ponerse en contacto con nosotros por vía electrónica o por correo ordinario. Sus comentarios serán muy apreciados.

Diciembre de 2010

Hugh D. Young
Departamento de Física
Carnegie Mellon University
Pittsburgh, PA 15213
hdy@andrew.cmu.edu

Roger A. Freedman
Departamento de Física
University of California, Santa Barbara
Santa Barbara, CA 93106-9530
airboy@physics.ucsb.edu
http://www.physics.ucsb.edu/airboy/

TABLA DE CONTENIDO

MECÁNICA

1 UNIDADES, CANTIDADES FÍSICAS Y VECTORES 1

1.1 La naturaleza de la física 2
1.2 Cómo resolver problemas en física 2
1.3 Estándares y unidades 4
1.4 Consistencia y conversiones de unidades 6
1.5 Incertidumbre y cifras significativas 8
1.6 Estimaciones y órdenes de magnitud 10
1.7 Vectores y suma de vectores 10
1.8 Componentes de vectores 14
1.9 Vectores unitarios 19
1.10 Productos de vectores 20
Resumen 26
Preguntas/Ejercicios/Problemas 27

2 MOVIMIENTO RECTILÍNEO 35

2.1 Desplazamiento, tiempo y velocidad media 36
2.2 Velocidad instantánea 38
2.3 Aceleración media e instantánea 42
2.4 Movimiento con aceleración constante 46
2.5 Cuerpos en caída libre 52
2.6 Velocidad y posición por integración 55
Resumen 58
Preguntas/Ejercicios/Problemas 59

3 MOVIMIENTO EN DOS O EN TRES DIMENSIONES 69

3.1 Vectores de posición y velocidad 70
3.2 El vector aceleración 72
3.3 Movimiento de proyectiles 77
3.4 Movimiento en círculo 85
3.5 Velocidad relativa 88
Resumen 94
Preguntas/Ejercicios/Problemas 95

4 LEYES DEL MOVIMIENTO DE NEWTON 104

4.1 Fuerza e interacciones 105
4.2 Primera ley de Newton 108
4.3 Segunda ley de Newton 112
4.4 Masa y peso 117
4.5 Tercera ley de Newton 120
4.6 Diagramas de cuerpo libre 124
Resumen 126
Preguntas/Ejercicios/Problemas 127

5 APLICACIÓN DE LAS LEYES DE NEWTON 134

5.1 Empleo de la primera ley de Newton: Partículas en equilibrio 134
5.2 Empleo de la segunda ley de Newton: Dinámica de partículas 140
5.3 Fuerzas de fricción 146
5.4 Dinámica del movimiento circular 154
5.5 Fuerzas fundamentales de la naturaleza 159
Resumen 161
Preguntas/Ejercicios/Problemas 162

6 TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA 176

6.1 Trabajo 177
6.2 Energía cinética y el teorema trabajo-energía 181
6.3 Trabajo y energía con fuerza variable 187
6.4 Potencia 193
Resumen 196
Preguntas/Ejercicios/Problemas 197

7 ENERGÍA POTENCIAL Y CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA 207

7.1 Energía potencial gravitacional 208
7.2 Energía potencial elástica 216
7.3 Fuerzas conservativas y no conservativas 221
7.4 Fuerza y energía potencial 225
7.5 Diagramas de energía 228
Resumen 230
Preguntas/Ejercicios/Problemas 231

8 MOMENTO LINEAL, IMPULSO Y COLISIONES 241

8.1 Momento lineal e impulso 241
8.2 Conservación del momento lineal 247
8.3 Conservación del momento lineal y choques 251
8.4 Choques elásticos 255
8.5 Centro de masa 258
8.6 Propulsión de un cohete 262
Resumen 266
Preguntas/Ejercicios/Problemas 267

9 ROTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS 278

9.1 Velocidad y aceleración angulares 278
9.2 Rotación con aceleración angular constante 283

9.3 Relación entre cinemática lineal y angular 285
9.4 Energía en el movimiento de rotación 288
9.5 Teorema de los ejes paralelos 293
9.6 Cálculos de momento de inercia 294
Resumen 297
Preguntas/Ejercicios/Problemas 298

10 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN 308

10.1 Torca 308
10.2 Torca y aceleración angular de un cuerpo rígido 311
10.3 Rotación de un cuerpo rígido sobre un eje móvil 314
10.4 Trabajo y potencia en movimiento de rotación 320
10.5 Momento angular 322
10.6 Conservación del momento angular 325
10.7 Giróscopos y precesión 328
Resumen 331
Preguntas/Ejercicios/Problemas 332

11 EQUILIBRIO Y ELASTICIDAD 344

11.1 Condiciones de equilibrio 345
11.2 Centro de gravedad 345
11.3 Solución de problemas de equilibrio de cuerpos rígidos 348
11.4 Esfuerzo, deformación y módulos de elasticidad 352
11.5 Elasticidad y plasticidad 357
Resumen 359
Preguntas/Ejercicios/Problemas 360

12 MECÁNICA DE FLUIDOS 373

12.1 Densidad 373
12.2 Presión en un fluido 375
12.3 Flotación 380
12.4 Flujo de fluido 382
12.5 Ecuación de Bernoulli 385
12.6 Viscosidad y turbulencia 389
Resumen 392
Preguntas/Ejercicios/Problemas 393

13 GRAVITACIÓN 402

13.1 Ley de Newton de la gravitación 402
13.2 Peso 406
13.3 Energía potencial gravitacional 409
13.4 Movimiento de satélites 411
13.5 Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas 414
13.6 Distribuciones esféricas de masa 418
13.7 Peso aparente y rotación terrestre 421
13.8 Agujeros negros 423
Resumen 427
Preguntas/Ejercicios/Problemas 428

14 MOVIMIENTO PERIÓDICO 437

14.1 Descripción de la oscilación 437
14.2 Movimiento armónico simple 439
14.3 Energía en el movimiento armónico simple 446
14.4 Aplicaciones del movimiento armónico simple 450
14.5 El péndulo simple 453
14.6 El péndulo físico 455
14.7 Oscilaciones amortiguadas 457
14.8 Oscilaciones forzadas y resonancia 459
Resumen 461
Preguntas/Ejercicios/Problemas 462

ONDAS/ACÚSTICA

15 ONDAS MECÁNICAS 472

15.1 Tipos de ondas mecánicas 473
15.2 Ondas periódicas 474
15.3 Descripción matemática de una onda 477
15.4 Rapidez de una onda transversal 482
15.5 Energía del movimiento ondulatorio 486
15.6 Interferencia de ondas, condiciones de frontera y superposición 489
15.7 Ondas estacionarias en una cuerda 491
15.8 Modos normales de una cuerda 495
Resumen 499
Preguntas/Ejercicios/Problemas 500

16 SONIDO Y OÍDO 509

16.1 Ondas sonoras 509
16.2 Rapidez de las ondas sonoras 514
16.3 Intensidad del sonido 518
16.4 Ondas sonoras estacionarias y modos normales 522
16.5 Resonancia y sonido 527
16.6 Interferencia de ondas 529
16.7 Pulsos 531
16.8 Efecto Doppler 533
16.9 Ondas de choque 538
Resumen 541
Preguntas/Ejercicios/Problemas 542

TERMODINÁMICA

17 TEMPERATURA Y CALOR 551

17.1 Temperatura y equilibrio térmico 552
17.2 Termómetros y escalas de temperatura 553
17.3 Termómetros de gas y la escala Kelvin 554
17.4 Expansión térmica 557
17.5 Cantidad de calor 562
17.6 Calorimetría y cambios de fase 565
17.7 Mecanismos de transferencia de calor 570
Resumen 578
Preguntas/Ejercicios/Problemas 579

18 PROPIEDADES TÉRMICAS DE LA MATERIA 590

18.1 Ecuaciones de estado 591
18.2 Propiedades moleculares de la materia 596
18.3 Modelo cinético-molecular del gas ideal 599
18.4 Capacidades caloríficas 605
18.5 Rapideces moleculares 608
18.6 Fases de la materia 610
Resumen 614
Preguntas/Ejercicios/Problemas 615

19 PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA 624

19.1 Sistemas termodinámicos 624
19.2 Trabajo realizado al cambiar el volumen 625
19.3 Trayectorias entre estados termodinámicos 628
19.4 Energía interna y la primera ley de la termodinámica 629
19.5 Tipos de procesos termodinámicos 634
19.6 Energía interna de un gas ideal 636
19.7 Capacidad calorífica de un gas ideal 637
19.8 Proceso adiabático para un gas ideal 640
Resumen 643
Preguntas/Ejercicios/Problemas 644

20 SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA 652

20.1 Dirección de los procesos termodinámicos 652
20.2 Máquinas térmicas 654
20.3 Motores de combustión interna 657
20.4 Refrigeradores 659
20.5 Segunda ley de la termodinámica 661
20.6 Ciclo de Carnot 663
20.7 Entropía 669
20.8 Interpretación microscópica de la entropía 675
Resumen 678
Preguntas/Ejercicios/Problemas 679

APÉNDICES

A El sistema internacional de unidades A-1
B Relaciones matemáticas útiles A-3
C El alfabeto griego A-4
D Tabla periódica de los elementos A-5
E Factores de conversión de unidades A-6
F Constantes numéricas A-7

Respuestas a los problemas con número impar A-9
Créditos de fotografías C-1
Índice analítico I-1

UNIDADES, CANTIDADES FÍSICAS Y VECTORES





? Ser capaz de predecir la trayectoria de una tormenta eléctrica resulta esencial para reducir al mínimo los posibles daños a las propiedades y a las vidas humanas. Si la tormenta eléctrica se desplaza a 20 km/h en una dirección de 53° al noreste, ¿qué tan lejos hacia el norte se desplazará la tormenta eléctrica en una hora?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cuáles son las tres cantidades fundamentales de la física y cuáles son las unidades que los físicos utilizan para medirlas.
- Cómo manejar cifras significativas en sus cálculos.
- La diferencia entre escalares y vectores, y cómo sumar y restar vectores gráficamente.
- Qué son las componentes de un vector y cómo se utilizan para realizar cálculos.
- Qué son los vectores unitarios y cómo se utilizan con las componentes para describir vectores.
- Dos formas de multiplicar vectores.

La física es una de las ciencias más fundamentales. Los científicos de todas las disciplinas utilizan las ideas de la física, como los químicos que estudian la estructura de las moléculas, los paleontólogos que intentan reconstruir la forma de andar de los dinosaurios, y los climatólogos que estudian cómo las actividades humanas afectan la atmósfera y los océanos. Asimismo, la física es la base de toda la ingeniería y la tecnología. Ningún ingeniero podría diseñar un televisor de pantalla plana, una nave espacial interplanetaria o ni siquiera una mejor trampa para ratones, sin antes haber comprendido las leyes básicas de la física.

El estudio de la física también es una aventura. Usted la encontrará desafiante, a veces frustrante y en ocasiones dolorosa; sin embargo, con frecuencia le brindará abundantes beneficios y satisfacciones. Si alguna vez se ha preguntado por qué el cielo es azul, cómo viajan las ondas de radio por el espacio, o cómo un satélite permanece en órbita, encontrará las respuestas en la física básica. Sobre todo, apreciará la física como un logro sobresaliente del intelecto humano en su afán por entender nuestro mundo y a la humanidad misma.

En este capítulo inicial repasaremos algunos conceptos importantes que necesitaremos en nuestro estudio. Comentaremos la naturaleza de la física teórica y el uso de modelos idealizados para representar sistemas físicos. Presentaremos los sistemas de unidades que se emplean para especificar cantidades físicas y analizaremos la forma de describir la exactitud de un número. Estudiaremos ejemplos de problemas que no tienen (o para los que no nos interesa obtener) una respuesta exacta, pero cuyas estimaciones resultan útiles e interesantes. Por último, examinaremos varios aspectos de los vectores y del álgebra vectorial que necesitaremos para describir y analizar cantidades físicas, como velocidad y fuerza, que tienen dirección además de magnitud.

1.1 La naturaleza de la física

La física es una ciencia *experimental*. Los físicos observan los fenómenos naturales e intentan encontrar los patrones que los describen. Tales patrones se denominan teorías físicas o, si están muy bien establecidos y se usan ampliamente, leyes o principios físicos.

CUIDADO **Significado de la palabra "teoría"** Decir que una idea es una teoría *no* implica que se trate de una divagación o de un concepto no comprobado. Más bien, una teoría es una explicación de fenómenos naturales basada en observaciones y en los principios fundamentales aceptados. Un ejemplo es la bien establecida teoría de la evolución biológica, que es el resultado de extensas investigaciones y observaciones de varias generaciones de biólogos.

1.1 Dos laboratorios de investigación. *a*) Según la leyenda, Galileo estudió el movimiento de cuerpos en caída libre soltándolos desde la Torre Inclinada de Pisa, Italia. Se dice que también estudió el movimiento de los péndulos observando la oscilación del candelabro de la catedral ubicada junto a la torre. *b*) El Gran Colisionador de Hadrones (LHC, por las siglas de Large Hadron Collider) en Ginebra, Suiza, el acelerador de partículas más grande del mundo, se usa para explorar las partículas más pequeñas y fundamentales de la materia. La fotografía muestra una parte de uno de los detectores del LHC (observe al trabajador sobre la plataforma amarilla).

a)



b)



Para desarrollar una teoría en su campo de estudio, el físico debe aprender a hacer las preguntas adecuadas, a diseñar experimentos para tratar de contestarlas y a deducir conclusiones apropiadas de los resultados. La figura 1.1 muestra dos famosas instalaciones experimentales usadas para realizar experimentos físicos.

Cuenta la leyenda que Galileo Galilei (1564-1642) dejó caer objetos ligeros y pesados desde la Torre Inclinada de Pisa (figura 1.1*a*) para averiguar si sus velocidades de caída eran iguales o diferentes. Al examinar los resultados de sus experimentos (que en realidad fueron mucho más complejos de lo que cuenta la leyenda), dio el salto inductivo al principio, o la teoría, de que la aceleración de un cuerpo que cae es independiente de su peso.

El desarrollo de teorías físicas como la de Galileo a menudo es un proceso indirecto, con callejones sin salida, suposiciones erróneas y el abandono de teorías infructuosas en favor de otras más promisorias. La física no es una mera colección de hechos y principios; también es el *proceso* que nos lleva a los principios generales que describen el comportamiento del universo físico.

Ninguna teoría se considera como la verdad final o definitiva. Siempre existe la posibilidad de que nuevas observaciones obliguen a modificarla o desecharla. Inherente en las teorías físicas, se encuentra el hecho de que podemos demostrar su falsedad encontrando comportamientos que no sean congruentes con ellas, pero nunca podremos comprobar que una teoría siempre es correcta.

Volviendo con Galileo, supongamos que dejamos caer una pluma y una bala de cañón. Sin duda, *no* caen a la misma velocidad. Esto no significa que Galileo estuviera equivocado, sino que su teoría estaba incompleta. Si soltamos tales objetos *en un vacío* para eliminar los efectos del aire, sí caerán a la misma velocidad. La teoría de Galileo tiene un **intervalo de validez**: solo es válida para objetos cuyo peso es mucho mayor que la fuerza ejercida por el aire (debido a la resistencia y a la flotabilidad del objeto). Los objetos como las plumas y los paracaídas evidentemente se salen del intervalo.

A menudo un nuevo avance en física extiende el intervalo de validez de un principio. Las leyes de Newton acerca del movimiento y la gravitación extendieron ampliamente, medio siglo después, el análisis de la caída de los cuerpos que hizo Galileo.

1.2 Cómo resolver problemas en física

En algún punto de sus estudios, casi todos los estudiantes de física sienten que, aunque entienden los conceptos, simplemente no pueden resolver los problemas. Sin embargo, en física, *entender* verdaderamente un concepto es lo mismo que saber aplicarlo a diversos problemas. Aprender a resolver problemas es absolutamente indispensable; es imposible *saber* física sin poder *hacer* física.

¿Cómo aprendemos a resolver problemas de física? En todos los capítulos de este libro, usted encontrará *Estrategias para resolver problemas* que sugieren técnicas para plantear y resolver problemas con eficiencia y exactitud. Después de cada *Estrategia para resolver problemas* hay uno o más *Ejemplos* resueltos que muestran esas técnicas en acción. (Las *Estrategias para resolver problemas* también ayudan a evitar algunas técnicas *incorrectas* que quizás usted se sienta tentado a usar). Además, encontrará

ejemplos adicionales que no están asociados con una *Estrategia específica para resolver problemas*. Además, al final de cada capítulo se encuentra un *Problema práctico* que usa más de un concepto clave del capítulo. Recomendamos al lector estudiar detenidamente esas estrategias y ejemplos, y resolver estos últimos por su cuenta.

Se utilizan diferentes técnicas para resolver distintos tipos de problemas, y por ello este libro ofrece docenas de *Estrategias para resolver problemas*. No obstante, sea cual fuere el tipo de problema, hay ciertos pasos básicos que se deben seguir siempre. (Esos mismos pasos son igualmente útiles en problemas de matemáticas, ingeniería, química y muchos otros campos). En este libro, hemos organizado los pasos en cuatro etapas para la resolución de un problema.

Todas las *Estrategias para resolver problemas* y los *Ejemplos* del libro seguirán esos cuatro pasos. (En algunos casos, se agruparán los primeros dos o tres pasos). Le recomendamos seguir los mismos pasos al resolver problemas por su cuenta.

Estrategia para resolver problemas 1.1 **Cómo resolver problemas de física**

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Use el planteamiento del problema para decidir qué ideas de la física son relevantes. Identifique las **incógnitas** del problema, es decir, las cantidades cuyos valores está tratando de obtener, como la rapidez con que un proyectil choca contra el suelo, la intensidad del sonido producido por una sirena, o el tamaño de una imagen formada por una lente. Identifique las variables conocidas, establecidas o implicadas en el problema. Este paso es fundamental ya sea que la meta consista en obtener una expresión matemática o un valor numérico.

PLANTEAR *el problema:* Con base en los conceptos que haya identificado y en las variables conocidas e incógnitas, seleccione las ecuaciones que usará para resolver el problema y decida cómo las empleará. Asegúrese de que las variables e incógnitas que ha identificado correspondan exactamente a las que se encuentran en las ecuaciones. Si es necesario, trace un bosquejo de la situación descrita en el problema. (Para elaborar los diagramas le serán útiles el papel cuadriculado, una regla graduada, un transportador y un compás). Estime lo mejor que pueda cuáles serán sus resultados y, si es pertinente, pronostique cuál será el comportamiento físico del sistema. Los ejemplos resueltos en este libro incluyen sugerencias acerca de cómo hacer este tipo de estimaciones y pronósticos. Si esto parece complicado, no se preocupe, ¡usted mejorará con la práctica!

EJECUTAR *la solución:* En este paso, se "hacen las cuentas". Estudie los ejemplos resueltos para ver lo que implica este paso.

EVALUAR *la respuesta:* Compare la respuesta con su estimación y, si hay alguna discrepancia, revise su procedimiento. Si su respuesta es una expresión algebraica, asegúrese de que representa realmente lo que pasaría si sus variables se consideran con valores extremos. Para referencias futuras, tome nota de cualquier respuesta que represente una cantidad de particular importancia. Pregúntese cómo podría contestar una versión más general o más difícil del problema que acaba de resolver.

Modelos idealizados

Cotidianamente usamos la palabra "modelo" para designar una réplica en miniatura, digamos, de un ferrocarril, o para referirnos a una persona que exhibe ropa (o que se exhibe sin ella). En física, un **modelo** es una versión simplificada de un sistema físico demasiado complejo como para analizarse con todos sus pormenores.

Por ejemplo, supongamos que nos interesa analizar el movimiento de una pelota de béisbol lanzada al aire (figura 1.2*a*). ¿Qué tan complicado es el problema? La pelota no es perfectamente esférica (tiene costuras) y gira conforme viaja por el aire. El viento y la resistencia del aire afectan su movimiento, el peso de la pelota varía un poco al cambiar su distancia con respecto al centro de la Tierra, etcétera. Si tratamos de considerar todo esto, la complejidad del análisis nos abrumará. En vez de ello, creamos una versión simplificada del problema. Omitimos el tamaño y la forma de la pelota representándola como un objeto puntual o una **partícula**. Ignoramos la resistencia del aire como si la pelota se moviera en el vacío, y suponemos que su peso es constante. Ahora ya tenemos un problema manejable (figura 1.2*b*). Analizaremos este modelo con detalle en el capítulo 3.

Para crear un modelo idealizado del sistema, debemos pasar por alto algunos efectos menores, pero debemos ser cuidadosos de no omitir demasiado. Si ignoramos totalmente los efectos de la gravedad, nuestro modelo pronosticaría que si lanzamos la pelota hacia arriba, esta se desplazaría en línea recta hasta desaparecer en el espacio. Un modelo útil es el que simplifica un problema lo suficiente para hacerlo manejable, pero sin omitir sus características esenciales.

1.2 Para simplificar el análisis de *a*) una pelota de béisbol lanzada al aire, usamos *b*) un modelo idealizado.

a) Una pelota real lanzada al aire

La pelota gira y tiene forma compleja.
La resistencia del aire y el viento ejercen fuerzas sobre la pelota.
La fuerza gravitacional sobre la pelota depende de la altura.
Dirección del movimiento

b) Un modelo idealizado de la pelota de béisbol

La pelota de béisbol se trata como un objeto puntual (o una partícula).
No hay resistencia del aire.
La fuerza gravitacional sobre la pelota es constante.
Dirección del movimiento

Al usar un modelo para predecir el comportamiento de un sistema, la validez de la predicción está limitada por la validez del modelo. Por ejemplo, la predicción de Galileo con respecto a la caída de los cuerpos (véase la sección 1.1) corresponde a un modelo idealizado que no incluye los efectos de la resistencia del aire. El modelo funciona bastante bien para una bala de cañón, aunque no tan bien para una pluma.

Los modelos idealizados desempeñan un papel primordial en este libro. Intente ubicarlos al estudiar las teorías físicas y sus aplicaciones a problemas específicos.

1.3 Estándares y unidades

Como vimos en la sección 1.1, la física es una ciencia experimental. Los experimentos requieren mediciones, cuyos resultados suelen describirse con números. Un número empleado para describir cuantitativamente un fenómeno físico es una **cantidad física**. Dos cantidades físicas que lo describen a usted son, por ejemplo, su peso y estatura. Algunas cantidades físicas son tan básicas que podemos definirlas solo describiendo la forma de medirlas; es decir, con una **definición operativa**. Dos ejemplos son la medición de una distancia con una regla, o un lapso de tiempo con un cronómetro. En otros casos, definimos una cantidad física describiendo la forma de calcularla a partir de otras cantidades *medibles*. Así, podríamos definir la rapidez promedio de un objeto en movimiento, como la distancia recorrida (medida con una regla) dividida entre el tiempo de recorrido (medido con un cronómetro).

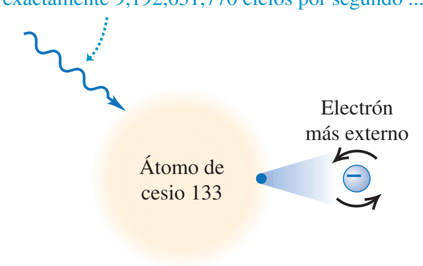
Al medir una cantidad, siempre la comparamos con un estándar de referencia. Si decimos que un Ferrari 458 Italia tiene una longitud de 4.53 m, queremos decir que es 4.53 veces más largo que una vara de cierto tamaño, que por definición mide 1 m de largo. Dicho estándar define una **unidad** de la cantidad. El metro es una unidad de distancia; y el segundo es una unidad de tiempo. Al describir una cantidad física con un número, siempre debemos especificar la unidad empleada; describir una distancia simplemente como "4.53" no tendría significado.

Las mediciones exactas y confiables requieren unidades inmutables que los observadores puedan volver a utilizar en distintos lugares. El sistema de unidades empleado por los científicos e ingenieros en todo el mundo se denomina comúnmente "sistema métrico", aunque, desde 1960, su nombre oficial es **Sistema Internacional** o **SI** (la abreviatura proviene de su nombre francés, *Système International*). En el apéndice A se presenta una lista de todas las unidades del SI y se definen las fundamentales.

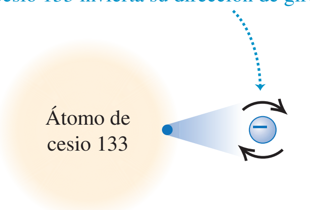
1.3 Mediciones usadas para determinar *a*) la duración de un segundo y *b*) la longitud de un metro. Estas mediciones son útiles para el establecimiento de estándares porque proporcionan los mismos resultados sin importar dónde se realicen.

a) Medición de un segundo

La radiación de microondas de una frecuencia de exactamente 9,192,631,770 ciclos por segundo ...

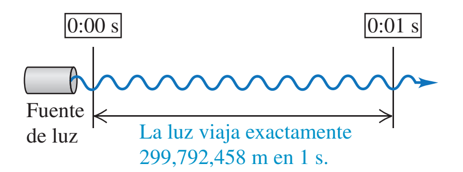


... causa que el electrón más externo de un átomo de cesio 133 invierta su dirección de giro.



Un reloj atómico usa este fenómeno para sincronizar las microondas a una frecuencia exacta. Entonces cuenta un segundo por cada 9,192,631,770 ciclos.

b) Medición de un metro



Tiempo

De 1889 a 1967, la unidad de tiempo se definió como cierta fracción del día solar medio (el tiempo promedio entre llegadas sucesivas del Sol al cenit). El estándar actual, adoptado en 1967, es mucho más preciso; se basa en un reloj atómico que usa la diferencia de energía entre los dos estados energéticos más bajos del átomo de cesio. Al bombardearse con microondas de cierta frecuencia exacta, el átomo de cesio sufre una transición entre dichos estados. Un **segundo** (que se abrevia como s) se define como el tiempo que tardan 9,192,631,770 ciclos de esta radiación de microondas (figura 1.3*a*).

Longitud

En 1960 se estableció también un estándar atómico para el metro, utilizando la longitud de onda de la luz anaranjada-roja emitida por átomos de kriptón (^{86}Kr) en un tubo de descarga de luz. Usando este estándar de longitud, se comprobó que la rapidez de la luz en el vacío es de 299,792,458 m/s. En noviembre de 1983, el estándar de longitud se modificó otra vez, de manera que se *definió* que la rapidez de la luz en el vacío es exactamente igual a 299,792,458 m/s. Así, la nueva definición de

metro (que se abrevia m) es la distancia que recorre la luz en el vacío en 1/299,792,458 segundos (figura 1.3*b*). Este es un estándar de longitud mucho más preciso que el basado en una longitud de onda de la luz.

Masa

El estándar de masa, el **kilogramo** (que se abrevia kg), se define como la masa de un cilindro de una aleación de platino-iridio que se conserva en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, cerca de París (figura 1.4). Un estándar atómico de masa sería más fundamental; sin embargo, en la actualidad no podemos medir masas a escala atómica con tanta exactitud como a escala macroscópica. El *gramo* (que no es una unidad fundamental) es igual a 0.001 kilogramos.

1.4 El objeto de metal encerrado cuidadosamente dentro de estos envases de cristal es el kilogramo estándar internacional.



Prefijos de unidades

Una vez definidas las unidades fundamentales, es fácil introducir unidades más grandes y más pequeñas para las mismas cantidades físicas. En el sistema métrico, estas otras unidades están relacionadas con las fundamentales (o, en el caso de la masa, con el gramo) por múltiplos de 10 o $\frac{1}{10}$. Así, un kilómetro (1 km) equivale a 1000 metros, y un centímetro (1 cm) es $\frac{1}{100}$ de un metro. Es común expresar los múltiplos de 10 o $\frac{1}{10}$ en notación exponencial: $1000 = 10^3$, $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$, etcétera. Con esta notación, $1\text{ km} = 10^3\text{ m}$ y $1\text{ cm} = 10^{-2}\text{ m}$.

Los nombres de las unidades adicionales se obtienen agregando un **prefijo** al nombre de la unidad fundamental. Por ejemplo, el prefijo "kilo", abreviado k, siempre indica una unidad 1000 veces mayor; así

$$1\text{ kilómetro} = 1\text{ km} = 10^3\text{ metros} = 10^3\text{ m}$$
$$1\text{ kilogramo} = 1\text{ kg} = 10^3\text{ gramos} = 10^3\text{ g}$$
$$1\text{ kilowatt} = 1\text{ kW} = 10^3\text{ watts} = 10^3\text{ W}$$

Una tabla en la segunda de forros de este libro muestra los prefijos estándar del SI, con sus significados y abreviaturas.

La tabla 1.1 presenta algunos ejemplos del uso de múltiplos de 10 y sus prefijos con las unidades de longitud, masa y tiempo. La figura 1.5 muestra cómo se usan estos prefijos para describir distancias tanto grandes como pequeñas.

El sistema británico

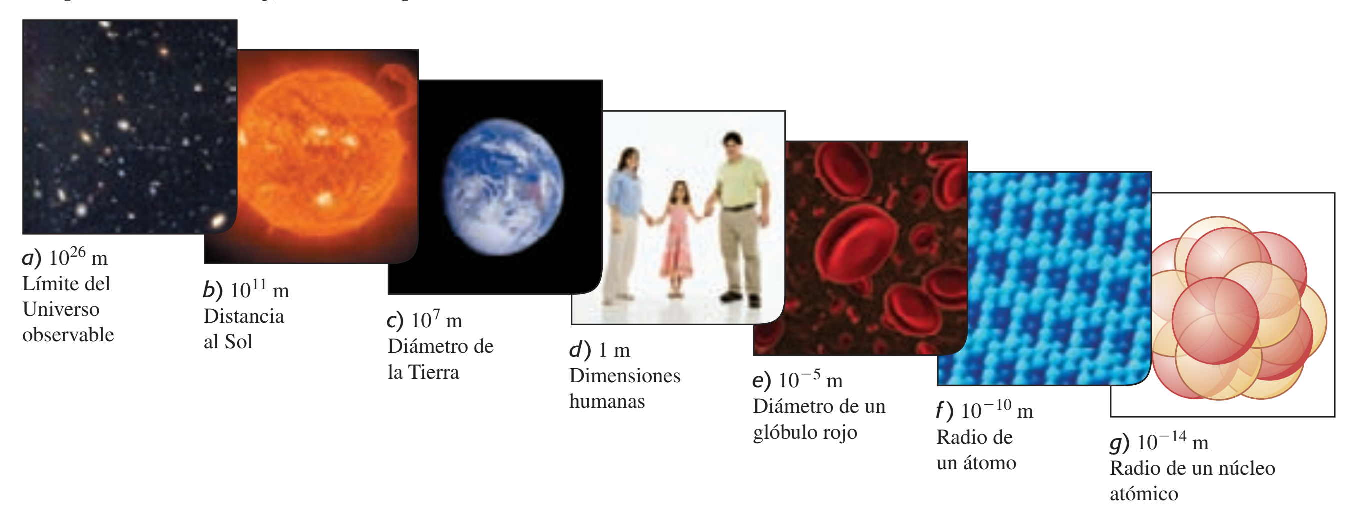
Por último, mencionamos el sistema británico de unidades que se usa solo en Estados Unidos y unos cuantos países más; aunque en la mayoría de estos se está reemplazando por el SI. En la actualidad, las unidades británicas se definen oficialmente en términos de las unidades del SI de la siguiente manera:

Longitud: 1 pulgada = 2.54 cm (exactamente)

Fuerza: 1 libra = 4.448221615260 newtons (exactamente)

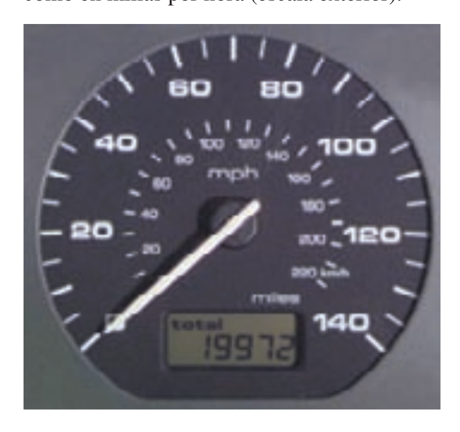
Tabla 1.1 Algunas unidades de longitud, masa y tiempo

Longitud	Masa	Tiempo
1 nanómetro = 1 nm = 10^{-9} m (unas cuantas veces el tamaño del átomo más grande)	1 microgramo = 1 μg = 10^{-6} g = 10^{-9} kg (masa de una partícula pequeña de polvo)	1 nanosegundo = 1 ns = 10^{-9} s (tiempo en que la luz recorre 0.3 m)
1 micrómetro = 1 μm = 10^{-6} m (tamaño de algunas bacterias y células vivas)	1 miligramo = 1 mg = 10^{-3} g = 10^{-6} kg (masa de un grano de sal)	1 microsegundo = 1 μs = 10^{-6} s (tiempo en que la estación espacial recorre 8 mm)
1 milímetro = 1 mm = 10^{-3} m (diámetro del punto de un bolígrafo)	1 gramo = 1 g = 10^{-3} kg (masa de un clip de papeles)	1 milisegundo = 1 ms = 10^{-3} s (tiempo en que el sonido viaja 0.35 m)
1 centímetro = 1 cm = 10^{-2} m (diámetro del dedo meñique)		
1 kilómetro = 1 km = 10^3 m (un paseo de 10 minutos caminando)		



1.5 Algunas longitudes representativas en el Universo. *f*) es la imagen de un microscopio de barrido de efecto túnel de átomos sobre la superficie de un cristal; *g*) es una concepción artística.

1.6 Muchos objetos comunes usan unidades tanto del SI como británicas. Un ejemplo es este velocímetro de un automóvil fabricado en Estados Unidos, que indica la rapidez tanto en kilómetros por hora (escala interior) como en millas por hora (escala exterior).



El newton, que se abrevia N, es la unidad de fuerza en el SI. La unidad británica de tiempo es el segundo, que se define igual que en el SI. En física, las unidades británicas se emplean solo en mecánica y termodinámica; no hay un sistema británico de unidades eléctricas.

En este libro usaremos unidades del SI en todos los ejemplos y problemas; no obstante, en ocasiones daremos equivalencias aproximadas en unidades británicas. Al resolver problemas con unidades del SI, usted puede hacer la conversión a las aproximaciones correspondientes del sistema británico, si le resultan más conocidas (figura 1.6). Sin embargo, debe tratar de *pensar* en unidades del SI la mayoría de las veces.

1.4 Consistencia y conversiones de unidades

Usamos ecuaciones para expresar las relaciones entre cantidades físicas representadas por símbolos algebraicos. Cada símbolo algebraico denota siempre tanto un número como una unidad. Por ejemplo, d podría representar una distancia de 10 m, t un tiempo de 5 s y v una rapidez de 2 m/s.

Toda ecuación siempre debe ser **dimensionalmente consistente**. No podemos sumar manzanas y automóviles; solo podemos sumar o igualar dos términos si tienen las mismas unidades. Por ejemplo, si un cuerpo que viaja con rapidez constante v recorre una distancia d en un tiempo t, estas cantidades están relacionadas por la ecuación

$$d = vt$$

Si d se mide en metros, entonces el producto vt también debe expresarse en metros. Con los números anteriores como ejemplo, escribimos

$$10\ \text{m} = \left(2\,\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}}\right)(5\ \cancel{\text{s}})$$

Como la unidad 1/s del lado derecho de la ecuación cancela la unidad s, el producto está en metros, como debe ser. En los cálculos, las unidades se tratan igual que los símbolos algebraicos con respecto a la multiplicación y la división.

CUIDADO **En los cálculos utilice siempre unidades** Cuando un problema requiere de cálculos con números y unidades, *siempre* escriba los números con las unidades correctas durante todo el cálculo, como en el ejemplo anterior. Esto es muy útil, pues ayuda a verificar los cálculos. Si en alguna etapa del cálculo, una ecuación o expresión tiene unidades inconsistentes, usted ha cometido un error en alguna parte. En este libro *siempre* indicaremos las unidades en todos los cálculos, y recomendamos con insistencia al lector hacer lo mismo al resolver los problemas.

Estrategia para resolver problemas 1.2 Solución de problemas de física



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* En general, lo mejor es usar las unidades fundamentales del SI (longitudes en metros, masas en kilogramos y tiempo en segundos) en todos los problemas. Si la respuesta se debe dar en otras unidades (kilómetros, gramos u horas, por ejemplo), espere hasta el final para efectuar la conversión.

PLANTEAR *el problema* y **EJECUTAR** *la solución:* Las unidades se multiplican y se dividen igual que los símbolos algebraicos ordinarios. Esto facilita la conversión de una cantidad de un grupo de unidades a otro: exprese la misma cantidad física en dos unidades distintas y forme una igualdad.

Por ejemplo, cuando decimos que 1 min = 60 s, no queremos decir que el número 1 sea igual al número 60, sino que 1 min representa el mismo intervalo de tiempo que 60 s. Por ello, el cociente (1 min)/(60 s) es igual a 1, lo mismo que su recíproco (60 s)/(1 min). Podemos multiplicar una cantidad por cualquiera de estos factores (conocidos como *multiplicadores unitarios*), sin alterar el significado físico de la misma. Por ejemplo, para obtener el número de segundos en 3 min, escribimos

$$3 \text{ min} = (3 \cancel{\text{min}})\left(\frac{60 \text{ s}}{1 \cancel{\text{min}}}\right) = 180 \text{ s}$$

EVALUAR *la respuesta:* Si convertimos las unidades correctamente, se eliminarán las unidades no deseadas, como en el ejemplo anterior. Si hubiéramos multiplicado 3 min por (1 min)/(60 s), el resultado habría sido un absurdo $\frac{1}{20}$ min^2/s. Para asegurarse de convertir adecuadamente las unidades, usted debe incluirlas en *todas* las etapas del cálculo.

Por último, verifique si la respuesta es lógica. Por ejemplo, el resultado 3 min = 180 s es razonable porque el segundo es más pequeño que el minuto, por lo que habrá más segundos que minutos en el mismo intervalo de tiempo.

Ejemplo 1.1 Conversión de unidades de rapidez



El récord mundial de rapidez terrestre es de 763.0 mi/h, establecido por Andy Green el 15 de octubre de 1997 en el automóvil con motor a reacción *Thrust SSC*. Exprese esta rapidez en metros/segundo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: Queremos convertir las unidades de rapidez de mi/h a m/s. Por lo tanto, debemos encontrar multiplicadores unitarios que relacionen: **i.** millas con metros y **ii.** horas con segundos. En el apéndice E (o en la segunda de forros de este libro) se encuentran las igualdades 1 mi = 1.609 km, 1 km = 1000 m y 1 h = 3600 s. Para garantizar que se realicen todas las cancelaciones deseadas, la conversión se plantea como sigue:

$$\begin{aligned} 763.0 \text{ mi/h} &= \left(763.0\,\frac{\cancel{\text{mi}}}{\cancel{\text{h}}}\right)\left(\frac{1.609 \cancel{\text{km}}}{1 \cancel{\text{mi}}}\right)\left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}}\right)\left(\frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}}\right) \\ &= 341.0 \text{ m/s} \end{aligned}$$

EVALUAR: Green estableció el primer récord de rapidez terrestre supersónica (la rapidez del sonido a través del aire es de aproximadamente 340 m/s). Este ejemplo muestra una útil regla práctica: la rapidez expresada en m/s es un poco menor que la mitad del valor en mi/h, y un poco menor que la tercera parte del valor expresado en km/h. Por ejemplo, la rapidez habitual en una carretera es aproximadamente de 30 m/s = 67 mi/h = 108 km/h, y la rapidez típica de una caminata es aproximadamente de 1.4 m/s = 3.1 mi/h = 5.0 km/h.

Ejemplo 1.2 Conversión de unidades de volumen



El diamante tallado más grande del mundo es la Primera Estrella de África (montado en el cetro real británico y guardado en la Torre de Londres). Su volumen es de 1.84 pulgadas cúbicas. ¿Cuál es su volumen en centímetros cúbicos? ¿Y en metros cúbicos?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: Aquí vamos a convertir las unidades de volumen de pulgadas cúbicas (in^3) tanto a centímetros cúbicos (cm^3) como a metros cúbicos (m^3). En el apéndice E se encuentra la igualdad 1 in = 2.540 cm, a partir de la cual se obtiene que $1 \text{ in}^3 = (2.54 \text{ cm})^3$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 1.84 \text{ in}^3 &= (1.84 \text{ in}^3)\left(\frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}}\right)^3 \\ &= (1.84)(2.54)^3 \frac{\cancel{\text{in}^3}\,\text{cm}^3}{\cancel{\text{in}^3}} = 30.2 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

En el apéndice F también encontramos que 1 m = 100 cm, de modo que

$$\begin{aligned} 30.2 \text{ cm}^3 &= (30.2 \text{ cm}^3)\left(\frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}}\right)^3 \\ &= (30.2)\left(\frac{1}{100}\right)^3 \frac{\cancel{\text{cm}^3}\,\text{m}^3}{\cancel{\text{cm}^3}} = 30.2 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \\ &= 3.02 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

EVALUAR: Siguiendo el patrón de estas conversiones, se puede ver que $1 \text{ in}^3 \approx 16 \text{ cm}^3$ y que $1 \text{ m}^3 \approx 60{,}000 \text{ in}^3$. Estas conversiones unitarias aproximadas serán útiles en referencias futuras.

1.5 Incertidumbre y cifras significativas

1.7 Este espectacular percance se debió a un error porcentual muy pequeño: recorrer unos cuantos metros de más, en un viaje de cientos de miles de metros.



Las mediciones siempre implican incertidumbre. Si medimos el espesor de la portada de una edición con cubierta dura de este libro con una regla común, la medición solo será confiable al milímetro más cercano, y el resultado será de 3 mm. Sería *erróneo* dar este resultado como 3.00 mm; dadas las limitaciones del instrumento de medición, no se sabría si el espesor real es de 3.00 mm, 2.85 mm o 3.11 mm. Pero si se usa un micrómetro, un instrumento que mide distancias de forma confiable al 0.01 mm más cercano, el resultado será 2.91 mm. La diferencia entre estas dos mediciones radica en su **incertidumbre**. La medida con micrómetro tiene menor incertidumbre y es más exacta. La incertidumbre también se llama **error**, porque indica la máxima diferencia probable entre el valor medido y el real. La incertidumbre o el error de un valor medido depende de la técnica de medición empleada.

A menudo indicamos la **exactitud** de un valor medido (es decir qué tanto creemos que se acerca al valor real) escribiendo el número, el símbolo ± y un segundo número que indica la incertidumbre de la medición. Si el diámetro de una varilla de acero se expresa como 56.47 ± 0.02 mm, esto implica que es poco probable que el valor real sea menor que 56.45 mm o mayor que 56.49 mm. En una notación abreviada de uso común, el número 1.6454(21) significa 1.6454 ± 0.0021. Los números entre paréntesis indican la incertidumbre de los dígitos finales del número principal.

También podemos expresar la exactitud en términos del **error fraccionario** o **error de aproximación** máximo probable (también llamado *incertidumbre fraccionaria* o *porcentaje de incertidumbre*). Un resistor rotulado como de "47 ohms ± 10%" probablemente tiene una resistencia real que difiere de 47 ohms en menos del 10% de 47 ohms, esto es, unos 5 ohms. Es probable que la resistencia esté entre 42 y 52 ohms. En el caso del diámetro de la varilla antes citada, el error fraccionario es de (0.02 mm)/(56.47 mm), que es aproximadamente 0.0004; el error porcentual es de (0.0004)(100%), o bien, de 0.04%. Incluso errores de aproximación muy pequeños llegan a ser muy significativos (figura 1.7).

En muchos casos, no se da explícitamente la incertidumbre de un número, sino que se indica con el número de dígitos informativos, o **cifras significativas**, en el valor medido. Nosotros dimos el espesor de la portada del libro como 2.91 mm, que tiene tres cifras significativas. Con esto queremos decir que los dos primeros dígitos son correctos, pero el tercero es incierto. El último dígito está en la posición de las centésimas, así que la incertidumbre sería de 0.01 mm. Dos valores con el *mismo* número de cifras significativas pueden tener *diferente* incertidumbre; una distancia expresada como 137 km también tiene tres cifras significativas, pero la incertidumbre es aproximadamente de 1 km.

Cuando usamos números con incertidumbre para calcular otros números, el resultado también es incierto. Al multiplicar o dividir números, el resultado no puede tener más cifras significativas que el factor con menos cifras significativas. Por ejemplo, $3.1416 \times 2.34 \times 0.58 = 4.3$. Cuando sumamos y restamos números, lo que importa es la ubicación del punto decimal, no el número de cifras significativas. Por ejemplo, 123.62 + 8.9 = 132.5. Aunque 123.62 tiene una incertidumbre aproximada de 0.01, la de 8.9 sería de 0.1, así que la suma debe tener esta misma incertidumbre (0.1) y escribirse como 132.5, no como 132.52. La tabla 1.2 resume las reglas para las cifras significativas.

Tabla 1.2 Uso de cifras significativas

Multiplicación o división:
El resultado no debe tener más cifras significativas que el número inicial con menos cifras significativas:

$$\frac{0.745 \times 2.2}{3.885} = 0.42$$

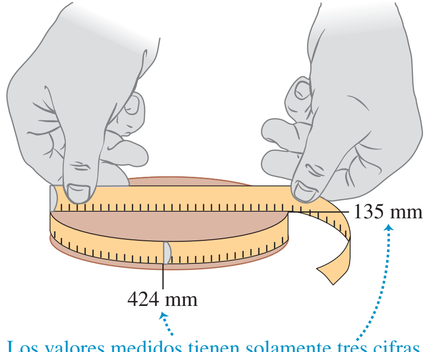
$$1.32578 \times 10^{7} \times 4.11 \times 10^{-3} = 5.45 \times 10^{4}$$

Suma o resta:
El número de cifras significativas se determina por el número inicial con mayor incertidumbre (es decir, el menor número de dígitos a la derecha del punto decimal):

$$27.153 + 138.2 - 11.74 = 153.6$$

Como una aplicación de estas ideas, suponga que quiere verificar el valor de π, la razón entre la circunferencia y el diámetro de un círculo. El valor verdadero de esta razón considerando hasta 10 dígitos es 3.141592654. Para probar esto, dibuje un círculo grande, y mida el diámetro y la circunferencia al milímetro más cercano: obtendrá los valores de 424 mm y 135 mm (figura 1.8), los cuales dividirá con su calculadora (424 mm)/(135 mm) para obtener 3.140740741. Esto parecería no coincidir con el valor real de π, pero tenga en cuenta que cada una de sus mediciones tiene tres cifras significativas, de manera que su valor medido de π solo puede tener tres cifras significativas y debería darse simplemente como 3.14. Dentro del límite de tres cifras significativas, este valor sí coincide con el valor verdadero.

1.8 Obtención del valor de π a partir de la circunferencia y el diámetro de un círculo.



Los valores medidos tienen solamente tres cifras significativas, por lo que su razón calculada (π) tiene también solo tres cifras significativas.

En los ejemplos y problemas de este libro, por lo regular daremos valores numéricos con tres cifras significativas, así que sus respuestas no deberán tener más de tres cifras significativas. (En el mundo real, muchos números incluso tienen una exactitud menor. Un velocímetro de automóvil, por ejemplo, únicamente suele tener dos cifras significativas). Incluso si usted realiza operaciones con una calculadora que despliega 10 dígitos, sería erróneo dar una respuesta de 10 dígitos, porque falsea la exactitud del resultado. Siempre redondee su respuesta final conservando solamente el número correcto de cifras significativas o, si hay duda, una más cuando mucho. En el ejemplo 1.1 habría sido erróneo dar la respuesta como 341.01861 m/s. Observe que, al reducir una respuesta así al número apropiado de cifras significativas, debemos *redondear*, no *eliminarlas*. La calculadora indica que 525 m/311 m es 1.688102894; con tres cifras significativas, esto es 1.69, no 1.68.

Al calcular con números muy grandes o muy pequeños, es mucho más fácil indicar las cifras significativas usando **notación científica**, también llamada **notación de potencias de 10**. La distancia de la Tierra a la Luna es aproximadamente de 384,000,000 m, pero esta forma del número no da idea de cuántas cifras significativas tiene. En vez de ello, recorremos el punto decimal ocho lugares a la izquierda (lo que equivale a dividir entre 10^8) y multiplicamos por 10^8. Es decir,

$$384{,}000{,}000 \text{ m} = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$$

De esta forma, es evidente que tenemos tres cifras significativas. El número 4.00×10^{-7} también tiene tres cifras significativas, aunque dos de ellas sean ceros. En notación científica, se acostumbra expresar la cantidad como un número entre 1 y 10 multiplicado por la potencia adecuada de 10.

Cuando aparecen un entero o una fracción en una ecuación general, tratamos ese número como si no tuviera incertidumbre. Por ejemplo, en la ecuación $v_x{}^2 = v_{0x}{}^2 + 2a_x(x - x_0)$, que es la ecuación (2.13) del capítulo 2, el coeficiente 2 es *exactamente* 2. Podríamos pensar que este coeficiente tiene un número infinito de cifras significativas (2.000000…). Lo mismo ocurre con el exponente 2 en $v_x{}^2$ y $v_{0x}{}^2$.

Por último, cabe señalar que **precisión** no es lo mismo que *exactitud*. Un reloj digital barato que indica la hora como 10:35:17 A.M. es muy *preciso* (la hora se da con segundos); pero si el reloj está atrasado varios minutos, este valor no es *muy exacto*. Por otro lado, el reloj de nuestro abuelo puede ser muy exacto (es decir, da la hora correcta) pero, si no tiene segundero, no será muy preciso. Una medición de gran calidad, es *tanto* precisa *como* exacta.

Ejemplo 1.3 Cifras significativas al multiplicar



La energía E en reposo de un objeto con masa m en reposo está dada por la famosa ecuación de Einstein $E = mc^2$, donde c es la rapidez de la luz en el vacío. Calcule E (con tres cifras significativas) para un electrón con $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg. La unidad del SI para E es el joule (J); $1 \text{ J} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La incógnita es la energía E. Nos dan el valor de la masa m; en la sección 1.3 (o en el apéndice F) vemos que la rapidez de la luz es $c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s.

EJECUTAR: Si sustituimos los valores de m y c en la ecuación de Einstein, tenemos

$$\begin{aligned} E &= (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s})^2 \\ &= (9.11)(2.99792458)^2(10^{-31})(10^8)^2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 \\ &= (81.87659678)(10^{[-31+(2\times 8)]}) \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 \\ &= 8.187659678 \times 10^{-14} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 \end{aligned}$$

Puesto que el valor de m se dio con solo tres cifras significativas, debemos redondear esto a

$$E = 8.19 \times 10^{-14} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 = 8.19 \times 10^{-14} \text{ J}$$

EVALUAR: Mientras que la energía en reposo contenida en un electrón parecería ridículamente pequeña, en la escala atómica es enorme. Comparemos nuestra respuesta con 10^{-19} J, que es la energía que un solo átomo gana o pierde durante una reacción química común: ¡la energía en reposo de un electrón es aproximadamente 1,000,000 de veces mayor! (Analizaremos el significado de la energía en reposo en el capítulo 37, en el volumen 2).

Evalúe su comprensión de la sección 1.5 La densidad de un material es igual a su masa dividida entre su volumen. ¿Qué densidad (en kg/m^3) tiene una roca de masa igual a 1.80 kg y cuyo volumen es 6.0×10^{-4} m^3? **i.** 3×10^3 kg/m^3; **ii.** 3.0×10^3 kg/m^3; **iii.** 3.00×10^3 kg/m^3; **iv.** 3.000×10^3 kg/m^3; **v.** cualquiera de estas respuestas; todas son matemáticamente equivalentes. ❙



1.6 Estimaciones y órdenes de magnitud

MasteringPHYSICS
PhET: Estimation

Hemos destacado la importancia de conocer la exactitud de los números que representan cantidades físicas. No obstante, a menudo incluso la estimación muy burda de una cantidad puede darnos información útil. A veces sabemos cómo calcular cierta cantidad, pero tenemos que estimar los datos necesarios para el cálculo. O bien, el cálculo podría ser demasiado complicado para efectuarse con exactitud, así que lo aproximamos. En ambos casos, nuestro resultado es una estimación, pero puede ser útil aun si tiene un factor de incertidumbre de dos, 10 o más. Con frecuencia, tales cálculos se denominan **estimaciones de orden de magnitud**. El gran físico nuclear italo-estadounidense Enrico Fermi (1901-1954) los llamaba "cálculos aproximados".

Los ejercicios 1.16 a 1.25 del final de este capítulo son del tipo de estimación u orden de magnitud. La mayoría requiere estimar los datos de entrada necesarios. No intente consultar muchos datos; estímelos tan bien como pueda. Aun cuando difieran por un factor de 10, los resultados serán útiles e interesantes.



Ejemplo 1.4 Estimación de orden de magnitud

Suponga que usted escribe una novela de aventuras, donde el héroe huye a otro país con mil millones de dólares en oro en la maleta. ¿Puede alguien llevar tanto oro? ¿Cabría tanto oro en una maleta?

SOLUCIÓN

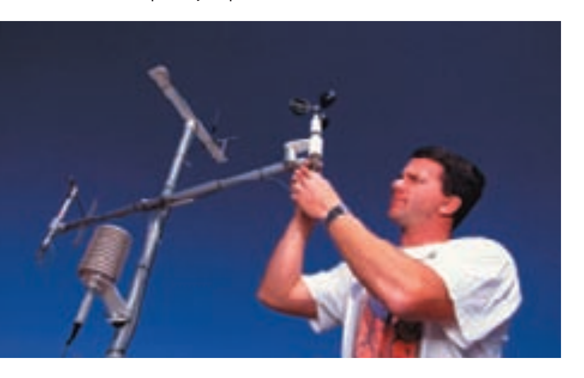
IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: El oro se vende a unos \$400 la onza. (El precio varió entre \$200 y \$1000 más o menos durante la década pasada). Una onza equivale a unos 30 gramos; será bueno recordarlo. De modo que \$10 en oro tienen una masa de $\frac{1}{40}$ onza, o aproximadamente un gramo. Así que mil millones (10^9) de dólares en oro son cien millones (10^8) de gramos o cien mil (10^5) kilogramos, que corresponden a un peso en unidades británicas de aproximadamente 200,000 lb, o 100 toneladas. ¡Ningún héroe podría cargar tanto peso en una maleta!

¿Cuál es el *volumen* de este oro en términos burdos? La densidad del oro es mucho mayor que la del agua (1 g/cm^3) o 1000 kg/m^3; si su densidad es 10 veces la del agua, esta cantidad de oro tendría un volumen de 10 m^3, muchas veces el volumen de una maleta.

EVALUAR: Es evidente que hay que rescribir la novela. Pruebe el cálculo ahora con una maleta llena de diamantes de cinco quilates (1 gramo), cada uno de los cuales vale \$100,000. ¿Funcionaría?

Evalúe su comprensión de la sección 1.6 ¿Podría estimar el número de dientes que hay en todas las bocas de su campus universitario (estudiantes, empleados y profesores)? (*Sugerencia:* ¿Cuántos dientes tiene usted en su boca? Cuéntelos). ❙

Aplicación Temperatura escalar, viento vectorial
Esta estación meteorológica mide la temperatura, una cantidad escalar que puede ser positiva o negativa (digamos, +20°C o −5°C), pero no tiene dirección. También mide la velocidad del viento, la cual es una cantidad vectorial que tiene tanto magnitud como dirección (por ejemplo, 15 km/h hacia el este).



1.7 Vectores y suma de vectores

Algunas cantidades físicas, como el tiempo, la temperatura, la masa y la densidad se pueden describir completamente con un solo número y una unidad. No obstante, en física muchas otras cantidades importantes están asociadas con una *dirección* y no pueden describirse con un solo número. Un ejemplo sencillo es el desplazamiento de un avión: debemos indicar no solo qué tan rápidamente se desplaza, sino también en qué dirección. La rapidez del avión combinada con su dirección constituye una cantidad llamada *velocidad*. Otro ejemplo es la *fuerza*, que en física es un empuje o un tirón aplicado a un cuerpo. Para describir plenamente una fuerza hay que indicar no solo su intensidad, sino también en qué dirección tira o empuja sobre un cuerpo.

Cuando una cantidad física se describe con un solo número, decimos que es una **cantidad escalar**. En cambio, una **cantidad vectorial** incluye tanto una **magnitud** (la cual indica “qué tanto” o “qué tan grande”) como una dirección en el espacio. Los cálculos que combinan cantidades escalares usan las operaciones aritméticas ordinarias. Por ejemplo, 6 kg + 3 kg = 9 kg, o 4×2 s = 8 s. No obstante, la combinación de vectores requiere un conjunto diferente de operaciones.

Para entender mejor los vectores y su combinación, comencemos con la cantidad vectorial más sencilla, el **desplazamiento**, que simplemente es un cambio en la posición de un objeto. El desplazamiento es una cantidad vectorial porque debemos establecer no solo qué tan lejos se mueve el objeto, sino también en qué dirección. Caminar 3 km al norte desde nuestra casa no nos lleva al mismo sitio que caminar 3 km al sureste; ambos desplazamientos tienen la misma magnitud, pero diferente dirección.

Con frecuencia representamos una cantidad vectorial, como el desplazamiento, con una sola letra, como $\vec{A}$ en la figura 1.9*a*. En este libro siempre simbolizaremos los vectores con ***letras negritas y cursivas con una flecha arriba***, como recordatorio de que las cantidades vectoriales tienen propiedades diferentes de las que manifiestan las cantidades escalares; la flecha nos recuerda que los vectores tienen dirección. Los símbolos manuscritos de los vectores *siempre* se escriben con una flecha arriba. Si no distingue entre cantidades vectoriales y escalares en su notación, probablemente tampoco lo hará en su mente, y se confundirá.

Al *dibujar* un vector, siempre trazamos una línea con punta de flecha. La longitud de la línea indica la magnitud del vector, y la dirección de la línea es la del vector. El desplazamiento siempre es un segmento recto dirigido del punto inicial al punto final, aunque la trayectoria real seguida por el objeto sea curva (figura 1.9*b*). Observe que el desplazamiento no se relaciona directamente con la *distancia* total recorrida. Si el objeto llegara a P_2 y volviera a P_1, el desplazamiento total sería *cero* (figura 1.9*c*).

Si dos vectores tienen la misma dirección, son **paralelos**; si tienen la misma magnitud *y* la misma dirección, son *iguales*, sea cual fuere su ubicación en el espacio. El vector $\vec{A}'$ de P_3 a P_4 en la figura 1.10 tiene igual longitud y dirección que el vector $\vec{A}$ de P_1 a P_2. Ambos desplazamientos son iguales, aunque parten de puntos distintos. Escribimos esto como $\vec{A}' = \vec{A}$ en la figura 1.10, usando un signo igual en negritas para resaltar que la igualdad de dos cantidades vectoriales no es lo mismo que la igualdad de dos cantidades escalares. Dos vectores son iguales solo si tienen la misma magnitud *y* la misma dirección.

Sin embargo, el vector $\vec{B}$ de la figura 1.10 no es igual a $\vec{A}$ porque su dirección es *opuesta*. Definimos el **negativo de un vector** como un vector con la misma magnitud que el original, pero con la dirección *opuesta*. El negativo de $\vec{A}$ se representa con $-\vec{A}$, y usamos un signo menos en negritas para destacar el carácter vectorial de las cantidades. Si $\vec{A}$ es de 87 m y apunta al sur, entonces $-\vec{A}$ es de 87 m y apunta al norte. Así, la relación entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en la figura 1.10 puede escribirse como $\vec{A} = -\vec{B}$ o $\vec{B} = -\vec{A}$. Si dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen direcciones opuestas, independientemente de que sus magnitudes sean iguales o no, decimos que son **antiparalelos**.

Frecuentemente representamos la *magnitud* de una cantidad vectorial (su longitud, en el caso de un vector desplazamiento) con la misma letra que usamos para el vector, pero en *cursiva normal sin* la flecha arriba. Una notación alternativa es el símbolo vectorial encerrado entre barras verticales en ambos lados:

$$(\text{Magnitud de } \vec{A}) = A = |\vec{A}| \tag{1.1}$$

La magnitud de una cantidad vectorial es una cantidad escalar (un número) y *siempre es positiva*. Cabe señalar también que un vector nunca puede ser igual a un escalar porque son cantidades de tipo distinto. ¡La expresión “$\vec{A}$ = 6 m” es tan absurda como “2 naranjas = 3 manzanas”!

Al dibujar diagramas con vectores, normalmente usamos una escala similar a la escala de los mapas. Por ejemplo, un desplazamiento de 5 km podría representarse con un vector de 1 cm de largo en un diagrama; y un desplazamiento de 10 km, con un vector de 2 cm. En un diagrama de vectores de velocidad, un vector que tiene 1 cm

1.9 Desplazamiento como una cantidad vectorial. Un desplazamiento siempre es un segmento recto dirigido desde el punto inicial hasta el punto final, aunque la trayectoria sea curva.

a) Un desplazamiento se representa con una flecha que apunta en la dirección del desplazamiento.

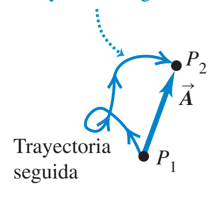
Posición final: P_2

Desplazamiento $\vec{A}$

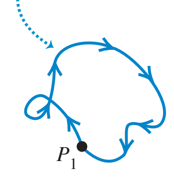
Posición inicial: P_1

Notación manuscrita: 

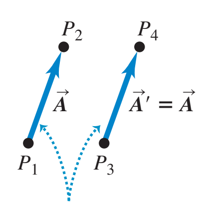
b) El desplazamiento depende solo de las posiciones inicial y final, no de la trayectoria seguida.



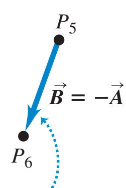
c) El desplazamiento total de un viaje redondo es 0, sin importar la distancia recorrida.



1.10 Significado de vectores que tienen la misma magnitud, y la misma dirección o dirección opuesta.



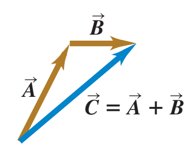
Los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{A}'$ son iguales porque tienen las mismas longitud y dirección.



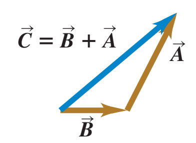
El desplazamiento $\vec{B}$ tiene la misma magnitud que $\vec{A}$ pero dirección opuesta; $\vec{B}$ es el negativo de $\vec{A}$.

1.11 Tres formas de sumar dos vectores. Como se muestra en *b*), el orden no importa en la suma de vectores, ya que esta es conmutativa.

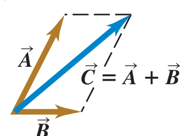
a) Podemos sumar dos vectores colocándolos punta con cola.



b) Al invertir el orden de la suma se obtiene el mismo resultado.



c) También podemos sumarlos construyendo un paralelogramo.



de longitud podría representar una velocidad cuya magnitud es de 5 m/s. Entonces, una velocidad de 20 m/s se representaría con un vector de 4 cm de largo.

Suma y resta de vectores

Suponga que una partícula experimenta un desplazamiento $\vec{A}$ seguido por un segundo desplazamiento $\vec{B}$. El resultado final es el mismo como si la partícula hubiera partido del mismo punto y experimentado un solo desplazamiento $\vec{C}$ (figura 1.11*a*). Llamamos a $\vec{C}$ **suma vectorial**, o **resultante**, de los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Expresamos esta relación simbólicamente como

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \tag{1.2}$$

El signo más en negritas destaca que sumar dos cantidades vectoriales requiere un proceso geométrico y no es lo mismo que sumar dos cantidades escalares como $2 + 3 = 5$. Al sumar vectores, por lo regular colocamos la *cola* del *segundo* vector en la *cabeza*, o *punta*, del *primer* vector (figura 1.11*a*).

Si efectuamos los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en orden inverso, primero $\vec{B}$ y luego $\vec{A}$ el resultado será el mismo (figura 1.11*b*) ya que se cumple la propiedad conmutativa. Entonces,

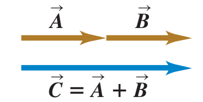
$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A} \quad \text{y} \quad \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \tag{1.3}$$

Esto indica que el orden de los términos en una suma de vectores no importa. En otras palabras, la suma de vectores sigue la ley conmutativa.

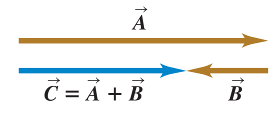
La figura 1.11*c* muestra otra representación de la suma vectorial: si dibujamos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con sus colas en el mismo punto, el vector $\vec{C}$ es la diagonal de un paralelogramo construido con $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como dos lados adyacentes.

1.12 *a*) Solo cuando dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos, la magnitud de su suma es igual a la suma de sus magnitudes: $C = A + B$. *b*) Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son antiparalelos, la magnitud de su suma es igual a la *diferencia* de sus magnitudes: $C = |A - B|$.

a) La suma de dos vectores paralelos



b) La suma de dos vectores antiparalelos



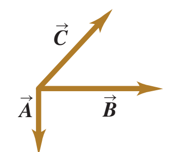
CUIDADO **Magnitudes en la suma de vectores** Es un error común suponer que si $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, entonces la magnitud C debería ser igual a la magnitud A más la magnitud B. En general, tal conclusión es *errónea*; para los vectores de la figura 1.11 es evidente que $C < A + B$. La magnitud de $\vec{A} + \vec{B}$ depende de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y también del ángulo que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (véase el problema 1.90). Solo en el caso especial en que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean *paralelos*, la magnitud de $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ es igual a la suma de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (figura 1.12*a*). En cambio, cuando los vectores son *antiparalelos* (figura 1.12*b*), la magnitud de $\vec{C}$ es la *diferencia* de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Si usted tiene el cuidado de distinguir entre cantidades escalares y vectoriales, evitará cometer errores en relación con la magnitud de una suma vectorial.

Si necesitamos sumar más de dos vectores, podemos sumar primero dos cualesquiera, sumar vectorialmente la resultante al tercero, y así sucesivamente. La figura 1.13*a* muestra tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$. En la figura 1.13*b*, se suman primero $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para obtener la suma vectorial $\vec{D}$; luego se suman los vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$ de la misma forma para obtener la resultante $\vec{R}$:

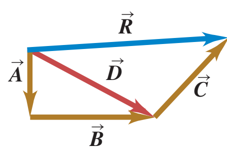
$$\vec{R} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{D} + \vec{C}$$

1.13 Varias construcciones para obtener la suma vectorial $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

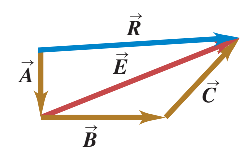
a) Para obtener la suma de estos tres vectores ...



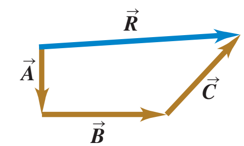
b) podríamos sumar $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para encontrar $\vec{D}$ y luego sumar $\vec{C}$ a $\vec{D}$ para obtener la suma final (resultante) $\vec{R}$, ...



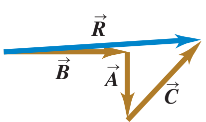
c) o podríamos sumar $\vec{B}$ y $\vec{C}$ para obtener $\vec{E}$ y después sumar $\vec{A}$ a $\vec{E}$ para calcular $\vec{R}$, ...



d) o podríamos sumar $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ para obtener $\vec{R}$ directamente ...



e) o podríamos sumar $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en cualquier otro orden y aun así obtener $\vec{R}$.



1.14 Para construir la diferencia vectorial $\vec{A} - \vec{B}$, puede colocar ya sea la cola de $-\vec{B}$ en la punta de $\vec{A}$ o bien, colocar los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ punta con punta.

Restar $\vec{B}$ de $\vec{A}$ ... ... es equivalente a sumar $-\vec{B}$ a $\vec{A}$. $\vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{A} - \vec{B}$

Con $\vec{A}$ y $-\vec{B}$ de punta a cola, $\vec{A} - \vec{B}$ es el vector desde la cola de $\vec{A}$ hasta la punta de $-\vec{B}$.

Con $\vec{A}$ y $\vec{B}$ punta con punta, $\vec{A} - \vec{B}$ es el vector desde la cola de $\vec{A}$ hasta la cola de $\vec{B}$.

Como alternativa, podemos sumar primero $\vec{B}$ y $\vec{C}$ para obtener el vector $\vec{E}$ (figura 1.13*c*), y luego sumar $\vec{A}$ y $\vec{E}$ para obtener $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} + \vec{E}$$

No necesitamos dibujar los vectores $\vec{D}$ y $\vec{E}$; basta con dibujar los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en sucesión, con la cola de cada uno en la punta del vector anterior. La suma vectorial $\vec{R}$ va de la cola del primer vector a la punta del último vector (figura 1.13*d*). El orden no importa; la figura 1.13*e* muestra un orden distinto, y el lector puede intentar otros. Vemos así que la suma de vectores obedece la ley asociativa.

Así como sumamos vectores, también podemos *restarlos*. Para aprender cómo, recuerde que el vector $-\vec{A}$ tiene la misma magnitud que $\vec{A}$ pero dirección opuesta. Definimos la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como la suma vectorial de $\vec{A}$ y $-\vec{B}$:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \tag{1.4}$$

La figura 1.14 muestra un ejemplo de resta de vectores.

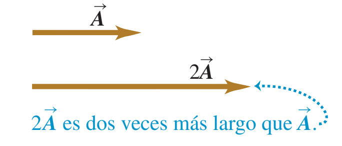
Una cantidad vectorial, como el desplazamiento, se puede multiplicar por una cantidad escalar (un número ordinario). El desplazamiento $2\vec{A}$ es un desplazamiento (cantidad vectorial) en la misma dirección que $\vec{A}$ pero dos veces más largo; esto equivale a sumar $\vec{A}$ a sí mismo (figura 1.15*a*). En general, cuando un vector $\vec{A}$ se multiplica por un escalar c, el resultado $c\vec{A}$ tiene magnitud $|c|A$ (el valor absoluto de c multiplicado por la magnitud del vector $\vec{A}$). Si c es positivo, $c\vec{A}$ tiene la misma dirección que $\vec{A}$; si c es negativo, $c\vec{A}$ tiene la dirección opuesta a la de $\vec{A}$. Así, $3\vec{A}$ es paralelo a $\vec{A}$, pero $-3\vec{A}$ es antiparalelo a $\vec{A}$ (figura 1.15*b*).

El escalar que multiplica un vector también puede ser una cantidad física. Por ejemplo, es posible que el lector conozca la relación $\vec{F} = m\vec{a}$; la fuerza neta $\vec{F}$ (una cantidad vectorial) que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de la masa m del cuerpo (una cantidad escalar) y su aceleración $\vec{a}$ (una cantidad vectorial). La dirección de $\vec{F}$ es la misma que la de $\vec{a}$ porque m es positiva, y la magnitud de $\vec{F}$ es igual a la masa m (que es positiva) multiplicada por la magnitud de $\vec{a}$. La unidad de fuerza es la unidad de masa multiplicada por la unidad de aceleración.

MasteringPHYSICS
PhET: Vector Addition

1.15 Multiplicación de un vector *a*) por un escalar positivo y *b*) por un escalar negativo.

a) Al multiplicar un vector por un escalar positivo, la magnitud (longitud) del vector cambia, pero no su dirección.



$2\vec{A}$ es dos veces más largo que $\vec{A}$.

b) Al multiplicar un vector por un escalar negativo, cambia su magnitud y se invierte su dirección.

$-3\vec{A}$ es tres veces más largo que $\vec{A}$ y apunta en la dirección contraria.

Ejemplo 1.5 Suma de dos vectores en ángulos rectos

Un esquiador de fondo viaja 1.00 km al norte y luego 2.00 km al este por un campo nevado horizontal. ¿A qué distancia y en qué dirección está con respecto al punto de partida?

SOLUCIÓN

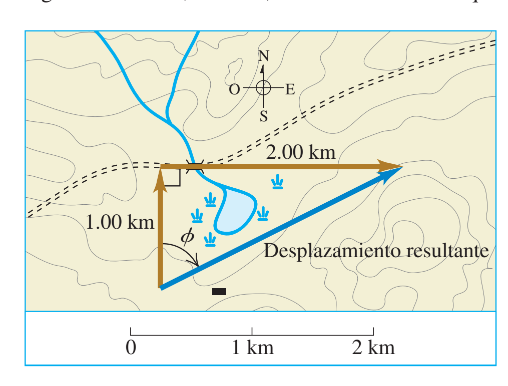
IDENTIFICAR y PLANTEAR: El problema implica combinar dos desplazamientos en ángulos rectos uno del otro. En este caso, las cantidades vectoriales se suman resolviendo un triángulo rectángulo, lo cual podemos hacer usando el teorema de Pitágoras y trigonometría básica. Las incógnitas son la distancia en línea recta y la dirección del esquiador con respecto a su punto de partida. La figura 1.16 es un diagrama a escala de los dos desplazamientos del esquiador y el desplazamiento neto resultante. Describimos la dirección desde el punto de partida con el ángulo ϕ (la letra griega fi). El desplazamiento parece ser de aproximadamente 2.4 km y la medición con un transportador indica que ϕ es aproximadamente igual a 63°.

EJECUTAR: La distancia del punto inicial al punto final es igual a la longitud de la hipotenusa:

$$\sqrt{(1.00 \text{ km})^2 + (2.00 \text{ km})^2} = 2.24 \text{ km}$$

Continúa

1.16 Diagrama vectorial, a escala, de un recorrido en esquí.



El ángulo ϕ se obtiene con un poco de trigonometría (del apéndice B):

$$\tan\phi = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{2.00\ \text{km}}{1.00\ \text{km}}$$

$$\phi = 63.4°$$

Podemos describir la dirección como 63.4° al este del norte o $90° - 63.4° = 26.6°$ al norte del este.

EVALUAR: Nuestras respuestas (2.24 km y $\phi = 63.4°$) están cerca de nuestras predicciones. En el caso más general de la suma de dos vectores que *no* están en ángulos rectos, se puede usar la ley de los cosenos en lugar del teorema de Pitágoras, y usar la ley de los senos para obtener el ángulo correspondiente a ϕ de este ejemplo. (Estas funciones trigonométricas se encuentran en el apéndice B). En la sección 1.8 veremos más técnicas de suma de vectores.

Evalúe su comprensión de la sección 1.7 Dos vectores de desplazamiento, $\vec{S}$ y $\vec{T}$, tienen magnitudes $S = 3$ m y $T = 4$ m. ¿Cuál de los siguientes resultados podría ser la magnitud de la diferencia vectorial $\vec{S} - \vec{T}$? (Puede haber más de una respuesta correcta). **i.** 9 m; **ii.** 7 m; **iii.** 5 m; **iv.** 1 m; **v.** 0 m; **vi.** −1 m.

1.8 Componentes de vectores

En la sección 1.7 sumamos vectores usando un diagrama a escala y las propiedades de los triángulos rectángulos. Al medir un diagrama se obtiene solo una exactitud muy limitada, y los cálculos con triángulos rectángulos funcionan únicamente cuando los dos vectores son perpendiculares. De modo que necesitamos entonces un método sencillo pero general para sumar vectores; este se conoce como el método de *componentes*.

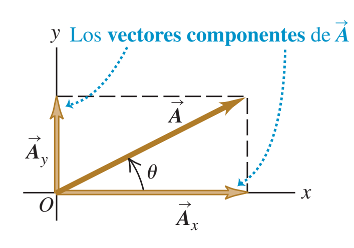
Para definir las componentes de un vector $\vec{A}$, partimos de un sistema rectangular de ejes de coordenadas (cartesiano) (figura 1.17*a*) y luego dibujamos el vector con su cola en O, el origen del sistema coordenado. Podemos representar cualquier vector en el plano xy como la suma de un vector paralelo al eje x y un vector paralelo al eje y. Estos dos vectores se identifican como $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ en la figura 1.17*a*; son los **vectores componentes** del vector $\vec{A}$, y su suma vectorial es igual a $\vec{A}$. Simbólicamente,

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \qquad (1.5)$$

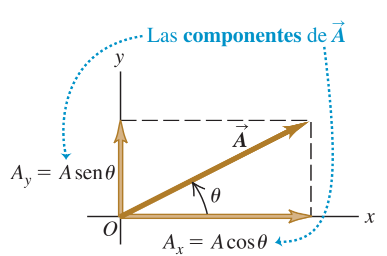
Puesto que cada vector componente se encuentra a lo largo de un eje de coordenadas, solo necesitamos un número para describirlo. Cuando el vector componente $\vec{A}_x$ apunta hacia la dirección x positiva, definimos el número A_x como la magnitud de $\vec{A}_x$. Cuando el vector componente $\vec{A}_x$ apunta en la dirección x negativa, definimos el número A_x como el negativo de dicha magnitud (la magnitud de una cantidad vectorial en sí misma nunca es negativa). Definimos el número A_y del mismo modo. Los dos números A_x y A_y son las **componentes** de $\vec{A}$ (figura 1.17*b*).

1.17 Representación de un vector $\vec{A}$ en términos de *a*) los vectores componentes $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ y *b*) las componentes A_x y A_y (en este caso, ambas son positivas).

a)



b)



CUIDADO **Las componentes no son vectores** Las componentes A_x y A_y de un vector $\vec{A}$ son tan solo números: *no* son vectores. Por ello, las simbolizamos con letra cursiva normal *sin* flecha arriba, en vez de la letra cursiva negrita con flecha que está reservada para los vectores.

Podemos calcular las componentes del vector $\vec{A}$ si conocemos la magnitud A y su dirección. Describiremos la dirección de un vector por su ángulo en relación con una dirección de referencia, que en la figura 1.17*b* es el eje x positivo, y el ángulo entre el vector $\vec{A}$ y el eje x positivo es θ (la letra griega theta).

Imagine que, originalmente, el vector $\vec{A}$ está sobre el eje $+x$ y que luego usted lo hace girar hasta su dirección correcta, como indica la flecha sobre el ángulo θ en la figura 1.17*b*. Si la rotación es del eje $+x$ hacia el eje $+y$, como indica la figura 1.17*b*, entonces θ es *positivo*; si la rotación es del eje $+x$ al eje $-y$, entonces θ es *negativo*. Por lo tanto, el eje $+y$ está a un ángulo de 90°, el eje $-x$ está a 180° y el eje $-y$ está a 270° (o $-90°$). Si medimos θ de esta manera, entonces por la definición de las funciones trigonométricas,

$$\frac{A_x}{A} = \cos\theta \quad \text{y} \quad \frac{A_y}{A} = \operatorname{sen}\theta$$
$$A_x = A\cos\theta \quad \text{y} \quad A_y = A\operatorname{sen}\theta \qquad (1.6)$$

(θ medido del eje $+x$ girando hacia el eje $+y$)

En la figura 1.17*b*, A_x y A_y son positivas. Esto es congruente con las ecuaciones (1.6); θ está en el primer cuadrante (entre 0° y 90°) y tanto el coseno como el seno de un ángulo en este cuadrante son positivos. En cambio, en la figura 1.18*a*, la componente B_x es negativa. Esto también es congruente con las ecuaciones (1.6); el coseno de un ángulo en el segundo cuadrante es negativo. La componente B_y es positiva (sen θ es positivo en el segundo cuadrante). En la figura 1.18*b*, tanto C_x como C_y son negativas (cos θ y sen θ son negativos en el tercer cuadrante).

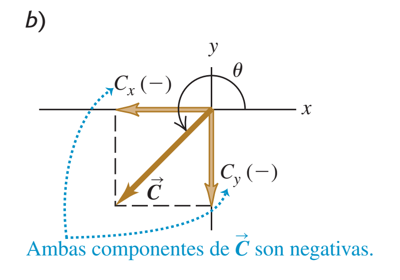
1.18 Las componentes de un vector pueden ser números positivos o negativos.

a)

B_y es positiva: su vector componente apunta en la dirección $+y$.

B_x es negativa: su vector componente apunta en la dirección $-x$.

b)



CUIDADO **Relación entre la magnitud de un vector y la dirección de sus componentes** Las ecuaciones (1.6) son correctas *solamente* si el ángulo θ se mide desde el eje x positivo, como se describe aquí. Si el ángulo del vector se da desde otra dirección de referencia, o se utiliza otro sentido de rotación, las relaciones son distintas. ¡Tenga cuidado! El ejemplo 1.6 ilustra este aspecto.

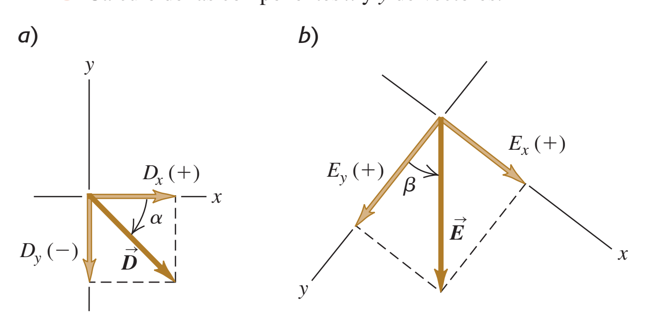
Ejemplo 1.6 Cálculo de componentes

a) ¿Cuáles son las componentes x y y del vector $\vec{D}$ en la figura 1.19*a*? La magnitud del vector es $D = 3.00$ m y el ángulo es $\alpha = 45°$. *b*) ¿Cuáles son las componentes x y y del vector $\vec{E}$ en la figura 1.19*b*? La magnitud del vector es $E = 4.50$ m y el ángulo $\beta = 37.0°$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Podemos usar las ecuaciones (1.6) para calcular las componentes de estos vectores, pero debemos tener cuidado, porque ninguno de los ángulos α o β de la figura 1.19 está medido del eje $+x$ al eje $+y$. A partir de la figura estimamos que las longitudes de las componentes en el inciso *a*) son aproximadamente de 2 m, y las del inciso *b*) son de 3 y 4 m. Los signos de las componentes están indicados en la figura.

1.19 Cálculo de las componentes x y y de vectores.



EJECUTAR: *a*) El ángulo entre $\vec{D}$ y el eje x positivo es α (la letra griega alfa), medido hacia el eje y *negativo*. Por lo tanto, en las ecuaciones (1.6) debemos usar el ángulo $\theta = -\alpha = -45°$. Entonces obtenemos

$$D_x = D\cos\theta = (3.00\text{ m})(\cos(-45°)) = +2.1\text{ m}$$
$$D_y = D\operatorname{sen}\theta = (3.00\text{ m})(\operatorname{sen}(-45°)) = -2.1\text{ m}$$

Si por descuido hubiéramos usado $\theta = +45°$ en las ecuaciones (1.6), habríamos obtenido D_y con el signo equivocado.

b) El eje x y el eje y forman ángulos rectos en la figura 1.19*b*, de modo que no importa que no se encuentren en posición horizontal y vertical, respectivamente. Pero para usar las ecuaciones (1.6), debemos usar el ángulo $\theta = 90.0° - \beta = 90.0° - 37.0° = 53.0°$. Luego, obtenemos

$$E_x = E\cos 53.0° = (4.50\text{ m})(\cos 53.0°) = +2.71\text{ m}$$
$$E_y = E\operatorname{sen} 53.0° = (4.50\text{ m})(\operatorname{sen} 53.0°) = +3.59\text{ m}$$

EVALUAR: Las respuestas en ambos incisos están cerca de nuestras predicciones. Sin embargo, pregúntese esto: ¿por qué las respuestas del inciso *a*) tienen solo dos cifras significativas?

Cálculos de vectores usando componentes

Utilizar componentes hace relativamente fáciles diversos cálculos que implican vectores. Veamos tres ejemplos importantes.

1. Cálculo de la magnitud y la dirección de un vector a partir de sus componentes. Podemos describir un vector plenamente dando su magnitud y dirección, o bien, sus componentes x y y. Las ecuaciones (1.6) indican cómo obtener las componentes si conocemos la magnitud y la dirección. También podemos invertir el proceso y obtener la magnitud y la dirección a partir de las componentes. Aplicando el teorema de Pitágoras a la figura 1.17*b*, vemos que la magnitud de un vector $\vec{A}$ es

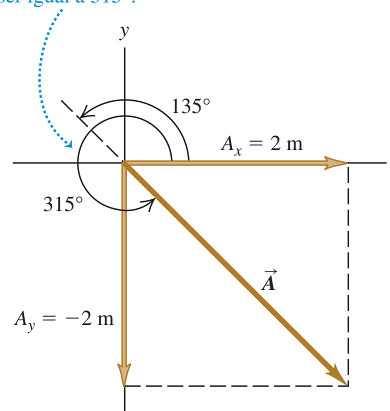
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{1.7}$$

(Siempre tomamos la raíz positiva). La ecuación (1.7) es válida para cualesquiera de los ejes x y y, siempre y cuando sean perpendiculares entre sí. La expresión para la dirección vectorial proviene de la definición de la tangente de un ángulo. Si medimos θ como un ángulo positivo desde el eje $+x$ hacia el eje $+y$ (como en la figura 1.17*b*), entonces

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \quad \text{y} \quad \theta = \arctan\frac{A_y}{A_x} \tag{1.8}$$

Siempre usaremos la notación arctan para la función tangente inversa. También suele usarse la notación $\tan^{-1}$, y una calculadora podría tener una tecla INV o 2ND para usarse con la tecla TAN.

1.20 Diagrama de vectores que indica los signos de sus componentes x y y.



CUIDADO **Cálculo de la dirección de un vector a partir de sus componentes** Hay un pequeño inconveniente en el uso de las ecuaciones (1.8) para obtener θ: dos ángulos cualesquiera que difieran 180° tienen la misma tangente. Suponga que $A_x = 2$ m y $A_y = -2$ m como en la figura 1.20; entonces, $\tan\theta = -1$. Sin embargo, hay dos ángulos con tangente −1: 135° y 315° (o bien, −45°). Para decidir cuál es correcto, debemos examinar las componentes individuales. Dado que A_x es positiva y A_y es negativa, el ángulo debe estar en el cuarto cuadrante; así que $\theta = 315°$ (o bien, −45°) es el valor correcto. La mayoría de las calculadoras de bolsillo dan arctan (−1) = −45°. En este caso es lo correcto, pero si tuviéramos $A_x = -2$ m y $A_y = 2$ m, entonces el ángulo correcto sería 135°. Asimismo, si A_x y A_y son negativas, la tangente es positiva, por lo que el ángulo estará en el tercer cuadrante. *Siempre* debe hacerse un dibujo, como la figura 1.20, para verificar cuál de las dos posibilidades es la correcta.

2. Multiplicación de un vector por un escalar. Si multiplicamos un vector $\vec{A}$ por un escalar c, cada componente del producto $\vec{D} = c\vec{A}$ es el producto de c por la componente correspondiente de $\vec{A}$:

$$D_x = cA_x \qquad D_y = cA_y \qquad (\text{componentes de } \vec{D} = c\vec{A}) \tag{1.9}$$

Por ejemplo, la ecuación (1.9) indica que cada componente del vector $2\vec{A}$ es dos veces mayor que la componente correspondiente del vector $\vec{A}$, de manera que $2\vec{A}$ está en la misma dirección que $\vec{A}$ pero tiene el doble de magnitud. Cada componente del vector $-3\vec{A}$ es tres veces mayor que la componente correspondiente del vector $\vec{A}$ pero tiene el signo contrario, así que $-3\vec{A}$ está en la dirección opuesta de $\vec{A}$ y su magnitud es tres veces mayor. Por lo tanto, las ecuaciones (1.9) son congruentes con nuestro estudio de la sección 1.7 en relación con la multiplicación de un vector por un escalar (véase la figura 1.15).

3. Uso de componentes para calcular la suma de vectores (resultante) de dos o más vectores. La figura 1.21 muestra dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y su resultante $\vec{R}$, junto con las componentes x y y de los tres vectores. En el diagrama se observa que la componente R_x de la resultante es simplemente la suma $(A_x + B_x)$ de las compo-

nentes x de los vectores que se están sumando. Lo mismo sucede con las componentes y. En símbolos,

$$R_x = A_x + B_x \qquad R_y = A_y + B_y \qquad (\text{componentes de } \vec{R} = \vec{A} + \vec{B}) \tag{1.10}$$

La figura 1.21 muestra este resultado para el caso en que las componentes A_x, A_y, B_x y B_y son positivas. Dibuje diagramas adicionales para verificar que las ecuaciones (1.10) son válidas *sin* importar el signo de las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Si conocemos las componentes de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, cualesquiera usando las ecuaciones (1.6), podríamos calcular las componentes de la resultante $\vec{R}$. Luego, si necesitamos la magnitud y la dirección de $\vec{R}$, las obtendremos de las ecuaciones (1.7) y (1.8), cambiando las A por las R.

Podemos ampliar este procedimiento para calcular la suma de cualquier cantidad de vectores. Si $\vec{R}$ es la suma vectorial de $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}, \ldots$, entonces, las componentes de $\vec{R}$ son

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x + C_x + D_x + E_x + \cdots \\ R_y &= A_y + B_y + C_y + D_y + E_y + \cdots \end{aligned} \tag{1.11}$$

Solo hemos hablado de vectores que están en el plano xy; no obstante, el método de componentes funciona también para vectores con cualquier dirección en el espacio. Podemos introducir un eje z perpendicular al plano xy; entonces, en general, un vector $\vec{A}$ tiene componentes A_x, A_y y A_z en las tres direcciones de coordenadas. La magnitud A está dada por

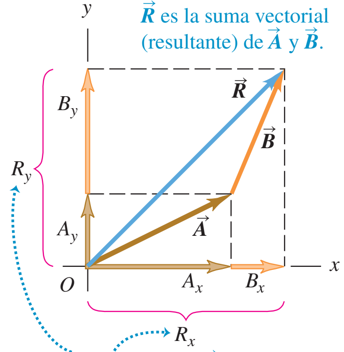
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.12}$$

Siempre tomamos la raíz positiva. Además, las ecuaciones (1.11) para las componentes de la suma vectorial $\vec{R}$ tienen un elemento adicional:

$$R_z = A_z + B_z + C_z + D_z + E_z + \cdots$$

Nos hemos enfocado en la suma de vectores de *desplazamiento*, pero el método es aplicable a todas las cantidades vectoriales. Cuando estudiemos el concepto de fuerza en el capítulo 4, veremos que las fuerzas son vectores que obedecen las mismas reglas de la suma vectorial que se aplican al desplazamiento.

1.21 Obtención de la suma vectorial (resultante) de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ usando componentes.



Estrategia para resolver problemas 1.3 Suma de vectores

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Determine cuál es la incógnita. Podría ser la magnitud de la suma vectorial, la dirección o ambas.

PLANTEAR *el problema:* Dibuje los vectores que va a sumar y los ejes de coordenadas adecuados. Coloque la cola del primer vector en el origen de las coordenadas; coloque la cola del segundo vector en la punta del primer vector, y así sucesivamente. Trace la suma vectorial $\vec{R}$ desde la cola del primer vector (en el origen) hasta la punta del último. Use su dibujo para estimar la magnitud y la dirección de $\vec{R}$. Elija las herramientas matemáticas que usará para realizar el cálculo completo: las ecuaciones (1.6) para obtener las componentes de los vectores dados y, si es necesario, las ecuaciones (1.11) para obtener las componentes de la suma vectorial, las ecuaciones (1.12) para determinar su magnitud, y las ecuaciones (1.8) para conocer su dirección.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Obtenga las componentes x y y de cada vector y anote los resultados en una tabla, como en el ejemplo 1.7 que se presenta a continuación. Si un vector se describe con su magnitud A y su ángulo θ, medido del eje $+x$ al eje $+y$, las componentes están dadas por las ecuaciones 1.6:

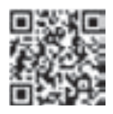
$$A_x = A\cos\theta \qquad A_y = A\,\text{sen}\,\theta$$

Si los ángulos de los vectores se dan de otra forma, quizá con otra dirección de referencia, conviértalos en ángulos medidos desde el eje $+x$ como en el ejemplo 1.6.

2. Sume algebraicamente las componentes x, incluyendo los signos, para obtener R_x, la componente x de la resultante. Haga lo mismo con las componentes y para obtener R_y. Véase el ejemplo 1.7.
3. Calcule la magnitud de R y la dirección θ de la resultante usando las ecuaciones (1.7) y (1.8):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \theta = \arctan\frac{R_y}{R_x}$$

EVALUAR *la respuesta:* Verifique que la magnitud y dirección de la suma vectorial concuerden con las estimaciones que hizo a partir de su dibujo. El valor de θ obtenido con una calculadora puede tener un error de 180°; el dibujo indicará el valor correcto.



Ejemplo 1.7 Suma de vectores usando sus componentes

Tres participantes en un concurso de TV están colocados en el centro de un campo plano grande. A cada uno se le proporciona una regla graduada de un metro, un compás, una calculadora, una pala y (en diferente orden para cada concursante) los siguientes desplazamientos:

$\vec{A}$: 72.4 m, 32.0° al este del norte

$\vec{B}$: 57.3 m, 36.0° al sur del oeste

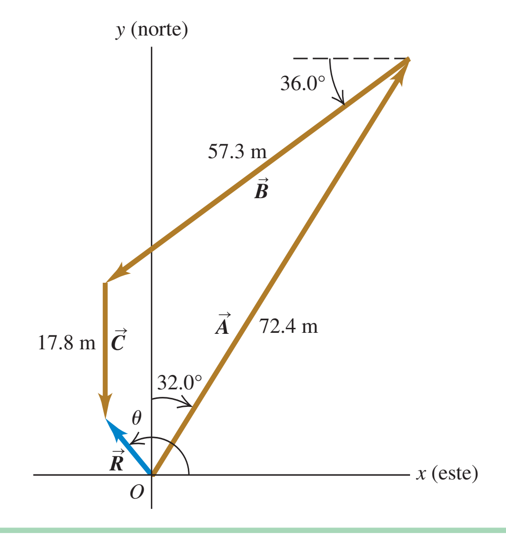
$\vec{C}$: 17.8 m al sur

Los tres desplazamientos llevan al punto donde están enterradas las llaves de un Porsche nuevo. Dos concursantes comienzan a medir de inmediato; sin embargo, el ganador *calcula* primero a dónde debe ir. ¿Qué calculó?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El objetivo es encontrar la suma (resultante) de los tres desplazamientos, así que se trata de un problema de suma de vectores. La situación se muestra en la figura 1.22. Elegimos el eje $+x$ como el este, y el eje $+y$ como el norte. Podemos estimar en el diagrama que la resultante $\vec{R}$ mide aproximadamente unos 10 m, 40° al oeste del norte (lo cual corresponde a $\theta \approx 130°$).

1.22 Tres desplazamientos sucesivos $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ y el desplazamiento resultante (suma vectorial) $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.



EJECUTAR: Los ángulos de los vectores, medidos del eje $+x$ al eje $+y$, son (90.0° − 32.0°) = 58.0°, (180.0° + 36.0°) = 216.0° y 270.0°, respectivamente. Ahora podemos usar las ecuaciones (1.6), para obtener las componentes de $\vec{A}$:

$$A_x = A\cos\theta_A = (72.4\text{ m})(\cos 58.0°) = 38.37\text{ m}$$

$$A_y = A\,\text{sen}\,\theta_A = (72.4\text{ m})(\text{sen }58.0°) = 61.40\text{ m}$$

Hemos conservado una cifra significativa extra en las componentes; esperaremos hasta el final para redondear al número correcto de cifras significativas. La siguiente tabla muestra las componentes de todos los desplazamientos, su suma y los demás cálculos.

Distancia	Ángulo	Componente x	Componente y
$A = 72.4$ m	58.0°	38.37 m	61.40 m
$B = 57.3$ m	216.0°	−46.36 m	−33.68 m
$C = 17.8$ m	270.0°	0.00 m	−17.80 m
		$R_x = -7.99$ m	$R_y = 9.92$ m

$$R = \sqrt{(-7.99\text{ m})^2 + (9.92\text{ m})^2} = 12.7\text{ m}$$

$$\theta = \arctan\frac{9.92\text{ m}}{-7.99\text{ m}} = -51°$$

La comparación con la figura 1.22 indica que el ángulo calculado es completamente diferente por 180º. El valor correcto es $\theta = 180° - 51 = 129°$, o bien, 39° al oeste del norte.

EVALUAR: Los valores que calculamos para R y θ concuerdan con nuestras estimaciones. Observe cómo el diagrama de la figura 1.22 facilitó la eliminación del error de 180° en la dirección de la resultante.



Ejemplo 1.8 Suma vectorial sencilla en tres dimensiones

Un avión despega y viaja 10.4 km al oeste, 8.7 km al norte y 2.1 km hacia arriba. ¿A qué distancia está de su punto de partida?

SOLUCIÓN

Sea el eje $+x$ el este, el eje $+y$ el norte y el eje $+z$ hacia arriba. Entonces, las componentes del desplazamiento del avión son $A_x = -10.4$ km, $A_y = 8.7$ km y $A_z = 2.1$ km; la ecuación (1.12) da la magnitud del desplazamiento

$$A = \sqrt{(-10.4\text{ km})^2 + (8.7\text{ km})^2 + (2.1\text{ km})^2} = 13.7\text{ km}$$

Evalúe su comprensión de la sección 1.8 Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están en el plano *xy*. *a*) ¿Es posible que $\vec{A}$ tenga la misma magnitud que $\vec{B}$ pero componentes diferentes? *b*) ¿Es posible que $\vec{A}$ tenga las mismas componentes que $\vec{B}$ pero una magnitud diferente?

1.9 Vectores unitarios

Un **vector unitario** es un vector con magnitud 1, sin unidades. Su única finalidad consiste en *direccionar*, es decir, señalar una dirección en el espacio. Los vectores unitarios proporcionan una notación conveniente para muchas expresiones que implican componentes de vectores. Siempre incluiremos un acento circunflejo o "sombrero" (^) sobre el símbolo de un vector unitario para distinguirlo de los vectores ordinarios cuya magnitud podría ser 1 o alguna otra.

En un sistema de coordenadas *x-y* podemos definir un vector unitario $\hat{\imath}$ que apunte en la dirección del eje $+x$ y un vector unitario $\hat{\jmath}$ que apunte en la dirección del eje $+y$ (figura 1.23*a*). Así, podemos expresar la relación entre los vectores componentes y las componentes, descrita al principio de la sección 1.8, como sigue:

$$\begin{aligned} \vec{A}_x &= A_x\hat{\imath} \\ \vec{A}_y &= A_y\hat{\jmath} \end{aligned} \tag{1.13}$$

De forma similar, escribimos un vector $\vec{A}$ en términos de sus componentes como

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \tag{1.14}$$

Las ecuaciones (1.13) y (1.14) son ecuaciones vectoriales; cada término, como $A_x\hat{\imath}$, es una cantidad vectorial (figura 1.23*b*).

Usando vectores unitarios, podemos expresar la resultante $\vec{R}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como sigue:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \\ \vec{B} &= B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} \\ \vec{R} &= \vec{A} + \vec{B} \\ &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}) + (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath}) \\ &= (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} \\ &= R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} \end{aligned} \tag{1.15}$$

La ecuación (1.15) replantea el contenido de las ecuaciones (1.10) en forma de una sola ecuación vectorial, en vez de dos ecuaciones de componentes.

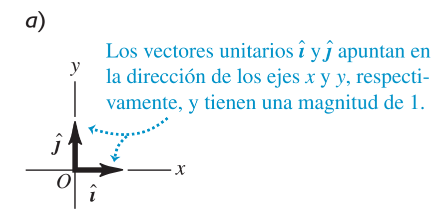
Si no todos los vectores están en el plano *xy*, necesitamos una tercera componente. Introducimos un tercer vector unitario $\hat{k}$ que apunta en la dirección del eje $+z$ (figura 1.24). Las ecuaciones (1.14) y (1.15) se convierten en

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \\ \vec{B} &= B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k} \end{aligned} \tag{1.16}$$

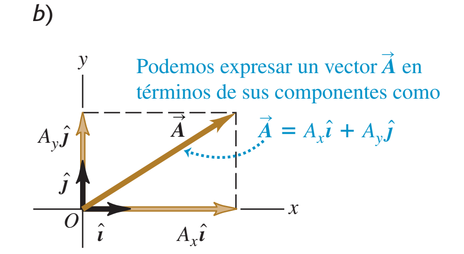
$$\begin{aligned} \vec{R} &= (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k} \\ &= R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} + R_z\hat{k} \end{aligned} \tag{1.17}$$

1.23 *a*) Los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$. *b*) Expresión de un vector $\vec{A}$ en términos de sus componentes.

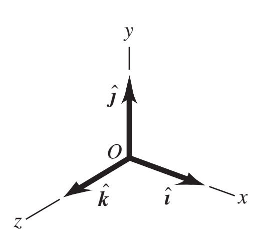
a)



b)



1.24 Los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$.





Ejemplo 1.9 Uso de vectores unitarios

Dados los dos desplazamientos

$$\vec{D} = (6.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath} - 1.00\hat{k})\ \text{m} \quad \text{y}$$

$$\vec{E} = (4.00\hat{\imath} - 5.00\hat{\jmath} + 8.00\hat{k})\ \text{m}$$

obtenga la magnitud del desplazamiento $2\vec{D} - \vec{E}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Multiplicamos el vector $\vec{D}$ por 2 (un escalar) y luego restamos el vector $\vec{E}$ del resultado, para obtener el vector $\vec{F} = 2\vec{D} - \vec{E}$. La ecuación (1.9) indica que para multiplicar $\vec{D}$ por 2, se multiplica cada una de sus componentes por 2. Después, se usa la ecuación (1.17) para efectuar la resta; recuerde de la sección 1.7 que restar un vector es lo mismo que sumar el negativo de ese vector.

EJECUTAR: Tenemos

$$\begin{aligned}\vec{F} &= 2(6.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath} - 1.00\hat{k})\ \text{m} - (4.00\hat{\imath} - 5.00\hat{\jmath} + 8.00\hat{k})\ \text{m}\\ &= [(12.00 - 4.00)\hat{\imath} + (6.00 + 5.00)\hat{\jmath} + (-2.00 - 8.00)\hat{k}]\ \text{m}\\ &= (8.00\hat{\imath} + 11.00\hat{\jmath} - 10.00\hat{k})\ \text{m}\end{aligned}$$

De la ecuación (1.12), la magnitud de $\vec{F}$ es

$$\begin{aligned}F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\\ &= \sqrt{(8.00\ \text{m})^2 + (11.00\ \text{m})^2 + (-10.00\ \text{m})^2}\\ &= 16.9\ \text{m}\end{aligned}$$

EVALUAR: Nuestra respuesta es del mismo orden de magnitud que las componentes más grandes implicadas en la suma. No esperaríamos que nuestra respuesta fuera mucho mayor que esto, pero podría ser mucho más pequeña.

Evalúe su comprensión de la sección 1.9 Coloque en orden de magnitud los siguientes vectores, donde el vector más grande sea el primero. **i.** $\vec{A} = (3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k})$ m; **ii.** $\vec{B} = (-3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k})$ m; **iii.** $\vec{C} = (3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 2\hat{k})$ m; **iv.** $\vec{D} = (3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 2\hat{k})$ m.

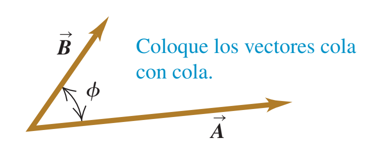


1.10 Productos de vectores

Hemos visto cómo la suma de vectores es consecuencia natural de combinar desplazamientos, y veremos lo útil que resulta en el cálculo de muchas otras cantidades vectoriales. También podemos expresar muchas relaciones físicas usando *productos* de vectores. Los vectores no son números ordinarios, así que no podemos aplicarles directamente la multiplicación ordinaria. Definiremos dos tipos de productos de vectores. El primero, llamado *producto escalar*, produce un resultado escalar. El segundo, el *producto vectorial*, genera otro vector.

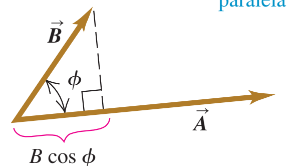
1.25 Cálculo del producto escalar de dos vectores, $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi$.

a)



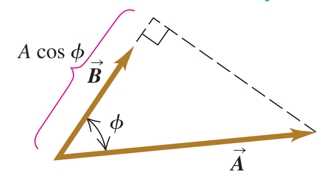
b) $\vec{A}\cdot\vec{B}$ es igual a $A(B\cos\phi)$.

(Magnitud de $\vec{A}$) por (Componente de $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$)



c) $\vec{A}\cdot\vec{B}$ también es igual a $B(A\cos\phi)$.

(Magnitud de $\vec{B}$) por (Componente de $\vec{A}$ paralela a $\vec{B}$)



Producto escalar

El **producto escalar** de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se denota con $\vec{A}\cdot\vec{B}$. Debido a esta notación, el producto escalar también se denomina **producto punto**. Aun cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean vectores, la cantidad $\vec{A}\cdot\vec{B}$ es un escalar.

Para definir el producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ dibujamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con su cola en el mismo punto (figura 1.25*a*). El ángulo ϕ (la letra griega fi) puede tomar valores entre 0° y 180°. La figura 1.25*b* muestra la proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección de $\vec{A}$; esta proyección es la componente de $\vec{B}$ sobre la proyección de $\vec{A}$ y es igual a $B\cos\phi$. (Podemos obtener componentes en cualquier dirección conveniente, no solo en los ejes x y y). Definimos $\vec{A}\cdot\vec{B}$ como la magnitud de $\vec{A}$ multiplicada por la componente de $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$. Expresado en la forma de ecuación,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\phi \qquad \text{(definición del producto escalar (punto))} \qquad (1.18)$$

También podemos definir $\vec{A}\cdot\vec{B}$ como la magnitud de $\vec{B}$ multiplicada por la componente de $\vec{A}$ paralela a $\vec{B}$, como en la figura 1.25*c*. Así, $\vec{A}\cdot\vec{B} = B(A\cos\phi) = AB\cos\phi$, que es lo mismo que la ecuación (1.18).

El producto escalar es una cantidad escalar, no un vector, y puede ser positivo, negativo o cero. Si ϕ está entre 0° y 90°, $\cos\phi > 0$ y el producto escalar es positivo

(figura 1.26*a*). Cuando ϕ está entre 90° y 180°, de modo que cos $\phi < 0$, la componente de $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$ es negativa, y $\vec{A} \cdot \vec{B}$ (producto punto o producto escalar) también es negativo (figura 1.26*b*). Por último, cuando $\phi = 90°$, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ (figura 1.26*c*). *El producto escalar de dos vectores perpendiculares siempre es cero.*

Para dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, cualesquiera $AB \cos \phi = BA \cos \phi$. Esto significa que $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$. El producto escalar obedece la ley conmutativa de la multiplicación; el orden de los dos vectores no importa.

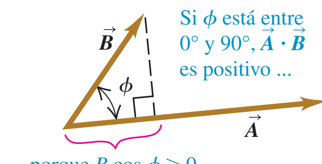
Usaremos el producto escalar en el capítulo 6 para describir el trabajo realizado por una fuerza. Si una fuerza constante $\vec{F}$ se aplica a un cuerpo que sufre un desplazamiento $\vec{s}$, el trabajo W (una cantidad escalar) realizado por la fuerza es

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

El trabajo efectuado por la fuerza es positivo si el ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{s}$ está entre 0° y 90°, negativo si el ángulo está entre 90° y 180°, y cero si $\vec{F}$ y $\vec{s}$ son perpendiculares. (Este es otro ejemplo de un término con significado especial en física; en el lenguaje cotidiano, "trabajo" no es algo que pueda ser positivo o negativo). En capítulos posteriores usaremos el producto escalar para varios fines, desde calcular potencial eléctrico hasta determinar el efecto de campos magnéticos variables sobre circuitos eléctricos.

1.26 El producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi$ puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo del ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

a)



Cálculo del producto escalar usando componentes

Podemos calcular el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ directamente si conocemos las componentes x, y y z de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Para saber cómo se hace, obtenemos primero los productos escalares de los vectores unitarios. Esto es fácil, pues $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ tienen magnitud 1 y son perpendiculares entre sí. Por la ecuación (1.18), tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\imath} \cdot \hat{\imath} &= \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = (1)(1)\cos 0° = 1 \\ \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} &= \hat{\imath} \cdot \hat{k} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = (1)(1)\cos 90° = 0 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Ahora expresamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en términos de sus componentes, realizamos el producto escalar entre estos vectores, así como entre los vectores unitarios:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}) \cdot (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}) \\ &= A_x\hat{\imath} \cdot B_x\hat{\imath} + A_x\hat{\imath} \cdot B_y\hat{\jmath} + A_x\hat{\imath} \cdot B_z\hat{k} \\ &\quad + A_y\hat{\jmath} \cdot B_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \cdot B_y\hat{\jmath} + A_y\hat{\jmath} \cdot B_z\hat{k} \\ &\quad + A_z\hat{k} \cdot B_x\hat{\imath} + A_z\hat{k} \cdot B_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \cdot B_z\hat{k} \\ &= A_xB_x\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} + A_xB_y\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} + A_xB_z\hat{\imath} \cdot \hat{k} \\ &\quad + A_yB_x\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} + A_yB_y\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} + A_yB_z\hat{\jmath} \cdot \hat{k} \\ &\quad + A_zB_x\hat{k} \cdot \hat{\imath} + A_zB_y\hat{k} \cdot \hat{\jmath} + A_zB_z\hat{k} \cdot \hat{k} \end{aligned} \tag{1.20}$$

Por las ecuaciones (1.19), vemos que seis de estos nueve términos son cero, y los otros tres que quedan simplemente dan

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad \text{(producto escalar (punto) en términos de sus componentes)} \tag{1.21}$$

Por lo tanto, *el producto escalar de dos vectores es la suma de los productos de sus respectivas componentes.*

El producto escalar permite calcular directamente el ángulo ϕ entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cualesquiera cuyas componentes conocemos. En este caso, obtenemos el producto escalar de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con la ecuación (1.21). El ejemplo 1.11 de la siguiente página muestra cómo hacer esto.



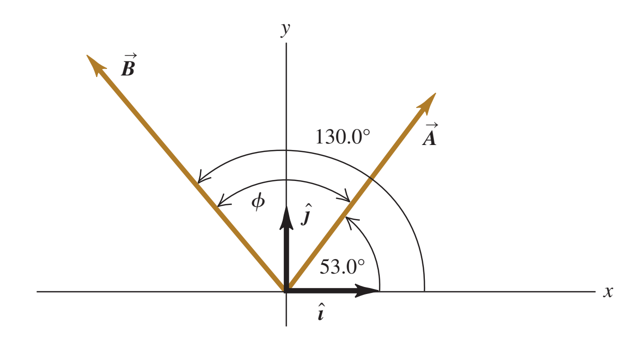
Ejemplo 1.10 Cálculo de un producto escalar

Obtenga el producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ de los dos vectores de la figura 1.27. Las magnitudes de los vectores son $A = 4.00$ y $B = 5.00$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Podemos calcular el producto escalar de dos formas: usando las magnitudes de los vectores y el ángulo entre ellos (ecuación 1.18); o usando las componentes de los vectores (ecuación 1.21). Lo haremos de las dos formas, y los resultados se verificarán uno con otro.

1.27 Dos vectores en dos dimensiones.



EJECUTAR: El ángulo entre los dos vectores es $\phi = 130.0° - 53.0° = 77.0°$, así que la ecuación (1.18) nos da

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi = (4.00)(5.00)\cos 77.0° = 4.50$$

Para usar la ecuación (1.21) necesitamos calcular primero las componentes de los vectores. Los ángulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se dan con respecto al eje $+x$, medidos hacia el eje $+y$, de modo que podemos usar las ecuaciones (1.6):

$$A_x = (4.00)\cos 53.0° = 2.407$$
$$A_y = (4.00)\operatorname{sen} 53.0° = 3.195$$
$$B_x = (5.00)\cos 130.0° = -3.214$$
$$B_y = (5.00)\operatorname{sen} 130.0° = 3.830$$

Como en el ejemplo 1.7, dejamos una cifra significativa de más en las componentes y redondearemos al final. La ecuación (1.21) ahora nos da

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$
$$= (2.407)(-3.214) + (3.195)(3.830) + (0)(0) = 4.50$$

EVALUAR: Ambos métodos dan el mismo resultado, como debe de ser.



Ejemplo 1.11 Cálculo de un ángulo con el producto escalar

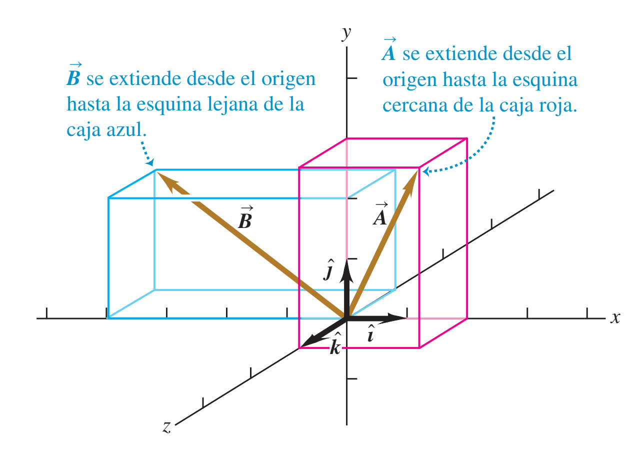
Determine el ángulo entre los vectores

$$\vec{A} = 2.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath} + 1.00\hat{k} \qquad \text{y}$$
$$\vec{B} = -4.00\hat{\imath} + 2.00\hat{\jmath} - 1.00\hat{k}$$

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se nos dan las componentes x, y y z de dos vectores. Nuestra incógnita es el ángulo ϕ entre ellos (figura 1.28). Para calcular esto, resolvemos la ecuación (1.18), $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi$, despejando ϕ en términos del producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ y las magnitudes A y B. Podemos evaluar el producto escalar usando la ecuación (1.21), $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$, y obtenemos los valores de A y B usando la ecuación (1.7).

1.28 Dos vectores en tres dimensiones.



EJECUTAR: Resolvemos la ecuación (1.18) para despejar coseno de ϕ y escribimos $\vec{A}\cdot\vec{B}$ usando la ecuación (1.21). El resultado es

$$\cos\phi = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}$$

Se puede utilizar esta fórmula para encontrar el ángulo *entre* dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cualesquiera. En nuestro ejemplo, tenemos que $A_x = 2.00$, $A_y = 3.00$ y $A_z = 1.00$ y $B_x = -4.00$, $B_y = 2.00$ y $B_z = -1.00$. Por lo tanto,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$
$$= (2.00)(-4.00) + (3.00)(2.00) + (1.00)(-1.00)$$
$$= -3.00$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(2.00)^2 + (3.00)^2 + (1.00)^2}$$
$$= \sqrt{14.00}$$
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(-4.00)^2 + (2.00)^2 + (-1.00)^2}$$
$$= \sqrt{21.00}$$
$$\cos\phi = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB} = \frac{-3.00}{\sqrt{14.00}\,\sqrt{21.00}} = -0.175$$
$$\phi = 100°$$

EVALUAR: Para verificar el resultado, observe que el producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ es negativo, lo cual significa que ϕ está entre 90° y 180° (véase la figura 1.26), que concuerda con nuestra respuesta.

Producto vectorial

El **producto vectorial** de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, también llamado **producto cruz**, se denota con $\vec{A} \times \vec{B}$. Como su nombre lo indica, el producto vectorial es un vector en sí mismo. Usaremos este producto en el capítulo 10 para describir la torca y la cantidad de movimiento angular; en los capítulos 27 y 28 (volumen 2) lo emplearemos para describir campos magnéticos y fuerzas.

Para definir el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$, dibujamos de nuevo los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con sus colas en el mismo punto (figura 1.29*a*). Así, los dos vectores están en un plano. Definimos el producto vectorial como una cantidad vectorial con dirección perpendicular a este plano (es decir, perpendicular tanto a $\vec{A}$ como a $\vec{B}$) y una magnitud igual a AB sen ϕ. Esto es, si $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, entonces,

$$C = AB \operatorname{sen} \phi \quad \text{(magnitud del producto vectorial (cruz) de } \vec{A} \text{ y } \vec{B}) \tag{1.22}$$

Medimos el ángulo ϕ de $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$ tomando el más pequeño de los dos ángulos posibles, de manera que ϕ está entre 0° y 180°. Por lo tanto, sen $\phi \geq 0$ y C en la ecuación (1.22) nunca es negativo, como corresponde a una magnitud vectorial. Observe también que cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos o antiparalelos, $\phi = 0°$ o 180°, y $C = 0$. Es decir, *el producto vectorial de dos vectores paralelos o antiparalelos siempre es cero*. En particular, *el producto vectorial de un vector consigo mismo es cero.*

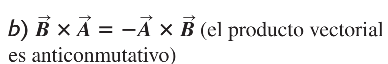
CUIDADO **Producto vectorial contra producto escalar** Tenga cuidado de no confundir la expresión AB sen ϕ de la magnitud del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ con la expresión similar AB cos ϕ del producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$. Para ver la diferencia entre estas dos expresiones, suponga que variamos el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ a la vez que mantenemos constantes sus magnitudes. Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos, la magnitud del producto vectorial será cero y el producto escalar será el máximo. Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, la magnitud del producto vectorial será la máxima y el producto escalar será cero.

1.29 *a*) El producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ determinado por la regla de la mano derecha. *b*) $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$; el producto vectorial es anticonmutativo.

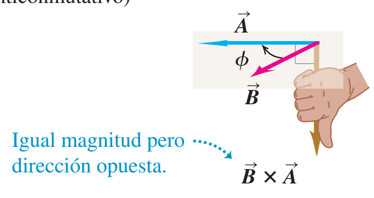
a) Uso de la regla de la mano derecha para obtener la dirección de $\vec{A} \times \vec{B}$

1. Coloque los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cola con cola.
2. Apunte los dedos de su mano derecha hacia $\vec{A}$ con la palma enfrente de $\vec{B}$.
3. Gire los dedos hacia $\vec{B}$.
4. El pulgar apunta hacia la dirección de $\vec{A} \times \vec{B}$.

$\vec{A} \times \vec{B}$ $\vec{A}$ ϕ $\vec{B}$



b) $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$ (el producto vectorial es anticonmutativo)



Siempre hay *dos* direcciones perpendiculares a un plano dado, una a cada lado del plano. Elegimos cuál de estas es la dirección de $\vec{A} \times \vec{B}$ como sigue. Imagine que hace girar el vector $\vec{A}$ alrededor de la línea perpendicular hasta alinearlo con $\vec{B}$, eligiendo el ángulo más pequeño entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Gire los dedos de su mano derecha alrededor de la perpendicular, con las puntas de los dedos señalando en la dirección de la rotación; entonces, el pulgar señalará la dirección de $\vec{A} \times \vec{B}$. Esta **regla de la mano derecha** se ilustra en la figura 1.29*a* y describe una segunda manera de visualizar esta regla.

De manera análoga, determinamos la dirección de $\vec{B} \times \vec{A}$ girando $\vec{B}$ hacia $\vec{A}$ como en la figura 1.29*b*. El resultado es un vector *opuesto* al vector $\vec{A} \times \vec{B}$. ¡El producto vectorial *no* es conmutativo! De hecho, para dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cualesquiera,

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \tag{1.23}$$

Como hicimos con el producto escalar, podemos interpretar geométricamente la magnitud del producto vectorial. En la figura 1.30*a*, B sen ϕ es la componente del vector $\vec{B}$ que es *perpendicular* a la dirección del vector $\vec{A}$. Por la ecuación (1.22), la magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$ es igual a la magnitud de $\vec{A}$ multiplicada por la componente de $\vec{B}$ perpendicular a $\vec{A}$. La figura 1.30*b* muestra que la magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$ también es igual a la magnitud de $\vec{B}$ multiplicada por la componente de $\vec{A}$ perpendicular a $\vec{B}$. Observe que la figura 1.30 ilustra el caso en que ϕ está entre 0° y 90°; usted debería dibujar un diagrama similar para ϕ entre 90° y 180°, con la finalidad de comprobar que es válida la misma interpretación geométrica de la magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$.

1.30 Cálculo de la magnitud AB sen ϕ del producto de dos vectores, $\vec{A} \times \vec{B}$.

a)

(La magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$) es igual a $A(B$ sen $\phi)$.
(La magnitud de $\vec{A}$) multiplicada por (la componente de $\vec{B}$ perpendicular a $\vec{A}$)

$\vec{B}$ B sen ϕ ϕ $\vec{A}$

b)

(La magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$) también es igual a $B(A$ sen $\phi)$.
(La magnitud de $\vec{B}$) multiplicada por (la componente de $\vec{A}$ perpendicular a $\vec{B}$)

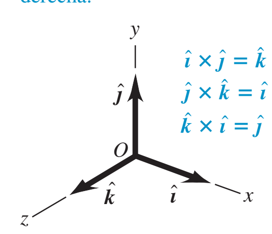
$\vec{B}$ A sen ϕ ϕ $\vec{A}$

Cálculo del producto vectorial usando componentes

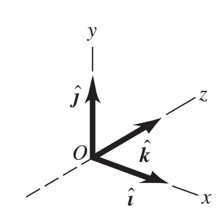
Si conocemos las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, podemos calcular las componentes del producto vectorial usando un procedimiento similar al del producto escalar. Primero deducimos la tabla de multiplicación de los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$, los cuales son

1.31 *a*) Siempre utilizaremos un sistema de coordenadas de mano derecha, como este. *b*) Nunca usaremos un sistema de coordenadas de mano izquierda (donde $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{k}$, etcétera).

a) Sistema de coordenadas de mano derecha:



b) Sistema de coordenadas de mano izquierda; no lo usaremos aquí.



mutuamente perpendiculares (figura 1.31*a*). El producto vectorial de cualquier vector consigo mismo es cero, así que

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = \mathbf{0}$$

El cero en negritas nos recuerda que cada producto es un *vector* cero; es decir, uno con todas sus componentes iguales a cero y con dirección indefinida. Usando las ecuaciones (1.22) y (1.23), y la regla de la mano derecha, tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\imath} \times \hat{\jmath} &= -\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = \hat{k} \\ \hat{\jmath} \times \hat{k} &= -\hat{k} \times \hat{\jmath} = \hat{\imath} \\ \hat{k} \times \hat{\imath} &= -\hat{\imath} \times \hat{k} = \hat{\jmath} \end{aligned} \tag{1.24}$$

Podrá verificar estas ecuaciones observando la figura 1.31*a*.

Ahora expresamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en términos de sus componentes y los vectores unitarios correspondientes, y ampliamos la expresión del producto vectorial:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}) \\ &= A_x\hat{\imath} \times B_x\hat{\imath} + A_x\hat{\imath} \times B_y\hat{\jmath} + A_x\hat{\imath} \times B_z\hat{k} \\ &\quad + A_y\hat{\jmath} \times B_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \times B_y\hat{\jmath} + A_y\hat{\jmath} \times B_z\hat{k} \\ &\quad + A_z\hat{k} \times B_x\hat{\imath} + A_z\hat{k} \times B_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \times B_z\hat{k} \end{aligned} \tag{1.25}$$

También podemos rescribir los términos individuales en la ecuación (1.25) como $A_x\hat{\imath} \times B_y\hat{\jmath} = (A_xB_y)\hat{\imath} \times \hat{\jmath}$, etcétera. Evaluamos esto usando la tabla de multiplicar de los vectores unitarios en las ecuaciones (1.24) y luego agrupamos términos para obtener

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k} \tag{1.26}$$

Por lo tanto, las componentes de $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ están dadas por

$$C_x = A_yB_z - A_zB_y \qquad C_y = A_zB_x - A_xB_z \qquad C_z = A_xB_y - A_yB_x \tag{1.27}$$
$$(\text{componentes de } \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B})$$

El producto vectorial también puede expresarse en forma de determinante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Si usted no está familiarizado con determinantes, omita el estudio de esta forma.

Si invertimos la dirección del eje z en el sistema de ejes de la figura 1.31*a*, obtenemos el sistema de la figura 1.31*b*. Aquí, como podrá comprobar el lector, la definición del producto vectorial da $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{k}$ en vez de $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$. De hecho, todos los productos vectoriales de $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ tendrían signos opuestos a los de las ecuaciones (1.24). Vemos que hay dos tipos de sistemas de coordenadas, que difieren en los signos de los productos vectoriales de los vectores unitarios. En un sistema de ejes en el cual $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$, como en la figura 1.31*a*, se conoce como **sistema de mano derecha**. Lo usual es utilizar *solo* sistemas de mano derecha, algo que haremos a lo largo de este libro.



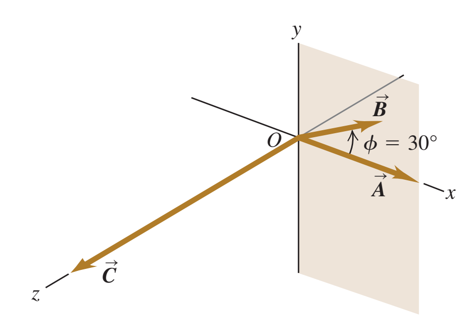
Ejemplo 1.12 Cálculo de un producto vectorial

El vector $\vec{A}$ tiene una magnitud de 6 unidades y está sobre el eje $+x$. $\vec{B}$ tiene una magnitud de 4 unidades y está en el plano xy formando un ángulo de 30° con el eje $+x$ (figura 1.32). Calcule el producto vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Obtendremos el producto vectorial de dos maneras, lo cual nos ayudará a hacer la verificación de nuestro resultado. Primero usaremos la ecuación (1.22) y la regla de la mano derecha; luego, usaremos las ecuaciones (1.27) para obtener el producto vectorial usando las componentes.

1.32 Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y su producto vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. El vector $\vec{B}$ está en el plano xy.



EJECUTAR: Por la ecuación (1.22), la magnitud del producto vectorial es

$$AB \operatorname{sen} \phi = (6)(4)(\operatorname{sen} 30°) = 12$$

De acuerdo con la regla de la mano derecha, $\vec{A} \times \vec{B}$ tiene la dirección del eje $+z$ (la dirección del vector unitario $\hat{k}$), por lo tanto, $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = 12\hat{k}$.

Para usar las ecuaciones (1.27), primero determinamos las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$$A_x = 6 \qquad A_y = 0 \qquad A_z = 0$$
$$B_x = 4 \cos 30° = 2\sqrt{3} \qquad B_y = 4 \operatorname{sen} 30° = 2 \qquad B_z = 0$$

Luego, las ecuaciones (1.27) nos dan

$$C_x = (0)(0) - (0)(2) = 0$$
$$C_y = (0)(2\sqrt{3}) - (6)(0) = 0$$
$$C_z = (6)(2) - (0)(2\sqrt{3}) = 12$$

Nuevamente tenemos que $\vec{C} = 12\hat{k}$.

EVALUAR: Ambos métodos dan el mismo resultado. Dependiendo de la situación, uno u otro enfoque será más conveniente.

Evalúe su comprensión de la sección 1.10 El vector $\vec{A}$ tiene magnitud 2 y el vector $\vec{B}$ tiene magnitud 3. Se sabe que el ángulo ϕ entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es 0°, 90° o 180°. Para cada una de las siguientes situaciones, determine cuál debe ser el valor de ϕ. (En cada situación puede haber más de una respuesta correcta). *a)* $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$; *b)* $\vec{A} \times \vec{B} = \mathbf{0}$; *c)* $\vec{A} \cdot \vec{B} = 6$; *d)* $\vec{A} \cdot \vec{B} = -6$; *e)* (Magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$) $= 6$. |

CAPÍTULO 1 RESUMEN



Cantidades y unidades físicas: Las tres cantidades físicas fundamentales son masa, longitud y tiempo. Las unidades básicas correspondientes del SI son el kilogramo, el metro y el segundo. Las unidades derivadas para otras cantidades físicas son productos o cocientes de las unidades básicas. Las ecuaciones deben ser dimensionalmente congruentes; dos términos solo se pueden sumar cuando tienen las mismas unidades. (Véase los ejemplos 1.1 y 1.2).

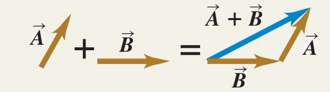
Cifras significativas: La exactitud de una medición se indica con el número de cifras significativas o estableciendo un nivel de incertidumbre. El resultado de un cálculo no suele tener más cifras significativas que los datos de entrada. Cuando solo disponemos de estimaciones burdas como datos de entrada, podemos estimar el orden de la magnitud del resultado. (Véase los ejemplos 1.3 y 1.4).

Cifras significativas en magenta

$$\pi = \frac{C}{2r} = \frac{0.424\text{ m}}{2(0.06750\text{ m})} = 3.14$$

$$123.62 + 8.9 = 132.5$$

Escalares, vectores y suma de vectores: Las cantidades escalares son números y se combinan mediante las reglas habituales de la aritmética. Las cantidades vectoriales tienen tanto dirección como magnitud, y se combinan según las reglas de la suma vectorial. El negativo de un vector tiene la misma magnitud que este pero apunta en la dirección opuesta. (Véase el ejemplo 1.5).

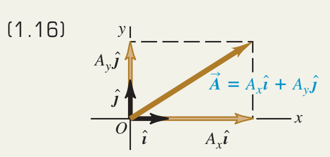


Componentes de vectores y suma de vectores: La suma vectorial puede efectuarse con las componentes de los vectores. La componente x de $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ es la suma de las componentes x de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y las componentes y y z se obtienen de forma análoga. (Véase los ejemplos 1.6 a 1.8).

$$R_x = A_x + B_x$$
$$R_y = A_y + B_y \qquad (1.10)$$
$$R_z = A_z + B_z$$

Vectores unitarios: Los vectores unitarios señalan direcciones en el espacio y tienen magnitud 1, sin unidades. Los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$, alineados con los ejes x, y y z de un sistema de coordenadas rectangular, tienen especial utilidad. (Véase el ejemplo 1.9).

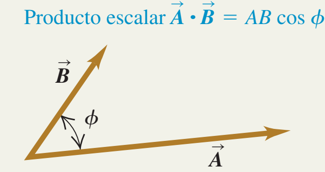
$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \qquad (1.16)$$



Producto escalar: El producto escalar $C = \vec{A}\cdot\vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es una cantidad escalar. Se puede expresar en términos de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y el ángulo ϕ que forman, o bien, en términos de las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El producto escalar es conmutativo; $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$. El producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero. (Véase los ejemplos 1.10 y 1.11).

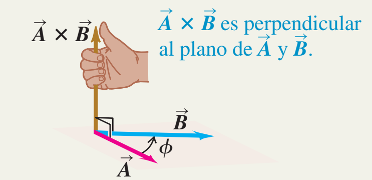
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\phi \qquad (1.18)$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (1.21)$$

Producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi$



Producto vectorial: El producto vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es otro vector $\vec{C}$, cuya magnitud depende de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ así como del ángulo ϕ entre los dos vectores. La dirección de $\vec{A} \times \vec{B}$ es perpendicular al plano de los dos vectores multiplicados, según la regla de la mano derecha. Las componentes de $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ se pueden expresar en términos de las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El producto vectorial no es conmutativo; $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. El producto vectorial de dos vectores paralelos o antiparalelos es cero. (Véase el ejemplo 1.12).

$$C = AB\,\text{sen}\,\phi \qquad (1.22)$$
$$C_x = A_yB_z - A_zB_y$$
$$C_y = A_zB_x - A_xB_z \qquad (1.27)$$
$$C_z = A_xB_y - A_yB_x$$



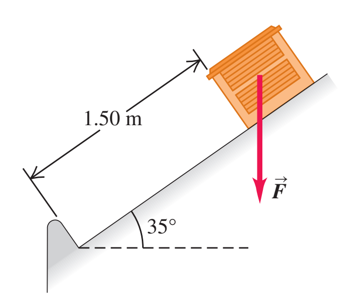
(Magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$) = AB sen ϕ



PROBLEMA PRÁCTICO Vectores en el techo

Una unidad de aire acondicionado está sujeta a un techo inclinado a un ángulo de 35° en relación con la horizontal (figura 1.33). Su peso actúa como una fuerza sobre la unidad en dirección vertical hacia abajo. Con el propósito de que la unidad no aplaste las baldosas del tejado, la componente del peso perpendicular al techo no debe ser mayor de 425 N (un Newton, o 1 N, es la unidad de fuerza en el sistema SI, y es igual a 0.2248 lb). *a*) ¿Cuál es el peso máximo permitido de la unidad? *b*) Si los sujetadores fallan, la unidad se deslizará 1.50 m a lo largo del techo antes de que se detenga contra la cornisa. ¿Qué cantidad de trabajo hace la fuerza del peso sobre la unidad durante el deslizamiento si la unidad tiene el peso calculado en el inciso *a*)? Como se describió en la sección 1.10, el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ sobre un objeto que experimenta un desplazamiento $\vec{s}$ es $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

1.33 Unidad de aire acondicionado sobre un techo inclinado.



GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Este problema implica vectores y sus componentes. ¿Cuáles son las cantidades conocidas? ¿Qué aspecto(s) del vector peso (magnitud, dirección y/o determinadas componentes) representa la incógnita del inciso *a*)? ¿Qué aspectos debe conocer para resolver el inciso *b*)?
2. Elabore un dibujo con base en la figura 1.33. Agregue los ejes x y y eligiendo la dirección positiva de cada uno. Sus ejes no tienen que ser horizontal y vertical, pero tienen que ser perpendiculares entre sí. Elija la opción más conveniente.
3. Elija las ecuaciones que utilizará para determinar las incógnitas.

EJECUTAR

4. Use la relación entre la magnitud y dirección de un vector y sus componentes para despejar la incógnita del inciso *a*). Tenga cuidado: ¿El ángulo de 35° es el adecuado para usarlo en la ecuación? (*Sugerencia:* Revise su dibujo).
5. Asegúrese de que su respuesta tenga el número correcto de cifras significativas.
6. Use la definición de producto escalar para despejar la incógnita en el inciso *b*). Una vez más, asegúrese de usar el número correcto de cifras significativas.

EVALUAR

7. ¿Su respuesta del inciso *a*) incluye una componente cuyo valor absoluto es mayor que la magnitud del vector? ¿Es esto razonable?
8. Hay dos maneras de obtener el producto escalar de dos vectores, una de las cuales se usó para resolver el inciso *b*). Verifique su respuesta realizando el cálculo de la otra manera. ¿Se obtiene la misma respuesta?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P1.1 ¿Cuántos experimentos correctos necesitamos para refutar una teoría? ¿Y para demostrarla? Explique su respuesta.

P1.2 Una guía indica que, en una montaña, la pendiente de una vereda es de 120 metros por kilómetro. ¿Cómo expresaría esto con un número sin unidades?

P1.3 Suponga que se le pide calcular la tangente de 5.00 metros. ¿Es esto posible? ¿Por qué?

P1.4 Un contratista de carreteras dice que, al construir la cubierta de un puente, vació 250 yardas de concreto. ¿A qué cree usted que se refería el contratista?

P1.5 ¿Qué estatura tiene usted en centímetros? ¿Cuál es su peso en newtons?

P1.6 En Estados Unidos el National Institute of Standards and Technology (NIST) tiene varias copias exactas del kilogramo estándar internacional. A pesar de una cuidadosa limpieza, estos estándares nacionales aumentan de masa a razón de 1 μg/año en promedio, cuando se comparan cada 10 años aproximadamente con el kilogramo estándar internacional. ¿Es importante este cambio evidente? Explique su respuesta.

P1.7 ¿Qué fenómenos físicos (además de un péndulo o un reloj de cesio) servirían para definir un estándar de tiempo?

P1.8 Describa cómo podría medir el espesor de una hoja de papel con una regla común.

P1.9 La cantidad $\pi = 3.14159\ldots$ no tiene dimensiones, ya que es un cociente de dos longitudes. Describa otras dos o tres cantidades geométricas o físicas adimensionales.

P1.10 ¿Cuáles son las unidades de volumen? Suponga que otro estudiante le dice que un cilindro de radio r y altura h tiene un volumen dado por $\pi r^3 h$. Explique por qué esto no es correcto.

P1.11 Cada uno de tres arqueros dispara cuatro flechas hacia un blanco. Las cuatro flechas de Joe quedan: 10 cm arriba, 10 cm abajo, 10 cm a la izquierda y 10 cm a la derecha del centro del blanco. Las cuatro flechas de Moe quedan a menos de 1 cm de un punto que está a 20 cm del centro. Y las cuatro flechas de Flo quedan a menos de 1 cm del centro del blanco. El juez del concurso dice que uno de los arqueros es preciso pero no exacto, otro es exacto pero no es preciso, y el tercero es exacto y preciso. ¿Cuál descripción corresponde a cada arquero? Explique su razonamiento.

P1.12 Una pista de carreras circular tiene un radio de 500 m. ¿Cuál es el desplazamiento de un ciclista que sigue la pista del extremo norte al extremo sur? ¿Y cuando da una vuelta completa? Explique su razonamiento.

P1.13 ¿Puede usted encontrar dos vectores de diferente longitud que sumados den cero? ¿Qué restricciones de longitud son necesarias para que tres vectores tengan una resultante cero? Explique su razonamiento.

P1.14 A veces hablamos de la "dirección del tiempo", del pasado al futuro. ¿Eso significa que el tiempo es un vector? Explique su razonamiento.

P1.15 Los controladores de tráfico aéreo dan instrucciones a los pilotos de la dirección hacia donde deben volar. Tales instrucciones se denominan "vectores". Si estas son las únicas instrucciones que se dan, ¿se está usando correctamente el término "vector"? ¿Por qué?

P1.16 ¿Puede encontrar un vector de magnitud cero cuyas componentes sean distintas de cero? Explique su respuesta. ¿La magnitud de un vector puede ser menor que la magnitud de cualquiera de sus componentes? Explique su respuesta.

P1.17 *a*) ¿Tiene sentido decir que un vector es *negativo*? ¿Por qué? *b*) ¿Tiene sentido decir que un vector es el negativo de otro? ¿Por qué? ¿Esta respuesta contradice lo que contestó en el inciso *a*)?

P1.18 Si $\vec{C}$ es la suma vectorial de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, ¿qué deberá ser cierto acerca de las direcciones y magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ si $C = A + B$? ¿Qué deberá ser cierto acerca de las direcciones y magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ si $C = 0$?

P1.19 Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores distintos de cero, ¿es posible que $\vec{A}\cdot\vec{B}$ y $\vec{A}\times\vec{B}$ sean *ambos* cero? Explique su respuesta.

P1.20 ¿Qué resulta de $\vec{A}\cdot\vec{A}$, el producto escalar de un vector consigo mismo? ¿Y de $\vec{A}\times\vec{A}$, el producto vectorial de un vector consigo mismo?

P1.21 Sea $\vec{A}$ cualquier vector distinto de cero. ¿Por qué $\vec{A}/A$ es un vector unitario y qué dirección tiene? Si θ es el ángulo entre $\vec{A}$ y el eje $+x$, explique por qué $(\vec{A}/A)\cdot\hat{\imath}$ se llama el *coseno director* de dicho eje.

P1.22 Indique cuáles de las siguientes son operaciones matemáticas correctas: *a*) $\vec{A}\cdot(\vec{B}-\vec{C})$; *b*) $(\vec{A}-\vec{B})\times\vec{C}$; *c*) $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$; *d*) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$; *e*) $\vec{A}\times(\vec{B}\cdot\vec{C})$? En cada caso, justifique su respuesta.

P1.23 Considere los dos productos vectoriales $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ y $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$. Dé un ejemplo que ilustre la regla general de que estos dos productos vectoriales no tienen la misma magnitud o dirección. ¿Puede elegir los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ de modo que esos dos productos vectoriales sí sean iguales? Si es así, dé un ejemplo.

P1.24 Demuestre que, sin importar lo que sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$, $\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$. (*Sugerencia:* No busque una demostración matemática compleja. Más bien, revise la definición de la dirección del producto cruz).

P1.25 *a*) Si $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$, ¿necesariamente se concluye que $A = 0$ o que $B = 0$? Explique su respuesta. *b*) Si $\vec{A}\times\vec{B} = \mathbf{0}$, ¿necesariamente se concluye que $A = 0$ o que $B = 0$? Explique su respuesta.

P1.26 Si $\vec{A} = \mathbf{0}$ para un vector en el plano *xy*, ¿se concluye que $A_x = -A_y$? ¿Qué podría decir acerca de A_x y de A_y?

EJERCICIOS

Sección 1.3 Estándares y unidades

Sección 1.4 Consistencia y conversiones de unidades

1.1 • A partir de la definición 1 in = 2.54 cm, determine *a*) cuántos kilómetros hay en 1.00 milla y *b*) cuántos pies hay en 1.00 km.

1.2 •• Según la etiqueta de un frasco de aderezo para ensalada, el volumen del contenido es 0.473 litros (L). Use solo las conversiones 1 L = 1000 cm^3 y 1 in = 2.54 cm para expresar dicho volumen en pulgadas cúbicas.

1.3 •• ¿Cuántos nanosegundos tarda la luz en viajar 1.00 ft en el vacío? (Este resultado es una cantidad útil de recordar).

1.4 •• La densidad del oro es de 19.3 g/cm^3. ¿Cuál es su equivalencia en kilogramos por metro cúbico?

1.5 • El motor más potente que había para el automóvil clásico Chevrolet Corvette Sting Ray modelo 1963 desarrollaba 360 caballos de fuerza y tenía un desplazamiento de 327 pulgadas cúbicas. Exprese este desplazamiento en litros (L) usando solo las conversiones 1 L = 1000 cm^3 y 1 in = 2.54 cm.

1.6 •• Un campo cuadrado que mide 100.0 m por 100.0 m tiene un área de 1.00 hectárea. Un acre tiene un área de 43,600 ft^2. Si un campo tiene un área de 12.0 acres, ¿cuál es su equivalencia en hectáreas?

1.7 • ¿Cuántos años más tendrá usted dentro de 1.00 mil millones de segundos? (Suponga que un año tiene 365 días).

1.8 • Mientras va conduciendo en un país extranjero, observa un letrero que indica el límite de velocidad en una carretera como 180,000 estadios (furlongs) por quincena. ¿Cuánto es esto en millas por hora? (Un furlong es $\frac{1}{8}$ de milla, y una quincena equivale a 14 días. Originalmente, el estadio se refería a la longitud de un surco arado).

1.9 • Cierto automóvil híbrido que consume poco combustible tiene un rendimiento de gasolina de 55.0 mpg (millas por galón). *a*) Si usted va manejando dicho auto en Europa y quiere comparar su rendimiento con el de otros autos europeos, exprese tal rendimiento en km/L (L = litro). Utilice los factores de conversión del apéndice E. *b*) Si el depósito de gasolina de este automóvil tiene una capacidad de 45 L, ¿cuántas veces deberá llenar el depósito de gasolina para conducir 1500 km?

1.10 • Las conversiones que siguen son comunes en física, además de muy útiles. *a*) Use 1 mi = 5280 ft y 1 h = 3600 s para convertir 60 mph a unidades de ft/s. *b*) La aceleración de un objeto en caída libre es de 32 ft/s^2. Use 1 ft = 30.48 cm para expresar esta aceleración en unidades de m/s^2. *c*) La densidad del agua es de 1.0 g/cm^3. Convierta esta densidad a unidades de kg/m^3.

1.11 •• **Neptunio.** En el otoño de 2002, un grupo de científicos de Los Alamos National Laboratory determinó que la masa crítica del neptunio 237 es de unos 60 kg. La masa crítica de un material fisionable es la cantidad mínima que debe reunirse para iniciar una reacción en cadena. Este elemento tiene una densidad de 19.5 g/cm^3. ¿Cuál será el radio de una esfera de este material que tiene dicha masa crítica?

1.12 • **BIO** *a*) La dosis diaria recomendada (RDA, por las siglas de *recommended daily allowance*) del metal traza magnesio es de 410 mg/día para los hombres. Exprese esta cantidad en μg/día. *b*) La RDA del aminoácido lisina es de 12 mg por kg de peso corporal. ¿Cuántos gramos diarios debe recibir un adulto de 75 kg de peso? *c*) Una tableta multivitamínica típica contiene 2.0 mg de vitamina B_2 (riboflavina) y la RDA recomendada es de 0.0030 g/día. ¿Cuántas de estas tabletas debe tomar a diario una persona para obtener la cantidad adecuada de esta vitamina, suponiendo que no tiene ninguna otra fuente de abasto? *d*) La RDA para el elemento traza selenio es de 0.000070 g/día. Exprese esta dosis en mg/día.

Sección 1.5 Incertidumbre y cifras significativas

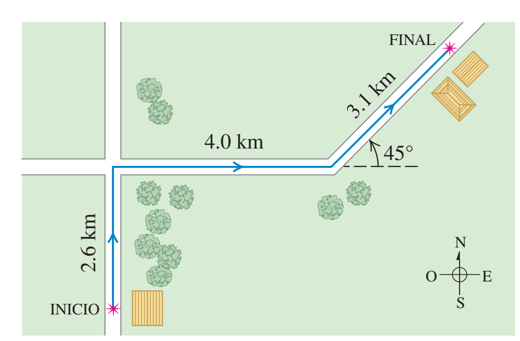
1.13 •• La figura 1.7 muestra el resultado de un error inaceptable en el punto de parada de un tren. *a*) Si un tren viaja 890 km de Berlín a París

y luego rebasa el fin de la vía 10 m, ¿cuál será el error de aproximación en la distancia total recorrida? *b*) ¿Sería correcto escribir la distancia total recorrida por el tren como 890,010 m? Explique su respuesta.

1.14 • Con una regla graduada de madera, usted determina que un trozo rectangular de lámina mide 12 mm de longitud; por otro lado, usa un micrómetro para medir el ancho del trozo y obtiene 5.98 mm. Conteste las siguientes preguntas con las cifras significativas correctas. *a*) ¿Qué área tiene el rectángulo? *b*) ¿Qué razón ancho/largo tiene el rectángulo? *c*) ¿Qué perímetro tiene el rectángulo? *d*) ¿Cuál es la diferencia entre la longitud y la anchura? *e*) ¿Cuál es la razón longitud/anchura?

1.15 •• Un valor de aproximación útil y fácil de recordar para el número de segundos en un año es $\pi \times 10^7$. Determine el error de aproximación en este valor. (Hay 365.24 días en un año).

Figura **E1.27**



Sección 1.6 Estimaciones y órdenes de magnitud

1.16 • ¿Cuántos galones de gasolina se consumen en Estados Unidos en un día? Suponga que hay dos automóviles por cada tres personas, que cada auto recorre en promedio 10,000 millas por año, y que el auto promedio rinde 20 millas por galón.

1.17 •• **BIO** Un hombre más bien ordinario de mediana edad está en el hospital para realizarse un chequeo de rutina. La enfermera escribe la cantidad de 200 en el expediente médico, pero olvida anotar las unidades. ¿Cuál de las siguientes cantidades sería posible que representaran ese valor de 200? *a*) Su masa en kilogramos; *b*) su estatura en metros; *c*) su estatura en centímetros; *d*) su estatura en milímetros; *e*) su edad en meses.

1.18 • ¿Cuántas semillas de maíz se necesitan para llenar una botella de bebida gaseosa de 2 L?

1.19 • ¿Cuántas palabras hay en este libro?

1.20 • **BIO** Cuatro astronautas están en una estación espacial esférica. *a*) Si, como suele ocurrir, cada uno de ellos inhala cerca de 500 cm^3 de aire en cada respiración, ¿aproximadamente qué volumen de aire (en metros cúbicos) respiran estos astronautas en un año? *b*) ¿Qué diámetro (en metros) debería tener la estación espacial para contener todo este aire?

1.21 • **BIO** ¿Cuántas veces parpadea un ser humano común durante toda su vida?

1.22 • **BIO** ¿Cuántas veces late el corazón de una persona en su vida? ¿Cuántos galones de sangre bombea? (Estime que el corazón bombea 50 cm^3 de sangre en cada latido).

1.23 • En la ópera *El anillo de los Nibelungos*, de Wagner, la diosa Freya es rescatada con una pila de oro con la altura y anchura suficientes para ocultarla. Estime el valor monetario de esta pila. La densidad del oro es de 19.3 g/cm^3, y su valor es aproximadamente de \$10 por gramo (aunque esto varía).

1.24 • Usted utiliza agua para diluir cantidades pequeñas de sustancias químicas en el laboratorio, gota a gota. ¿Cuántas gotas de agua hay en una botella de 1.0 L? (*Sugerencia:* Comience por calcular el diámetro de una gota de agua).

1.25 • ¿Cuántas pizzas consumen los estudiantes de su escuela cada año escolar?

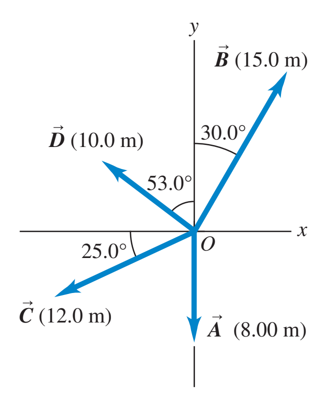
Sección 1.7 Vectores y suma de vectores

1.26 •• Al oír el cascabel de una serpiente, usted realiza dos desplazamientos rápidos de 1.8 m y 2.4 m. Realice dibujos (a escala aproximada) que muestren cómo tales desplazamientos podrían dar una resultante de magnitud *a*) 4.2 m, *b*) 0.6 m, *c*) 3.0 m.

1.27 •• Un empleado del servicio postal conduce su camión por la ruta de la figura E1.27. Determine la magnitud y la dirección del desplazamiento resultante dibujando un diagrama a escala. (Véase el ejercicio 1.34 donde se enfoca de otra manera este problema).

1.28 •• Con los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura E1.28, use un dibujo a escala para obtener la magnitud y la dirección de *a*) la suma vectorial $\vec{A} + \vec{B}$ y *b*) la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$. Con base en sus respuestas, determine la magnitud y la dirección de *c*) $-\vec{A} - \vec{B}$ y *d*) $\vec{B} - \vec{A}$. (El ejercicio 1.35 enfoca el problema de otra manera).

Figura **E1.28**



1.29 •• Un espeleólogo está explorando una cueva y sigue un pasadizo 180 m al oeste, luego 210 m 45° al este del sur, y después 280 m 30° al este del norte. Tras un cuarto desplazamiento sin medir, vuelve al punto inicial. Con un diagrama a escala, determine la magnitud y la dirección del cuarto desplazamiento. (El problema 1.69 enfoca de manera distinta este problema).

Sección 1.8 Componentes de vectores

1.30 •• Sea el ángulo θ el que forma el vector $\vec{A}$ con el eje $+x$, medido en sentido antihorario a partir de ese eje. Obtenga el ángulo θ para un vector que tiene las siguientes componentes: *a*) $A_x = 2.00$ m, $A_y = -1.00$ m; *b*) $A_x = 2.00$ m, $A_y = 1.00$ m; *c*) $A_x = -2.00$ m, $A_y = 1.00$ m; *d*) $A_x = -2.00$ m, $A_y = -1.00$ m.

1.31 • Calcule las componentes x y y de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ de la figura E1.28.

1.32 • El vector $\vec{A}$ tiene una dirección de 34.0° en sentido horario a partir del eje $-y$. La componente x de $\vec{A}$ es $A_x = -16.0$ m. *a*) ¿Cuál es la componente y de $\vec{A}$? *b*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{A}$?

1.33 • El vector $\vec{A}$ tiene una componente y $A_y = +13.0$ m. $\vec{A}$ tiene un ángulo de 32.0° en sentido antihorario a partir del eje $+y$. *a*) ¿Cuál es la componente x de $\vec{A}$? *b*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{A}$?

1.34 •• Un empleado del servicio postal conduce su camión por la ruta de la figura E1.27. Use el método de componentes para determinar la magnitud y la dirección de su desplazamiento resultante. En un diagrama de suma de vectores (a escala aproximada), muestre que el desplazamiento resultante obtenido del diagrama coincide cualitativamente con el obtenido con el método de componentes.

1.35 • Para los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura E1.28, use el método de componentes para obtener la magnitud y la dirección de *a*) la suma vectorial $\vec{A} + \vec{B}$; *b*) la suma vectorial $\vec{B} + \vec{A}$; *c*) la diferencia vectorial $\vec{A} - \vec{B}$; *d*) la diferencia vectorial $\vec{B} - \vec{A}$.

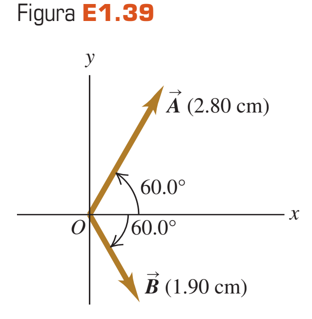
1.36 • Calcule la magnitud y la dirección del vector representado por los siguientes pares de componentes: *a*) $A_x = -8.60$ cm, $A_y = 5.20$ cm; *b*) $A_x = -9.70$ m, $A_y = -2.45$ m; *c*) $A_x = 7.75$ km, $A_y = -2.70$ km.

1.37 •• Un profesor de física desorientado conduce 3.25 km al norte, 2.90 km al oeste y 1.50 km al sur. Calcule la magnitud y la dirección del desplazamiento resultante, usando el método de componentes. En un diagrama de suma de vectores (a escala aproximada), muestre que el desplazamiento resultante obtenido del diagrama coincide cualitativamente con el obtenido con el método de componentes.

1.38 •• En un plano vertical, dos cuerdas ejercen fuerzas de igual magnitud sobre un peso colgante, pero tiran con un ángulo de 86.0° entre sí. ¿Qué tirón ejerce cada cuerda si el tirón resultante es de 372 N directamente hacia arriba?

1.39 •• El vector $\vec{A}$ mide 2.80 cm y está 60.0° sobre el eje x en el primer cuadrante. El vector $\vec{B}$ mide 1.90 cm y está 60.0° bajo el eje x en el cuarto cuadrante (figura E1.39). Utilice las componentes para obtener la magnitud y la dirección de *a*) $\vec{A} + \vec{B}$; *b*) $\vec{A} - \vec{B}$; c) $\vec{B} - \vec{A}$. En cada caso, dibuje la suma o resta de vectores, y demuestre que sus respuestas numéricas concuerdan cualitativamente con el dibujo.

Figura **E1.39**



Sección 1.9 Vectores unitarios

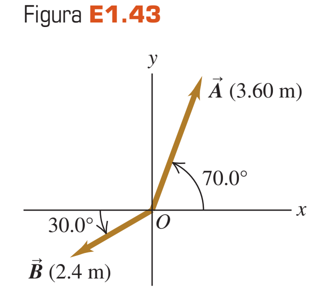
1.40 • En cada caso, obtenga las componentes x y y del vector $\vec{A}$: *a*) $\vec{A} = 5.0\hat{\imath} - 6.3\hat{\jmath}$; *b*) $\vec{A} = 11.2\hat{\jmath} - 9.91\hat{\imath}$; *c*) $\vec{A} = -15.0\hat{\imath} + 22.4\hat{\jmath}$; *d*) $\vec{A} = 5.0\vec{B}$, donde $\vec{B} = 4\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}$.

1.41 •• Escriba cada uno de los vectores de la figura E1.28 en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

1.42 •• Dados dos vectores $\vec{A} = 4.00\hat{\imath} + 7.00\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 5.00\hat{\imath} - 2.00\hat{\jmath}$, *a*) calcule las magnitudes de cada uno; *b*) escriba una expresión para $\vec{A} - \vec{B}$ usando vectores unitarios; *c*) obtenga la magnitud y la dirección de la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$. *d*) Dibuje un diagrama vectorial que muestre $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{A} - \vec{B}$, y demuestre que su diagrama coincide cualitativamente con su respuesta del inciso *c*).

1.43 •• *a*) Escriba cada uno de los vectores de la figura E1.43 en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$. *b*) Utilice vectores unitarios para expresar el vector $\vec{C}$, donde $\vec{C} = 3.00\vec{A} - 4.00\vec{B}$. *c*) Determine la magnitud y la dirección de $\vec{C}$.

Figura **E1.43**



1.44 •• *a*) ¿El vector $(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})$ es unitario? Justifique su respuesta. *b*) ¿Un vector unitario puede tener una componente con magnitud mayor a la unidad? ¿Puede tener alguna componente negativa? En cada caso, justifique su respuesta. *c*) Si $\vec{A} = a(3.0\hat{\imath} + 4.0\hat{\jmath})$, donde a es una constante, determine el valor de a que convierte a $\vec{A}$ en un vector unitario.

Sección 1.10 Productos de vectores

1.45 • Para los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ de la figura E1.28, obtenga los productos escalares *a*) $\vec{A} \cdot \vec{B}$; *b*) $\vec{B} \cdot \vec{C}$; *c*) $\vec{A} \cdot \vec{C}$.

1.46 •• *a*) Obtenga el producto escalar de los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ descritos en el ejercicio 1.42. *b*) Obtenga el ángulo entre estos dos vectores.

1.47 •• Calcule el ángulo entre estos pares de vectores:

a) $\vec{A} = -2.00\hat{\imath} + 6.00\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 2.00\hat{\imath} - 3.00\hat{\jmath}$

b) $\vec{A} = 3.00\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 10.00\hat{\imath} + 6.00\hat{\jmath}$

c) $\vec{A} = -4.00\hat{\imath} + 2.00\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 7.00\hat{\imath} + 14.00\hat{\jmath}$

1.48 •• Obtenga el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ (expresado en vectores unitarios) de los dos vectores del ejercicio 1.42. ¿Cuál es la magnitud del producto vectorial?

1.49 • Para los vectores $\vec{A}$ y $\vec{D}$ de la figura E1.28, *a*) obtenga la magnitud y la dirección del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{D}$; *b*) calcule la magnitud y la dirección de $\vec{D} \times \vec{A}$.

1.50 • Para los dos vectores de la figura E1.39, *a*) obtenga la magnitud y la dirección del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$; *b*) obtenga la magnitud y la dirección de $\vec{B} \times \vec{A}$.

1.51 • Para los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura E1.43, *a*) obtenga el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$; *b*) obtenga la magnitud y dirección del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$.

1.52 • El vector $\vec{A}$ tiene 3.50 cm de longitud y está dirigido hacia esta página. El vector $\vec{B}$ apunta de la esquina inferior derecha de esta página a la esquina superior izquierda. Defina un sistema de coordenadas adecuado de mano derecha, y obtenga las tres componentes del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$, medido en cm^2. Muestre en un diagrama su sistema de coordenadas y los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{A} \times \vec{B}$.

1.53 • Dados dos vectores $\vec{A} = -2.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath} + 4.00\hat{k}$ y $\vec{B} = 3.00\hat{\imath} + 1.00\hat{\jmath} - 3.00\hat{k}$, realice lo siguiente. *a*) Obtenga la magnitud de cada vector. *b*) Escriba una expresión para la diferencia vectorial $\vec{A} - \vec{B}$ usando vectores unitarios. *c*) Obtenga la magnitud de la diferencia vectorial $\vec{A} - \vec{B}$. ¿Es la misma magnitud de $\vec{B} - \vec{A}$? Explique su respuesta.

PROBLEMAS

1.54 • Un acre es una unidad de agrimensura que todavía se emplea mucho, tiene una longitud de un estadio o furlong $\left(\frac{1}{8}\text{ de mi}\right)$ y su anchura es un décimo de su longitud. *a*) ¿Cuántos acres hay en una milla cuadrada? *b*) ¿Cuántos pies cuadrados hay en un acre? Véase el apéndice E. *c*) Un acre-pie es el volumen de agua que cubriría un acre de terreno plano hasta 1 ft de profundidad. ¿Cuántos galones hay en 1 acre-pie?

1.55 •• **Un planeta similar a la Tierra.** En enero de 2006, unos astrónomos informaron el descubrimiento de un planeta comparable en tamaño a la Tierra, el cual orbita otra estrella y tiene una masa de casi 5.5 veces la masa terrestre. Se cree que está compuesto por una mezcla de piedra y hielo, de manera similar a Neptuno. Si este planeta tiene la misma densidad que Neptuno (1.76 g/cm^3), ¿cuál será su radio expresado en *a*) kilómetros y *b*) como múltiplo del radio terrestre? Consulte el apéndice F para más datos astronómicos.

1.56 •• **El máser de hidrógeno.** Las ondas de radio generadas por un máser de hidrógeno pueden servir como estándar de frecuencia. La frecuencia de estas ondas es de 1,420,405,751.786 hertz. (Un hertz es un ciclo por segundo). Un reloj controlado por un máser de hidrógeno tiene un error de 1 s en 100,000 años. En las siguientes preguntas, use solo tres cifras significativas. (El gran número de cifras significativas dadas para la frecuencia tan solo ilustra la notable exactitud con que se midió). *a*) ¿Cuánto dura un ciclo de la onda de radio? *b*) ¿Cuántos ciclos ocurren en 1 h? *c*) ¿Cuántos ciclos habrán pasado durante la edad de la Tierra, estimada en 4.6×10^9 años? *d*) ¿Qué error en segundos tendría un reloj de máser de hidrógeno después de un lapso semejante?

1.57 • BIO **Respiración de oxígeno.** La densidad del aire en condiciones estándar de laboratorio es de 1.29 kg/m^3, y aproximadamente el 20% de ese aire es oxígeno. Normalmente, las personas inhalan medio litro de aire por respiración. *a*) ¿Cuántos gramos de oxígeno respira

una persona en un día? *b*) Si el aire se almacena sin comprimirlo en un tanque, ¿qué longitud tiene cada lado del tanque?

1.58 ••• Una lámina rectangular de aluminio tiene 7.60 ± 0.01 cm de largo y 1.90 ± 0.01 cm de ancho. *a*) Obtenga el área y la incertidumbre de esta para el rectángulo. *b*) Verifique que la incertidumbre fraccionaria del área sea igual a la suma de las incertidumbres fraccionarias de la longitud y la anchura. (Este es un resultado general: véase el problema de desafío 1.98).

1.59 ••• Conforme usted come galletas de chocolate de una bolsa, observa que cada galleta es un disco circular con un diámetro de 8.50 ± 0.02 cm y un grosor de 0.050 ± 0.005 cm. *a*) Obtenga el volumen promedio y su incertidumbre para una galleta. *b*) Obtenga la razón entre el diámetro y el grosor, así como la incertidumbre de esta razón.

1.60 • BIO Los tejidos biológicos normalmente contienen un 98% de agua. Considerando que la densidad del agua es de 1.0×10^3 kg/m^3, estime la masa de *a*) el corazón de un ser humano adulto; *b*) una célula de 0.5 μm de diámetro; *c*) una abeja.

1.61 • BIO Estime cuántos átomos hay en su cuerpo. (*Sugerencia:* Con base en sus conocimientos de biología y química, ¿cuáles son los tipos de átomos más comunes en su cuerpo? ¿Qué masa tiene cada tipo? El apéndice D da la masa atómica de diversos elementos, medida en unidades de masa atómica; el valor de una unidad de masa atómica (1 u) se incluye en el apéndice E).

1.62 ••• ¿Cuántos billetes de un dólar tendría que apilar para llegar hasta la Luna? ¿Eso sería más barato que construir y enviar ahí una nave espacial? (*Sugerencia:* Comience doblando un billete de un dólar para saber cuántos de sus espesores hacen 1.0 mm).

1.63 ••• ¿Cuánto costaría tapizar todo Estados Unidos (incluyendo Alaska y Hawai) con billetes de un dólar? ¿Cuánto tendría que aportar cada estadounidense para ello?

1.64 • Estrellas en el Universo. Los astrónomos a menudo dicen que hay más estrellas en el Universo que granos de arena en todas las playas de la Tierra. *a*) Puesto que un grano de arena común tiene un diámetro aproximado de 0.2 mm, estime el número de granos de arena en todas las playas de la Tierra y, por lo tanto, el número aproximado de estrellas en el Universo. Sería útil consultar un atlas y hacer mediciones. *b*) Como una galaxia ordinaria contiene aproximadamente 100,000 millones de estrellas y hay más de 100,000 millones de galaxias en el Universo conocido, estime el número de estrellas en el Universo y compare este número con el resultado que obtuvo en el inciso *a*).

1.65 ••• Dos trabajadores tiran horizontalmente de una caja pesada, aunque uno de ellos tira dos veces más fuerte que el otro. El tirón más fuerte se aplica 25.0° al oeste del norte, y la resultante de estos dos tirones es de 460.0 N directamente hacia el norte. Use las componentes vectoriales para calcular la magnitud de cada tirón y la dirección del tirón más débil.

1.66 •• Tres cuerdas horizontales tiran de una piedra grande enterrada en el suelo, produciendo los vectores de fuerza $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ que se ilustran en la figura P1.66. Obtenga la magnitud y la dirección de una cuarta fuerza aplicada a la piedra que haga que la suma vectorial de las cuatro fuerzas sea cero.

Figura **P1.66**

1.67 •• Le han pedido programar un brazo robótico de una línea de ensamble que se mueve en el plano *xy*. Su primer desplazamiento es $\vec{A}$; el segundo es $\vec{B}$, de magnitud 6.40 cm y dirección 63.0° medida en el sentido del eje $+x$ al eje $-y$. La resultante $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ de los dos desplazamientos también debe tener una magnitud de 6.40 cm, pero una dirección de 22.0° medida en el sentido del eje $+x$ al eje $+y$. *a*) Dibuje el diagrama de la suma de estos vectores, aproximadamente a escala. *b*) Obtenga las componentes de $\vec{A}$. *c*) Obtenga la magnitud y la dirección de $\vec{A}$.

1.68 ••• Aterrizaje de emergencia. Un avión sale del aeropuerto de Galisteo y vuela 170 km en una dirección 68° al este del norte; luego, cambia el rumbo y vuela 230 km a 48° al sur del este, para efectuar inmediatamente un aterrizaje de emergencia en un potrero. ¿En qué dirección y qué distancia deberá volar una cuadrilla de rescate enviada por el aeropuerto para llegar directamente al avión averiado?

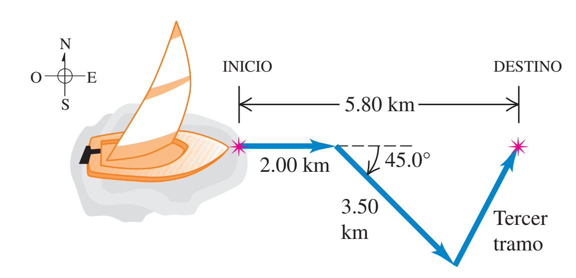
1.69 ••• El espeleólogo del ejercicio 1.29 está explorando una cueva. Sigue un pasadizo 180 m al oeste, luego 210 m en una dirección 45° al este del sur, y después 280 m a 30° al este del norte. Tras un cuarto desplazamiento sin medir, vuelve al punto inicial. Use el método de componentes para determinar la magnitud y la dirección del cuarto desplazamiento. Dibuje el diagrama de la suma vectorial y demuestre que concuerda cualitativamente con su solución numérica.

1.70 •• *a*) Obtenga la magnitud y la dirección del vector $\vec{R}$ que es la suma de los tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ de la figura E1.28. En un diagrama, muestre cómo se forma $\vec{R}$ a partir de los tres vectores. *b*) Obtenga la magnitud y la dirección del vector $\vec{S} = \vec{C} - \vec{A} - \vec{B}$. En un diagrama, muestre cómo se forma $\vec{S}$ a partir de los tres vectores.

1.71 •• Un cohete enciende dos motores simultáneamente. Uno produce un empuje de 480 N directamente hacia delante; mientras que el otro da un empuje de 513 N, 32.4° arriba de la dirección hacia delante. Obtenga la magnitud y la dirección (relativa a la dirección hacia delante) de la fuerza resultante que estos motores ejercen sobre el cohete.

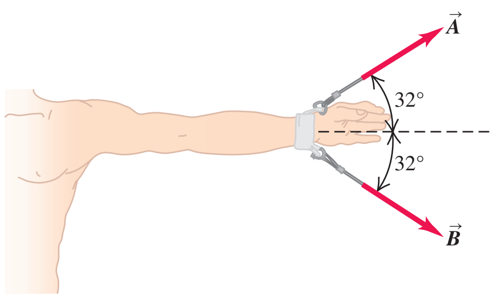
1.72 •• Un marinero en un velero pequeño se topa con vientos cambiantes. Navega 2.00 km al este, luego 3.50 km al sureste y después otro tramo en una dirección desconocida. Su posición final es 5.80 km directamente al este del punto inicial (figura P1.72). Determine la magnitud y la dirección del tercer tramo. Dibuje el diagrama de suma vectorial y demuestre que concuerda cualitativamente con su solución numérica.

Figura **P1.72**



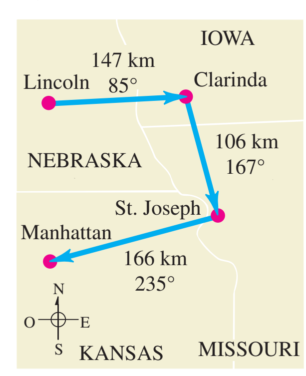
1.73 ••• BIO Hombro dislocado. Un paciente con una luxación en un hombro es colocado en un aparato de tracción como el que se ilustra en la figura P1.73. Los tirones $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen magnitudes iguales y deben combinarse para producir una fuerza de tracción hacia fuera de 5.60 N. ¿De qué magnitud deben ser estos tirones?

Figura **P1.73**



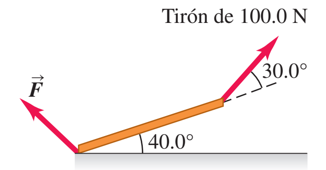
1.74 ••• En un vuelo de entrenamiento, un piloto estudiante vuela de Lincoln, Nebraska, a Clarinda, Iowa; luego a Saint Joseph, Missouri, y después a Manhattan, Kansas (figura P1.74). Las direcciones se muestran en relación con el norte: 0° es norte, 90° es este, 180° es sur y 270° es oeste. Use el método de componentes para calcular *a*) la distancia que debe volar para regresar a Lincoln desde Manhattan; y *b*) la dirección (relativa al norte) que debe seguir. Ilustre su solución con un diagrama vectorial.

Figura **P1.74**



1.75 •• **Equilibrio.** Decimos que un objeto está en *equilibrio* cuando todas las fuerzas sobre él se estabilizan (suman cero). La figura P1.75 ilustra una viga que pesa 124 N y que está apoyada en equilibrio por un tirón de 100.0 N y una fuerza $\vec{F}$ en el piso. La tercera fuerza sobre la viga es su peso de 124 N que actúa verticalmente hacia abajo. *a*) Utilice componentes de vectores para encontrar la magnitud y la dirección de $\vec{F}$. *b*) Verifique lo razonable de su respuesta en el inciso *a*) elaborando una solución gráfica aproximadamente a escala.

Figura **P1.75**



1.76 ••• **Regreso.** Un explorador en las espesas junglas del África ecuatorial sale de su choza. Camina 40 pasos al noreste, 80 pasos a 60° al norte del oeste y 50 pasos al sur. Suponga que todos sus pasos tienen la misma longitud. *a*) Dibuje, aproximadamente a escala, los tres vectores y su resultante. *b*) Sálvelo de perderse irremediablemente en la jungla indicándole el desplazamiento, calculado con el método de componentes, que lo llevará de regreso a su choza.

1.77 ••• Un diseñador está creando un nuevo logotipo para el sitio Web de su compañía. En el programa que está usando, cada pixel de un archivo de imagen tiene coordenadas (x, y), donde el origen (0, 0) está en la esquina superior izquierda de la imagen, el eje $+x$ apunta a la derecha y el eje $+y$ apunta hacia abajo. Las distancias se miden en pixeles. *a*) El diseñador traza una línea del punto (10, 20) al punto (210, 200). Quiere trazar una segunda línea que parta de (10, 20), tenga 250 pixeles de longitud y forme un ángulo de 30° medido en sentido horario a partir de la primera línea. ¿En qué punto debería terminar la segunda línea? Dé su respuesta al pixel más próximo. *b*) Ahora el diseñador traza una flecha que conecta el extremo inferior derecho de la primera línea con el extremo inferior derecho de la segunda. Determine la longitud y la dirección de esta flecha. Elabore un diagrama que muestre las tres líneas.

1.78 ••• Un barco zarpa de la isla de Guam y navega 285 km a 40.0° al norte del oeste. ¿Qué rumbo deberá tomar ahora y qué distancia deberá navegar para que su desplazamiento resultante sea de 115 km directamente al este de Guam?

1.79 •• BIO **Huesos y músculos.** El antebrazo de un paciente en terapia pesa 20.5 N y levanta un peso de 112.0 N. Estas dos fuerzas están dirigidas verticalmente hacia abajo. Las únicas otras fuerzas apreciables que actúan sobre el antebrazo provienen del músculo bíceps (que actúa perpendicular al antebrazo) y la fuerza en el codo. Si el bíceps produce un tirón de 232 N cuando el antebrazo se alza 43° sobre la horizontal, determine la magnitud y la dirección de la fuerza que el codo ejerce sobre el antebrazo. (La suma de la fuerza del codo y la del bíceps debe equilibrar el peso del brazo y el peso que carga, así que su resultante debe ser 132.5 N hacia arriba).

1.80 ••• Usted tiene hambre y decide visitar su restaurante de comida rápida preferido del vecindario. Sale de su apartamento, baja 10 pisos en el elevador (cada piso tiene 3.0 m de altura) y camina 15 m al sur hacia la salida del edificio. Luego camina 0.2 km al este, da vuelta al norte y camina 0.1 km hasta la entrada del restaurante. *a*) Determine el desplazamiento entre su apartamento y el restaurante. Use notación con vectores unitarios en su respuesta, dejando bien claro qué sistema de coordenadas eligió. *b*) ¿Qué distancia recorrió por el camino que siguió de su apartamento al restaurante y qué magnitud tiene el desplazamiento que calculó en el inciso *a*)?

1.81 •• Para seguir un mapa del tesoro, usted inicia en un viejo roble. Primero camina 825 m directamente al sur, luego da vuelta y camina 1.25 km a 30.0° al oeste del norte y, por último, camina 1.00 km a 40.0° al norte del este, donde usted encuentra el tesoro: ¡una biografía de Isaac Newton! *a*) Para regresar al viejo roble, ¿en qué dirección debería seguir y qué distancia tendrá que caminar? Utilice componentes para resolver este problema. *b*) Para saber si su cálculo en el inciso *a*) es razonable, verifíquelo con una solución gráfica elaborada aproximadamente a escala.

1.82 •• Un poste está a 52.0 m de donde usted se encuentra de pie, en una dirección 37.0º al norte del este. Un segundo poste se encuentra al sur de usted. ¿Cuál es la distancia entre el segundo poste y usted, si la distancia entre los dos postes es de 80.0 m?

1.83 •• Un perro corre en un campo 12.0 m hacia el este y luego 28.0 m a 50.0° al oeste del norte. ¿Qué distancia y en qué dirección debe correr el perro para terminar a 10.0 m al sur del punto inicial?

1.84 ••• Ricardo y Jane están de pie bajo un árbol en medio de un potrero. Después sigue una discusión y se separan en direcciones diferentes. Ricardo camina 26.0 m a 60.0° al oeste del norte. Jane camina 16.0 m a 30.0° al sur del oeste. Luego se detienen y dan vuelta para verse de frente. *a*) ¿Cuál es la distancia entre ellos? *b*) En qué dirección debe caminar Ricardo para ir directamente hacia Jane?

1.85 ••• John, Paul y George se detienen en un sembradío de fresas. Paul está a 14.0 m al oeste de John. George está a 36.0 m de Paul, en una dirección de 37.0° al sur del este de la ubicación de Paul. ¿A qué distancia está George de John? ¿Cuál es la dirección de George en relación con la ubicación de John?

1.86 ••• Usted acampa con dos amigos, Joe y Karl. Puesto que a los tres les gusta la privacidad, no levantan sus tiendas juntas. La de Joe está a 21.0 m de la suya, en dirección 23.0° al sur del este. La de Karl está a 32.0 m de la suya, en dirección 37.0° al norte del este. ¿Qué distancia hay entre las tiendas de Karl y de Joe?

1.87 •• Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen un producto escalar igual a -6.00 y su producto vectorial tiene una magnitud igual a +9.00. ¿Cuál es el ángulo entre estos dos vectores?

1.88 •• **Ángulo de enlace del metano.** En la molécula de metano, CH_4, cada átomo de hidrógeno está en la esquina de un tetraedro regular, con el átomo de carbono en el centro. En coordenadas en las que uno de los enlaces C—H esté en la dirección de $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$, un enlace C—H adyacente está en la dirección $\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$. Calcule el ángulo entre estos dos enlaces.

1.89 •• El vector $\vec{A}$ tiene una magnitud igual a 12.0 m y el vector $\vec{B}$ mide 16.0 m. El producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es igual a 90.0 m^2. ¿Cuál es la magnitud del producto vectorial de estos dos vectores?

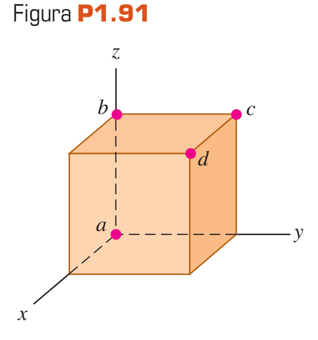
1.90 •• Si dibujamos dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ desde un punto común, el ángulo entre ellos es ϕ. *a*) Con técnicas vectoriales, demuestre que la magnitud de su suma es

$$\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\phi}$$

b) Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen la misma magnitud, ¿con qué valor de ϕ su suma tendrá la misma magnitud que $\vec{A}$ o $\vec{B}$?

1.91 •• Un cubo se coloca de modo que una esquina esté en el origen y tres aristas estén en los ejes *x*, *y* y *z* de un sistema de coordenadas (figura P1.91). Use vectores para calcular *a*) el ángulo entre la arista sobre el eje *z* (línea *ab*) y la diagonal que va del origen a la esquina opuesta (línea *ad*); y *b*) el ángulo entre las aristas *ac* (la diagonal de una cara) y *ad*.

Figura **P1.91**



1.92 •• El vector $\vec{A}$ tiene una magnitud de 6.00 m, el vector $\vec{B}$ tiene una magnitud de 3.00 m, y su producto vectorial es igual a 12.0 m^2. ¿Cuáles son los dos valores posibles del producto escalar para estos dos vectores? Para cada valor de $\vec{A} \cdot \vec{B}$, dibuje un diagrama que muestre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y explique por qué los productos vectoriales de los dos diagramas son iguales pero los productos escalares difieren.

1.93 •• El producto escalar de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es +48.0 m^2. El vector $\vec{A}$ tiene una magnitud de 9.00 m y dirección igual a 28.0° al oeste del sur. Si el vector $\vec{B}$ tiene una dirección de 39.0° al sur del este, ¿cuál es la magnitud de $\vec{B}$?

1.94 ••• Obtenga un *vector unitario* perpendicular a los dos vectores dados en el ejercicio 1.53.

1.95 •• Le dan los vectores $\vec{A} = 5.0\hat{\imath} - 6.5\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = -3.5\hat{\imath} + 7.0\hat{\jmath}$. Un tercer vector $\vec{C}$ está en el plano *xy* y es perpendicular a $\vec{A}$, y el producto escalar de $\vec{C}$ con $\vec{B}$ es 15.0. Con esta información, obtenga las componentes del vector $\vec{C}$.

1.96 •• Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen magnitudes $A = 3.00$ y $B = 3.00$. Su producto vectorial es $\vec{A} \times \vec{B} = -5.00\hat{k} + 2.00\hat{\imath}$. ¿Qué ángulo forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$?

1.97 •• Más adelante encontraremos cantidades representadas por $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$. *a*) Demuestre que, para tres vectores cualesquiera $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$, $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$. *b*) Calcule $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ para los tres vectores donde $\vec{A}$ tiene magnitud $A = 5.00$ y ángulo $\theta_A = 26.0°$ medido del eje +*x* al +*y*, $\vec{B}$ tiene $B = 4.00$ y $\theta_B = 63.0°$, y $\vec{C}$ tiene magnitud 6.00 y sigue el eje +*z*. $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están en el plano *xy*.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

1.98 ••• La longitud de un rectángulo se da como $L \pm l$ y su anchura como $W \pm w$. *a*) Demuestre que la incertidumbre de su área *A* es $a = Lw + lW$. Suponga que las incertidumbres *l* y *w* son pequeñas, de manera que el producto *lw* es muy pequeño y puede despreciarse. *b*) Demuestre que la incertidumbre fraccionaria del área es igual a la suma de las incertidumbres fraccionarias de la longitud y la anchura. *c*) Un sólido rectangular tiene dimensiones $L \pm 1$, $W \pm w$ y $H \pm h$. Obtenga la incertidumbre fraccionaria del volumen y demuestre que es igual a la suma de las incertidumbres fraccionarias de la longitud, la anchura y la altura.

1.99 ••• Pase completo. En la Universidad Autónoma de Inmensidad (UAI), el equipo de fútbol americano registra sus jugadas con desplazamientos vectoriales, siendo el origen la posición del balón al iniciar la jugada. En cierta jugada de pase, el receptor parte de $+1.0\hat{\imath} - 5.0\hat{\jmath}$, donde las unidades son yardas, $\hat{\imath}$ es a la derecha y $\hat{\jmath}$ es hacia delante. Los desplazamientos subsiguientes del receptor son $+9.0\hat{\imath}$ (en movimiento antes de salir la jugada), $+11.0\hat{\jmath}$ (sale hacia delante), $-6.0\hat{\imath} + 4.0\hat{\jmath}$ (a un lado) y $+12.0\hat{\imath} + 18.0\hat{\jmath}$ (al otro lado). Mientras tanto, el mariscal de campo retrocedió $-7.0\hat{\jmath}$. ¿Qué tan lejos y en qué dirección debe lanzar el balón el mariscal de campo? (Al igual que al entrenador, le recomendamos diagramar la situación antes de resolverla numéricamente).

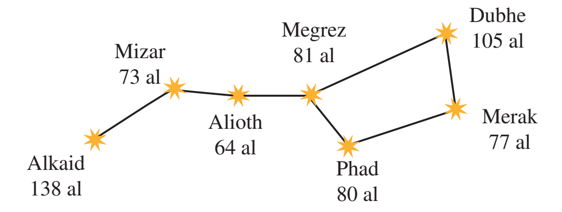
1.100 ••• Navegación en el Sistema Solar. La nave *Mars Polar Lander* se lanzó al espacio el 3 de enero de 1999. El 3 de diciembre de 1999, el día en que la nave se posó en la superficie de Marte, las posiciones de la Tierra y Marte estaban dadas por estas coordenadas:

	x	*y*	*z*
Tierra	0.3182 UA	0.9329 UA	0.0000 UA
Marte	1.3087 UA	−0.4423 UA	−0.0414 UA

En estas coordenadas, el Sol está en el origen y el plano de la órbita de la Tierra es el plano *xy*. La Tierra pasa por el eje +*x* una vez al año en el equinoccio de otoño, el primer día de otoño en el hemisferio norte (cerca del 22 de septiembre). Una UA o *unidad astronómica* es igual a 1.496×10^8 km, la distancia media de la Tierra al Sol. *a*) Dibuje un diagrama que muestre las posiciones del Sol, la Tierra y Marte el 3 de diciembre de 1999. *b*) Calcule las siguientes distancias en UA el 3 de diciembre de 1999: **i.** del Sol a la Tierra; **ii.** del Sol a Marte; **iii.** de la Tierra a Marte. *c*) Visto desde la Tierra, ¿qué ángulo había entre la dirección al Sol y la dirección a Marte el 3 de diciembre de 1999? *d*) Indique si Marte se veía desde donde usted estaba el 3 de diciembre de 1999 a medianoche. (Cuando es la medianoche en su posición, el Sol está en el lado opuesto de la Tierra).

1.101 ••• Navegación en la Osa Mayor. Las estrellas de la Osa Mayor parecen estar todas a la misma distancia de la Tierra, pero en realidad están muy lejanas entre sí. La figura P1.101 muestra las distancias desde la Tierra a cada estrella en años luz (al), es decir, la distancia que la luz viaja en un año. Un año luz es igual a 9.461×10^{15} m. *a*) Alkaid y Merak están separadas 25.6° en el firmamento. Dibuje un diagrama que muestre las posiciones relativas de Alkaid, Merak y el Sol. Calcule la distancia en años luz de Alkaid a Merak. *b*) Para un habitante de un planeta en órbita alrededor de Merak, ¿cuántos grados de separación en el cielo habría entre Alkaid y el Sol?

Figura **P1.101**



1.102 ••• El vector $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, llamado *vector de posición*, apunta desde el origen (0, 0, 0) hasta un punto arbitrario en el espacio, cuyas coordenadas son (*x*, *y*, *z*). Use sus conocimientos de vectores para demostrar que todos los puntos (*x*, *y*, *z*) que satisfacen la ecuación $Ax + By + Cz = 0$, donde *A*, *B* y *C* son constantes, están en un plano que pasa por el origen y es perpendicular al vector $A\hat{\imath} + B\hat{\jmath} + C\hat{k}$. Dibuje este vector y el plano.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

Haga que el eje x apunte al este y el eje $+y$ al norte. Lo que intentamos obtener es la componente y del vector velocidad, el cual tiene una magnitud $v = 20$ km/h y un ángulo $\theta = 53°$ medido del eje $+x$ hacia el eje $+y$. Partiendo de las ecuaciones (1.6), tenemos que $v_y = v \text{ sen } \theta = (20 \text{ km/h}) \text{ sen } 53° = 16$ km/h. De modo que la tormenta eléctrica se desplaza 16 km al norte en 1 h.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

1.5 Respuesta: ii. Densidad $= (1.80 \text{ kg})/(6.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3) = 3.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. Cuando se multiplica o se divide, el número con menos cifras significativas determina el número de cifras significativas del resultado.

1.6 La repuesta depende de cuántos estudiantes se inscribieron en la universidad.

1.7 Respuestas: ii, iii y iv. El vector $-\vec{T}$ tiene la misma magnitud que el vector $\vec{T}$, de modo que $\vec{S} - \vec{T} = \vec{S} + (-\vec{T})$ es la *suma* de un vector de magnitud igual a 3 m y uno de 4 m. Esta suma tiene una magnitud de 7 m si $\vec{S}$ y $-\vec{T}$ son paralelos, y una magnitud de 1 m si $\vec{S}$ y $-\vec{T}$ son antiparalelos. La magnitud de $\vec{S} - \vec{T}$ es de 5 m si $\vec{S}$ y $-\vec{T}$ son perpendiculares, de modo que los vectores $\vec{S}$, $\vec{T}$ y $\vec{S} - \vec{T}$ forman un triángulo rectángulo 3-4-5. La respuesta **i** es imposible porque la magnitud de la suma de dos vectores no puede ser mayor que la suma de las magnitudes; la respuesta **v** es imposible porque la suma de dos vectores puede ser cero solo si estos son antiparalelos y tienen la misma magnitud; y la respuesta **vi** es imposible porque la magnitud de un vector no puede ser negativa.

1.8 Respuestas: *a*) sí, *b*) no Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ pueden tener la misma magnitud pero diferentes componentes si apuntan en diferentes direcciones. Sin embargo, si tienen las mismas componentes, se trata del mismo vector $(\vec{A} = \vec{B})$ y entonces deben tener la misma magnitud.

1.9 Respuesta: todos tienen la misma magnitud Los cuatro vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ apuntan en diferentes direcciones, pero todos tienen la misma magnitud:

$$A = B = C = D = \sqrt{(\pm 3 \text{ m})^2 + (\pm 5 \text{ m})^2 + (\pm 2 \text{ m})^2}$$
$$= \sqrt{9 \text{ m}^2 + 25 \text{ m}^2 + 4 \text{ m}^2} = \sqrt{38 \text{ m}^2} = 6.2 \text{ m}$$

1.10 Respuestas: *a*) $\phi = 90°$, *b*) $\phi = 0°$ o $\phi = 180°$, *c*) $\phi = 0°$, *d*) $\phi = 180°$, *e*) $\phi = 90°$ *a*) El producto escalar es cero solo si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares. *b*) El producto vectorial es cero solo si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos o antiparalelos. *c*) El producto escalar es igual al producto de las magnitudes $(\vec{A} \cdot \vec{B} = AB)$ solo si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos. *d*) El producto escalar es igual al negativo del producto de las magnitudes $(\vec{A} \cdot \vec{B} = -AB)$ solo si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son antiparalelos. *e*) La magnitud del producto vectorial es igual al producto de las magnitudes [(magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}) = AB$] solo si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares.

Problema práctico

Respuestas: ***a*)** 5.2×10^2 N
***b*)** 4.5×10^2 N·m

MOVIMIENTO RECTILÍNEO





? Un saltador de *bungee* acelera durante la primera parte de su caída, luego se detiene lentamente conforme la cuerda del *bungee* se estira y se pone tensa. ¿Es correcto decir que el saltador está *acelerando* conforme reduce su velocidad durante la parte final de su caída?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir el movimiento rectilíneo en términos de velocidad media, velocidad instantánea, aceleración media y aceleración instantánea.
- Cómo interpretar gráficas de posición contra tiempo, velocidad contra tiempo y aceleración contra tiempo para el movimiento rectilíneo.
- Cómo resolver problemas que impliquen movimiento rectilíneo con aceleración constante, incluyendo problemas de caída libre.
- Cómo analizar el movimiento rectilíneo cuando la aceleración no es constante.

¿Qué distancia debe recorrer un avión comercial en la pista antes de alcanzar la rapidez de despegue? Cuando lanzamos una pelota de béisbol verticalmente, ¿qué tanto sube? Cuando se nos resbala un vaso de la mano, ¿cuánto tiempo tenemos para atraparlo antes de que choque contra el piso? Este es el tipo de preguntas que usted aprenderá a contestar en este capítulo. Iniciaremos nuestro estudio de la física con la *mecánica*, que es el estudio de las relaciones entre fuerza, materia y movimiento. En este capítulo y el siguiente estudiaremos la *cinemática*, es decir, la parte de la mecánica que describe el movimiento. Después estudiaremos la *dinámica*: la relación entre el movimiento y sus causas.

En este capítulo nos concentramos en el tipo de movimiento más sencillo: un cuerpo que viaja en línea recta. Para describir este movimiento, introducimos las cantidades físicas *velocidad* y *aceleración*, las cuales en física tienen definiciones más precisas y algo distintas en comparación con las empleadas en el lenguaje cotidiano. Tanto la velocidad como la aceleración son *vectores*: como vimos en el capítulo 1, esto significa que tienen magnitud y dirección. En este capítulo nos interesa solo el movimiento rectilíneo, por lo que no necesitaremos aplicar toda el álgebra vectorial; no obstante, el uso de vectores será esencial en el capítulo 3, cuando consideremos el movimiento en dos o tres dimensiones.

Desarrollaremos ecuaciones sencillas para describir el movimiento rectilíneo en el caso especial en que la aceleración es constante. Un ejemplo es el movimiento de un objeto en caída libre. También consideraremos situaciones en las que la aceleración varía durante el movimiento; en estos casos es necesario utilizar integrales para describir el movimiento. (Si aún no ha estudiado integrales, la sección 2.6 es opcional).

2.1 Desplazamiento, tiempo y velocidad media

Suponga que un piloto de autos de arrancones conduce su vehículo por una pista recta (figura 2.1). Para estudiar su movimiento, necesitamos un sistema de coordenadas. Determinamos que el eje x va a lo largo de la trayectoria recta del auto, con el origen O en la línea de salida. También elegimos un punto en el auto, digamos su extremo delantero, y representamos todo el vehículo con ese punto y lo tratamos como una **partícula**.

Una forma útil de describir el movimiento de la partícula que representa el vehículo es en términos del cambio en su coordenada x durante un intervalo de tiempo. Suponga que 1.0 s después del arranque, el frente del vehículo está en el punto P_1, a 19 m del origen, y que 4.0 s después del arranque está en el punto P_2, a 277 m del origen. El *desplazamiento* de la partícula es un vector que apunta de P_1 a P_2 (véase la sección 1.7). La figura 2.1 muestra que este vector apunta a lo largo del eje x. La componente x del desplazamiento es el cambio en el valor de x, (277 m − 19 m) = 258 m, que tuvo lugar en un lapso de (4.0 s − 1.0 s) = 3.0 s. La **velocidad media** del automóvil durante este intervalo de tiempo se define como una cantidad *vectorial*, cuya componente x es el cambio en x dividido entre el intervalo de tiempo: (258 m)/(3.0 s) = 86 m/s.

En general, la velocidad media depende del intervalo de tiempo elegido. Durante un lapso de 3.0 s *antes* del arranque, la velocidad media sería cero, porque el automóvil estaba en reposo en la línea de salida y tuvo un desplazamiento cero.

Generalicemos el concepto de velocidad media. En el tiempo t_1 el automóvil está en el punto P_1, con la coordenada x_1, y en el tiempo t_2 está en el punto P_2 con la coordenada x_2. El desplazamiento del automóvil en el intervalo de t_1 a t_2 es el vector de P_1 a P_2. La componente x del desplazamiento, denotada con Δx, es el cambio en la coordenada x:

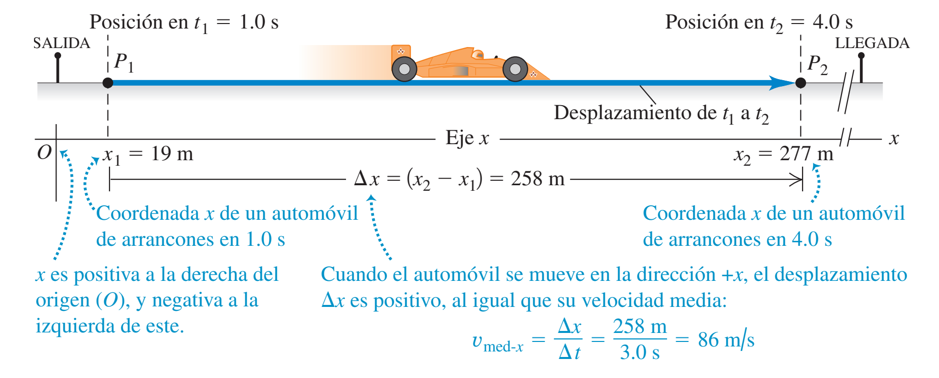
$$\Delta x = x_2 - x_1 \tag{2.1}$$

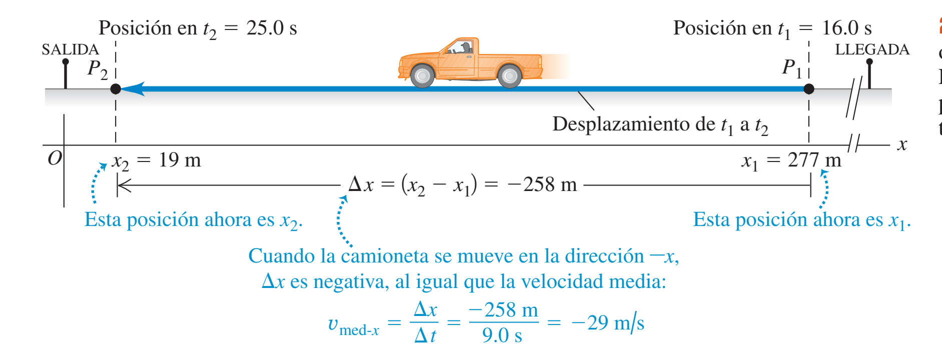
El automóvil de arrancones se desplaza solamente a lo largo del eje x, de manera que las componentes y y z del desplazamiento son iguales a cero.

CUIDADO **Significado de Δx** Note que Δx *no* es el producto de Δ y x; es solo un símbolo que significa "el cambio en la cantidad x". Siempre usaremos la letra griega mayúscula Δ (delta) para representar un *cambio* en una cantidad que se calcula restando el valor *inicial* del valor *final*, y nunca a la inversa. Asimismo, el intervalo de tiempo de t_1 a t_2 es Δt, el cambio en la cantidad t: $\Delta t = t_2 - t_1$ (tiempo final menos tiempo inicial).

La componente x de la velocidad promedio, o **velocidad media *x***, es la componente x del desplazamiento, Δx, dividida entre el intervalo de tiempo Δt durante el

2.1 Posiciones de un automóvil de arrancones en dos instantes durante su recorrido.





2.2 Posiciones de la camioneta de un oficial en dos instantes de su movimiento. Los puntos P_1 y P_2 ahora se refieren a las posiciones de la camioneta; vemos que se trata del inverso de la figura 2.1.

que ocurre el desplazamiento. Usamos el símbolo $v_{med\text{-}x}$ para representar la velocidad media (el subíndice "med" indica que se trata de un valor promedio, y el subíndice x indica que es la componente x):

$$v_{med\text{-}x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{(velocidad media } x\text{, movimiento rectilíneo)} \qquad (2.2)$$

En el ejemplo del automóvil de arrancones teníamos $x_1 = 19$ m, $x_2 = 277$ m, $t_1 = 1.0$ s y $t_2 = 4.0$ s, así que la ecuación (2.2) da

$$v_{med\text{-}x} = \frac{277 \text{ m} - 19 \text{ m}}{4.0 \text{ s} - 1.0 \text{ s}} = \frac{258 \text{ m}}{3.0 \text{ s}} = 86 \text{ m/s}$$

La velocidad media x del automóvil es positiva. Esto significa que, durante el intervalo, la coordenada x aumentó y el auto se movió en la dirección $+x$ (a la derecha en la figura 2.1).

Si una partícula se mueve en la dirección x *negativa* durante un intervalo de tiempo, su velocidad media para ese lapso es negativa. Por ejemplo, suponga que la camioneta de un oficial se desplaza hacia la izquierda sobre la pista (figura 2.2). La camioneta está en $x_1 = 277$ m en $t_1 = 16.0$ s, y en $x_2 = 19$ m en $t_2 = 25.0$ s. Entonces, $\Delta x = (19 \text{ m} - 277 \text{ m}) = -258$ m y $\Delta t = (25.0 \text{ s} - 16.0 \text{ s}) = 9.0$ s. La componente x de la velocidad media es $v_{med\text{-}x} = \Delta x/\Delta t = (-258 \text{ m})/(9.0 \text{ s}) = -29$ m/s. La tabla 2.1 muestra algunas reglas sencillas para identificar si la velocidad x es positiva o negativa.

CUIDADO **Elección de la dirección x positiva** No caiga en la tentación de pensar que una velocidad media positiva implica necesariamente movimiento a la derecha, como en la figura 2.1, y una velocidad media negativa implica forzosamente movimiento a la izquierda, como en la figura 2.2. Tales conclusiones son correctas *solo* si la dirección $+x$ es hacia la derecha, como elegimos en las figuras 2.1 y 2.2. Igualmente podríamos haber decidido que la dirección $+x$ fuera hacia la izquierda, con el origen en la llegada. Entonces, el automóvil habría tenido velocidad media negativa, y la camioneta del oficial, velocidad media positiva. En casi todos los problemas, podremos elegir la dirección del eje de coordenadas. Una vez tomada la decisión, ¡*deberá* tomarse en cuenta al interpretar los signos de $v_{med\text{-}x}$ y otras cantidades que describen el movimiento!

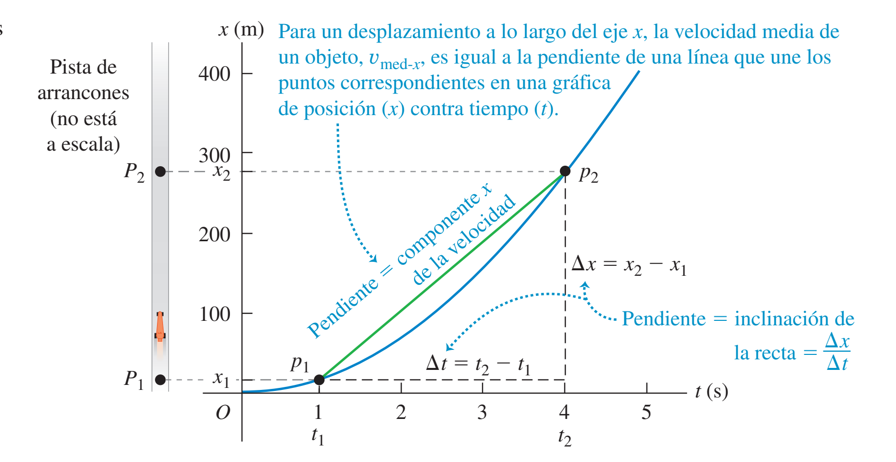
Tabla 2.1 Reglas para el signo de la velocidad

Si la coordenada x es:	. . . la velocidad x es:
Positiva y aumenta (volviéndose más positiva)	Positiva: la partícula se mueve en la dirección $+x$
Positiva y disminuye (volviéndose menos positiva)	Negativa: la partícula se mueve en la dirección $-x$
Negativa y aumenta (volviéndose menos negativa)	Positiva: la partícula se mueve en la dirección $+x$
Negativa y disminuye (volviéndose más negativa)	Negativa: la partícula se mueve en la dirección $-x$

Nota: Estas reglas se aplican tanto a la velocidad media, $v_{med\text{-}x}$, como a la velocidad instantánea, v_x (que se analizará en la sección 2.2).

En el movimiento rectilíneo, por lo general, llamaremos a Δx simplemente desplazamiento y a $v_{med\text{-}x}$ la velocidad media. Sin embargo, no olvide que estas son realmente las componentes x de cantidades vectoriales que, en este caso especial, *solo* tienen componentes x. En el capítulo 3, los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración tendrán dos o tres componentes distintas de cero.

La figura 2.3 es una gráfica de la posición del automóvil de arrancones como una función del tiempo, es decir, una **gráfica *x*-*t***. La curva de la figura *no* representa la trayectoria del automóvil; esta es una línea recta, como se observa en la figura 2.1. Más bien, la gráfica es una forma de representar visualmente cómo cambia la posición del automóvil con el tiempo. Los puntos p_1 y p_2 en la gráfica corresponden a los puntos P_1 y P_2 de la trayectoria del automóvil. La línea p_1p_2 es la hipotenusa de un



2.3 Posición de un automóvil de arrancones en función del tiempo.

Tabla 2.2 Magnitudes típicas de velocidad

Reptar del caracol	10^{-3} m/s
Caminata rápida	2 m/s
Ser humano más rápido	11 m/s
Velocidades en carretera	30 m/s
Automóvil más rápido	341 m/s
Movimiento aleatorio de moléculas de aire	500 m/s
Avión más rápido	1000 m/s
Satélite de comunicación en órbita	3000 m/s
Electrón en un átomo de hidrógeno	2×10^6 m/s
Luz que viaja en el vacío	3×10^8 m/s

triángulo rectángulo con cateto vertical $\Delta x = x_2 - x_1$ y cateto horizontal $\Delta t = t_2 - t_1$. La velocidad media del automóvil $v_{med\text{-}x} = \Delta x/\Delta t$ es igual a la *pendiente* de la línea p_1p_2, es decir, el cociente del cateto vertical Δx entre el cateto horizontal Δt.

La velocidad media x depende solo del desplazamiento total $\Delta x = x_2 - x_1$, que se da durante el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$, no de los pormenores de lo que sucede dentro de ese intervalo. En el tiempo t_1, una motocicleta podría haber rebasado al auto de arrancones en el punto P_1 de la figura 2.1, para después reventar el motor y bajar la velocidad, pasando por P_2 en el mismo instante t_2 que el auto. Ambos vehículos tienen el mismo desplazamiento en el mismo lapso, así que tienen la misma velocidad media x.

Si expresamos la distancia en metros y el tiempo en segundos, la velocidad media se mide en metros por segundo (m/s). Otras unidades de velocidad comunes son kilómetros por hora (km/h), pies por segundo (ft/s), millas por hora (mi/h) y nudos (1 nudo = 1 milla náutica/h = 6080 ft/h). La tabla 2.2 muestra algunas magnitudes típicas de velocidad.

Evalúe su comprensión de la sección 2.1 Cada uno de los siguientes viajes en automóvil dura una hora. La dirección x positiva es hacia el este. **i.** El automóvil *A* viaja 50 km al este. **ii.** El automóvil *B* viaja 50 km al oeste. **iii.** El automóvil *C* viaja 60 km al este, luego da vuelta y viaja 10 km al oeste. **iv.** El automóvil *D* viaja 70 km al este. **v.** El automóvil *E* viaja 20 km al oeste, luego da vuelta y viaja 20 km al este. *a*) Clasifique los cinco viajes en orden de velocidad media x de la más positiva a la más negativa. *b*) ¿Cuáles viajes, si acaso, tienen la misma velocidad media x? *c*) ¿Para cuál viaje, si acaso, la velocidad media x es igual a cero?

2.2 Velocidad instantánea

Hay ocasiones en que la velocidad media es lo único que necesitamos saber acerca del movimiento de una partícula. Por ejemplo, una carrera en pista recta es en realidad una competencia para determinar quién tuvo la mayor velocidad media, $v_{med\text{-}x}$. Se entrega el premio al competidor que haya recorrido el desplazamiento Δx de la línea de salida a la de meta en el intervalo de tiempo más corto, Δt (figura 2.4).

2.4 El ganador de una competencia de natación de 50 m es el nadador cuya velocidad media tenga la mayor magnitud, es decir, quien cubra el desplazamiento Δx de 50 m en el tiempo transcurrido Δt más corto.



Sin embargo, la velocidad media de una partícula durante un intervalo de tiempo no nos indica la rapidez, o la dirección, con que la partícula se estaba moviendo en un instante determinado del intervalo. Para describir esto, necesitamos conocer la **velocidad instantánea**, es decir, la velocidad en un instante específico o en un punto específico de la trayectoria.

CUIDADO **¿Cuánto tiempo dura un instante?** Observe que la palabra "instante" tiene un significado un tanto distinto en física que en el lenguaje cotidiano. Podemos utilizar la frase "duró solo un instante" para referirnos a algo que duró un intervalo de tiempo muy corto. Sin embargo, en física un instante no tiene duración; es solo un valor de tiempo.

Para obtener la velocidad instantánea del auto de la figura 2.1 en el punto P_1, movemos el segundo punto P_2 cada vez más cerca del primer punto P_1 y calculamos la velocidad media $v_{\text{med-}x} = \Delta x/\Delta t$ para estos desplazamientos y lapsos cada vez más cortos. Tanto Δx como Δt se hacen muy pequeños; pero su cociente no necesariamente lo hace. En el lenguaje del cálculo, el límite de $\Delta x/\Delta t$ conforme Δt se acerca a cero es la **derivada** de x con respecto a t y se escribe dx/dt. *La velocidad instantánea es el límite de la velocidad media conforme el intervalo de tiempo se acerca a cero; es igual a la tasa instantánea de cambio de posición con el tiempo*. Usamos el símbolo v_x, sin "med" en el subíndice, para la velocidad instantánea a lo largo del eje x o **componente x de la velocidad instantánea**:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad \text{(velocidad instantánea } x\text{, movimiento rectilíneo)} \quad (2.3)$$

El intervalo de tiempo Δt siempre es positivo, así que v_x tiene el mismo signo algebraico que Δx. Un valor positivo de v_x indica que x aumenta y el movimiento es en la dirección x positiva; un valor negativo de v_x indica que x disminuye y el movimiento es en la dirección x negativa. Un cuerpo puede tener x positiva y v_x negativa, o a la inversa; x nos dice dónde está el cuerpo, en tanto que v_x nos indica cómo se mueve (figura 2.5). Las reglas que presentamos en la tabla 2.1 (sección 2.1) para el signo de la velocidad media, $v_{\text{med-}x}$, también se aplican para el signo de la velocidad instantánea v_x.

2.5 Incluso al avanzar, la velocidad instantánea de este ciclista puede ser negativa, si viaja en la dirección $-x$. En cualquier problema, nosotros decidimos cuál dirección es positiva y cuál es negativa.



La velocidad instantánea, al igual que la velocidad media, es una cantidad vectorial; y la ecuación (2.3) define su componente x. En el movimiento rectilíneo, las demás componentes de la velocidad instantánea son cero y, en este caso, llamaremos a v_x simplemente velocidad instantánea. (En el capítulo 3 veremos el caso general en el que la velocidad instantánea puede tener componentes x, y y z distintas de cero). Al usar el término "velocidad", siempre nos referiremos a la velocidad instantánea, no a la media.

Los términos "velocidad" y "rapidez" se usan indistintamente en el lenguaje cotidiano; no obstante, en física tienen diferentes significados. **Rapidez** denota la distancia recorrida dividida entre el tiempo, ya sea media o instantánea. Usaremos el símbolo v (*sin* subíndice) para denotar la *rapidez* instantánea, la cual mide qué tan rápido se mueve una partícula; la *velocidad* instantánea mide con qué rapidez *y* en qué dirección se mueve. La rapidez instantánea es la magnitud de la velocidad instantánea y, por lo tanto, nunca es negativa. Por ejemplo, una partícula con velocidad instantánea $v_x = 25$ m/s y otra con $v_x = -25$ m/s se mueven en direcciones opuestas con la misma rapidez instantánea de 25 m/s.

CUIDADO **Rapidez media y velocidad media** La rapidez media *no* es la magnitud de la velocidad media. Cuando César Cielo estableció un récord mundial en 2009 nadando 100.0 m en 46.91 s, su rapidez media fue de (100.0 m)/(46.91 s) = 2.132 m/s. No obstante, como nadó dos veces la longitud de una alberca de 50 m, terminó en el punto de donde partió, con un desplazamiento total de cero ¡y una *velocidad* media de cero! Tanto la rapidez media como la rapidez instantánea son escalares, no vectores, porque no incluyen información de dirección.



Ejemplo 2.1 Velocidades media e instantánea

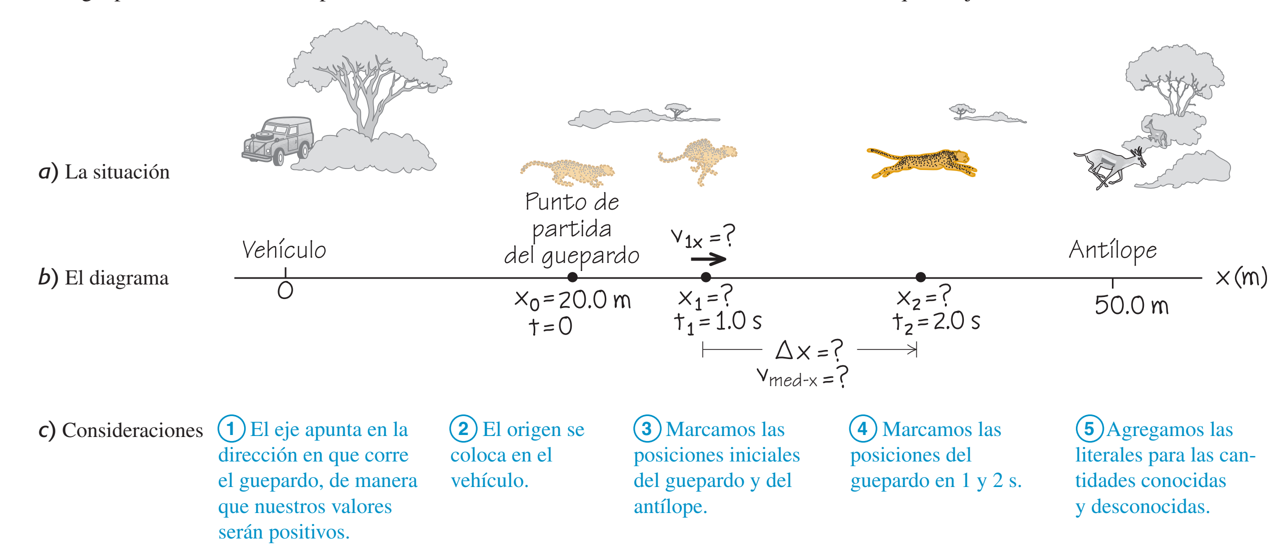
Un guepardo acecha 20 m al este de un observador (figura 2.6*a*). En el tiempo $t = 0$, el guepardo comienza a correr al este hacia un antílope que se encuentra 50 m al este del observador. Durante los primeros 2.0 s del ataque, la coordenada x del guepardo varía con el tiempo según la ecuación $x = 20\text{ m} + (5.0\text{ m/s}^2)t^2$. *a*) Obtenga el desplazamiento del guepardo entre $t_1 = 1.0$ s y $t_2 = 2.0$ s. *b*) Calcule la velocidad media en dicho intervalo. *c*) Calcule la velocidad instantánea en $t_1 = 1.0$ s tomando $\Delta t = 0.1$ s, luego $\Delta t = 0.01$ s, luego $\Delta t = 0.001$ s. *d*) Deduzca una expresión general para la velocidad instantánea del guepardo en función del tiempo, y con ella calcule v_x en $t = 1.0$ s y $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 2.6*b* muestra el movimiento del guepardo. Se usa la ecuación (2.1) para el desplazamiento, la ecuación (2.2) para la velocidad media, y la ecuación (2.3) para la velocidad instantánea.

Continúa

2.6 Un guepardo ataca a un antílope en una emboscada. Los animales no están a la misma escala que el eje.



EJECUTAR: *a*) En $t_1 = 1.0$ s y $t_2 = 2.0$ s, las posiciones del guepardo x_1 y x_2 son

$$x_1 = 20 \text{ m} + (5.0 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s})^2 = 25 \text{ m}$$
$$x_2 = 20 \text{ m} + (5.0 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ s})^2 = 40 \text{ m}$$

El desplazamiento en este intervalo de 1.0 s es

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 40 \text{ m} - 25 \text{ m} = 15 \text{ m}$$

b) La velocidad media durante este intervalo es

$$v_{\text{med-}x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{40 \text{ m} - 25 \text{ m}}{2.0 \text{ s} - 1.0 \text{ s}} = \frac{15 \text{ m}}{1.0 \text{ s}} = 15 \text{ m/s}$$

c) Con $\Delta t = 0.1$ s, el intervalo es de $t_1 = 1.0$ s a un nuevo $t_2 = 1.1$ s. En t_2, la posición es

$$x_2 = 20 \text{ m} + (5.0 \text{ m/s}^2)(1.1 \text{ s})^2 = 26.05 \text{ m}$$

La velocidad media durante este intervalo de 0.1 s es

$$v_{\text{med-}x} = \frac{26.05 \text{ m} - 25 \text{ m}}{1.1 \text{ s} - 1.0 \text{ s}} = 10.5 \text{ m/s}$$

Al seguir este método, podemos calcular las velocidades medias de los intervalos de 0.01 s y 0.001 s. Los resultados son 10.05 m/s y 10.005 m/s. Al disminuir Δt, la velocidad media se acerca a 10.0 m/s, por lo que concluimos que la velocidad instantánea en $t = 1.0$ s es de 10.0 m/s. (En estos cálculos no se tomaron en cuenta las reglas de conteo de cifras significativas).

d) Para calcular la velocidad instantánea en función del tiempo, se deriva la expresión de x con respecto a t. La derivada de una constante es cero, y para cualquier n la derivada de t^n es nt^{n-1}, así que la derivada de t^2 es $2t$. Por lo tanto,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (5.0 \text{ m/s}^2)(2t) = (10 \text{ m/s}^2)t$$

En $t = 1.0$ s, esto produce $v_x = 10$ m/s, como vimos en el inciso *c*); en $t = 2.0$ s, $v_x = 20$ m/s.

EVALUAR: Nuestros resultados muestran que el guepardo aumentó su rapidez de $t = 0$ (cuando estaba en reposo) a $t = 1.0$ s ($v_x = 10$ m/s) y a $t = 2.0$ s ($v_x = 20$ m/s), lo cual es razonable: el guepardo recorrió solo 5 m durante el intervalo $t = 0$ a $t = 1.0$ s; sin embargo, recorrió 15 m en el intervalo $t = 1.0$ s a $t = 2.0$ s.

Obtención de la velocidad en una gráfica *x-t*

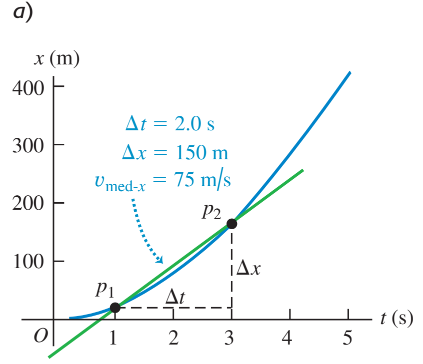
MasteringPHYSICS®

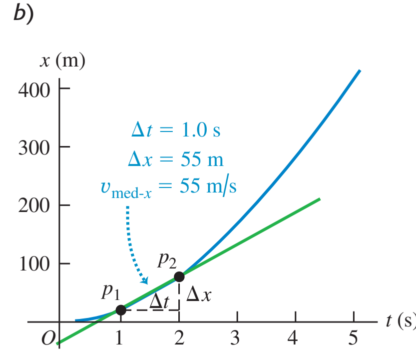
ActivPhysics 1.1: Analyzing Motion Using Diagrams

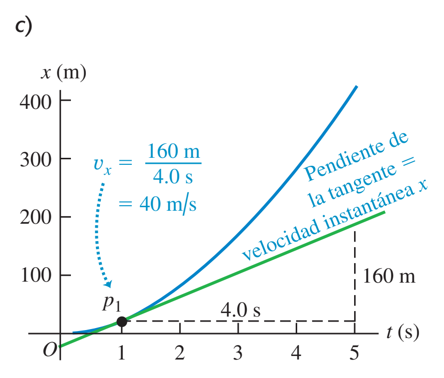
La velocidad de una partícula también puede obtenerse a partir de la gráfica de la posición de la partícula en función del tiempo. Suponga que queremos conocer la velocidad del automóvil de arrancones de la figura 2.1 en P_1. En la figura 2.1, conforme P_2 se acerca a P_1, el punto p_2 en la gráfica *x-t* de las figuras 2.7*a* y 2.7*b* se acerca al punto p_1, y la velocidad media x se calcula en intervalos Δt cada vez más cortos. En el límite en que $\Delta t \rightarrow 0$, ilustrado en la figura 2.7*c*, la pendiente de la línea p_1p_2 es igual a la pendiente de la línea tangente a la curva en el punto p_1. Así, *en una gráfica de posición en función del tiempo para movimiento rectilíneo, la velocidad instantánea en cualquier punto es igual a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.*

Si la tangente a la curva *x-t* sube hacia la derecha, como en la figura 2.7*c*, entonces su pendiente es positiva, la velocidad es positiva, y el movimiento es en la dirección $+x$. Si la tangente baja hacia la derecha, la pendiente de la gráfica *x-t* y

2.7 Uso de una gráfica x-t al ir de *a*), *b*) velocidad media a *c*) velocidad instantánea v_x. En *c*) obtenemos la pendiente de la tangente a la curva x-t dividiendo cualquier intervalo vertical (en unidades de distancia) a lo largo de la tangente entre el intervalo horizontal correspondiente (en unidades de tiempo).

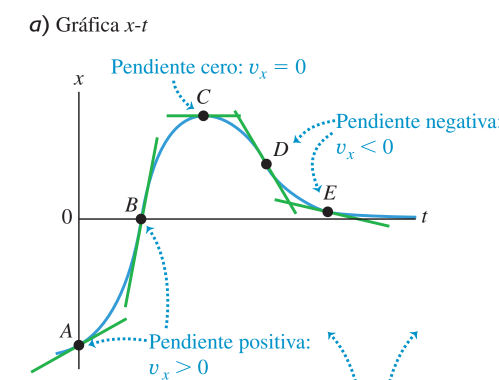




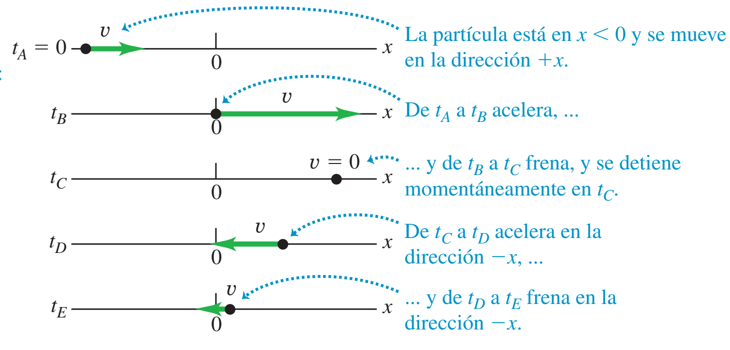


2.8 *a*) Gráfica x-t del movimiento de una partícula dada. La pendiente de la tangente en cualquier punto es igual a la velocidad en ese punto. *b*) Diagrama de movimiento que muestra la posición y velocidad de la partícula en cada uno de los instantes identificados en el diagrama x-t.







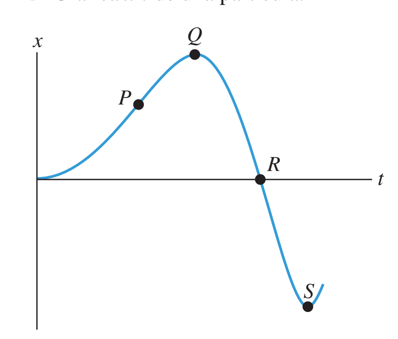


Cuanto más pronunciada sea la pendiente (positiva o negativa) de la gráfica x-t de un objeto, mayor será la rapidez del objeto en la dirección positiva o negativa.

la velocidad son negativas, y el movimiento es en la dirección $-x$. Cuando la tangente es horizontal, la pendiente y la velocidad son cero. La figura 2.8 ilustra las tres posibilidades.

La figura 2.8 muestra realmente el movimiento de una partícula en dos formas: como *a*) una gráfica x-t y como *b*) un **diagrama de movimiento** que indica la posición de la partícula en diversos instantes (como cuadros de un video del movimiento de la partícula), junto con flechas que representan su velocidad en cada instante. En este capítulo, usaremos tanto las gráficas x-t como los diagramas de movimiento para ayudarle a entender el movimiento. Le recomendamos dibujar *no solo* una gráfica x-t *sino también* un diagrama de movimiento como parte de la solución de cualquier problema que implique movimiento.

2.9 Gráfica x-t de una partícula.



Evalúe su comprensión de la sección 2.2 La figura 2.9 es una gráfica x-t del movimiento de una partícula. *a*) Ordene los valores de la velocidad v_x de la partícula en los puntos P, Q, R y S del más positivo al más negativo. *b*) ¿En qué puntos v_x es positiva? *c*) ¿En cuáles puntos v_x es negativa? *d*) ¿En cuáles es cero? *e*) Ordene los valores de la *rapidez* de la partícula en los puntos P, Q, R y S del más rápido al más lento. ❙

MP

2.3 Aceleración media e instantánea

Así como la velocidad describe la tasa de cambio de la posición con el tiempo, la *aceleración* describe la tasa de cambio de la velocidad con el tiempo. Al igual que la velocidad, la aceleración es una cantidad vectorial. En el movimiento rectilíneo, su única componente distinta de cero está sobre el eje en que ocurre el movimiento. Como veremos, en el movimiento rectilíneo la aceleración puede referirse tanto al aumento como a la disminución de la rapidez.

Aceleración media

Consideremos otra vez el movimiento de una partícula en el eje x. Suponga que, en el tiempo t_1, la partícula está en el punto P_1 y tiene una componente x de velocidad (instantánea) v_{1x}, y en un instante posterior t_2 está en el punto P_2 y tiene una componente x de velocidad v_{2x}. Así, la componente x de la velocidad cambia en $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$.

Definimos la **aceleración media** de la partícula al moverse de P_1 a P_2 como una cantidad vectorial cuya componente x es $a_{\text{med-}x}$ (conocida como **aceleración media en x**) igual a Δv_x, el cambio en la componente x de la velocidad, dividido entre el intervalo de tiempo Δt:

$$a_{\text{med-}x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad \text{(aceleración media, movimiento rectilíneo)} \tag{2.4}$$

En el movimiento rectilíneo a lo largo del eje x, por lo general llamaremos simplemente aceleración media a $a_{\text{med-}x}$. (Veremos las otras componentes del vector aceleración media en el capítulo 3).

Si expresamos la velocidad en metros por segundo y el tiempo en segundos, la aceleración media está dada en metros por segundo por segundo, o bien (m/s)/s. Esto suele escribirse como m/s^2 y se lee "metros por segundo al cuadrado".

CUIDADO **Aceleración contra velocidad** ¡Tenga cuidado de no confundir aceleración con velocidad! La velocidad describe el cambio de la posición de un objeto con el tiempo; nos indica con qué rapidez y en qué dirección se mueve el objeto. La aceleración describe cómo cambia la velocidad con el tiempo; es decir, nos dice cómo cambian la rapidez y la dirección del movimiento. Podría ser útil recordar la frase "aceleración es a velocidad lo que velocidad es a posición". También ayudaría imaginarse a usted mismo abordo de un automóvil en movimiento. Si el automóvil acelera hacia adelante y aumenta su rapidez, usted se sentirá empujado hacia atrás hacia su asiento; si acelera hacia atrás y disminuye su rapidez, se sentiría empujado hacia adelante. Si la velocidad es constante y no hay aceleración, no tendrá sensación alguna. (Analizaremos la causa de estas sensaciones en el capítulo 4).



Ejemplo 2.2 Aceleración media

Un astronauta sale de una nave espacial en órbita para probar una unidad personal de maniobras. Mientras se mueve en línea recta, su compañero a bordo mide su velocidad cada 2.0 s a partir del instante $t = 1.0$ s:

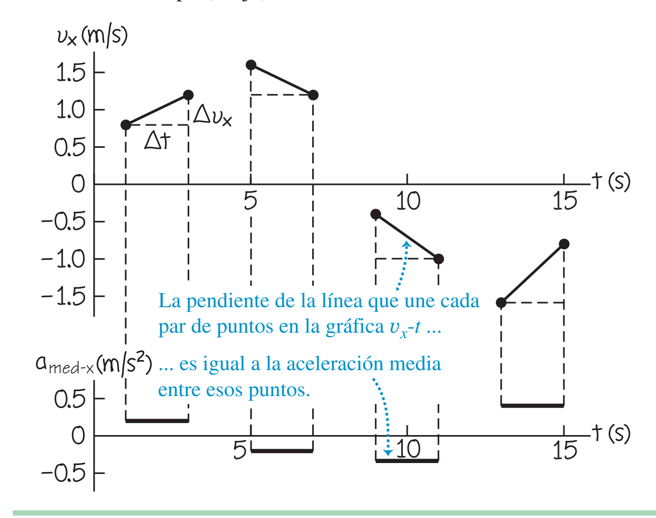
t	v_x	t	v_x
1.0 s	0.8 m/s	9.0 s	−0.4 m/s
3.0 s	1.2 m/s	11.0 s	−1.0 m/s
5.0 s	1.6 m/s	13.0 s	−1.6 m/s
7.0 s	1.2 m/s	15.0 s	−0.8 m/s

Calcule la aceleración media y diga si la rapidez del astronauta aumenta o disminuye durante cada uno de estos intervalos de 2.0 s: *a*) $t_1 = 1.0$ s a $t_2 = 3.0$ s; *b*) $t_1 = 5.0$ s a $t_2 = 7.0$ s; *c*) $t_1 = 9.0$ s a $t_2 = 11.0$ s; *d*) $t_1 = 13.0$ s a $t_2 = 15.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos la ecuación (2.4) para determinar la aceleración media $a_{\text{med-}x}$ a partir del cambio de velocidad durante cada intervalo de tiempo. Para calcular los cambios en la rapidez, usaremos la idea de que la rapidez v es la magnitud de la velocidad instantánea v_x.

La parte superior de la figura 2.10 es la gráfica de velocidad como función del tiempo. En esta gráfica v_x-t, la pendiente de la línea que une los puntos inicial y final de cada intervalo es la aceleración media $a_{\text{med-}x} = \Delta v_x/\Delta t$ para ese intervalo. Las cuatro pendientes (y por lo tanto, los *signos* de las aceleraciones medias) son, respectivamente, positiva, negativa, negativa y positiva. La tercera y cuarta pendientes (y por lo tanto, las aceleraciones medias mismas) tienen una magnitud mayor que la primera y la segunda.



2.10 Gráficas de velocidad contra tiempo (arriba) y aceleración media contra tiempo (abajo) del astronauta.

EJECUTAR: Usando la ecuación (2.4), obtenemos:

a) $a_{\text{med-}x} = (1.2\ \text{m/s} - 0.8\ \text{m/s})/(3.0\ \text{s} - 1.0\ \text{s}) = 0.2\ \text{m/s}^2$. La rapidez (magnitud de la velocidad instantánea) aumenta de 0.8 m/s a 1.2 m/s.

b) $a_{\text{med-}x} = (1.2\ \text{m/s} - 1.6\ \text{m/s})/(7.0\ \text{s} - 5.0\ \text{s}) = -0.2\ \text{m/s}^2$. La rapidez disminuye de 1.6 m/s a 1.2 m/s.

c) $a_{\text{med-}x} = [-1.0\ \text{m/s} - (-0.4\ \text{m/s})]/(11.0\ \text{s} - 9.0\ \text{s}) = -0.3\ \text{m/s}^2$. La rapidez aumenta de 0.4 m/s a 1.0 m/s.

d) $a_{\text{med-}x} = [-0.8\ \text{m/s} - (-1.6\ \text{m/s})]/(15.0\ \text{s} - 13.0\ \text{s}) = 0.4\ \text{m/s}^2$. La rapidez disminuye de 1.6 m/s a 0.8 m/s.

En la parte inferior de la figura 2.10, se graficaron los valores de $a_{\text{med-}x}$.

EVALUAR: Los signos y las magnitudes relativas de las aceleraciones medias concuerdan con nuestras predicciones cualitativas. Para referencias futuras, tome nota de esta relación entre rapidez, velocidad y aceleración. Nuestro resultado indica que cuando la aceleración tiene la *misma* dirección (el mismo signo algebraico) que la velocidad inicial, como en los intervalos *a*) y *c*), el astronauta se mueve más rápidamente; cuando $a_{\text{med-}x}$ tiene la dirección *opuesta* (esto es, el signo contrario) que la velocidad inicial como en los intervalos *b*) y *d*), se frena. Por lo tanto, la aceleración positiva significa ir más rápido si la velocidad x es positiva [intervalo *a*)], pero ir más lento si la velocidad x es negativa [intervalo *d*)]. Asimismo, la aceleración x negativa implica ir más rápido si la velocidad x es negativa [intervalo *c*)], pero ir más lento si la velocidad x es positiva [intervalo *b*)].

Aceleración instantánea

Ahora podemos definir la **aceleración instantánea** con el mismo procedimiento que seguimos para la velocidad instantánea. Como ejemplo, suponga que un piloto de carreras está conduciendo en una recta como se ilustra en la figura 2.11. Para definir la aceleración instantánea en el punto P_1, tomamos el segundo punto P_2 en la figura 2.11 cada vez más cerca de P_1, de modo que la aceleración media se calcule en intervalos cada vez más cortos. *La aceleración instantánea es el límite de la aceleración media conforme el intervalo de tiempo se acerca a cero*. En el lenguaje del cálculo, *la aceleración instantánea es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo*. Así,

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{(aceleración instantánea, movimiento rectilíneo)} \tag{2.5}$$

Observe que a_x en la ecuación (2.5) es realmente la componente x de la aceleración o la **aceleración instantánea**; en el movimiento rectilíneo, las demás componentes de este vector son cero. A partir de aquí, al hablar de "aceleración" nos referiremos siempre a la aceleración instantánea, no a la aceleración media.

2.11 Vehículo de Fórmula 1 en dos puntos de la recta.





Ejemplo 2.3 Aceleraciones media e instantánea

Suponga que la velocidad v_x del automóvil en la figura 2.11 en un instante t está dada por la ecuación

$$v_x = 60 \text{ m/s} + (0.50 \text{ m/s}^3)t^2$$

a) Calcule el cambio de velocidad del automóvil en el intervalo entre $t_1 = 1.0$ s y $t_2 = 3.0$ s. *b*) Calcule la aceleración media en este intervalo de tiempo. *c*) Obtenga la aceleración instantánea en $t_1 = 1.0$ s tomando Δt primero como 0.1 s, después como 0.01 s y luego como 0.001 s. *d*) Deduzca una expresión para la aceleración instantánea como función del tiempo y úsela para obtener la aceleración en $t = 1.0$ s y $t = 3.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este caso es similar al ejemplo 2.1 de la sección 2.2. (Recomendamos repasarlo ahora). En el ejemplo 2.1, calculamos la velocidad media a partir del cambio en la posición en intervalos cada vez más cortos, y obtuvimos una expresión para la velocidad instantánea diferenciando la posición en función del tiempo. En este ejemplo, tenemos exactamente lo mismo. Usaremos la ecuación (2.4) para obtener la *aceleración* media a partir del cambio en la *velocidad* en un intervalo de tiempo. Asimismo, usando la ecuación (2.5) obtendremos una expresión para la *aceleración* instantánea diferenciando la *velocidad* en función del tiempo.

EJECUTAR: *a*) Antes de aplicar la ecuación (2.4), debemos obtener la velocidad en cada instante a partir de la ecuación dada. En el instante $t_1 = 1.0$ s, y en el $t_2 = 3.0$ s, las velocidades son

$$v_{1x} = 60 \text{ m/s} + (0.50 \text{ m/s}^3)(1.0 \text{ s})^2 = 60.5 \text{ m/s}$$
$$v_{2x} = 60 \text{ m/s} + (0.50 \text{ m/s}^3)(3.0 \text{ s})^2 = 64.5 \text{ m/s}$$

El cambio en la velocidad Δv_x entre $t_1 = 1.0$ s y $t_2 = 3.0$ s es

$$\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x} = 64.5 \text{ m/s} - 60.5 \text{ m/s} = 4.0 \text{ m/s}$$

b) La aceleración media durante este intervalo de duración $t_2 - t_1 = 2.0$ s es

$$a_{\text{med-}x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{4.0 \text{ m/s}}{2.0 \text{ s}} = 2.0 \text{ m/s}^2$$

Durante este intervalo, la velocidad y la aceleración media tienen el mismo signo algebraico (positivo en este caso) y el auto acelera.

c) Cuando $\Delta t = 0.1$ s, tenemos $t_2 = 1.1$ s. Procediendo como antes obtenemos

$$v_{2x} = 60 \text{ m/s} + (0.50 \text{ m/s}^3)(1.1 \text{ s})^2 = 60.605 \text{ m/s}$$
$$\Delta v_x = 0.105 \text{ m/s}$$
$$a_{\text{med-}x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{0.105 \text{ m/s}}{0.1 \text{ s}} = 1.05 \text{ m/s}^2$$

Repita este patrón para calcular $a_{\text{med-}x}$ con $\Delta t = 0.01$ s y $\Delta t = 0.001$ s; los resultados son $a_{\text{med-}x} = 1.005 \text{ m/s}^2$ y $a_{\text{med-}x} = 1.0005 \text{ m/s}^2$, respectivamente. Al reducirse Δt, la aceleración media se acerca a 1.0 m/s^2, por lo que concluimos que la aceleración instantánea en $t = 1.0$ s es 1.0 m/s^2.

d) Por la ecuación (2.5) la aceleración instantánea es $a_x = dv_x/dt$. La derivada de una constante es cero y la derivada de t^2 es $2t$, por lo que

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}[60 \text{ m/s} + (0.50 \text{ m/s}^3)t^2]$$
$$= (0.50 \text{ m/s}^3)(2t) = (1.0 \text{ m/s}^3)t$$

Cuando $t = 1.0$ s,

$$a_x = (1.0 \text{ m/s}^3)(1.0 \text{ s}) = 1.0 \text{ m/s}^2$$

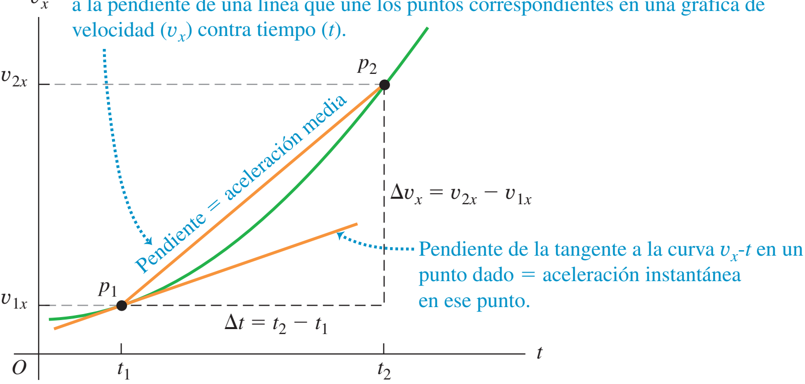
Cuando $t = 3.0$ s,

$$a_x = (1.0 \text{ m/s}^3)(3.0 \text{ s}) = 3.0 \text{ m/s}^2$$

EVALUAR: Ninguno de los valores que obtuvimos en el inciso *d*) es igual a la aceleración media obtenida en *b*). Esto se debe a que la aceleración instantánea varía con el tiempo. La tasa de cambio de la aceleración con el tiempo se suele denominar "tirón".

Obtención de la aceleración en una gráfica v_x-t o una gráfica x-t

En la sección 2.2 interpretamos las velocidades media e instantánea en términos de la pendiente de una gráfica de posición contra tiempo. Igualmente, podemos entender mejor las aceleraciones media e instantánea graficando la velocidad instantánea v_x en el eje vertical y el tiempo t en el eje horizontal, es decir, usando una **gráfica v_x-t** (figura 2.12). Los puntos sobre la gráfica identificados como p_1 y p_2 corresponden a los puntos P_1 y P_2 de la figura 2.11. La aceleración media $a_{\text{med-}x} = \Delta v_x / \Delta t$ durante este intervalo es la pendiente de la línea p_1p_2. Al acercarse P_2 a P_1 en la figura 2.11, p_2 se acerca a p_1 en la gráfica v_x-t de la figura 2.12, y la pendiente de la línea p_1p_2 se acerca a la pendiente de la tangente a la curva en el punto p_1. Así, *en una gráfica de velocidad en función del tiempo, la aceleración instantánea en cualquier punto es igual a la pendiente de la tangente de la curva en ese punto*. En la figura 2.12, las tangentes trazadas en diferentes puntos en la curva tienen pendientes diferentes, de manera que la aceleración instantánea varía con el tiempo.



2.12 Gráfica v_x-t del movimiento en la figura 2.11.

CUIDADO **Signos de la aceleración y de la velocidad** Por sí mismo, el signo algebraico de la aceleración *no* nos indica si el cuerpo está acelerando o frenando; hay que comparar los signos de la velocidad y la aceleración. Si v_x y a_x tienen el *mismo* signo, el cuerpo está acelerando; si ambas son positivas, el cuerpo se mueve en la dirección positiva con rapidez creciente. Si ambas son negativas, el cuerpo se mueve en la dirección negativa con velocidad cada vez más negativa, y la rapidez aumenta. Si v_x y a_x tienen signos *opuestos*, el cuerpo está frenando. Si v_x es positiva y a_x negativa, el cuerpo se mueve en dirección positiva con rapidez decreciente; si v_x es negativa y a_x positiva, el cuerpo se mueve en dirección negativa con una velocidad cada vez menos negativa, y está frenando. La tabla 2.3 resume estas ideas y la figura 2.13 ilustra algunas de estas posibilidades.

En ocasiones se usa el término "desaceleración" para referirse a una reducción de la rapidez. Como esto puede implicar una a_x positiva o negativa, dependiendo del signo de v_x, evitaremos este término.

También podemos conocer la aceleración de un cuerpo a partir de una gráfica de su posición contra el tiempo. Puesto que $a_x = dv_x/dt$ y $v_x = dx/dt$, escribimos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{2.6}$$

Tabla 2.3 Reglas para el signo de la aceleración

Si la velocidad es:	. . . la aceleración es:
Positiva y creciente (volviéndose más positiva)	Positiva: la partícula se mueve en la dirección $+x$ y acelera
Positiva y decreciente (volviéndose menos positiva)	Negativa: la partícula se mueve en la dirección $+x$ y frena
Negativa y creciente (se vuelve menos negativa)	Positiva: la partícula se mueve en la dirección $-x$ y frena
Negativa y decreciente (se vuelve más negativa)	Negativa: la partícula se mueve en la dirección $-x$ y acelera

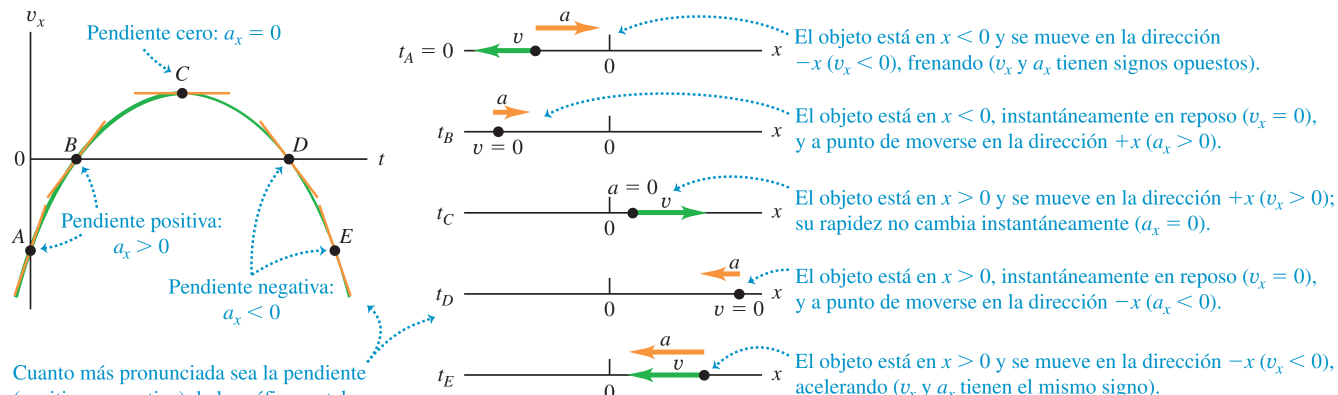
Nota: Estas reglas se aplican tanto a la aceleración $a_{\text{med-}x}$ como a la aceleración instantánea a_x.

2.13 *a*) Gráfica v_x-t del movimiento de una partícula diferente de la que se muestra en la figura 2.8. La pendiente de la tangente en cualquier punto es igual a la aceleración en ese punto. *b*) Diagrama de movimiento que indica la posición, velocidad y aceleración de la partícula en los instantes identificados en la gráfica v_x-t. Las posiciones son congruentes con la gráfica v_x-t; por ejemplo, de t_A a t_B la velocidad es negativa, así que en t_B la partícula está en un valor más negativo de x que en t_A.



a) La gráfica v_x-t para un objeto que se mueve en el eje x

b) Posición, velocidad y aceleración del objeto en el eje x



2.14 *a*) La misma gráfica *x-t* de la figura 2.8*a*. La velocidad es igual a la *pendiente* de la gráfica, y la aceleración está dada por su *concavidad* o *curvatura*. *b*) Diagrama de movimiento que muestra la posición, velocidad y aceleración de la partícula en cada uno de los instantes identificados en la gráfica *x-t*.

a) Gráfica *x-t*

Pendiente cero: $v_x = 0$
Curvatura hacia abajo: $a_x < 0$

Pendiente negativa: $v_x < 0$
Curvatura hacia arriba: $a_x > 0$

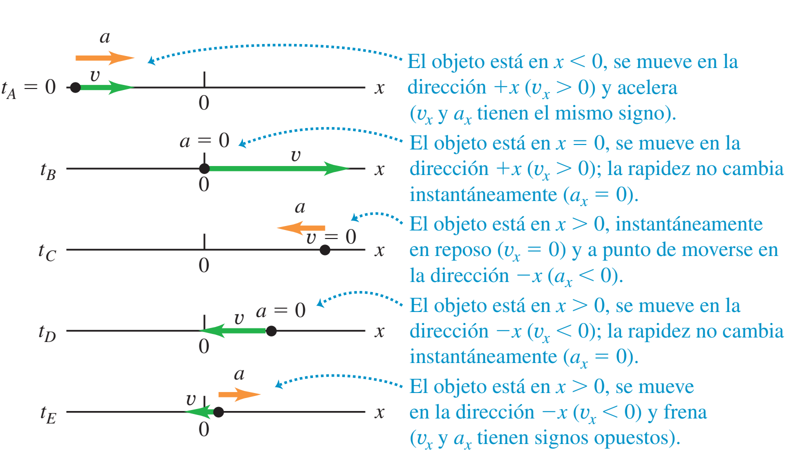
Pendiente negativa: $v_x < 0$
Curvatura cero: $a_x = 0$

Pendiente positiva: $v_x > 0$
Curvatura cero: $a_x = 0$

Pendiente positiva: $v_x > 0$
Curvatura hacia arriba: $a_x > 0$

Cuanto mayor es la curvatura (hacia arriba o hacia abajo) de una gráfica *x-t* de un objeto, mayor es la aceleración del objeto en la dirección positiva o negativa, respectivamente.

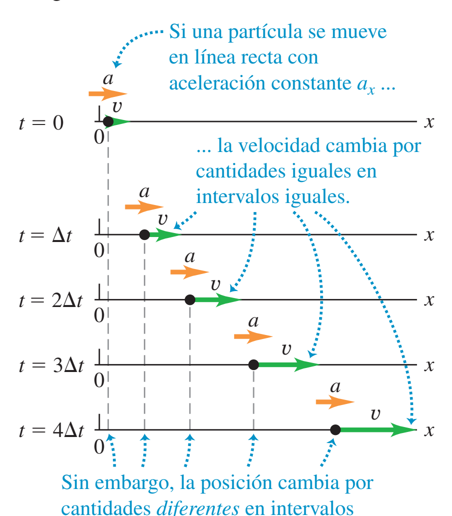
b) Movimiento del objeto



Es decir, a_x es la segunda derivada de x con respecto a t. La segunda derivada de cualquier función se relaciona directamente con la *concavidad* o *curvatura* de la gráfica de la función (figura 2.14). En un punto donde la gráfica *x-t* sea cóncava hacia arriba (curvada hacia arriba), la aceleración es positiva y v_x aumenta; donde la gráfica *x-t* sea cóncava hacia abajo, la aceleración es negativa y v_x disminuye. Donde la gráfica *x-t* no tenga curvatura, como en un punto de inflexión, la aceleración es cero y la velocidad es constante. Estas tres posibilidades se ilustran en la figura 2.14.

Examinar la curvatura de una gráfica *x-t* es una manera sencilla de determinar qué *signo* tiene la aceleración. Esta técnica es menos útil para determinar valores numéricos de la aceleración, ya que es difícil medir con exactitud la curvatura de una gráfica.

2.15 Diagrama de movimiento para una partícula que se mueve en línea recta en la dirección $+x$ con aceleración positiva constante a_x. Se muestran la posición, velocidad y aceleración en cinco instantes de igual duración.



Evalúe su comprensión de la sección 2.3 Observe otra vez la gráfica *x-t* de la figura 2.9 al final de la sección 2.2. *a*) ¿En cuál de los puntos *P*, *Q*, *R* y *S* la aceleración a_x es positiva? *b*) ¿En cuáles es negativa? *c*) ¿En cuáles parece ser cero? *d*) En cada punto, indique si la velocidad aumenta, disminuye o se mantiene constante.



2.4 Movimiento con aceleración constante

El movimiento acelerado más sencillo es el rectilíneo con aceleración *constante*. En este caso, la velocidad cambia al mismo ritmo a lo largo del movimiento. Como ejemplo, un cuerpo que cae tiene aceleración constante si los efectos del aire no son importantes. Lo mismo sucede con un cuerpo que se desliza por una pendiente o sobre una superficie horizontal áspera, o con un avión cuando es lanzado con catapulta desde la cubierta de un portaaviones.

La figura 2.15 es un diagrama de movimiento que muestra la posición, velocidad y aceleración de una partícula que se mueve con aceleración constante. Las figuras 2.16 y 2.17 representan este movimiento con gráficas. Puesto que la aceleración es constante, la **gráfica a_x-*t*** (aceleración contra tiempo) de la figura 2.16 es una línea horizontal. La gráfica de velocidad contra tiempo, v_x-*t*, tiene *pendiente* constante porque la aceleración es constante; por lo tanto, es una línea recta (figura 2.17).

Cuando la aceleración a_x es constante, la aceleración media $a_{\text{med-}x}$ para cualquier intervalo es a_x. Esto facilita la obtención de las ecuaciones para la posición x y la velocidad v_x como funciones del tiempo. Con la finalidad de encontrar una expresión para v_x, primero sustituimos $a_{\text{med-}x}$ por a_x en la ecuación (2.4):

$$a_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} \tag{2.7}$$

Sean ahora $t_1 = 0$ y t_2 cualquier instante posterior t. Simbolizamos con v_{0x} la velocidad en el instante inicial $t = 0$; la velocidad en el instante posterior t es v_x. Entonces, la ecuación (2.7) se convierte en

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0} \qquad \text{o}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad \text{(solo con aceleración constante)} \tag{2.8}$$

En la ecuación (2.8) el término $a_x t$ es el producto de la tasa constante de cambio en la velocidad, a_x, y el intervalo de tiempo t; por lo tanto, es el cambio *total* de la velocidad desde el instante inicial $t = 0$ hasta un instante posterior t. La velocidad v_x en cualquier instante t es entonces la velocidad inicial v_{0x} (en $t = 0$) más el cambio en la velocidad $a_x t$ (véase la figura 2.17).

La ecuación (2.8) también dice que el cambio de velocidad $v_x - v_{0x}$ de la partícula entre $t = 0$ y un tiempo posterior t es igual al *área* bajo la gráfica a_x-t entre esos dos instantes. Se puede verificar esto en la figura 2.16: bajo la curva hay un rectángulo con lado vertical a_x y lado horizontal t. El área del rectángulo es $a_x t$, que por la ecuación (2.8) es igual al cambio de velocidad $v_x - v_{0x}$. En la sección 2.6 veremos que aun cuando la aceleración no sea constante, el cambio de velocidad durante un intervalo es igual al área bajo la curva a_x-t, aunque en tal caso la ecuación (2.8) no es válida.

Ahora deduciremos una ecuación para la posición x en función del tiempo cuando la aceleración es constante. Para ello, usamos dos expresiones distintas para la velocidad media $a_{\text{med-}x}$ en el intervalo de $t = 0$ a cualquier tiempo t posterior. La primera proviene de la definición de $v_{\text{med-}x}$, ecuación (2.2), que se cumple independientemente de que la aceleración sea constante o no. Llamamos a la posición en el tiempo $t = 0$ *posición inicial*, y la denotamos con x_0. La posición en el tiempo t posterior es simplemente x. Así, para el intervalo $\Delta t = t - 0$, el desplazamiento es $\Delta x = x - x_0$; la ecuación (2.2) da

$$v_{\text{med-}x} = \frac{x - x_0}{t} \tag{2.9}$$

También podemos obtener otra expresión para $v_{\text{med-}x}$ que es válida solo si la aceleración es constante, de modo que la velocidad cambia a ritmo constante. En este caso, la velocidad media para el intervalo de 0 a t es simplemente el promedio de las velocidades al principio y al final del intervalo:

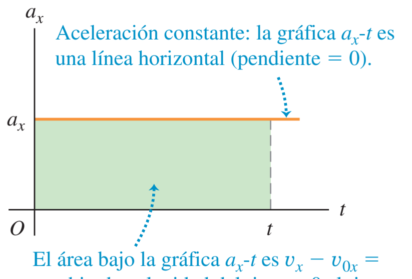
$$v_{\text{med-}x} = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \qquad \text{(solo con aceleración constante)} \tag{2.10}$$

(Esta ecuación *no* se cumple si la aceleración varía durante el intervalo). También sabemos que, con aceleración constante, la velocidad v_x en un instante t está dada por la ecuación (2.8). Sustituyendo esa expresión por v_x en la ecuación (2.10), obtenemos

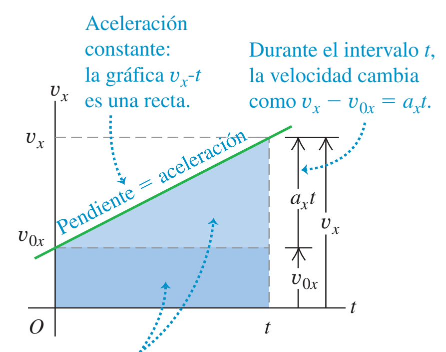
$$v_{\text{med-}x} = \tfrac{1}{2}(v_{0x} + v_{0x} + a_x t)$$

$$= v_{0x} + \tfrac{1}{2}a_x t \qquad \text{(solo con aceleración constante)} \tag{2.11}$$

2.16 Gráfica aceleración-tiempo (a_x-t) para movimiento rectilíneo con aceleración positiva constante a_x.



2.17 Gráfica velocidad-tiempo (v_x-t) para movimiento rectilíneo con aceleración positiva constante a_x. La velocidad inicial v_{0x} también es positiva en este caso.



MasteringPHYSICS

PhET: Forces in 1 Dimension
ActivPhysics 1.1: Analyzing Motion Using Diagrams
ActivPhysics 1.2: Analyzing Motion Using Graphs
ActivPhysics 1.3: Predicting Motion from Graphs
ActivPhysics 1.4: Predicting Motion from Equations
ActivPhysics 1.5: Problem-Solving Strategies for Kinematics
ActivPhysics 1.6: Skier Races Downhill

Aplicación Pruebas con humanos a grandes aceleraciones
En algunos experimentos llevados a cabo por la fuerza aérea estadounidense, entre las décadas de 1940 y 1950, se demostró que los humanos que conducían un cohete podían resistir aceleraciones tan grandes como 440 m/s^2. Las primeras tres fotografías de esta secuencia muestran al médico de la fuerza aérea John Stapp acelerando del reposo a 188 m/s (678 km/h = 421 mi/h) en solo 5 s. Las fotografías 4 a 6 muestran inclusive una magnitud más grande de aceleración conforme el cohete frenaba para detenerse.



Por último, igualamos las ecuaciones (2.9) y (2.11) y simplificamos:

$$v_{0x} + \tfrac{1}{2}a_x t = \frac{x - x_0}{t} \qquad \text{o}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \qquad \text{(solo con aceleración constante)} \qquad (2.12)$$

Esta ecuación (2.12) indica que: si en el instante $t = 0$, una partícula está en x_0 y tiene velocidad v_{0x}, su nueva posición x en cualquier tiempo t posterior es la suma de tres términos: su posición inicial x_0, más la distancia $v_{0x}t$ que recorrería si su velocidad fuera constante, y una distancia adicional $\frac{1}{2}a_x t^2$ causada por el cambio de velocidad.

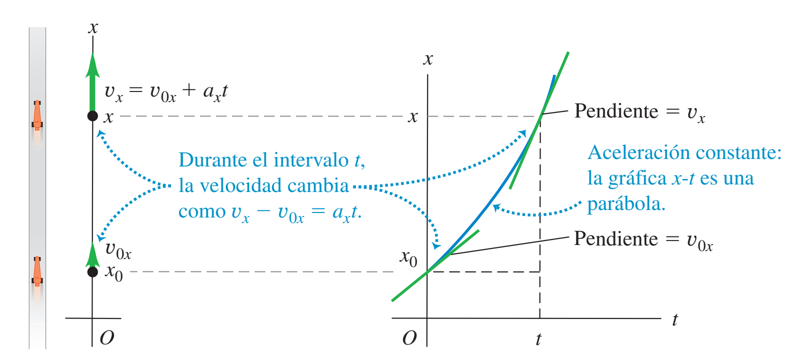
Una gráfica de la ecuación (2.12), es decir, una gráfica *x-t* para movimiento con aceleración constante (figura 2.18*a*), siempre es una *parábola*. La figura 2.18*b* muestra una gráfica como esta. La curva hace intersección con el eje vertical (x) en x_0, la posición en $t = 0$. La pendiente de la tangente en $t = 0$ es v_{0x}, la velocidad inicial, y la pendiente de la tangente en cualquier tiempo t es la velocidad v_x en ese instante. La pendiente y la velocidad aumentan continuamente, así que la aceleración a_x es positiva; usted también puede ver esto porque la gráfica de la figura 2.18*b* es cóncava hacia arriba (se curva hacia arriba). Si a_x es negativa, la gráfica *x-t* es una parábola cóncava hacia abajo (tiene curvatura hacia abajo).

Si hay aceleración cero, la gráfica *x-t* es una recta; si hay una aceleración constante, el término adicional $\frac{1}{2}a_x t^2$ en la ecuación (2.12) para x en función de t curva la gráfica en una parábola (figura 2.19*a*). Podemos analizar la gráfica v_x-*t* de la misma forma. Si hay aceleración cero, esta gráfica es una línea horizontal (la velocidad es constante); agregando una aceleración constante da una pendiente para la gráfica v_x-*t* (figura 2.19*b*).

2.18 *a*) Movimiento rectilíneo con aceleración constante. *b*) Gráfica de posición contra tiempo (*x-t*) para este movimiento (el mismo que se ilustra en las figuras 2.15, 2.16 y 2.17). En este caso, la posición inicial x_0, la velocidad inicial v_{0x} y la aceleración a_x son todas positivas.

a) Un auto de carreras se mueve en la dirección x con aceleración constante

b) La gráfica *x-t*

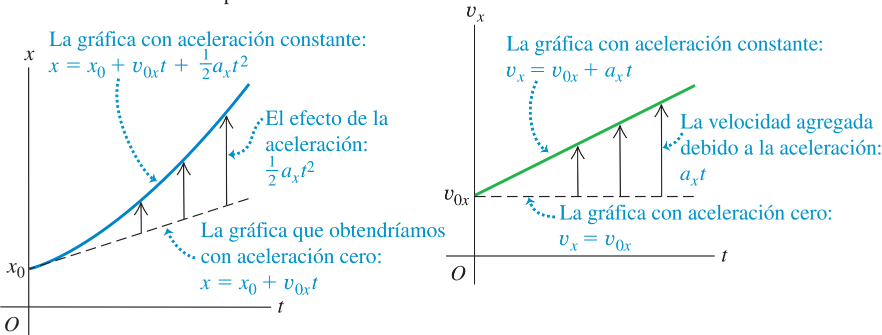


2.19 Cómo una aceleración constante influye en *a*) la gráfica *x-t* y *b*) la gráfica v_x-*t* de un cuerpo.



a) Gráfica *x-t* para un objeto que se mueve con aceleración constante positiva

b) La gráfica v_x-*t* para el mismo objeto



Así como el cambio de velocidad de la partícula es igual al área bajo la gráfica a_x-t, el desplazamiento (es decir, el cambio de posición) es igual al área bajo la gráfica v_x-t. Específicamente, el desplazamiento $x - x_0$ de la partícula entre $t = 0$ y cualquier instante t posterior es igual al área bajo la gráfica v_x-t entre esos dos instantes. En la figura 2.17 el área bajo la gráfica se dividió en un rectángulo oscuro (con lado vertical v_{0x}, lado horizontal t y área $v_{0x}t$) y un triángulo rectángulo claro (con lado vertical $a_x t$ y lado horizontal t y área $\frac{1}{2}(a_x t)(t) = \frac{1}{2}a_x t^2$). El área total bajo la gráfica v_x-t es

$$x - x_0 = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

lo que es congruente con la ecuación (2.12).

El desplazamiento durante un intervalo siempre puede obtenerse del área bajo la curva v_x-t, incluso si la aceleración *no* es constante, aunque en tal caso la ecuación (2.12) no sería válida. (Demostraremos esto en la sección 2.6).

A menudo es útil tener una relación para la posición, la velocidad y la aceleración (constante) que no involucre el tiempo. Para lograr esto, primero despejamos t de la ecuación (2.8) y luego sustituimos la expresión resultante en la ecuación (2.12):

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$$

$$x = x_0 + v_{0x}\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right) + \tfrac{1}{2}a_x\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right)^2$$

Transferimos el término x_0 al lado izquierdo y multiplicamos la ecuación por $2a_x$:

$$2a_x(x - x_0) = 2v_{0x}v_x - 2v_{0x}^2 + v_x^2 - 2v_{0x}v_x + v_{0x}^2$$

Finalmente, simplificando nos da

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \qquad \text{(solo aceleración constante)} \qquad (2.13)$$

Podemos obtener una relación más útil igualando las dos expresiones para $v_{\text{med-}x}$, ecuaciones (2.9) y (2.10), y multiplicando por t. Al hacerlo, obtenemos

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right)t \qquad \text{(solo aceleración constante)} \qquad (2.14)$$

Observe que la ecuación (2.14) no incluye la aceleración a_x. Esta ecuación es útil cuando a_x es constante pero se desconoce su valor.

Las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) son las *ecuaciones del movimiento con aceleración constante* (tabla 2.4). Con ellas, podemos resolver cualquier problema que implique movimiento rectilíneo de una partícula con aceleración constante.

En el caso específico de movimiento con aceleración constante ilustrado en la figura 2.15 y graficado en las figuras 2.16, 2.17 y 2.18, los valores de x_0, v_{0x} y a_x son positivos. Vuelva a dibujar las figuras para los casos en que una, dos o las tres cantidades sean negativas.

MasteringPHYSICS

PhET: The Moving Man
ActivPhysics 1.8: Seat Belts Save Lives
ActivPhysics 1.9: Screeching to a Halt
ActivPhysics 1.11: Car Starts, Then Stops
ActivPhysics 1.12: Solving Two-Vehicle Problems
ActivPhysics 1.13: Car Catches Truck
ActivPhysics 1.14: Avoiding a Rear-End Collision

Tabla 2.4 Ecuaciones de movimiento con aceleración constante

Ecuación		Cantidades que incluye			
$v_x = v_{0x} + a_x t$	(2.8)	t		v_x	a_x
$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	(2.12)	t	x		a_x
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	(2.13)		x	v_x	a_x
$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right)t$	(2.14)	t	x	v_x	

Estrategia para resolver problemas 2.1 Movimiento con aceleración constante



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* En casi todos los problemas de movimiento rectilíneo, usted podrá usar las ecuaciones de aceleración constante (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14). Si usted encuentra una situación en que la aceleración *no es* constante, necesitará otra estrategia (véase la sección 2.6).

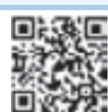
PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Lea el problema cuidadosamente. Elabore un diagrama de movimiento que muestre la localización de la partícula en los tiempos que nos interesan. Determine dónde colocar el origen de las coordenadas y cuál dirección del eje es positiva. A menudo lo más sencillo es colocar la partícula en el origen en $t = 0$; así, $x_0 = 0$. Recuerde que elegir la dirección positiva del eje determina automáticamente las direcciones positivas de la velocidad y la aceleración. Si x es positiva a la derecha del origen, v_x y a_x también serán positivas hacia la derecha.
2. Identifique las cantidades físicas (tiempos, posiciones, velocidades y aceleraciones) que aparecen en las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) y asígneles los símbolos adecuados: x, x_0, v_x, v_{0x} y a_x, o símbolos relacionados con ellos. Traduzca las palabras al lenguaje de la física: "¿*Cuándo* llega la partícula al punto más alto?" significa "¿Cuál es el valor de t cuando x tiene su máximo valor?". En el ejemplo 2.4 que sigue, la pregunta "¿Dónde está el motociclista cuando su velocidad es de 25 m/s?" significa "¿Cuánto vale x cuando $v_x = 25$ m/s?". Manténgase alerta con la información implícita. Por ejemplo, "un automóvil está detenido ante un semáforo" implica $v_{0x} = 0$.
3. Haga una lista de las cantidades como x, x_0, v_x, v_{0x}, a_x y t. Algunas serán conocidas y otras no. Escriba los valores de las conocidas e identifique cuáles de las variables son las incógnitas. Tome nota de la *ausencia* de cualquiera de las cantidades que aparecen en las cuatro ecuaciones de aceleración constante.
4. Use la tabla 2.4 para identificar las ecuaciones aplicables. (Estas son con frecuencia las ecuaciones que no incluyen las cantidades faltantes que identificó en el paso 3). Normalmente encontrará una ecuación única que solo contiene una de las incógnitas. Algunas veces debe identificar dos ecuaciones que contengan el mismo par de incógnitas.
5. Elabore gráficas que correspondan a las ecuaciones aplicables. La gráfica v_x-t de la ecuación (2.8) es una línea recta con pendiente igual a a_x. La gráfica x-t de la ecuación (2.12) es una parábola cóncava hacia arriba si a_x es positiva y cóncava hacia abajo si es negativa.
6. Con base en su experiencia con estos problemas y tomando en cuenta lo que le dicen las gráficas, haga predicciones cualitativas y cuantitativas acerca de la solución.

EJECUTAR *la solución:* Si se aplica una sola ecuación, despeje la incógnita *usando solo símbolos*, sustituya los valores conocidos y calcule el valor de la incógnita. Si usted tiene dos ecuaciones con dos incógnitas, resuélvalas simultáneamente para encontrarlas.

EVALUAR *la respuesta:* Examine sus resultados para ver si son lógicos. ¿Están dentro del intervalo general de valores esperados?

Ejemplo 2.4 Cálculos con aceleración constante



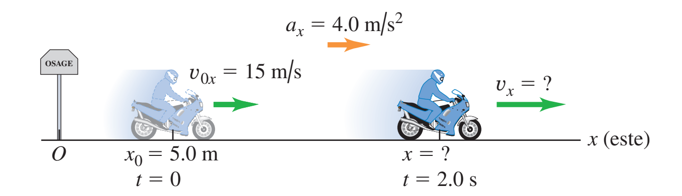
Un motociclista que viaja al este cruza una pequeña ciudad y viaja con aceleración constante de 4.0 m/s^2 después de pasar los límites de la ciudad (figura 2.20). En el tiempo $t = 0$, está a 5.0 m al este del letrero de límite de la ciudad, y se desplaza al este a 15 m/s. *a*) Calcule su posición y velocidad en $t = 2.0$ s. *b*) ¿Dónde está el motociclista cuando su velocidad es de 25 m/s?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La aceleración es constante, así que podemos usar las ecuaciones para aceleración constante. Tomamos el letrero como origen de coordenadas ($x = 0$) y determinamos que el eje $+x$ apunta al este (véase la figura 2.20, que también es un diagrama de movimiento). Las variables conocidas son la posición inicial y la velocidad, $x_0 = 5.0$ m y $v_{0x} = 15$ m/s, y la aceleración $a_x = 4.0$ m/s^2. Las variables desconocidas en el inciso *a*) son los valores de la posición x y la velocidad v_x en el instante $t = 2.0$ s; la incógnita en el inciso *b*) es el valor de x cuando $v_x = 25$ m/s.

EJECUTAR: *a*) Como conocemos los valores de x_0, v_{0x} y a_x, la tabla 2.4 nos dice que podemos obtener tanto la posición x en $t = 2.0$ s, usando

2.20 Un motociclista que viaja con aceleración constante.



la ecuación (2.12), como la velocidad v_x, en ese instante, con la ecuación (2.8):

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \\ &= 5.0\ \text{m} + (15\ \text{m/s})(2.0\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(4.0\ \text{m/s}^2)(2.0\ \text{s})^2 \\ &= 43\ \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t \\ &= 15\ \text{m/s} + (4.0\ \text{m/s}^2)(2.0\ \text{s}) = 23\ \text{m/s} \end{aligned}$$

b) Queremos encontrar el valor de x cuando $v_x = 25$ m/s, pero no conocemos el momento en que el motociclista lleva tal velocidad. La tabla 2.4 nos dice que debemos utilizar la ecuación (2.13), que incluye x, v_x y a_x, pero *no* incluye a t:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

Despejando x y sustituyendo los valores conocidos, obtenemos

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x} \\ &= 5.0\ \text{m} + \frac{(25\ \text{m/s})^2 - (15\ \text{m/s})^2}{2(4.0\ \text{m/s}^2)} = 55\ \text{m} \end{aligned}$$

EVALUAR: Usted puede verificar el resultado del inciso *b*) usando primero la ecuación (2.8), $v_x = v_{0x} + a_x t$, para determinar el tiempo en el cual $v_x = 25$ m/s, que resulta ser $t = 2.5$ s. Luego usted puede usar la ecuación (2.12), $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$, para obtener x. Usted debe obtener $x = 55$ m, la misma respuesta de arriba. Este es el camino largo para resolver el problema. El método usado en el inciso *b*) es mucho más eficiente.



Ejemplo 2.5 Dos cuerpos con diferente aceleración

Una persona conduce su vehículo con rapidez constante de 15 m/s (aproximadamente 34 mi/h) y pasa por un cruce escolar, donde el límite de velocidad es de 10 m/s (aproximadamente 22 mi/h). En ese preciso momento, un oficial de policía en su motocicleta, que está detenido en el cruce, arranca para perseguir al infractor, con aceleración constante de 3.0 m/s^2 (figura 2.21*a*). *a*) ¿Cuánto tiempo pasa antes de que el oficial de policía alcance al infractor? *b*) ¿A qué rapidez va el policía en ese instante? *c*) ¿Qué distancia total habrá recorrido cada vehículo hasta ahí?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El oficial de policía y el conductor se desplazan con aceleración constante (cero en el caso del conductor), así que podemos usar las fórmulas de aceleración constante. Tomamos como origen el cruce, así que $x_0 = 0$ para ambos, y consideramos la derecha como dirección positiva. Sea x_P la posición del policía y x_M la del conductor en cualquier instante. Las velocidades iniciales son $v_{P0x} = 0$ y $v_{M0x} = 15$ m/s; las respectivas aceleraciones son $a_{Px} = 3.0$ m/s^2 y $a_{Mx} = 0$. Nuestra incógnita en el inciso *a*) es el tiempo tras el cual el policía alcanza al conductor, es decir, cuando los dos vehículos están en la misma posición x. La tabla 2.4 nos dice que la ecuación (2.12) es la adecuada para este inciso. En el inciso *b*) nos interesa la rapidez v del policía (la magnitud de su velocidad) en el tiempo obtenido en el inciso *a*). Utilizaremos la ecuación (2.8) para este inciso. En el inciso *c*) usaremos nuevamente la ecuación (2.12) para obtener la posición de cualquiera de los vehículos en ese tiempo.

La figura 2.21*b* ilustra la gráfica *x-t* de ambos vehículos. La línea recta representa el movimiento del conductor, $x_M = x_{M0} + v_{M0x}t = v_{M0x}t$. La gráfica del movimiento del oficial es la mitad derecha de una parábola cóncava hacia arriba:

$$x_P = x_{P0} + v_{P0x}t + \tfrac{1}{2}a_{Px}t^2 = \tfrac{1}{2}a_{Px}t^2$$

Un buen diagrama mostrará que el oficial y el conductor están en la misma posición ($x_P = x_M$) en un tiempo $t = 10$ s, aproximadamente, instante en el que los dos han viajado 150 m a partir del cruce.

EJECUTAR: *a*) Para buscar el valor del tiempo t cuando el conductor y el policía están en la misma posición, establecemos que $x_P = x_M$ igualando las expresiones anteriores y despejando t:

$$v_{M0x}t = \tfrac{1}{2}a_{Px}t^2$$

$$t = 0 \qquad \text{o} \qquad t = \frac{2v_{M0x}}{a_{Px}} = \frac{2(15\text{ m/s})}{3.0\text{ m/s}^2} = 10\text{ s}$$

Hay *dos* instantes en que los vehículos tienen la misma coordenada x, como lo indica la figura 2.21*b*. En $t = 0$, el conductor rebasa al oficial; en $t = 10$ s, el oficial alcanza al conductor.

b) Queremos conocer la magnitud de la velocidad del policía v_{Px} en el instante t obtenido en *a*). Sustituyendo los valores de v_{P0x} y a_{Px} en la ecuación (2.8) junto con $t = 10$ s del inciso *a*), obtenemos:

$$v_{Px} = v_{P0x} + a_{Px}t = 0 + (3.0\text{ m/s}^2)(10\text{ s}) = 30\text{ m/s}$$

La rapidez del policía es el valor absoluto de esto, la cual también es igual a 30 m/s.

c) En 10 s, la distancia recorrida por el conductor es

$$x_M = v_{M0x}t = (15\text{ m/s})(10\text{ s}) = 150\text{ m}$$

y la distancia que el policía recorre es

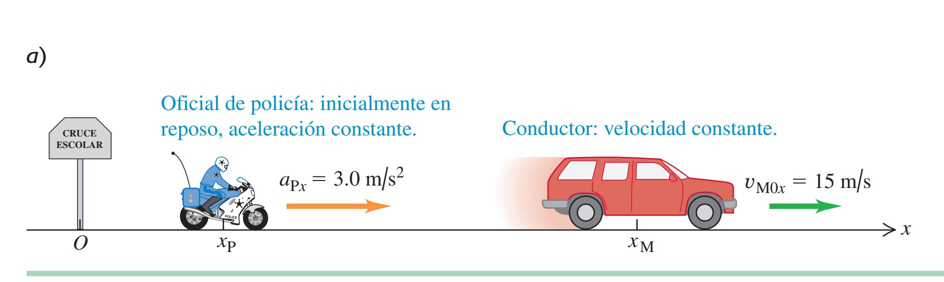
$$x_P = \tfrac{1}{2}a_{Px}t^2 = \tfrac{1}{2}(3.0\text{ m/s}^2)(10\text{ s})^2 = 150\text{ m}$$

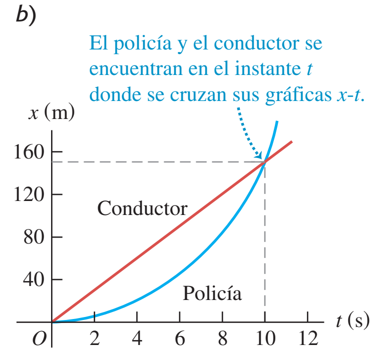
Esto comprueba que cuando el policía alcanza al conductor, ambos han recorrido la misma distancia.

EVALUAR: Los resultados de los incisos *a*) y *c*) concuerdan con las estimaciones del diagrama. Observe que en el instante en que el oficial alcanza al conductor, los dos vehículos *no* tienen la misma velocidad. En ese momento el conductor se desplaza a 15 m/s y el oficial se desplaza a 30 m/s. Se puede ver esto en la figura 2.21*b*. Donde las dos curvas *x-t* se cruzan, sus pendientes (iguales a los valores de v_x para los dos vehículos) son diferentes.

¿Es solo una coincidencia que cuando los dos vehículos están en la misma posición, el oficial va al doble de la rapidez del conductor? La ecuación (2.14), $x - x_0 = [(v_{0x} + v_x)/2]t$, da la respuesta. El conductor tiene velocidad constante, por lo que $v_{M0x} = v_{Mx}$, y la distancia $x - x_0$ que viaja el conductor en el tiempo t es $v_{M0x}t$. El oficial tiene velocidad inicial cero, de modo que en el mismo instante t el oficial via a una distancia $\tfrac{1}{2}v_{Px}t$. i los dos ve ículos cu ren la misma distancia en el mismo tiempo, los dos valores de $x - x_0$ de en ser iguales. e esta forma, cuando el o cial alcanza al conductor $v_{M0x}t = \tfrac{1}{2}v_{Px}t$ y $v_{Px} = 2v_{M0x}$, es decir, el o cial lleva e actamente el do le de la v elocidad del conductor. O ser ve ue esto es así independientemente del valor de la aceleración del o cial.

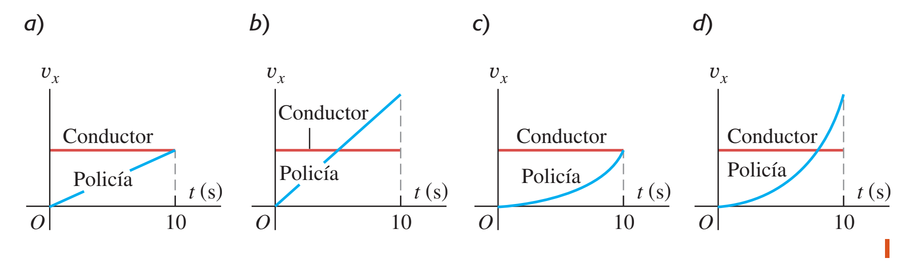
2.21 *a*) Cuerpo en movimiento con aceleración constante ue alcanza a un cuerpo en mo vimiento con velocidad constante. *b*) r á ca de x contra t para cada ve ículo.





Evalúe su comprensión de la sección 2.4 Se muestran cuatro posibles gráficas v_x-t para los dos vehículos del ejemplo 2.5. ¿Cuál es la gráfica correcta?





2.5 Cuerpos en caída libre



2.22 Fotografía con múltiples destellos de una pelota en caída libre.

El ejemplo más conocido de movimiento con aceleración (casi) constante es la caída de un cuerpo bajo la influencia de la atracción gravitacional de la Tierra. Dicho movimiento ha interesado a filósofos y científicos desde la Antigüedad. En el siglo IV a.C., Aristóteles pensaba (erróneamente) que los objetos pesados caían con mayor rapidez que los ligeros, en proporción a su peso. Diecinueve siglos después, Galileo (véase la sección 1.1) afirmó que los cuerpos caían con una aceleración constante e independiente de su peso.

Los experimentos indican que, si es posible omitir el efecto del aire, Galileo está en lo cierto: todos los cuerpos en un lugar específico caen con la misma aceleración hacia abajo, independientemente de su tamaño o peso. Si, además, la distancia de caída es pequeña en comparación con el radio terrestre, y si ignoramos los pequeños efectos debidos a la rotación de la Tierra, la aceleración es constante. El modelo idealizado que surge de tales supuestos se denomina **caída libre**, aunque también incluye el movimiento ascendente. (En el capítulo 3 ampliaremos el estudio de la caída libre para incluir el movimiento de proyectiles, los cuales se desplazan en forma tanto horizontal como vertical).

La figura 2.22 es una fotografía de una pelota que cae, tomada con una lámpara estroboscópica que produce una serie de destellos intensos cortos. En cada destello, se registra una imagen fotográfica de la pelota en ese instante. Como los intervalos entre destellos son iguales, la velocidad media de la pelota entre dos destellos es proporcional a la distancia entre las imágenes correspondientes en la fotografía. El aumento en las distancias entre las imágenes indica que la velocidad cambia continuamente; la pelota acelera hacia abajo. Una medición cuidadosa revela que el cambio de velocidad es el mismo en cada intervalo, así que la aceleración de la pelota en caída libre es constante.

La aceleración constante de un cuerpo en caída libre se llama **aceleración debida a la gravedad**, y denotamos su magnitud con la letra g. Por lo regular, usaremos el valor aproximado de g en la superficie terrestre o cerca de ella:

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 = 980 \text{ cm/s}^2 = 32 \text{ ft/s}^2 \qquad \text{(valor aproximado cerca de la superficie terrestre)}$$

El valor exacto varía según el lugar, así que normalmente daremos el valor de g en la superficie de la Tierra con solo dos cifras significativas. En la superficie de la Luna, la aceleración debida a la gravedad es causada por la fuerza de atracción de la Luna, no de la Tierra, y $g = 1.6 \text{ m/s}^2$. Cerca de la superficie del Sol, $g = 270 \text{ m/s}^2$.

CUIDADO ***g* siempre es un número positivo** Como g es la *magnitud* de un vector, siempre es un número positivo. Si usted considera la dirección *positiva* hacia arriba, como lo hacemos en el ejemplo 2.6 y en la mayoría de las situaciones que implican caída libre, la aceleración es negativa (hacia abajo) e igual a $-g$. Tenga cuidado con el signo de g, o tendrá muchas dificultades con los problemas de caída libre.

En los ejemplos que siguen usaremos las ecuaciones para aceleración constante que dedujimos en la sección 2.4. Sugerimos al lector que repase las estrategias de resolución de problemas 2.1 de dicha sección antes de estudiar estos ejemplos.

MasteringPHYSICS®

PhET: Lunar Lander
ActivPhysics 1.7: Balloonist Drops Lemonade
ActivPhysics 1.10: Pole-Vaulter Lands



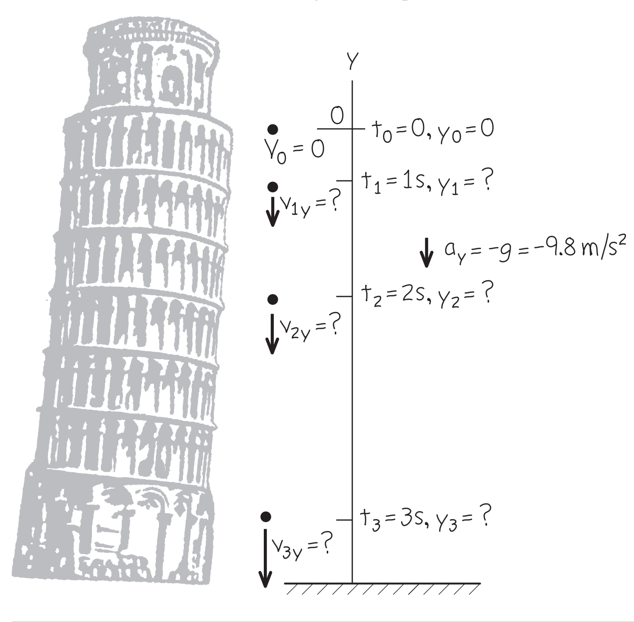
Ejemplo 2.6 Moneda en caída libre

Se deja caer una moneda de un euro desde la Torre Inclinada de Pisa; la moneda cae libremente a partir del reposo. Calcule su posición y velocidad después de 1.0 s, 2.0 s y 3.0 s?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: "Cae libremente" significa "cae con aceleración constante debida a la gravedad", así que podemos usar las ecuaciones para aceleración constante. El lado derecho de la figura 2.23 muestra nuestro diagrama de movimiento para la moneda. El movimieto es vertical, de manera que usamos un eje de coordenadas vertical y llamaremos y a la coordenada en lugar de x. Tomaremos el origen O como el punto de partida y la dirección *hacia arriba* como positiva. La coordenada inicial y_0 y la velocidad inicial v_{0y} son ambas cero. La aceleración es hacia abajo, en la dirección negativa de y, así que $a_y = -g = -9.8\ \text{m/s}^2$. (Recuerde que, por definición, g es positiva). Nuestras incógnitas son los valores de y y v_y en los tres instantes especificados. Para obtenerlos, usamos las ecuaciones (2.12) y (2.8), sustituyendo x por y. La elección de la dirección hacia arriba como positiva significa que todas las posiciones y velocidades que calculemos serán negativas.

2.23 Una moneda en caída libre a partir del reposo.



EJECUTAR: En un instante t después de que se suelta la moneda, su posición y su velocidad son

$$y = y_0 + v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(-g)t^2 = (-4.9\ \text{m/s}^2)t^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t = 0 + (-g)t = (-9.8\ \text{m/s}^2)t$$

Cuando $t = 1.0$ s, $y = (-4.9\ \text{m/s}^2)(1.0\ \text{s})^2 = -4.9$ m y $v_y = (-9.8\ \text{m/s}^2)(1.0\ \text{s}) = -9.8$ m/s; después de 1 s, la moneda está 4.9 m debajo del origen (y es negativa) y tiene una velocidad hacia abajo (v_y es negativa) con magnitud de 9.8 m/s.

Las posiciones y las velocidades a los 2.0 s y 3.0 s se obtienen de la misma forma. Los resultados son $y = -20$ m y $v_y = -20$ m/s en $t = 2.0$ s, y $y = -44$ m y $v_y = -29$ m/s en $t = 3.0$ s.

EVALUAR: Todas nuestras respuestas son negativas, como se esperaba. Si hubiéramos elegido el eje y positivo apuntando hacia abajo, la aceleración habría sido $a_y = +g$ y todas nuestras respuestas habrían sido positivas.



Ejemplo 2.7 Movimiento ascendente y descendente en caída libre

Usted lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde el techo de un edificio alto. La pelota abandona la mano, en un punto a la altura del barandal de la azotea, con rapidez ascendente de 15.0 m/s; después, la pelota está en caída libre. Al bajar, la pelota apenas elude el barandal. Obtenga *a*) la posición y velocidad de la pelota 1.00 s y 4.00 s después de soltarla; *b*) la velocidad cuando la pelota está 5.00 m sobre el barandal; *c*) la altura máxima alcanzada; y *d*) la aceleración de la pelota en su altura máxima.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Las palabras "en caída libre" significan que la aceleración es constante y debida a la gravedad. Las incógnitas son la posición [en los incisos *a*) y *c*)], la velocidad [en los incisos *a*) y *b*)] y la aceleración [en el inciso *d*)]. Tomamos el origen en el punto donde la pelota abandona su mano, y la dirección positiva hacia arriba (figura 2.24). La posición inicial y_0 es cero, la velocidad inicial v_{0y} es +15.0 m/s y la aceleración es $a_y = -g = -9.80\ \text{m/s}^2$. En el inciso *a*), al igual que en el ejemplo 2.6, usaremos las ecuaciones (2.12) y (2.8) para calcular la posición y la velocidad en función del tiempo. En el inciso *b*), debemos obtener la velocidad en cierta *posición* (no en cierto tiempo), de modo que usaremos la ecuación (2.13).

La figura 2.25 muestra las gráficas y-t y v_y-t de la pelota. La gráfica y-t es una parábola cóncava hacia abajo que sube y luego baja, y la gráfica v_y-t es una línea recta con pendiente hacia abajo. Observe que la velocidad de la pelota es cero cuando se encuentra en su punto más alto.

EJECUTAR: *a*) La posición y y la velocidad v_y en el instante t están dadas por las ecuaciones (2.12) y (2.8), sustituyendo las x por y:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_{0y}t + \tfrac{1}{2}(-g)t^2 \\ &= (0) + (15.0\ \text{m/s})t + \tfrac{1}{2}(-9.80\ \text{m/s}^2)t^2 \\ v_y &= v_{0y} + a_y t = v_{0y} + (-g)t \\ &= 15.0\ \text{m/s} + (-9.80\ \text{m/s}^2)t \end{aligned}$$

Continúa

Cuando $t = 1.00$ s, estas ecuaciones dan $y = +10.1$ m y $v_y = +5.2$ m/s. Es decir, la pelota está 10.1 m sobre el origen (y es positiva) y se mueve hacia arriba (v_y es positiva) con rapidez de 5.2 m/s, la cual es menor que la rapidez inicial porque la pelota frena mientras asciende. Cuando $t = 4.00$ s, las ecuaciones dan $y = -18.4$ m y $v_y = -24.2$ m/s. La pelota pasó su punto más alto y está 18.4 m *debajo* del origen (pues y es negativa); tiene movimiento *hacia abajo* (v_y es negativa) de magnitud 24.2 m/s. Conforme baja, la pelota gana rapidez, la ecuación (2.13) nos dice que se mueve a la rapidez inicial de 15.0 m/s cuando pasa hacia abajo por su punto de lanzamiento y continúa ganando rapidez conforme desciende por debajo de este punto.

b) La velocidad v_y en cualquier posición y está dada por la ecuación (2.13) sustituyendo las x por y:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) = v_{0y}^2 + 2(-g)(y - 0)$$
$$= (15.0 \text{ m/s})^2 + 2(-9.80 \text{ m/s}^2)y$$

Con la pelota a 5.00 m sobre el origen, $y = +5.00$ m, así que

$$v_y^2 = (15.0 \text{ m/s})^2 + 2(-9.80 \text{ m/s}^2)(5.00 \text{ m}) = 127 \text{ m}^2/\text{s}^2$$
$$v_y = \pm 11.3 \text{ m/s}$$

Obtenemos *dos* valores de v_y, porque la pelota pasa dos veces por el punto $y = +5.00$ m, una subiendo (v_y positiva) y otra bajando (v_y negativa) (véase las figuras 2.24 y 2.25*a*).

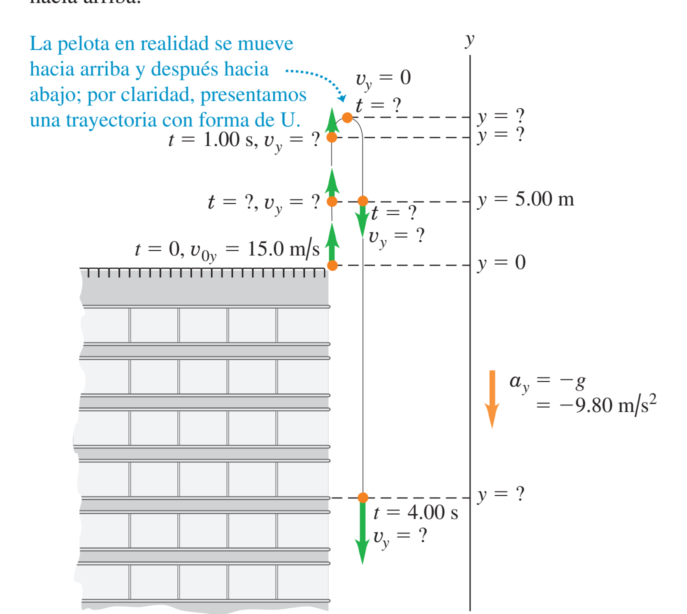
c) En el instante en que la pelota llega al punto más alto y_1, su velocidad momentáneamente es cero: $v_y = 0$. Usamos la ecuación (2.13) para obtener y_1. Con $v_y = 0$, $y_0 = 0$ y $a_y = -g$, obtenemos:

$$0 = v_{0y}^2 + 2(-g)(y_1 - 0)$$
$$y_1 = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(15.0 \text{ m/s})^2}{2(9.80 \text{ m/s}^2)} = +11.5 \text{ m}$$

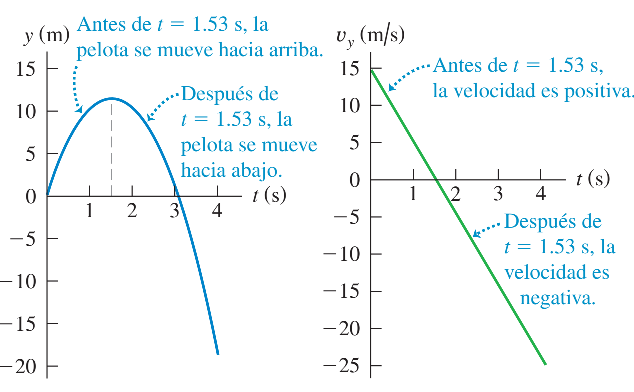
d) **CUIDADO** **Una idea errónea acerca de la caída libre** Es un error común pensar que en el punto más alto del movimiento en caída libre, donde la velocidad es cero, la aceleración también es cero. Si fuera así, una vez que la pelota alcanza el punto más alto, ¡quedaría suspendida en el aire! Recuerde que la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad, y la velocidad está cambiando continuamente. En todos los puntos, incluyendo el punto más alto, y para cualquier velocidad, incluyendo cero, la aceleración en caída libre siempre es $a_y = -g = -9.80$ m/s^2.

EVALUAR: Una forma útil de verificar cualquier problema de caída libre consiste en dibujar las gráficas y-t y v_y-t como lo hicimos en la figura 2.25. Observe que estas son gráficas de las ecuaciones (2.12) y (2.8), respectivamente. Dados los valores numéricos de la posición inicial, velocidad inicial y aceleración, se pueden elaborar fácilmente estas gráficas usando una calculadora graficadora o un programa de matemáticas en línea.

2.24 Posición y velocidad de una pelota que se lanza verticalmente hacia arriba.



2.25 *a*) Posición y *b*) velocidad en función del tiempo para una pelota lanzada hacia arriba con una rapidez inicial de 15 m/s.



Ejemplo 2.8 ¿Dos soluciones o una?

Determine el instante en que la pelota del ejemplo 2.7, después de ser liberada, está 5.00 m por debajo del barandal?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema se trata como el ejemplo 2.7, así que y_0, v_{0y} y $a_y = -g$ tienen los mismos valores que en ese problema. Sin embargo, en este ejemplo la incógnita es el instante en que la pelota se encuentra en $y = -5.00$ m. Lo mejor es usar la ecuación (2.12), la cual nos da la posición y como función del tiempo t:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_{0y}t + \tfrac{1}{2}(-g)t^2$$

Esta es una ecuación *cuadrática* en t, que queremos despejar cuando $y = -5.00$ m.

EJECUTAR: Replanteamos la ecuación de modo que tenga la forma cuadrática estándar para una x desconocida, $Ax^2 + Bx + C = 0$:

$$(\tfrac{1}{2}g)t^2 + (-v_{0y})t + (y - y_0) = At^2 + Bt + C = 0$$

Por comparación, identificamos $A = \frac{1}{2}g$, $B = -v_{0y}$ y $C = y - y_0$. La fórmula cuadrática (véase el apéndice B) nos dice que esta ecuación tiene dos soluciones.

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$= \frac{-(-v_{0y}) \pm \sqrt{(-v_{0y})^2 - 4(\frac{1}{2}g)(y - y_0))}}{2(\frac{1}{2}g)}$$

$$= \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}{}^2 - 2g(y - y_0)}}{g}$$

Sustituyendo los valores $y_0 = 0$, $v_{0y} = +15.0$ m/s, $g = 9.80$ m/s^2 y $y = -5.00$ m, obtenemos.

$$t = \frac{(15.0 \text{ m/s}) \pm \sqrt{(15.0 \text{ m/s})^2 - 2(9.80 \text{ m/s}^2)(-5.00 \text{ m} - 0)}}{9.80 \text{ m/s}^2}$$

Usted puede confirmar que las respuestas numéricas son $t = +3.36$ s y $t = -0.30$ s. La respuesta $t = -0.30$ s no tiene sentido, puesto que se refiere al tiempo *antes* de soltar la pelota en $t = 0$. Así que la respuesta correcta es $t = +3.36$ s.

EVALUAR: ¿Por qué obtuvimos una segunda solución ficticia? La explicación es que las ecuaciones de aceleración constante, como la ecuación (2.12), se basan en el supuesto de que la aceleración es constante para *todos* los valores de tiempo, positivos, negativos o cero. De modo que la solución $t = -0.30$ s se refiere a un momento imaginario cuando una pelota en caída libre estaba 5.00 m debajo del barandal y elevándose para alcanzar su mano. Como la pelota no salió de su mano y entró en caída libre hasta $t = 0$, este resultado es pura ficción.

Repita estos cálculos para obtener los tiempos en que la pelota está 5.00 m *sobre* el origen ($y = +5.00$ m). Las dos respuestas son $t = +0.38$ s y $t = +2.68$ s; ambos son valores positivos de t y se refieren al movimiento real de la pelota una vez soltada. El primer instante es cuando la pelota pasa por $y = +5.00$ m de subida, y el segundo, cuando pasa por ahí de bajada. [Compare esto con el inciso *b*) del ejemplo 2.7 y nuevamente remítase a la figura 2.25*a*)].

Determine también los instantes en que $y = +15.0$ m. En este caso, ambas soluciones requieren obtener la raíz cuadrada de un número negativo, así que *no* hay soluciones reales. Nuevamente la figura 2.25*a* indica por qué; en el inciso *c*) del ejemplo 2.7 vimos que la altura máxima de la pelota es $y = +11.5$ m, así que *nunca* llega a $y = +15.0$ m. Aunque una ecuación cuadrática como la (2.12) siempre tiene dos soluciones, en ocasiones una o ambas soluciones no tienen sentido físico.

Evalúe su comprensión de la sección 2.5 Si usted lanza una pelota hacia arriba con cierta rapidez inicial, esta cae libremente y alcanza una altura máxima h en un instante t después de que abandona su mano. *a*) Si usted arroja la pelota hacia arriba con el doble de la rapidez inicial, ¿qué nueva altura máxima alcanzará la pelota? **i.** $h\sqrt{2}$; **ii.** $2h$; **iii.** $4h$; **iv.** $8h$; **v.** $16h$. *b*) Si usted lanza la pelota hacia arriba con el doble de la rapidez inicial, ¿cuánto tiempo le tomará alcanzar su nueva altura máxima? **i.** $t/2$; **ii.** $t/\sqrt{2}$; **iii.** t; **iv.** $t\sqrt{2}$; **v.** $2t$.

2.6 Velocidad y posición por integración

Esta sección es para estudiantes que ya aprendieron algo de cálculo integral. En la sección 2.4 analizamos el caso especial de movimiento rectilíneo con aceleración constante. Si a_x no es constante, como sucede comúnmente, no podremos aplicar las ecuaciones que dedujimos en esa sección (figura 2.26). Pero aun si a_x varía con el tiempo, podemos usar la relación $v_x = dx/dt$ para obtener la velocidad v_x en función del tiempo si la posición x es una función conocida de t, y podemos usar $a_x = dv_x/dt$ para obtener la aceleración a_x en función del tiempo si v_x es una función conocida de t.

2.26 Cuando pisamos el pedal del acelerador de un automóvil, la aceleración resultante *no* es constante: cuanto mayor sea la rapidez del auto, más lentamente adquirirá rapidez adicional. Un automóvil ordinario tarda el doble en acelerar de 50 a 100 km/h que en acelerar de 0 a 50 km/h.



Sin embargo, en muchas situaciones no se conocen la posición ni la velocidad en función del tiempo, pero sí la aceleración (figura 2.27). ¿Cómo obtenemos la posición y la velocidad en el movimiento rectilíneo a partir de la función de aceleración $a_x(t)$?

Primero consideraremos un enfoque gráfico. La figura 2.28 es una gráfica de aceleración contra tiempo para un cuerpo cuya aceleración no es constante. Podemos dividir el intervalo entre los tiempos t_1 y t_2 en muchos intervalos más pequeños, llamando Δt a uno representativo. Sea $a_{med\text{-}x}$ la aceleración media durante Δt. Por la ecuación (2.4), el cambio de velocidad Δv_x durante Δt es

$$\Delta v_x = a_{med\text{-}x}\,\Delta t$$

Gráficamente, Δv_x es igual al área de la tira sombreada con altura $a_{med\text{-}x}$ y anchura Δt, es decir, el área bajo la curva entre los lados derecho e izquierdo de Δt. El cambio total de velocidad en cualquier intervalo (digamos, de t_1 a t_2) es la suma de los cambios de velocidad Δv_x en los subintervalos pequeños. De esta manera, el cambio total de velocidad se representa gráficamente con el área *total* bajo la curva a_x-t entre las

2.27 El sistema de navegación inercial (INS, por las siglas de *inertial navigation system*) a bordo de un avión comercial de largo alcance mantiene bajo supervisión la aceleración del avión. Los pilotos introducen la posición inicial y la velocidad antes del despegue, y el INS usa los datos de aceleración para calcular la posición y velocidad del avión durante el vuelo.



líneas verticales t_1 y t_2. (En la sección 2.4 demostramos que esto se cumplía para el caso especial en que la aceleración es constante).

En el límite donde todos los Δt se hacen muy pequeños y muy numerosos, el valor de $a_{\text{med-}x}$ para el intervalo de cualquier t a $t + \Delta t$ se acerca a la aceleración instantánea a_x en el instante t. En este límite, el área bajo la curva a_x-t es la *integral* de a_x (que, en general, es una función de t) de t_1 a t_2. Si v_{1x} es la velocidad del cuerpo en t_1, y v_{2x} es la velocidad en t_2, entonces,

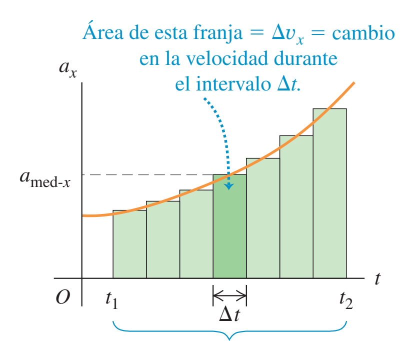
$$v_{2x} - v_{1x} = \int_{v_{1x}}^{v_{2x}} dv_x = \int_{t_1}^{t_2} a_x\,dt \qquad (2.15)$$

El cambio en la velocidad v_x es la integral de la aceleración a_x con respecto al tiempo.

Podemos seguir exactamente el mismo procedimiento con la curva de la velocidad contra el tiempo. Si x_1 es la posición de un cuerpo en t_1, y x_2 es su posición en t_2, por la ecuación (2.2) el desplazamiento Δx en un intervalo Δt pequeño es $v_{\text{med-}x}\Delta t$, donde $v_{\text{med-}x}$ es la velocidad media durante Δt. El desplazamiento total $x_2 - x_1$ durante $t_2 - t_1$ está dado por

$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v_x\,dt \qquad (2.16)$$

2.28 Gráfica a_x-t para un cuerpo cuya aceleración no es constante.



El cambio en la posición x (es decir, el desplazamiento) es la integral con respecto al tiempo de la velocidad v_x. Gráficamente, el desplazamiento entre t_1 y t_2 es el área bajo la curva v_x-t entre esos dos instantes. [Este es el mismo resultado que obtuvimos en la sección 2.4 para el caso especial en que v_x está dada por la ecuación (2.8)].

Si $t_1 = 0$ y t_2 es cualquier instante posterior t, y si x_0 y v_{0x} son la posición y la velocidad en $t = 0$, respectivamente, entonces rescribimos las ecuaciones (2.15) y (2.16) como:

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x\,dt \qquad (2.17)$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\,dt \qquad (2.18)$$

Aquí, x y v_x son la posición y la velocidad en el instante t. Si conocemos la aceleración a_x en función del tiempo y conocemos la velocidad inicial v_{0x}, podemos usar la ecuación (2.17) para obtener la velocidad v_x en cualquier instante; en otras palabras, es posible obtener v_x en función del tiempo. Una vez conocida esta función, y dada la posición inicial x_0, podemos usar la ecuación (2.18) para calcular la posición x en cualquier instante.

Ejemplo 2.9 Movimiento con aceleración variable



Sally conduce su Mustang 1965 por una autopista recta. En el instante $t = 0$, cuando avanza a 10 m/s en la dirección $+x$, pasa un letrero que está en $x = 50$ m. Su aceleración en función del tiempo es:

$$a_x = 2.0\ \text{m/s}^2 - (0.10\ \text{m/s}^3)t$$

a) Obtenga su velocidad v_x y su posición x en función del tiempo. *b*) ¿En qué momento es máxima su velocidad? *c*) ¿Cuál es esa velocidad máxima? *d*) ¿Dónde está el automóvil cuando alcanza la velocidad máxima?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La aceleración es función del tiempo, así que *no podemos* usar las fórmulas para aceleración constante de la sección 2.4. En vez de ello, utilizamos la ecuación (2.17) con la finalidad de obtener una expresión para v_x como función del tiempo, y luego usamos ese resultado en la ecuación (2.18) para obtener una expresión de x como función de t. Después, podremos contestar diversas preguntas acerca del movimiento.

EJECUTAR: *a*) En $t = 0$, la posición de Sally es $x_0 = 50$ m y su velocidad es $v_{0x} = 10$ m/s. Para usar la ecuación (2.17), tomamos nota de que la integral de t^n (excepto para $n = -1$) es $\int t^n dt = \frac{1}{n+1}t^{n+1}$. Así que

$$v_x = 10 \text{ m/s} + \int_0^t [2.0 \text{ m/s}^2 - (0.10 \text{ m/s}^3)t]\,dt$$

$$= 10 \text{ m/s} + (2.0 \text{ m/s}^2)t - \tfrac{1}{2}(0.10 \text{ m/s}^3)t^2$$

Luego, usamos la ecuación (2.18) para obtener x en función de t:

$$x = 50 \text{ m} + \int_0^t [10 \text{ m/s} + (2.0 \text{ m/s}^2)t - \tfrac{1}{2}(0.10 \text{ m/s}^3)t^2]\,dt$$

$$= 50 \text{ m} + (10 \text{ m/s})t + \tfrac{1}{2}(2.0 \text{ m/s}^2)t^2 - \tfrac{1}{6}(0.10 \text{ m/s}^3)t^3$$

La figura 2.29 muestra las gráficas de a_x, v_x y x en función del tiempo proporcionadas por las ecuaciones anteriores. Observe que, para cualquier t, la pendiente de la gráfica v_x-t es igual al valor de a_x y la pendiente de la gráfica x-t es igual al valor de v_x.

b) El valor máximo de v_x se da cuando la velocidad deja de aumentar y comienza a disminuir. En este instante, $dv_x/dt = a_x = 0$. De modo que igualamos con cero la expresión de a_x y despejamos t:

$$0 = 2.0 \text{ m/s}^2 - (0.10 \text{ m/s}^3)t$$

$$t = \frac{2.0 \text{ m/s}^2}{0.10 \text{ m/s}^3} = 20 \text{ s}$$

c) Obtenemos la velocidad máxima sustituyendo $t = 20$ s, el tiempo del inciso *b*) cuando la velocidad es máxima, en la ecuación para v_x del inciso *a*):

$$v_{\text{máx-}x} = 10 \text{ m/s} + (2.0 \text{ m/s}^2)(20 \text{ s}) - \tfrac{1}{2}(0.10 \text{ m/s}^3)(20 \text{ s})^2$$

$$= 30 \text{ m/s}$$

d) Para obtener la posición del automóvil en el tiempo obtenido en el inciso *b*), sustituimos $t = 20$ s en la expresión para x del inciso *a*):

$$x = 50 \text{ m} + (10 \text{ m/s})(20 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(2.0 \text{ m/s}^2)(20 \text{ s})^2$$

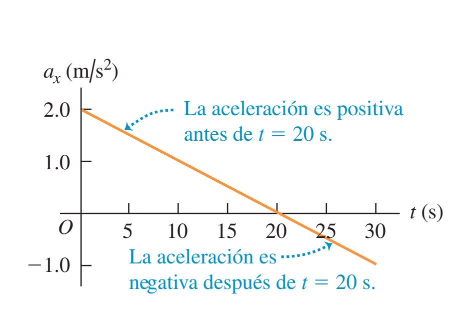
$$- \tfrac{1}{6}(0.10 \text{ m/s}^3)(20 \text{ s})^3$$

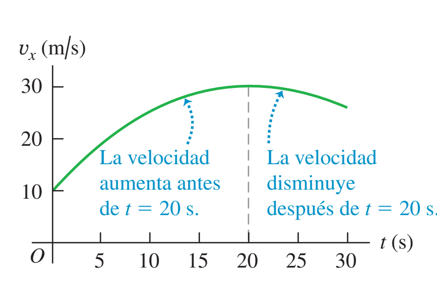
$$= 517 \text{ m}$$

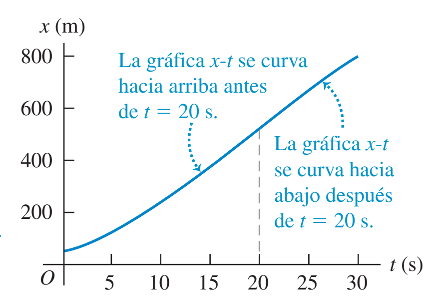
EVALUAR: La figura 2.29 nos ayuda a interpretar los resultados. La gráfica de la izquierda de esta figura indica que a_x es positiva entre $t = 0$ y $t = 20$ s, y negativa después. Es cero en $t = 20$ s, cuando v_x es máxima (punto alto en la gráfica de en medio). El auto acelera hasta $t = 20$ s (porque v_x y a_x tienen el mismo signo) y frena después de $t = 20$ s (porque v_x y a_x tienen signos opuestos).

Como v_x es máxima en $t = 20$ s, la gráfica x-t (la gráfica de la derecha en la figura 2.29) tiene su pendiente positiva máxima en ese instante. Observe que la gráfica x-t es cóncava hacia arriba (se curva hacia arriba) entre $t = 0$ y $t = 20$ s, cuando a_x es positiva, y es cóncava hacia abajo (se curva hacia abajo) después de $t = 20$ s, cuando a_x es negativa.

2.29 Posición, velocidad y aceleración del automóvil del ejemplo 2.9 como funciones del tiempo. ¿Puede usted demostrar que si continúa este movimiento, el automóvil se detendrá en $t = 44.5$ s?







Evalúe su comprensión de la sección 2.6 Si la aceleración a_x se incrementa con el tiempo, la gráfica v_x-t será **i.** una línea recta, **ii.** cóncava hacia arriba (con curvatura hacia arriba) o **iii.** cóncava hacia abajo (con curvatura hacia abajo).



CAPÍTULO 2

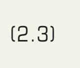
RESUMEN

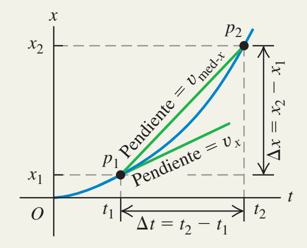


Movimiento rectilíneo, velocidad media e instantánea: Cuando una partícula se mueve en línea recta, describimos su posición con respecto al origen O mediante una coordenada como x. La velocidad media de la partícula, $v_{med\text{-}x}$, durante un intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ es igual a su desplazamiento $\Delta x = x_2 - x_1$ dividido entre Δt. La velocidad instantánea v_x en cualquier instante t es igual a la velocidad media en el intervalo de tiempo $t + \Delta t$ en el límite en que Δt tiende a cero. De forma equivalente, v_x es la derivada de la posición con respecto al tiempo. (Véase el ejemplo 2.1).

$$v_{med\text{-}x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.2)$$

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (2.3)$$

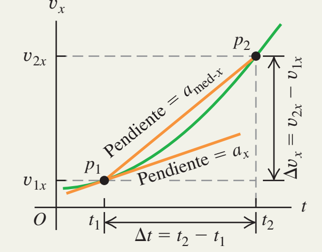




Aceleración media e instantánea: La aceleración media $a_{med\text{-}x}$ durante un intervalo Δt es igual al cambio de velocidad $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ durante ese lapso dividido entre Δt. La aceleración instantánea a_x es el límite de $a_{med\text{-}x}$ cuando Δt tiende a cero, o la derivada de v_x con respecto a t. (Véase los ejemplos 2.2 y 2.3).

$$a_{med\text{-}x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad (2.4)$$

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad (2.5)$$



Movimiento rectilíneo con aceleración constante: Cuando la aceleración es constante, cuatro ecuaciones relacionan la posición x y la velocidad v_x en cualquier instante t con la posición inicial x_0, la velocidad inicial v_{0x} (ambas medidas en $t = 0$) y la aceleración a_x. (Véase los ejemplos 2.4 y 2.5).

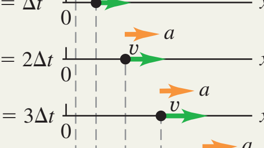
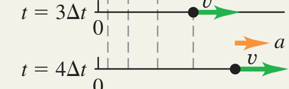
Solo aceleración constante:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad (2.8)$$

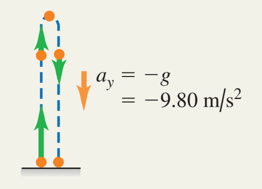
$$x = x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.12)$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \quad (2.13)$$

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right)t \quad (2.14)$$

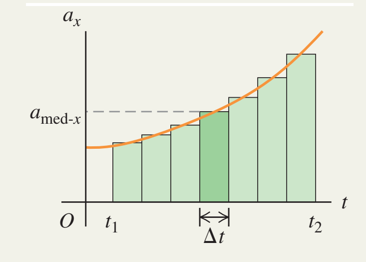
Cuerpos en caída libre: La caída libre es un caso especial del movimiento con aceleración constante. La magnitud de la aceleración debida a la gravedad es una cantidad positiva g. La aceleración de un cuerpo en caída libre siempre es hacia abajo. (Véase los ejemplos 2.6 a 2.8).



Movimiento rectilíneo con aceleración variable: Cuando la aceleración no es constante, pero es una función conocida del tiempo, podemos obtener la velocidad y la posición en función del tiempo integrando la función de la aceleración. (Véase el ejemplo 2.9).

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x\, dt \quad (2.17)$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\, dt \quad (2.18)$$



PROBLEMA PRÁCTICO Caída de un superhéroe

El superhéroe Linterna Verde se arroja de la azotea de un edificio. Cae libremente a partir del reposo, recorriendo la mitad de la distancia total hacia el suelo durante el último 1.00 s de su caída. ¿Cuál es la altura h del edificio?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.

IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Se dice que Linterna Verde cae libremente a partir del reposo. ¿Qué implica esto en relación con su aceleración? ¿Y en relación con su velocidad inicial?
2. Elija la dirección del eje y positivo. Es más fácil hacer la misma elección que usamos en la sección 2.5, para objetos en caída libre.
3. Se puede dividir la caída de Linterna Verde en dos partes: de la azotea del edificio al punto medio del recorrido y del punto medio al suelo. Se sabe que la segunda parte de la caída dura 1.00 s. Identifique lo que necesita saber acerca del movimiento de Linterna Verde en el punto medio del recorrido para obtener la incógnita h. Luego elija dos ecuaciones, una para la primera parte de la caída y otra para la segunda, mismas que usará conjuntamente con la finalidad de obtener una expresión para h. (Hay varios pares de ecuaciones que se pueden elegir).

EJECUTAR

4. Use las dos ecuaciones para obtener la altura h. Observe que las alturas siempre son números positivos, de modo que su respuesta debe ser positiva.

EVALUAR

5. Para verificar el resultado de h, use una de las tres ecuaciones de caída libre con la finalidad de conocer el tiempo que tarda Linterna Verde en caer **i.** de la azotea del edificio a la mitad del recorrido y **ii.** de la azotea del edificio al suelo. Si su respuesta para h es correcta, el tiempo del inciso **ii.** debe ser 1.00 s mayor que el tiempo del inciso **i**. Si no es así, necesita revisar y buscar los errores en el procedimiento de cálculo de h.

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com 

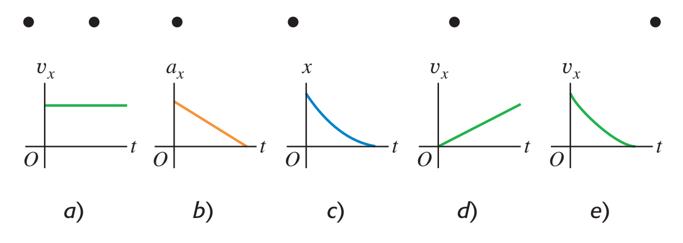
•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P2.1 ¿El velocímetro de un automóvil mide rapidez o velocidad? Explique su respuesta.

P2.2 La parte superior del diagrama en la figura P2.2 muestra una serie de fotografías de alta rapidez de un insecto que vuela en línea recta de izquierda a derecha (en la dirección $+x$). ¿Cuál de las gráficas de la figura P2.2 es más probable que describa el movimiento del insecto?

Figura **P2.2**



P2.3 ¿Un objeto con aceleración constante puede invertir la dirección en la que se mueve? ¿Puede invertirla *dos veces*? En cada caso, explique su razonamiento.

P2.4 ¿En qué condiciones la velocidad media es igual a la velocidad instantánea?

P2.5 Para un objeto, ¿es posible *a*) frenar mientras su aceleración incrementa en magnitud; *b*) aumentar su rapidez mientras disminuye su aceleración? En cada caso, explique su razonamiento.

P2.6 ¿En qué condiciones la magnitud de la velocidad media es igual a la rapidez media?

P2.7 Cuando un Dodge Viper está en el negocio de lavado de automóviles "Elwood", un BMW Z3 está en las calles Elm y Main. Luego, cuando el Dodge llega a Elm y Main, el BMW llega a "Elwood". ¿Cómo están relacionadas las velocidades de los automóviles entre estos dos instantes?

P2.8 En el estado de Massachusetts un conductor fue citado en el tribunal por exceso de rapidez. La prueba contra el conductor era que una mujer policía observó al automóvil del conductor junto a un segundo auto en cierto momento, y la oficial de policía ya había determinado que el segundo auto excedía el límite de rapidez. El conductor argumentó: "El otro auto me estaba rebasando, y yo no iba acelerando". El juez dictaminó contra él porque, según dijo, "si los autos estaban juntos, ambos iban a exceso de rapidez". Si usted fuera el abogado del conductor, ¿cómo defendería su caso?

P2.9 ¿Puede usted tener desplazamiento 0 y velocidad media distinta de 0? ¿Y velocidad distinta de 0? Ilustre sus respuestas en una gráfica x-t.

P2.10 ¿Puede usted tener aceleración 0 y velocidad distinta de 0? Explique usando una gráfica v_x-t.

P2.11 ¿Puede usted tener velocidad cero y aceleración media distinta de cero? ¿Y velocidad cero y aceleración distinta de cero? Explique usando una gráfica v_x-t y dé un ejemplo de dicho movimiento.

P2.12 Un automóvil viaja al oeste. ¿Puede tener una velocidad hacia el oeste y simultáneamente una aceleración hacia el este? ¿En qué circunstancias?

P2.13 La camioneta del oficial en la figura 2.2 está en $x_1 = 277$ m en $t_1 = 16.0$ s, y en $x_2 = 19$ m en $t_2 = 25.0$ s. *a*) Dibuje *dos* posibles gráficas x-t distintas para el movimiento de la camioneta. *b*) ¿La velocidad media $v_{\text{med-}x}$ en el intervalo de t_1 a t_2 tiene el mismo valor en ambas gráficas? ¿Por qué?

P2.14 Con aceleración constante, la velocidad media de una partícula es la mitad de la suma de sus velocidades inicial y final. ¿Se cumple esto si la aceleración *no* es constante? Explique su respuesta.

P2.15 Usted lanza una pelota verticalmente hasta una altura máxima mucho mayor que su propia estatura. ¿La magnitud de la aceleración es mayor mientras se lanza o después de que se suelta? Explique su respuesta.

P2.16 Demuestre estos enunciados. *a*) Si se lanza algo verticalmente hacia arriba, despreciando los efectos del aire, tendrá la misma rapidez cuando regrese al punto de lanzamiento que cuando se soltó. *b*) El tiempo de vuelo será el doble del tiempo que tarde en llegar a la altura máxima.

P2.17 Un grifo de agua que gotea deja caer constantemente gotas cada 1.0 s. Conforme dichas gotas caen, ¿la distancia entre ellas aumenta, disminuye o permanece igual? Demuestre su respuesta.

P2.18 Si se conocen la posición y la velocidad iniciales de un vehículo y se registra la aceleración en cada instante, con estos datos, ¿puede calcularse su posición después de cierto tiempo? Si esto es posible, explique cómo.

P2.19 Desde la azotea de un rascacielos, usted lanza una pelota verticalmente hacia arriba con rapidez v_0 y una pelota directamente hacia abajo con rapidez v_0. *a*) ¿Qué pelota tiene mayor rapidez cuando llega al suelo? *b*) ¿Cuál llega al suelo primero? *c*) ¿Cuál tiene un mayor desplazamiento cuando llega al suelo? *d*) ¿Cuál recorre la mayor distancia cuando llega al suelo?

P2.20 Se deja caer una pelota desde el reposo de la azotea de un edificio de altura h. En el mismo instante, una segunda pelota se proyecta verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo, de modo que tenga rapidez cero cuando llegue al nivel de la azotea. Cuando las dos pelotas se cruzan, ¿cuál tiene mayor rapidez, o ambas tienen la misma rapidez? Explique su respuesta. ¿Dónde estarán las dos pelotas cuando se crucen: a una altura $h/2$ sobre el suelo, más abajo de esa altura o más arriba de esa altura? Explique su respuesta.

P2.21 Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba y no encuentra resistencia del aire. ¿Cómo es posible que el objeto tenga una aceleración cuando detiene su movimiento en el punto más alto?

P2.22 Cuando se deja caer un objeto de cierta altura, tarda el tiempo T para llegar al suelo sin resistencia del aire. Si se deja caer de una altura tres veces mayor que la original, ¿cuánto tiempo (en términos de T) tardaría en llegar al suelo?

EJERCICIOS

Sección 2.1 Desplazamiento, tiempo y velocidad media

2.1 • Un automóvil viaja en la dirección $+x$ sobre un camino recto y nivelado. En los primeros 4.00 s de su movimiento, la velocidad media del automóvil es $v_{\text{med-}x} = 6.25$ m/s. ¿Qué distancia viaja el automóvil en 4.00 s?

2.2 •• En un experimento, se retiró a una pardela (un ave marina) de su nido, se le llevó a 5150 km de distancia y luego fue liberada. El ave regresó a su nido 13.5 días después de haberse soltado. Si el origen es el nido y extendemos el eje $+x$ al punto de liberación, ¿cuál fue la velocidad media del ave en m/s *a*) en el vuelo de regreso y *b*) desde que se retiró del nido hasta que regresó?

2.3 •• **Viaje a casa.** Suponga que usted normalmente conduce por la autopista que va de San Diego a Los Ángeles con una rapidez media de 105 km/h (65 m/h) y que el viaje le toma 2 h y 20 min. Sin embargo, un viernes por la tarde el tráfico le obliga a conducir la misma distancia con una rapidez media de solo 70 km/h (43 mi/h). ¿Cuánto tiempo más tardará el viaje?

2.4 •• **De pilar a poste.** Partiendo de un pilar, usted corre 200 m al este (en la dirección $+x$) con rapidez media de 5.0 m/s, luego 280 m al oeste con rapidez media de 4.0 m/s hasta un poste. Calcule *a*) su rapidez media del pilar al poste y *b*) su velocidad media del pilar al poste.

2.5 • Comenzando en la puerta de la casa de su rancho, usted camina 60.0 m hacia el este rumbo a su molino de viento, y luego da vuelta y camina lentamente 40.0 m hacia el oeste hasta una banca donde se sienta y mira la salida del sol. Cuando camina de su casa hacia el molino de viento transcurren 28.0 s y luego 36.0 s cuando camina del molino de viento hacia la banca. Considerando el recorrido total desde la puerta de su casa hasta la banca, ¿cuáles son *a*) su velocidad media y *b*) su rapidez media?

2.6 •• Un Honda Civic viaja en línea recta en carretera. Su distancia x a partir de un letrero de alto está dada en función del tiempo t por la ecuación $x(t) = \alpha t^2 - \beta t^3$, donde $\alpha = 1.50$ m/s^2 y $\beta = 0.0500$ m/s^3. Calcule la velocidad media del automóvil para los intervalos *a*) $t = 0$ a $t = 2.00$ s; *b*) $t = 0$ a $t = 4.00$ s; *c*) $t = 2.00$ s a $t = 4.00$ s.

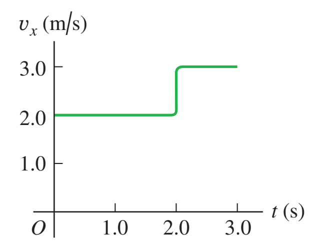
Sección 2.2 Velocidad instantánea

2.7 • **CALC** Un automóvil está detenido ante un semáforo. Después, viaja en línea recta y su distancia con respecto al semáforo está dada por $x(t) = bt^2 - ct^3$, donde $b = 2.40$ m/s^2 y $c = 0.120$ m/s^3. *a*) Calcule la velocidad media del automóvil entre el intervalo $t = 0$ a $t = 10.0$ s. *b*) Calcule la velocidad instantánea del automóvil en $t = 0$, $t = 5.0$ s y $t = 10.0$ s. *c*) ¿Cuánto tiempo después de que el auto arrancó vuelve a estar detenido?

2.8 • **CALC** Un ave vuela hacia el este. Su distancia tomando como referencia un rascacielos está dada por $x(t) = 28.0\text{ m} + (12.4\text{ m/s})t - (0.0450\text{ m/s}^3)t^3$. ¿Cuál es la velocidad instantánea del ave cuando $t = 8.00$ s?

2.9 •• Una pelota se mueve en línea recta (el eje x). En la figura E2.9 la gráfica muestra la velocidad de esta pelota en función del tiempo. *a*) ¿Cuáles son la rapidez media y la velocidad media de la pelota durante los primeros 3.0 s? *b*) Suponga que la pelota se mueve de tal manera que el segmento de la gráfica después de 2.0 s es -3.0 m/s en lugar de $+3.0$ m/s. En este caso, calcule la rapidez y la velocidad medias de la pelota.

Figura **E2.9**



2.10 • Un profesor de física sale de su casa y camina por la acera hacia la universidad. A los 5 min, comienza a llover y él regresa a casa. La distancia a su casa en función del tiempo se muestra en la figura E2.10. ¿En cuál de los puntos indicados su velocidad es *a*) cero, *b*) constante y positiva, *c*) constante y negativa, *d*) de magnitud creciente y *e*) de magnitud decreciente?

Figura **E2.10**

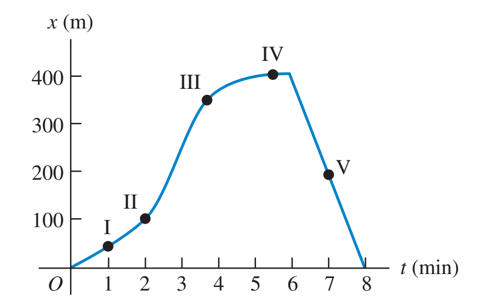
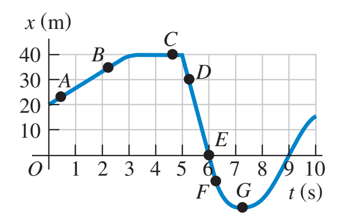


Figura **E2.11**

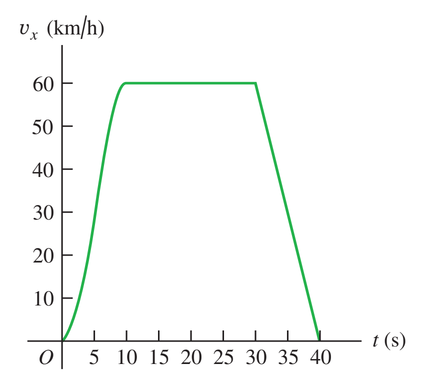


2.11 •• Un automóvil de pruebas viaja en línea recta a lo largo del eje x. La gráfica de la figura E2.11 indica la posición x del automóvil como función del tiempo. Obtenga la velocidad instantánea en los puntos A a G.

Sección 2.3 Aceleración media e instantánea

2.12 • La figura E2.12 es la gráfica de la velocidad de un automóvil, alimentado con energía solar, respecto del tiempo. El conductor del vehículo lo acelera, desde un letrero de alto, viaja 20 s con rapidez constante de 60 km/h y frena para detenerse 40 s después de partir del letrero. *a*) Calcule la aceleración media para estos intervalos: **i.** $t = 0$ a $t = 10$ s; **ii.** $t = 30$ s a $t = 40$ s; **iii.** $t = 10$ s a $t = 30$ s; **iv.** $t = 0$ a $t = 40$ s. *b*) ¿Cuál es la aceleración instantánea en $t = 20$ s y en $t = 35$ s?

Figura **E2.12**



2.13 • ¡El automóvil más rápido (y más costoso)! La siguiente tabla presenta los datos de prueba del Bugatti Veyron, el auto más rápido fabricado en la historia. El vehículo se desplaza en línea recta (en el eje x).

Tiempo (s)	0	2.1	20.0	53
Rapidez (mi/h)	0	60	200	253

a) Elabore una gráfica v_x-t de la velocidad de este automóvil (en mi/h) en función del tiempo. ¿Su aceleración es constante? *b*) Calcule la aceleración media del auto (en m/s^2) entre **i.** 0 y 2.1 s; **ii.** 2.1 s y 20.0 s; **iii.** 20.0 s y 53 s. ¿Estos resultados son congruentes con la gráfica del inciso *a*)? (Antes de decidirse a comprar este vehículo, le convendría saber que solo se fabricarán 300 unidades, que a su máxima rapidez se le acaba la gasolina en 12 minutos y ¡que cuesta 1,250,000 dólares!).

2.14 •• CALC Un automóvil de carreras parte del reposo y viaja hacia el este en una pista recta y nivelada. Para los primeros 5.0 s del movimiento del automóvil, la componente hacia el este de la velocidad está dada por $v_x(t) = (0.860\ \text{m/s}^3)t^2$. ¿Cuál es la aceleración del automóvil cuando $v_x = 16.0$ m/s?

2.15 • CALC Una tortuga camina en línea recta sobre lo que llamaremos eje x con la dirección positiva hacia la derecha. La ecuación de la posición de la tortuga en función del tiempo es $x(t) = 50.0\ \text{cm} + (2.00\ \text{cm/s})t - (0.0625\ \text{cm/s}^2)t^2$. *a*) Determine la velocidad inicial, posición inicial y aceleración inicial de la tortuga. *b*) ¿En qué instante t la tortuga tiene velocidad cero? *c*) ¿Cuánto tiempo después de ponerse en marcha regresa la tortuga al punto de partida? *d*) ¿En qué instantes t la tortuga está a una distancia de 10.0 cm de su punto de partida? ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tiene la tortuga en cada uno de esos instantes? *e*) Dibuje las gráficas: x-t, v_x-t y a_x-t para el intervalo de $t = 0$ a $t = 40$ s.

2.16 • Una astronauta salió de la Estación Espacial Internacional para probar un nuevo vehículo espacial. Su compañero mide los siguientes cambios de velocidad, cada uno en un intervalo de 10 s. Indique la magnitud, el signo y la dirección de la aceleración media en cada intervalo. Suponga que la dirección positiva es a la derecha. *a*) Al principio del intervalo, la astronauta se mueve hacia la derecha sobre el eje x a 15.0 m/s, y al final del intervalo se mueve hacia la derecha a 5.0 m/s. *b*) Al principio se mueve hacia la izquierda a 5.0 m/s y al final lo hace hacia la izquierda a 15.0 m/s. *c*) Al principio se mueve hacia la derecha a 15.0 m/s y al final lo hace hacia la izquierda a 15.0 m/s.

2.17 • CALC La velocidad de un automóvil en función del tiempo está dada por $v_x(t) = \alpha + \beta t^2$, donde $\alpha = 3.00$ m/s y $\alpha = 0.100\ \text{m/s}^3$. *a*) Calcule la aceleración media entre $t = 0$ y $t = 5.00$ s. *b*) Calcule la aceleración instantánea en $t = 0$ y en $t = 5.00$ s. *c*) Dibuje las gráficas v_x-t y a_x-t para el movimiento del automóvil entre $t = 0$ y $t = 5.00$ s.

2.18 •• CALC La posición del parachoques (defensa) frontal de un automóvil de pruebas controlado por un microprocesador está dada por $x(t) = 2.17\ \text{m} + (4.80\ \text{m/s}^2)t^2 - (0.100\ \text{m/s}^6)t^6$. *a*) Obtenga su posición y aceleración en los instantes en que tiene velocidad cero. *b*) Dibuje las gráficas x-t, v_x-t y a_x-t para el movimiento del frente del auto entre $t = 0$ y $t = 2.00$ s.

Sección 2.4 Movimiento con aceleración constante

2.19 •• Un antílope corre con aceleración constante y cubre la distancia de 70.0 m entre dos puntos en 7.00 s. Su rapidez al pasar por el segundo punto es 15.0 m/s. *a*) ¿Qué rapidez tenía en el primer punto? *b*) ¿Qué aceleración lleva?

2.20 •• BIO ¿Desmayo? El piloto de un avión caza de combate quiere acelerar desde el reposo, con aceleración constante de $5g$, para alcanzar una rapidez Mach 3 (tres veces la rapidez del sonido) tan rápido como sea posible. Pruebas experimentales revelan que se desmayará si esta aceleración dura más de 5.0 s. Considere que la rapidez del sonido es de 331 m/s. *a*) ¿Durará el periodo de aceleración lo suficiente para causarle un desmayo? *b*) ¿Cuál es la mayor rapidez que puede alcanzar con una aceleración de $5g$ antes de que se desmaye?

2.21 • Un lanzamiento rápido. En el lanzamiento más rápido medido, una pelota de béisbol salió de la mano del pitcher con una rapidez de 45.0 m/s. Si el pitcher estuvo en contacto con la pelota una distancia de 1.50 m y produjo aceleración constante, *a*) ¿qué aceleración dio a la pelota, y *b*) ¿cuánto tiempo le tomó lanzarla?

2.22 •• Servicio de tenis. En el servicio de tenis más rápido medido, la pelota pierde contacto con la raqueta cuando tiene una rapidez de 73.14 m/s. En un servicio de tenis la pelota normalmente está en contacto con la raqueta 30.0 ms y está inicialmente en reposo. Suponga aceleración constante. *a*) ¿Cuál fue la aceleración de la pelota durante este servicio? *b*) ¿Qué distancia recorrió la pelota durante el servicio?

2.23 •• BIO Bolsas de aire de un automóvil. El cuerpo humano puede sobrevivir a un trauma por aceleración (parada repentina), si la magnitud de la aceleración es menor que 250 m/s^2. Si usted sufre un accidente automovilístico con rapidez inicial de 105 km/h (65 mi/h) y es detenido por una bolsa de aire que se infla desde el tablero, ¿en qué distancia debe ser detenido por la bolsa de aire para sobrevivir al percance?

2.24 • BIO Si un piloto acelera a más de $4g$, se comienza a desvanecer, pero no pierde completamente la conciencia. *a*) Suponiendo aceleración constante, ¿cuál es el instante más corto en el que el piloto, partiendo desde el reposo, puede llegar a Mach 4 (cuatro veces la rapidez del sonido) sin desvanecerse? *b*) ¿Qué tan lejos viajará el avión durante este periodo de aceleración? (Considere 331 m/s como la rapidez del sonido en el aire frío).

2.25 • BIO **Lesiones por la bolsa de aire.** Durante un accidente automovilístico, las bolsas de aire del vehículo se inflan y desaceleran a los pasajeros más suavemente que si golpearan el parabrisas o el volante directamente. De acuerdo con las normas de seguridad, las bolsas producen una aceleración máxima de $60g$ que dura solo 36 ms (o menos). ¿Qué distancia (en metros) recorre una persona antes de detenerse completamente en 36 ms con aceleración constante de $60g$?

2.26 • BIO **Prevención de una fractura de cadera.** Las caídas que provocan fractura de cadera son la causa principal de daños e incluso de muerte en personas mayores. Por lo regular, la rapidez de la cadera en el impacto es de 2.0 m/s, aproximadamente. Si esta se reduce a 1.3 m/s o menos, la cadera generalmente no se fractura. Una manera de lograr esto es usando almohadillas elásticas en la cadera. *a*) Si una almohadilla típica tiene 5.0 cm de grosor y se comprime 2.0 cm durante el impacto de una caída, ¿qué aceleración constante (en m/s^2 y en g) experimenta la cadera para reducir su rapidez de 2.0 m/s a 1.3 m/s? *b*) La aceleración que obtuvo en el inciso *a*) tal vez parezca elevada, pero para evaluar completamente sus efectos sobre la cadera, calcule cuánto tiempo dura.

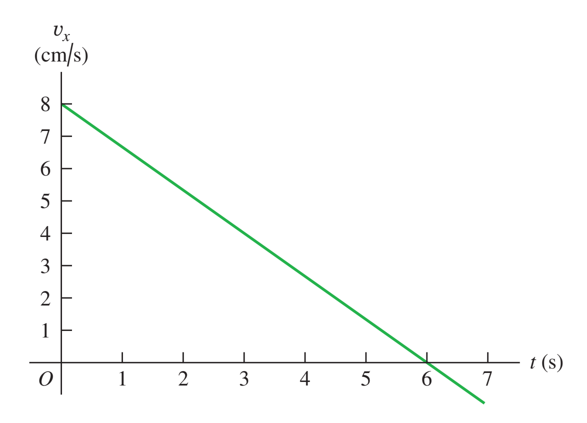
2.27 • BIO **¿Somos marcianos?** Se ha sugerido, y no de broma, que la vida se pudo haber originado en Marte y haber llegado a la Tierra cuando un meteorito golpeó Marte y expulsó partes de roca (que quizá contenían vida primitiva) liberándolas de la superficie. Los astrónomos saben que muchas rocas marcianas han llegado a la Tierra de esta manera. (Para información sobre una de estas, busque en el sitio de Internet "ALH84001"). Una objeción a esta idea es que los microbios tendrían que haber experimentado enormes aceleraciones letales durante el impacto. Investiguemos qué tan elevada podría haber sido esta aceleración. Para escapar de Marte, los fragmentos de roca tendrían que alcanzar una velocidad de escape de 5.0 km/s, y esto sería más probable que sucediera en una distancia de 4.0 m durante el impacto. *a*) ¿Cuál sería la aceleración (en m/s^2 y en g) de este fragmento de roca, si la aceleración es constante? *b*) ¿Cuánto tiempo duraría esta aceleración? *c*) En experimentos, los científicos han encontrado que el 40% de las bacterias *Bacillius subtilis* sobreviviría después de una aceleración de $450{,}000g$. A la luz de su respuesta en el inciso *a*), ¿podemos descartar la hipótesis de que la vida podría haberse transferido de Marte a la Tierra?

2.28 • **Ingreso a la autopista.** Un automóvil está detenido en una rampa de acceso a una autopista, en espera de poder incorporarse al flujo vehicular. El conductor acelera por la rampa con aceleración constante para ingresar a la autopista. El auto parte del reposo, se desplaza en línea recta y tiene una rapidez de 20 m/s (45 mi/h) al llegar al final de la rampa que tiene 120 m de largo. *a*) ¿Qué aceleración tiene el automóvil? *b*) ¿Cuánto tiempo tarda el auto en salir de la rampa? *c*) El tráfico de la autopista circula con rapidez constante de 20 m/s. ¿Qué distancia recorre el tráfico mientras el auto se desplaza por la rampa?

2.29 •• **Lanzamiento del transbordador espacial.** Durante el lanzamiento, el transbordador espacial pesa 4.5 millones de libras. Una vez lanzado, partiendo desde el reposo, tarda 8.00 s en alcanzar los 161 km/h, y al final del primer minuto, su rapidez es de 1610 km/h. *a*) ¿Cuál es la aceleración media (en m/s^2) del transbordador **i.** durante los primeros 8.00 s, y **ii.** entre 8.00 s y el final del primer minuto? *b*) Suponiendo que la aceleración es constante durante cada intervalo (aunque no necesariamente la misma en ambos intervalos), ¿qué distancia recorre el transbordador **i.** durante los primeros 8.00 s, y **ii.** durante el intervalo de 8.00 s a 1.00 min?

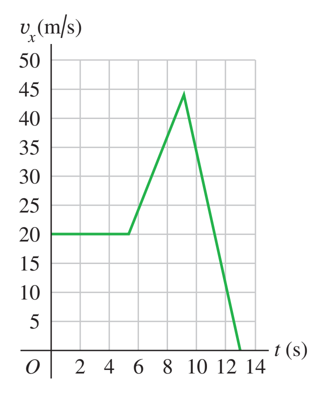
2.30 •• Un gato camina en línea recta en lo que llamaremos eje x con la dirección positiva a la derecha. Usted, que es un físico observador, efectúa mediciones del movimiento del gato y elabora una gráfica de la velocidad del felino en función del tiempo (figura E2.30). *a*) Determine la velocidad del gato en $t = 4.0$ s y en $t = 7.0$ s. *b*) ¿Qué aceleración tiene el gato en $t = 3.0$ s? ¿En $t = 6.0$ s? ¿En $t = 7.0$ s? *c*) ¿Qué distancia cubre el gato durante los primeros 4.5 s? ¿Entre $t = 0$ y $t = 7.5$ s? *d*) Dibuje gráficas claras de la aceleración del gato y su posición en función del tiempo, suponiendo que partió del origen.

Figura **E2.30**



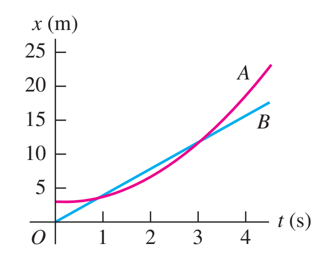
2.31 •• La gráfica de la figura E2.31 indica la velocidad de un policía en motocicleta en función del tiempo. *a*) Calcule la aceleración instantánea en $t = 3$ s, en $t = 7$ s y en $t = 11$ s. *b*) ¿Qué distancia recorre el policía en los primeros 5 s? ¿En los primeros 9 s? ¿Y en los primeros 13 s?

Figura **E2.31**



2.32 • Dos automóviles, A y B, se desplazan a lo largo del eje x. La figura E2.32 es la gráfica de las posiciones de A y B contra el tiempo. *a*) En diagramas de movimiento (como las figuras 2.13*b* y 2.14*b*), muestre la posición, velocidad y aceleración de cada automóvil en $t = 0$, $t = 1$ s y $t = 3$ s. *b*) ¿En qué instante(s), si es el caso, A y B tienen la misma posición? *c*) Trace una gráfica de velocidad contra tiempo para A y para B. *d*) ¿En qué instante(s), si es el caso, A y B tienen la misma velocidad? *e*) ¿En qué instante(s), si es el caso, el automóvil A rebasa al auto B? *f*) ¿En qué instante(s), si es el caso, el automóvil B rebasa al A?

Figura **E2.32**



2.33 •• **Llegada a Marte.** En enero de 2004, la NASA colocó un vehículo de exploración en la superficie marciana. Parte del descenso consistió en las siguientes etapas:

Etapa A: La fricción con la atmósfera redujo la rapidez de 19,300 a 1600 km/h en 4.0 min.
Etapa B: Un paracaídas se abrió para frenarlo a 321 km/h en 94 s.
Etapa C: Se encienden los retrocohetes para reducir su rapidez a cero en una distancia de 75 m.

Suponga que cada etapa sigue inmediatamente después de la que le precede, y que la aceleración durante cada una es constante. *a*) Encuentre la aceleración del cohete (en m/s^2) durante cada etapa. *b*) ¿Qué distancia total (en km) viajó el cohete en las etapas *A*, *B* y *C*?

2.34 • En el instante en que un semáforo se pone en luz verde, un automóvil que esperaba en el cruce arranca con aceleración constante de 3.20 m/s^2. En ese mismo instante, un camión que viaja con rapidez constante de 20.0 m/s rebasa al automóvil. *a*) ¿A qué distancia de su punto de partida el automóvil alcanza al camión? *b*) ¿Qué rapidez tiene el automóvil en ese momento? *c*) Dibuje una gráfica *x*-*t* del movimiento de los dos vehículos, tomando $x = 0$ en el cruce. *d*) Dibuje una gráfica v_x-t del movimiento de los dos vehículos.

Sección 2.5 Cuerpos en caída libre

2.35 •• *a*) Si una pulga puede saltar 0.440 m hacia arriba, ¿qué rapidez inicial tiene al separarse del suelo? *b*) ¿Cuánto tiempo está en el aire?

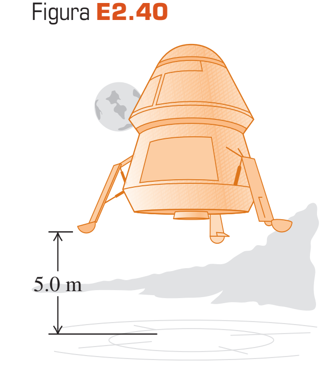
2.36 •• Una piedra pequeña se lanza verticalmente hacia arriba, con una velocidad de 18.0 m/s, del borde del techo de un edificio de 30.0 m de altura. La piedra cae sin golpear el edificio en su trayectoria hacia abajo hasta llegar a la calle. Se puede ignorar la resistencia del aire. *a*) ¿Cuál es la rapidez de la piedra justo antes de golpear la calle? *b*) ¿Cuánto tiempo transcurre desde que la roca es arrojada hasta que llega a la calle?

2.37 • Un malabarista arroja un pino del juego de bolos verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 8.20 m/s. ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que el pino regresa a la mano del malabarista?

2.38 •• Usted lanza una bola de masilla verticalmente hacia el techo, el cual se encuentra a 3.60 m por encima del punto donde la masilla pierde contacto con su mano. La rapidez inicial de la masilla cuando abandona su mano es de 9.50 m/s. *a*) ¿Cuál es la rapidez de la masilla al llegar al techo? *b*) ¿Cuánto tiempo transcurre entre que la masilla pierde contacto con la mano y llega al techo?

2.39 •• Una pelota de tenis en Marte, donde la aceleración debida a la gravedad es de 0.379*g* y la resistencia del aire es despreciable, es golpeada directamente hacia arriba y regresa al mismo nivel 8.5 s más tarde. *a*) ¿A qué altura del punto original llega la pelota? *b*) ¿Qué tan rápido se mueve exactamente después de ser golpeada? *c*) Elabore las gráficas de la posición vertical, la velocidad vertical y la aceleración vertical de la pelota en función del tiempo mientras se encuentra en el aire de Marte.

Figura **E2.40**



2.40 •• **Alunizaje.** Un vehículo espacial está descendiendo hacia la Base Lunar I (figura E2.40) descendiendo lentamente por el retroempuje del motor de descenso. El motor se apaga cuando el vehículo está a 5.0 m sobre la superficie y tiene una velocidad descendente de 0.8 m/s. Con el motor apagado, el vehículo está en caída libre. ¿Qué rapidez tiene justo antes de tocar la superficie? La aceleración debida a la gravedad lunar es de 1.6 m/s^2.

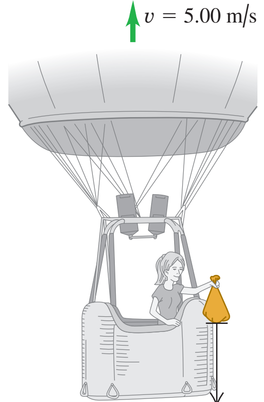
2.41 •• **Prueba sencilla del tiempo de reacción.** Se sostiene un metro verticalmente por encima de su mano, de manera que su extremo inferior esté entre su pulgar y su índice. Al ver que sueltan el metro, usted lo detiene juntando esos dos dedos. Se puede calcular el tiempo de su reacción con base en la distancia que el metro cayó, leyendo la escala en el punto donde lo tomó. *a*) Deduzca una relación para el tiempo de reacción en términos de la distancia *d* medida. *b*) Si la distancia medida es 17.6 cm, ¿cuál es el tiempo de reacción?

2.42 •• Se deja caer un ladrillo (rapidez inicial cero) desde la azotea de un edificio. El tabique llega al suelo en 2.50 s. Se puede despreciar la resistencia del aire, así que el ladrillo está en caída libre. *a*) ¿Qué altura (en m) tiene el edificio? *b*) ¿Qué magnitud tiene la velocidad del ladrillo al llegar al suelo? *c*) Dibuje las gráficas: a_y-*t*, v_y-*t* y *y*-*t* para el movimiento del ladrillo.

2.43 •• **Falla en el lanzamiento.** Un cohete de 7500 kg despega verticalmente desde la plataforma de lanzamiento con una aceleración constante hacia arriba de 2.25 m/s^2 y no experimenta una considerable resistencia del aire. Cuando alcanza una altura de 525 m, sus motores fallan repentinamente y entonces la única fuerza que actúa sobre él es la gravedad. *a*) ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará este cohete desde la plataforma de lanzamiento? *b*) Después de que el motor falla, ¿cuánto tiempo pasará antes de que se estrelle contra la plataforma de lanzamiento, y qué rapidez tendrá justo antes del impacto? *c*) Dibuje las gráficas a_y-*t*, v_y-*t* y *y*-*t* del movimiento del cohete desde el instante en que despega hasta el instante justo antes de chocar contra la plataforma de lanzamiento.

2.44 •• El tripulante de un globo aerostático, que sube verticalmente con velocidad constante de magnitud 5.00 m/s, suelta un saco de arena cuando el globo está a 40.0 m sobre el suelo (figura E2.44). Después de que se suelta, el saco de arena está en caída libre. *a*) Calcule la posición y velocidad del saco a 0.250 s y 1.00 s después de soltarse. *b*) ¿Cuántos segundos tardará el saco en chocar con el suelo después de soltarse? *c*) ¿Con qué velocidad chocará? *d*) ¿Qué altura máxima alcanza el saco en relación con el suelo? *e*) Dibuje las gráficas a_y-*t*, v_y-*t* y *y*-*t* para el movimiento.

Figura **E2.44**



2.45 • BIO El trineo impulsado por el cohete *Sonic Wind Núm. 2*, utilizado para investigar los efectos fisiológicos de las altas aceleraciones, corre sobre una vía recta horizontal de 1070 m (3500 ft). Desde el reposo, puede alcanzar una rapidez de 224 m/s (500 mi/h) en 0.900 s. *a*) Calcule la aceleración en m/s^2, suponiendo que es constante. *b*) ¿Cuál es la razón entre esta aceleración y la de un cuerpo en caída libre (*g*)? *c*) ¿Qué distancia se cubre en 0.900 s? *d*) En una revista se aseguró que, al final de cierta prueba, la rapidez del trineo disminuyó de 283 m/s (632 mi/h) a cero en 1.40 s, y que en ese tiempo la magnitud de la aceleración fue mayor que 40*g*. ¿Son congruentes tales cifras?

2.46 • Se lanza un huevo casi verticalmente hacia arriba desde un punto cerca de la cornisa de un edificio alto; al bajar, apenas elude la cornisa y pasa por un punto 30.0 m abajo de su punto de partida 5.00 s después de perder contacto con la mano que lo lanzó. Puede despre-

ciarse la resistencia del aire. *a*) ¿Qué rapidez inicial tiene el huevo? *b*) ¿Qué altura alcanza respecto del punto de lanzamiento? *c*) ¿Qué magnitud tiene su velocidad en el punto más alto? *d*) ¿Qué magnitud y dirección tiene su aceleración en el punto más alto? *e*) Dibuje las gráficas a_y-t, v_y-t y y-t para el movimiento del huevo.

2.47 •• En la Tierra, una roca de 15 kg se suelta desde el reposo y llega al suelo 1.75 s después. Cuando se suelta desde la misma altura en Encélado, una luna de Saturno, llega al suelo en 18.6 s. ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad en Encélado?

2.48 • Un peñasco es expulsado verticalmente hacia arriba por un volcán, con una rapidez inicial de 40.0 m/s. Puede despreciarse la resistencia del aire. *a*) ¿En qué instante, después de ser expulsado, el peñasco sube a 20.0 m/s? *b*) ¿En qué instante baja a 20.0 m/s? *c*) ¿Cuándo es cero el desplazamiento con respecto a su posición inicial? *d*) ¿Cuándo es cero la velocidad del peñasco? *e*) ¿Qué magnitud y dirección tiene la aceleración cuando el peñasco está **i.** subiendo, **ii.** bajando, **iii.** en el punto más alto? *f*) Dibuje las gráficas a_y-t, v_y-t y y-t para el movimiento.

2.49 •• Dos piedras se arrojan verticalmente hacia arriba desde el suelo; una tiene tres veces la velocidad inicial de la otra. *a*) Si la piedra más rápida tarda 10 s en regresar al suelo, ¿cuánto tiempo le tomará regresar a la piedra más lenta? *b*) Si la piedra más lenta alcanza una altura máxima de H, ¿a qué altura (en términos de H) llegará la piedra más rápida? Suponga caída libre.

Sección 2.6 Velocidad y posición por integración

2.50 • CALC Use las ecuaciones (2.17) y (2.18) de la aceleración constante a_x, para obtener v_x y x en función del tiempo. Compare sus resultados con las ecuaciones (2.8) y (2.12).

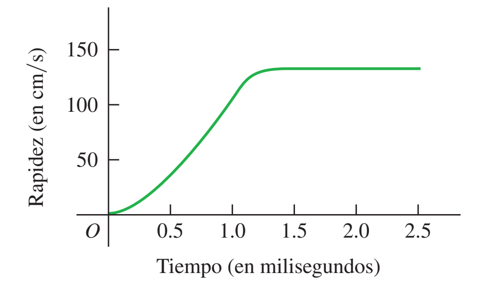
2.51 • CALC Un cohete parte del reposo y se desplaza hacia arriba a partir de la superficie de la Tierra. La aceleración vertical del cohete durante los primeros 10 s de su movimiento está dada por $a_y = (2.80 \text{ m/s}^3)t$, donde la dirección $+y$ es hacia arriba. *a*) ¿Cuál es la altura del cohete sobre la superficie de la Tierra en $t = 10.0$ s? *b*) ¿Cuál es la rapidez del cohete cuando alcanza una altura de 325 m sobre la superficie de la Tierra?

2.52 •• CALC La aceleración de un autobús está dada por $a_x(t) = \alpha t$, donde $\alpha = 1.2 \text{ m/s}^3$. *a*) Si la velocidad del autobús en el tiempo $t = 1.0$ s es 5.0 m/s, ¿cuál será en $t = 2.0$ s? *b*) Si la posición del autobús en $t = 1.0$ s es 6.0 m, ¿cuál será en $t = 2.0$ s? *c*) Dibuje las gráficas: a_x-t, v_x-t y x-t para el movimiento.

2.53 •• CALC La aceleración de una motocicleta está dada por $a_x(t) = At - Bt^2$, donde $A = 1.50 \text{ m/s}^3$ y $B = 0.120 \text{ m/s}^4$. La motocicleta está en reposo en el origen cuando $t = 0$. *a*) Obtenga su posición y velocidad en función de t. *b*) Calcule la velocidad máxima que alcanza.

2.54 •• BIO **Salto volador de la pulga.** La película de alta velocidad (3500 cuadros por segundo) con la que se filmó a una pulga saltarina de 210 μg produjo los datos que se usaron para elaborar la gráfica de la figura E2.54. (Véase "The Flying Leap of the Flea", de M. Rothschild, Y. Schlein, K. Parker, C. Neville y S. Sternberg, en *Scientific American*, noviembre de 1973). La pulga tenía una longitud aproximada de 2 mm y saltó con un ángulo de despegue casi vertical. Use la gráfica para contestar estas preguntas. *a*) ¿La aceleración de la pulga es cero en algún momento? Si es así, ¿cuándo? Justifique su respuesta. *b*) Calcule la altura máxima que la pulga alcanzó en los primeros 2.5 ms. *c*) Determine la aceleración de la pulga a los 0.5 ms, 1.0 ms y 1.5 ms. *d*) Calcule la altura de la pulga a los 0.5 ms, 1.0 ms y 1.5 ms.

Figura **E2.54**



PROBLEMAS

2.55 • BIO Un hombre ciclista velocista promedio puede mantener una aceleración máxima durante 2.0 s cuando su rapidez máxima es de 10 m/s. Después de alcanzar su rapidez máxima, su aceleración es igual a cero y entonces avanza a rapidez constante. Suponga que la aceleración es constante durante los primeros 2.0 s del recorrido, que parte del reposo y en línea recta. *a*) ¿Qué distancia ha recorrido el velocista cuando alcanza su máxima rapidez? *b*) ¿Cuál es la magnitud de su velocidad media en el recorrido de las siguientes longitudes? **i.** 50.0 m, **ii.** 100.0 m, **iii.** 200.0 m.

2.56 •• En un paseo de 20 millas en bicicleta, usted recorre las primeras 10 millas con rapidez media de 8 mi/h. ¿Qué rapidez media en las otras 10 mi requerirá para que la rapidez media total en las 20 millas sea: *a*) 4 mi/h? *b*) ¿Y 12 mi/h? *c*) Dada la rapidez media para las primeras 10 millas, ¿le sería posible alcanzar una rapidez media de 16 mi/h para todo el paseo de 20 millas? Explique su respuesta.

2.57 •• CALC La posición de una partícula entre $t = 0$ y $t = 2.00$ s está dada por $x(t) = (3.00 \text{ m/s}^3)t^3 - (10.0 \text{ m/s}^2)t^2 + (9.00 \text{ m/s})t$. *a*) Dibuje las gráficas x-t, v_x-t y a_x-t para la partícula. *b*) ¿En qué instante(s) entre $t = 0$ y $t = 2.00$ s la partícula está en reposo? ¿Coincide el resultado numérico con la gráfica v_x-t del inciso *a*)? *c*) En cada instante calculado en el inciso *b*), ¿la aceleración de la partícula es positiva o negativa? Demuestre que, en cada caso, la misma respuesta se deduce de $a_x(t)$ y de la gráfica v_x-t. *d*) ¿En qué instante(s) entre $t = 0$ y $t = 2.00$ s la velocidad de la partícula no está cambiando? Ubique este punto en las gráficas v_x-t y a_x-t del inciso *a*). *e*) ¿Cuál es la distancia máxima de la partícula con respecto al origen ($x = 0$) entre $t = 0$ y $t = 2.00$ s? *f*) ¿En qué instante(s) entre $t = 0$ y $t = 2.00$ s la partícula está *aumentando de rapidez* al mayor ritmo? ¿En qué instante(s) entre $t = 0$ y $t = 2.00$ s la partícula se está *frenando* al mayor ritmo? Ubique esos puntos en las gráficas v_x-t y a_x-t del inciso *a*).

2.58 •• CALC Un vehículo lunar desciende en la superficie de la Luna. Hasta que el vehículo alcanza la superficie, su altura está dada por $y(t) = b - ct + dt^2$, donde $b = 800$ m es la altura inicial del vehículo sobre la superficie, $c = 60.0$ m/s, y $d = 1.05 \text{ m/s}^2$. *a*) ¿Cuál es la velocidad inicial del vehículo en $t = 0$? *b*) ¿Cuál es la velocidad del vehículo cuando toca la superficie lunar?

2.59 ••• **Estudio de los terremotos.** Los terremotos producen varios tipos de ondas de choque. Las más conocidas son las ondas P (la inicial se deriva de *primaria* o *presión*) y las ondas S [por la inicial de *secundaria* o *esfuerzo cortante* (*shear*)]. En la corteza terrestre, las ondas P viajan a aproximadamente 6.5 km/s, en tanto que las ondas S se desplazan a unos 3.5 km/s. Las rapideces reales varían según el tipo de material por el que viajen. El tiempo de retraso, entre la llegada de estas dos clases de onda a una estación de monitoreo sísmico, indica a los geólogos a qué distancia ocurrió el terremoto. Si el tiempo de retraso es de 33 s, ¿a qué distancia de la estación sísmica sucedió el terremoto?

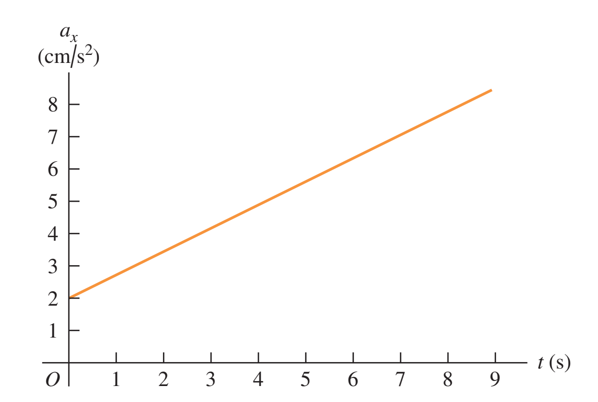
2.60 •• **Carrera de relevos.** En una carrera de relevos, cada competidor corre 25.0 m con un huevo sostenido en una cuchara; luego, se da vuelta y regresa al punto de partida. Edith corre los primeros 25.0 m en 20.0 s. Al regresar se siente más confiada y tarda solo 15.0 s. ¿Qué

magnitud tiene su velocidad media en *a*) los primeros 25.0 m? *b*) ¿Y en el regreso? *c*) ¿Cuál es su velocidad media para el viaje redondo? *d*) ¿Y su rapidez media para el viaje redondo?

2.61 ••• Un cohete que lleva un satélite acelera verticalmente alejándose de la superficie terrestre. 1.15 s después del despegue, el cohete rebasa la parte superior de su plataforma de lanzamiento, que está a 63 m sobre el suelo; y después de otros 4.75 s, está a 1.00 km del suelo. Calcule la magnitud de la velocidad media del cohete en *a*) la parte de 4.75 s de su vuelo; *b*) los primeros 5.90 s de su vuelo.

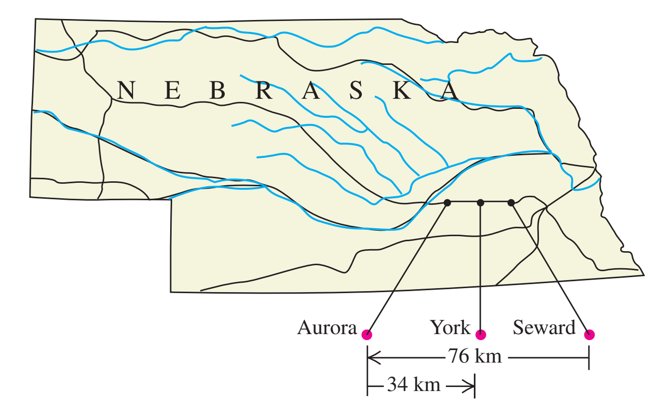
2.62 ••• La gráfica de la figura P2.62 describe la aceleración, en función del tiempo, de una piedra que rueda colina abajo partiendo del reposo. *a*) Calcule la velocidad de la piedra en $t = 2.5$ s y en $t = 7.5$ s. *b*) Dibuje una gráfica de la velocidad de la piedra en función del tiempo.

Figura **P2.62**



2.63 •• Dan entra en la carretera interestatal I-80 en Seward, Nebraska, y viaja al oeste en línea recta con velocidad media de magnitud de 88 km/h. Después de 76 km, llega a la salida de Aurora (figura P2.63). Al darse cuenta de que llegó demasiado lejos, se da vuelta, y conduce 34 km al este hasta la salida de York con una velocidad media de magnitud igual a 72 km/h. Para el viaje total de Seward a la salida de York, determine *a*) su rapidez media y *b*) la magnitud de su velocidad media.

Figura **P2.63**



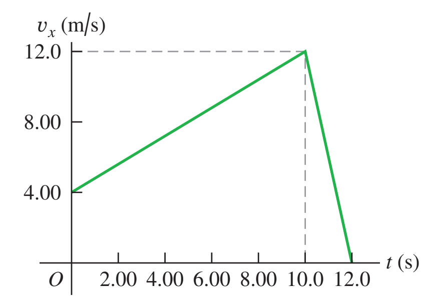
2.64 ••• Un tren subterráneo en reposo parte de una estación y acelera a una tasa de 1.60 m/s^2 durante 14.0 s. Viaja con rapidez constante 70.0 s y frena a 3.50 m/s^2 hasta detenerse en la siguiente estación. Calcule la distancia *total* cubierta.

2.65 •• Un velocista de alto rendimiento acelera a su rapidez máxima en 4.0 s y mantiene esa rapidez durante el resto de la carrera de 100 m, llegando a la meta con un tiempo total de 9.1 s. *a*) ¿Qué aceleración media tiene durante los primeros 4.0 s? *b*) ¿Qué aceleración media registra durante los últimos 5.1 s? *c*) ¿Qué aceleración media tiene durante toda la carrera? *d*) Explique por qué su respuesta en el inciso *c*) no es el promedio de las respuestas de los incisos *a*) y *b*).

2.66 •• Un trineo parte del reposo en la cima de una colina y baja con aceleración constante. En un instante posterior, el trineo está a 14.4 m de la cima; 2.00 s después está a 25.6 m de la cima, 2.00 s después está a 40.0 m de la cima, y 2.00 s después está a 57.6 m de la cima. *a*) ¿Qué magnitud tiene la velocidad media del trineo en cada intervalo de 2.00 s después de pasar los 14.4 m? *b*) ¿Qué aceleración tiene el trineo? *c*) ¿Qué rapidez tiene el trineo al pasar los 14.4 m? *d*) ¿Cuánto tiempo tardó el trineo en llegar de la cima a los 14.4 m? *e*) ¿Qué distancia recorrió el trineo durante el primer segundo después de pasar los 14.4 m?

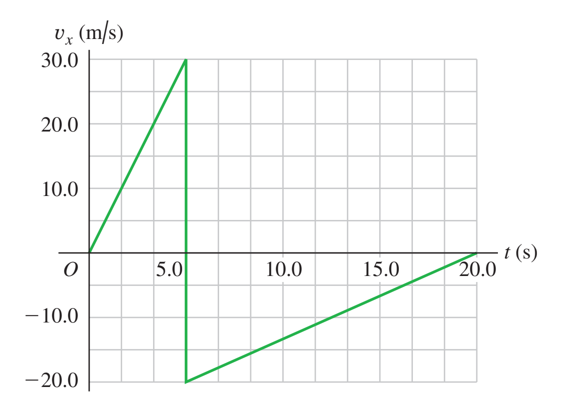
2.67 • Una gacela corre en línea recta (el eje *x*). En la figura P2.67, la gráfica muestra la velocidad de este animal en función del tiempo. Durante los primeros 12.0 s, obtenga *a*) la distancia total recorrida y *b*) el desplazamiento de la gacela. *c*) Dibuje una gráfica a_x-t que muestre la aceleración de esta gacela en función del tiempo durante los primeros 12.0 s.

Figura **P2.67**



2.68 • Una pelota rígida que viaja en línea recta (el eje *x*) choca contra una pared sólida y rebota repentinamente durante un breve instante. En la figura P2.68, la gráfica v_x-t muestra la velocidad de esta pelota en función del tiempo. Durante los primeros 20.0 s de su movimiento, obtenga *a*) la distancia total que se mueve la pelota y *b*) su desplazamiento. *c*) Dibuje una gráfica a_x-t del movimiento de esta pelota. *d*) En los 5.00 s, ¿la gráfica que se muestra es realmente vertical? Explique su respuesta.

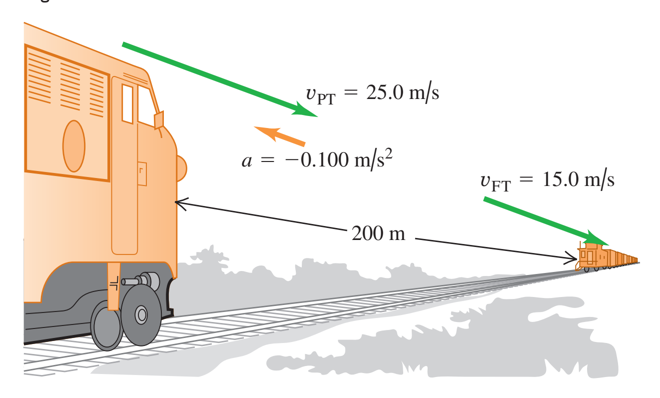
Figura **P2.68**



2.69 ••• Una pelota parte del reposo y baja rodando una colina con aceleración uniforme, recorriendo 150 m durante el segundo lapso de 5.0 s de su movimiento. ¿Qué distancia cubrió durante el primer lapso de 5.0 s?

2.70 •• **Colisión.** El maquinista de un tren de pasajeros que se mueve a 25.0 m/s avista un tren de carga cuyo último vagón está 200 m

Figura **P2.70**



más adelante en la misma vía (figura P2.70). El tren de carga se mueve con una rapidez de 15.0 m/s en la misma dirección que el tren de pasajeros. El maquinista del tren de pasajeros aplica de inmediato los frenos, causando una aceleración constante de 0.100 m/s^2, en dirección opuesta a la de la velocidad del tren, mientras el tren de carga sigue con rapidez constante. Sea $x = 0$ el punto donde está la parte frontal del tren de pasajeros cuando el maquinista aplica los frenos. *a*) ¿Atestiguarán las vacas de los alrededores una colisión? *b*) Si es así, ¿dónde ocurrirá? *c*) Dibuje en una sola gráfica las posiciones del frente del tren de pasajeros y la parte posterior del tren de carga.

2.71 ••• Las cucarachas grandes pueden correr a 1.50 m/s en tramos cortos. Suponga que enciende la luz en un hotel y ve una cucaracha alejándose en línea recta a 1.50 m/s. Si inicialmente usted estaba 0.90 m detrás del insecto y se acerca hacia este con una rapidez inicial de 0.80 m/s, ¿qué aceleración constante mínima necesitará para alcanzarlo cuando este haya recorrido 1.20 m, justo antes de escapar bajo un mueble?

2.72 •• Dos automóviles están separados 200 m y avanzan uno hacia el otro con una rapidez constante de 10 m/s. Sobre el frente de uno de ellos, un saltamontes lleno de energía salta hacia adelante entre los autos (¡sí que tiene patas fuertes!) con una velocidad horizontal constante de 15 m/s en relación con el suelo. El insecto salta en el instante en que cae, de manera que no pierde tiempo descansando en uno u otro auto. ¿Qué distancia total recorre el saltamontes antes de que los automóviles colisionen?

2.73 • Un automóvil y un camión parten del reposo en el mismo instante, con el automóvil a cierta distancia detrás del camión. El camión tiene aceleración constante de 2.10 m/s^2, y el automóvil una de 3.40 m/s^2. El automóvil alcanza al camión cuando este ha recorrido 40.0 m. *a*) ¿Cuánto tiempo tarda el automóvil en alcanzar al camión? *b*) ¿Qué tan atrás del camión estaba inicialmente el automóvil? *c*) ¿Qué rapidez tienen los vehículos cuando avanzan juntos? *d*) Dibuje en una sola gráfica la posición de cada vehículo en función del tiempo. Sea $x = 0$ la posición inicial del camión.

2.74 ••• Dos pilotos de exhibición conducen frontalmente uno hacia el otro. En $t = 0$ la distancia entre los automóviles es D, el auto 1 está en reposo y el 2 se mueve hacia la izquierda con rapidez v_0. El auto 1 comienza a moverse en $t = 0$ con aceleración constante a_x. El auto 2 sigue a velocidad constante. *a*) ¿En qué instante chocarán los autos? *b*) Calcule la rapidez del auto 1 justo antes de chocar contra el auto 2. *c*) Dibuje las gráficas x-t y v_x-t para los dos autos, y trace las curvas usando los mismos ejes.

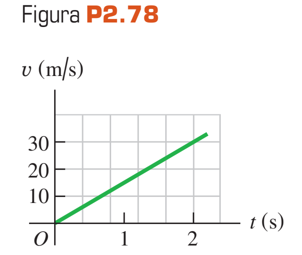
2.75 •• Se suelta una canica desde el borde de un tazón semiesférico cuyo diámetro es de 50.0 cm y rueda hasta subir sobre el borde opuesto en 10.0 s. Obtenga *a*) la rapidez media y *b*) la velocidad media de la canica.

2.76 •• **CALC** La velocidad medida de un objeto es $v_x(t) = \alpha - \beta t^2$, donde $\alpha = 4.00$ m/s y $\beta = 2.00$ m/s^3. En $t = 0$, el objeto está en $x = 0$. *a*) Calcule la posición y aceleración del objeto en función de t. *b*) ¿Qué desplazamiento positivo máximo tiene el objeto con respecto al origen?

2.77 •• **Rebasado.** El conductor de un automóvil desea rebasar un camión que viaja a una rapidez constante de 20.0 m/s (aproximadamente 45 mi/h). Inicialmente, el automóvil también viaja a 20.0 m/s y su parachoques delantero está 24.0 m atrás del parachoques trasero del camión. El automóvil adquiere una aceleración constante de 0.600 m/s^2 y regresa al carril del camión cuando su parachoques trasero está 26.0 m adelante del frente del camión. El automóvil tiene una longitud de 4.5 m, y el camión tiene una longitud de 21.0 m. *a*) ¿Cuánto tiempo necesita el automóvil para rebasar al camión? *b*) ¿Qué distancia recorre el automóvil en ese tiempo? *c*) ¿Qué rapidez final tiene el automóvil?

2.78 •• En el planeta X se deja caer una piedra de 25 kg a partir del reposo y se mide su rapidez en varios instantes. Luego, se usan los datos obtenidos para construir la gráfica de su rapidez v en función del tiempo t (figura P2.78). Con la información de la gráfica, conteste las siguientes preguntas: *a*) ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad en el planeta X? *b*) Un astronauta deja caer una pieza de su equipo, a partir del reposo, fuera del módulo de aterrizaje, 3.5 m arriba de la superficie del planeta X. ¿Cuánto tiempo tardará esta pieza en llegar al suelo y con qué rapidez llegará a él? *c*) ¿Con qué rapidez debe un astronauta lanzar un objeto verticalmente hacia arriba para alcanzar una altura de 18 m por arriba del punto de liberación, y cuánto tiempo le tomará alcanzar esa altura?

Figura **P2.78**



2.79 ••• **CALC** La aceleración de una partícula está dada por $a_x(t) = -2.00$ m/s^2 + (3.00 m/s^3)t. *a*) Encuentre la velocidad inicial v_{0x} tal que la partícula tenga la misma coordenada x en $t = 4.00$ s que en $t = 0$. *b*) ¿Cuál será la velocidad en $t = 4.00$ s?

2.80 • **Caída de un huevo.** Imagine que está en la azotea del edificio de física, a 46.0 m del suelo (figura P2.80). Su profesor de física, quien mide 1.80 m de estatura, camina junto al edificio a una rapidez constante de 1.20 m/s. Si usted quiere dejar caer un huevo sobre la cabeza de su profesor, ¿dónde deberá estar él cuando usted suelte el huevo? Suponga que el huevo está en caída libre.

Figura **P2.80**

46.0 m
$v = 1.20$ m/s
1.80 m

2.81 • En la Tierra un volcán puede expulsar rocas verticalmente hasta una altura máxima H. *a*) ¿A qué altura (en términos de H) llegarían estas rocas si un volcán en Marte las expulsara con la misma velocidad inicial? La aceleración debida a la gravedad en Marte es de 3.71 m/s^2, y se puede despreciar la resistencia del aire en ambos planetas. *b*) Si en la Tierra las rocas están en el aire un tiempo T, ¿por cuánto tiempo (en términos de T) estarán en el aire en Marte?

2.82 •• Un artista hace malabarismos con pelotas mientras realiza otras actividades. En un acto, arroja una pelota verticalmente hacia arriba y, mientras la pelota está en el aire, él corre de ida y vuelta hacia una mesa que está a 5.50 m de distancia a una rapidez constante de 2.50 m/s, regresando justo a tiempo para atrapar la pelota que cae. *a*) ¿Con qué rapidez inicial mínima debe lanzar la pelota hacia arriba para realizar dicha hazaña? *b*) ¿A qué altura respecto de su posición inicial está la pelota justo cuando él llega a la mesa?

2.83 • Los visitantes de un parque de diversiones observan a clavadistas lanzarse desde una plataforma de 21.3 m (70 ft) de altura sobre una alberca. Según el presentador, los clavadistas entran al agua con una rapidez de 25 m/s (56 mi/h). Puede ignorarse la resistencia del aire. *a*) ¿Es correcta la aseveración del presentador? *b*) ¿Para un clavadista es posible saltar directamente hacia arriba de la plataforma de manera que, eludiendo la plataforma al caer hacia la alberca, entre al agua a 25.0 m/s? Si es así, ¿qué rapidez inicial hacia arriba se requiere? ¿La rapidez inicial requerida es físicamente alcanzable?

2.84 ••• Una maceta con flores cae del borde de una ventana y pasa frente a la ventana de abajo. Se puede despreciar la resistencia del aire. La maceta tarda 0.420 s en pasar por esta ventana desde el borde superior hasta el inferior; la altura de la ventana es de 1.90 m. ¿A qué distancia debajo del punto desde el cual cayó la maceta se encuentra el borde superior de la ventana de abajo?

2.85 ••• **¡Cuidado abajo!** Sam lanza, a partir del reposo, una bala de 16 lb directamente hacia arriba, imprimiéndole una aceleración constante de 35.0 m/s^2 a lo largo de 64.0 cm, y soltándola a 2.20 m sobre el suelo. Puede despreciarse la resistencia del aire. *a*) ¿Qué rapidez tiene la bala cuando Sam la suelta? *b*) ¿Qué altura alcanza respecto del suelo? *c*) ¿Cuánto tiempo tiene Sam para retirarse del lugar antes de que la bala regrese a la altura de su cabeza, a 1.83 m sobre el suelo?

2.86 ••• **Un cohete de varias etapas.** Al encenderse la primera etapa de un cohete de dos etapas, este empieza a moverse en la plataforma de lanzamiento con una aceleración constante de 3.50 m/s^2 hacia arriba. A los 25.0 s después del lanzamiento, se enciende la segunda etapa durante 10.0 s, así que la velocidad del cohete es de 132.5 m/s hacia arriba, 35.0 s después del lanzamiento. Sin embargo, este impulso consume todo el combustible, de manera que luego de que la segunda etapa termina, la única fuerza que actúa sobre el cohete es la gravedad. Se desprecia la resistencia del aire. *a*) Obtenga la altura máxima que alcanza el cohete de dos etapas sobre la plataforma de lanzamiento. *b*) Una vez que termina la segunda etapa, ¿cuánto tiempo pasará antes de que el cohete caiga a la plataforma de lanzamiento? *c*) ¿Qué tan rápido se moverá el cohete de dos etapas justo al llegar a la plataforma?

2.87 •• **Malabarismo.** Un malabarista actúa en un recinto cuyo techo está 3.0 m arriba del nivel de sus manos. Lanza una pelota hacia arriba de modo que apenas llega al techo. *a*) ¿Qué velocidad inicial tiene la pelota? *b*) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al techo? En el instante en que la primera pelota está en el techo, el malabarista lanza una segunda pelota hacia arriba con dos terceras partes de la velocidad inicial de la primera. *c*) ¿Cuánto tiempo después de lanzada la segunda pelota se cruzan ambas pelotas en el aire? *d*) ¿A qué altura, respecto de las manos del malabarista, ocurre el cruce?

2.88 •• Un profesor de física que está en reposo, efectuando una demostración al aire libre, de repente pierde el equilibrio, por lo que cae de lo alto de un acantilado y simultáneamente grita "¡Auxilio!". Después de caer 3.0 s, escucha el eco de su grito proveniente del suelo del valle. La rapidez del sonido es de 340 m/s. *a*) ¿Qué altura tiene el acantilado? *b*) Si se desprecia la resistencia del aire, ¿con qué rapidez se estará moviendo el profesor justo antes de chocar contra el suelo? (Su rapidez real será menor que eso, debido a la resistencia del aire).

2.89 ••• Un helicóptero que lleva al doctor Malvado despega con aceleración constante hacia arriba de 5.0 m/s^2. El agente secreto Austin Powers se sube de un salto al helicóptero justo cuando este despega. Los dos hombres forcejean durante 10.0 s, después de lo cual Powers apaga el motor y se lanza desde el helicóptero. Suponga que el helicóptero está en caída libre después de que se apaga el motor y que la resistencia del aire es insignificante. *a*) ¿Qué altura máxima, respecto del suelo, alcanza el helicóptero? *b*) 7.0 s después de saltar del helicóptero, Powers enciende un cohete que trae sujeto a la espalda, lo que le permite tener una aceleración total constante hacia abajo con magnitud de 2.0 m/s^2. ¿A qué distancia sobre el suelo está Powers cuando el helicóptero se estrella contra el piso?

2.90 •• **Altura de acantilado.** Imagine que está escalando una montaña y que repentinamente se encuentra en el borde de un acantilado, envuelto en niebla. Para determinar la altura del acantilado, deja caer una piedra y 10.0 s después escucha el sonido que esta hace al golpear el fondo del acantilado. *a*) Sin tomar en cuenta la resistencia del aire, ¿qué altura tiene el acantilado si la rapidez del sonido es de 330 m/s? *b*) Suponga que se desprecia el tiempo que el sonido tarda en llegar a sus oídos. En ese caso, ¿habría sobrestimado o subestimado la altura del acantilado? Explique su razonamiento.

2.91 ••• **Lata que cae.** Un pintor está de pie en un andamio que sube con rapidez constante. Por descuido, empuja una lata de pintura, la cual cae del andamio cuando está a 15.0 m sobre el suelo. Usted está observando y usa su cronómetro para determinar que la lata tarda 3.25 s en llegar al suelo. Ignore la resistencia del aire. *a*) ¿Qué rapidez tiene la lata en el momento en que llega al suelo? *b*) Otro pintor está parado en una cornisa, y una lata está a 4.00 m arriba de él cuando esta se cae. Tiene reflejos felinos, y si la lata pasa frente a él, podrá atraparla. ¿Tiene la oportunidad de hacerlo?

2.92 •• Decidido a probar la ley de la gravedad por sí mismo, un estudiante se deja caer desde un rascacielos de 180 m de altura, cronómetro en mano, e inicia una caída libre (velocidad inicial cero). Cinco segundos después, llega Superman y se lanza de la azotea para salvarlo, con una rapidez inicial v_0 que imprimió a su cuerpo, empujándose hacia abajo desde el borde de la azotea con sus piernas de acero. Después, cae con la misma aceleración que cualquier cuerpo en caída libre. *a*) ¿Qué valor deberá tener v_0 para que Superman atrape al estudiante justo antes de llegar al suelo? *b*) Dibuje en una sola gráfica las posiciones de Superman y del estudiante en función del tiempo. La rapidez inicial de Superman tiene el valor calculado en el inciso *a*). *c*) Si la altura del rascacielos es menor que cierto valor mínimo, ni Superman podría salvar al estudiante antes de que llegue al suelo. ¿Cuál es esa altura mínima?

2.93 ••• Durante el lanzamiento, los cohetes a menudo desechan partes innecesarias. Cierto cohete parte del reposo en una plataforma de lanzamiento y acelera hacia arriba a 3.30 m/s^2 constantes. Cuando está a 235 m por arriba de la plataforma de lanzamiento, desecha un bote de combustible vacío simplemente desconectándolo. Una vez desconectado, la única fuerza que actúa sobre el bote es la gravedad (se puede ignorar la resistencia del aire). *a*) ¿Qué tan alto está el cohete cuando el bote llega a la plataforma, suponiendo que no cambia la aceleración del cohete? *b*) ¿Cuál es la distancia total que recorre el bote desde que se suelta hasta que choca contra la plataforma de lanzamiento?

2.94 •• Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde el suelo con rapidez v_0. En el mismo instante, una segunda pelota (que inicialmente está en reposo) se deja caer de una altura H directamente encima del punto de lanzamiento de la primera. No hay resistencia del aire. *a*) Calcule el tiempo en el que chocarán las pelotas. *b*) Obtenga el valor de H en términos de v_0 y g, de modo que, cuando choquen las pelotas, la primera esté en su punto más alto.

2.95 • **CALC** Dos automóviles, A y B, viajan en línea recta. La posición de A con respecto al punto de partida está dada, en función del tiempo, por $x_A(t) = \alpha t + \beta t^2$, con $\alpha = 2.60$ m/s y $\beta = 1.20$ m/s^2. La posición de B respecto del punto de partida es $x_B(t) = \gamma t^2 - \delta t^3$, con $\gamma = 2.80$ m/s^2 y $\delta = 0.20$ m/s^3. *a*) ¿Cuál automóvil se adelanta justo después de salir del punto de partida? *b*) ¿En qué instante(s) los dos automóviles están en el mismo punto? *c*) ¿En qué instante(s) la distancia entre A y B no aumenta ni disminuye? *d*) ¿En qué instante(s) A y B tienen la misma aceleración?

PROBLEMAS DE DESAFÍO

2.96 ••• En el salto vertical, un atleta se agazapa y salta hacia arriba tratando de alcanzar la mayor altura posible. Ni siquiera los campeones mundiales pasan mucho más de 1.00 s en el aire ("tiempo en suspensión"). Trate al atleta como partícula y sea $y_{máx}$ su altura máxima

respecto del suelo. Para explicar por qué parece estar suspendido en el aire, calcule la razón entre el tiempo que está sobre $y_{\text{máx}}/2$ y el tiempo que tarda en llegar del suelo a esa altura. Desprecie la resistencia del aire.

2.97 ••• **Tomar el autobús.** Una estudiante corre a más no poder para alcanzar su autobús, que está detenido en la parada, con una rapidez de 5.0 m/s. Cuando ella está aún a 40.0 m del autobús, este se pone en marcha con aceleración constante de 0.170 m/s^2. *a*) ¿Durante qué tiempo y qué distancia debe correr la estudiante a 5.0 m/s para alcanzar al autobús? *b*) Cuando lo hace, ¿qué rapidez tiene el autobús? *c*) Dibuje una gráfica *x-t* para el estudiante y para el autobús, donde $x = 0$ es la posición inicial del estudiante. *d*) Las ecuaciones que usó en el inciso *a*) para calcular *t* tienen una segunda solución, que corresponde a un instante posterior en que el estudiante y el autobús están otra vez en el mismo lugar si continúan sus respectivos desplazamientos. Explique el significado de esta otra solución. ¿Qué rapidez tiene el autobús en ese punto? *e*) Si la rapidez del estudiante fuera de 3.5 m/s, ¿alcanzaría al autobús? *f*) ¿Qué rapidez *mínima* requiere la estudiante para apenas alcanzar al autobús? ¿Durante qué tiempo y qué distancia deberá correr en tal caso?

2.98 ••• Un excursionista atento ve un peñasco que cae desde un risco lejano y observa que tarda 1.30 s en caer el último tercio de la distancia hacia el suelo. Puede despreciarse la resistencia del aire. *a*) ¿Qué altura tiene el risco en metros? *b*) Si en el inciso *a*) usted obtiene dos soluciones de una ecuación cuadrática y usa una para su respuesta, ¿qué representa la otra solución?

2.99 ••• Se lanza una pelota hacia arriba desde el borde de una azotea. Una segunda pelota se deja caer desde la azotea 1.00 s después. Desprecie la resistencia del aire. *a*) Si la altura del edificio es de 20.0 m, ¿cuál debe ser la rapidez inicial de la primera pelota para que las dos lleguen al suelo al mismo tiempo? En una sola gráfica dibuje la posición de cada pelota en función del tiempo, a partir del instante en que se lanzó la primera. Considere la misma situación, solo que ahora la rapidez inicial v_0 de la primera pelota es un dato, y la altura *h* del edificio es la incógnita. *b*) ¿Qué altura deberá tener el edificio para que las dos pelotas lleguen al suelo al mismo tiempo si v_0 es **i.** de 6.0 m/s y **ii.** de 9.5 m/s? *c*) Si v_0 es mayor que cierto valor $v_{\text{máx}}$, no existe una *h* tal que permita que ambas pelotas lleguen al piso simultáneamente. Obtenga $v_{\text{máx}}$ cuyo valor tiene una interpretación física sencilla. ¿Cuál es? *d*) Si v_0 es menor que cierto valor $v_{\text{mín}}$, no existe una *h* tal que permita que ambas pelotas lleguen al piso al mismo tiempo. Obtenga $v_{\text{mín}}$ cuyo valor también tiene una interpretación física sencilla. ¿Cuál es?

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

Sí. Aceleración se refiere a *cualquier* cambio de velocidad, ya sea que aumente o disminuya.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

2.1 Respuestas *a*): iv, i y iii (empatados), v, ii; *b*): i y iii; *c*): v. En *a*), la velocidad media es $v_{\text{med-}x} = \Delta x/\Delta t$. Para los cinco viajes, $\Delta t = 1$ h. Para los viajes individuales, tenemos **i.** $\Delta x = +50$ km, $v_{\text{med-}x} = +50$ km/h; **ii.** $\Delta x = -50$ km, $v_{\text{med-}x} = -50$ km/h; **iii.** $\Delta x = 60\text{ km} - 10\text{ km} = +50$ km, $v_{\text{med-}x} = +50$ km/h; **iv.** $\Delta x = +70$ km, $v_{\text{med-}x} = +70$ km/h; **v.** $\Delta x = -20\text{ km} + 20\text{ km} = 0$, $v_{\text{med-}x} = 0$. En *b*) ambos tienen $v_{\text{med-}x} = +50$ km/h.

2.2 Respuestas: *a*) *P*, *Q* y *S* (empatados), *R* La velocidad es ***b*)** positiva cuando la pendiente de la gráfica *x-t* es positiva (punto ***P***), ***c*)** negativa cuando la pendiente es negativa (punto ***R***), y ***d*)** cero cuando la pendiente es cero (puntos ***Q*** y ***S***). ***e*) *R*, *P*, *Q* y *S* (empatados)**. La rapidez es máxima cuando la pendiente de la gráfica *x-t* es más pronunciada (ya sea positiva o negativa), y cero cuando la pendiente es cero.

2.3 Respuestas: *a*) *S*, donde la gráfica *x-t* se curva (es cóncava) hacia arriba. ***b*) *Q***, donde la gráfica *x-t* se curva (es cóncava) hacia abajo. ***c*) *P* y *R***, donde la gráfica *x-t* es una línea recta (no se curva hacia arriba ni hacia abajo). ***d*)** En *P*, $a_x = 0$ (la velocidad **no cambia**); en *Q*, $a_x < 0$ (la velocidad **disminuye**, es decir, cambia de positiva a cero y de cero a negativa); en *R*, $a_x = 0$ (la velocidad **no cambia**); y en *S*, $a_x > 0$ (la velocidad **aumenta**, es decir, cambia de negativa a cero y de cero a positiva).

2.4 Respuesta: *b*) La aceleración del oficial de policía es constante, de manera que su gráfica v_x-*t* es una recta y su motocicleta se desplaza más rápido que el automóvil del conductor, cuando ambos vehículos se encuentran en $t = 10$ s.

2.5 Respuestas: *a*) iii. Use la ecuación (2.13) sustituyendo *x* por *y* y $a_y = g$; $v_y{}^2 = v_{0y}{}^2 - 2g(y - y_0)$. La altura inicial es $y_0 = 0$ y la velocidad a la altura máxima $y = h$ es $v_y = 0$, así que $0 = v_{0y}{}^2 - 2gh$ y $h = v_{0y}2/2g$. Si la velocidad inicial aumenta en un factor de 2, la altura máxima aumentará en un factor de $2^2 = 4$ y la pelota alcanzará la altura 4*h*. ***b*) v.** Utilice la ecuación (2.8) reemplazando *x* por *y* y $a_y = g$; $v_y = v_{0y} - gt$. La velocidad en la altura máxima es $v_y = 0$, así que $0 = v_{0y} - gt$ y $t = v_{0y}/g$. Si la velocidad inicial se incrementa en un factor de 2, el tiempo para llegar a la altura máxima se incrementa en un factor de 2 y se vuelve 2*t*.

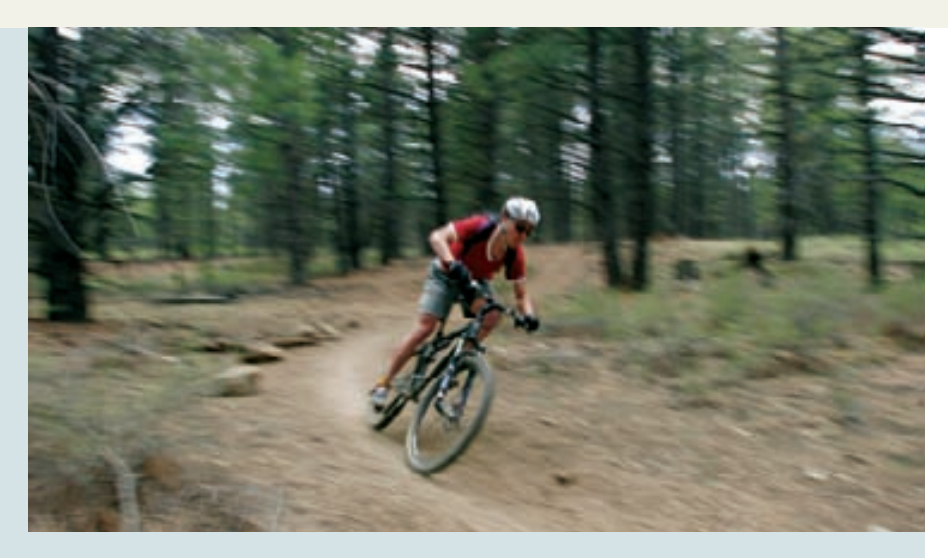
2.6 Respuesta: ii. La aceleración a_x es igual a la pendiente de la gráfica v_x-*t*. Si a_x aumenta, la pendiente de la gráfica v_x-*t* también se incrementa y la curva es cóncava hacia arriba.

Problema práctico

Respuesta: $h = 57.1$ m

MOVIMIENTO EN DOS O EN TRES DIMENSIONES





? Si un ciclista recorre una curva con rapidez constante, ¿está acelerando? Si es así, ¿en qué dirección acelera?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo representar la posición de un cuerpo, usando vectores, en dos o tres dimensiones.
- Cómo determinar el vector velocidad de un cuerpo conociendo su trayectoria.
- Cómo obtener el vector aceleración de un cuerpo, y por qué un cuerpo puede tener una aceleración aun cuando su rapidez sea constante.
- Cómo interpretar las componentes de la aceleración de un cuerpo paralela y perpendicular a su trayectoria.
- Cómo describir la trayectoria curva que sigue un proyectil.
- Las ideas clave detrás del movimiento en una trayectoria circular, con rapidez constante o variable.
- Cómo relacionar la velocidad de un cuerpo en movimiento visto desde dos marcos de referencia distintos.

¿Qué determina dónde cae una pelota de béisbol bateada? ¿Cómo se describe el movimiento de un carro de la montaña rusa en una curva, o el vuelo de un halcón que describe círculos? ¿Cuál golpea el suelo primero: una pelota de béisbol que simplemente se deja caer o una que se arroja horizontalmente?

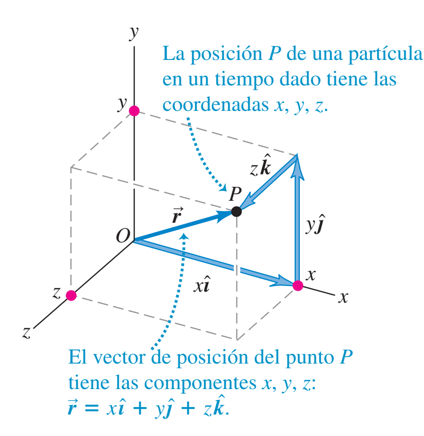
No podemos contestar estas preguntas usando las técnicas del capítulo 2, donde se consideró que las partículas se movían solo en línea recta. En lugar de ello, es necesario ampliar nuestras descripciones del movimiento a situaciones en dos y en tres dimensiones. Seguiremos empleando las cantidades vectoriales de desplazamiento, velocidad y aceleración; sin embargo, ahora no estarán a lo largo de una sola línea. Veremos que muchas clases de movimientos importantes se dan solo en dos dimensiones, es decir, en un *plano*, y pueden describirse con dos componentes de posición, velocidad y aceleración.

También necesitamos considerar cómo describen el movimiento de una partícula observadores diferentes que se mueven unos con respecto a otros. El concepto de *velocidad relativa* desempeñará un papel importante más adelante en este libro, cuando estudiemos colisiones, cuando exploremos los fenómenos electromagnéticos, y cuando presentemos la teoría especial de la relatividad de Einstein.

En este capítulo se conjunta el lenguaje de vectores que vimos en el capítulo 1 con el lenguaje de la cinemática del capítulo 2. Como antes, nos interesa describir el movimiento, no analizar sus causas. No obstante, el lenguaje que aprenderemos aquí será una herramienta esencial en capítulos posteriores, al estudiar la relación entre fuerza y movimiento.

3.1 Vectores de posición y velocidad

3.1 El vector de posición $\vec{r}$ del origen al punto P tiene componentes x, y y z. La trayectoria que sigue la partícula en el espacio es, en general, una curva (figura 3.2).



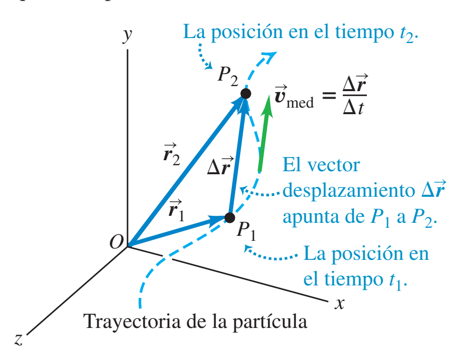
Para describir el *movimiento* de una partícula en el espacio, primero tenemos que describir *su posición*. Considere una partícula que está en el punto P en cierto instante. El **vector de posición** $\vec{r}$ de la partícula en ese instante es un vector que va del origen del sistema de coordenadas al punto P (figura 3.1). Las coordenadas cartesianas x, y y z de P son las componentes x, y y z del vector $\vec{r}$. Usando los vectores unitarios que presentamos en la sección 1.9, podemos escribir

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \qquad \text{(vector de posición)} \tag{3.1}$$

Durante un intervalo de tiempo Δt, la partícula se mueve de P_1, donde su vector de posición es $\vec{r}_1$, a P_2, donde su vector de posición es $\vec{r}_2$. El cambio de posición (el desplazamiento) durante este intervalo es $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}$. Definimos la **velocidad media** $\vec{v}_{med}$ durante este intervalo igual que en el capítulo 2 para movimiento rectilíneo, como el desplazamiento dividido entre el intervalo de tiempo:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \text{(vector velocidad media)} \tag{3.2}$$

3.2 La velocidad media $\vec{v}_{med}$ entre los puntos P_1 y P_2 tiene la misma dirección que el desplazamiento $\Delta\vec{r}$.



Dividir un vector entre un escalar es en realidad un caso especial de *multiplicación* de un vector por un escalar, descrito en la sección 1.7; la velocidad media $\vec{v}_{med}$ es igual al vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ multiplicado por $1/\Delta t$, el recíproco del intervalo de tiempo. Observe que la componente x de la ecuación (3.2) es $v_{med\text{-}x} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = \Delta x/\Delta t$. Esta es precisamente la ecuación (2.2), la expresión para la velocidad media que dedujimos en la sección 2.1 para el movimiento unidimensional.

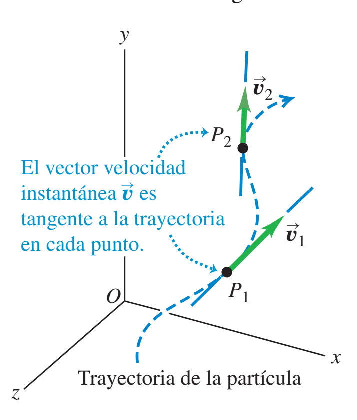
Aquí definimos la **velocidad instantánea** igual que en el capítulo 2: como el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo se aproxima a cero, y es la tasa instantánea de cambio de posición con el tiempo. La diferencia clave es que tanto la posición $\vec{r}$ como la velocidad instantánea $\vec{v}$ ahora son los vectores:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \text{(vector velocidad instantánea)} \tag{3.3}$$

La *magnitud* del vector $\vec{v}$ en cualquier instante es la *rapidez* v de la partícula en ese instante. La *dirección* de $\vec{v}$ en cualquier instante es la dirección en que la partícula se mueve en ese instante.

Observe que conforme $\Delta t \to 0$, los puntos P_1 y P_2 de la figura 3.2 se acercan cada vez más. En el límite, el vector $\Delta\vec{r}$ se vuelve tangente a la trayectoria. La dirección de $\Delta\vec{r}$ en este límite también es la dirección de la velocidad instantánea $\vec{v}$. Esto conduce a una conclusión importante: *En cualquier punto de la trayectoria, el vector velocidad instantánea es tangente a la trayectoria en ese punto* (figura 3.3).

3.3 Los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son las velocidades instantáneas en los puntos P_1 y P_2, como se muestra en la figura 3.2.



A menudo es más sencillo calcular el vector velocidad instantánea empleando componentes. Durante cualquier desplazamiento $\Delta\vec{r}$, los cambios Δx, Δy y Δz en las tres coordenadas de la partícula son las *componentes* de $\Delta\vec{r}$. Por lo tanto, las componentes v_x, v_y y v_z de la velocidad instantánea $\vec{v}$ son simplemente las derivadas respecto al tiempo de las coordenadas x, y y z. Es decir,

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad \text{(componentes de la velocidad instantánea)} \tag{3.4}$$

La componente x de $\vec{v}$ es $v_x = dx/dt$, que es la ecuación (2.3): la expresión para la velocidad instantánea en movimiento rectilíneo que obtuvimos en la sección 2.2. De manera que la ecuación (3.4) es una ampliación directa de la idea de velocidad instantánea para el movimiento en tres dimensiones.

También podemos obtener la ecuación (3.4) derivando la ecuación (3.1). Los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ tienen magnitud y dirección constantes, de modo que sus derivadas son iguales a cero; entonces,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \qquad (3.5)$$

Esto muestra otra vez que las componentes de $\vec{v}$ son dx/dt, dy/dt y dz/dt.

La magnitud del vector velocidad instantánea $\vec{v}$ es decir, la rapidez, se obtiene en términos de las componentes v_x, v_y y v_z aplicando el teorema de Pitágoras:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad (3.6)$$

La figura 3.4 muestra la situación cuando la partícula se mueve en el plano xy. En este caso, z y v_z son iguales a cero, y la rapidez (la magnitud de $\vec{v}$) es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

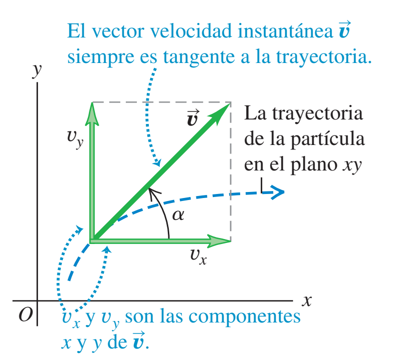
y la dirección de la velocidad instantánea $\vec{v}$ está dada por el ángulo α (la letra griega alfa) de la figura. Vemos que

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \qquad (3.7)$$

(Siempre se usan letras griegas para los ángulos. Se utiliza α para la dirección del vector velocidad instantánea con la finalidad de evitar confusiones con la dirección θ del vector de *posición* de la partícula).

El vector velocidad instantánea suele ser más interesante y útil que el de la velocidad media. De ahora en adelante, al usar el término "velocidad", siempre nos referiremos al vector velocidad instantánea $\vec{v}$ (no al vector velocidad media). Por lo regular, ni siquiera nos molestaremos en llamar vector a $\vec{v}$; el lector debe recordar que la velocidad es una cantidad vectorial con magnitud y dirección.

3.4 Las dos componentes de velocidad para movimiento en el plano xy.





Ejemplo 3.1 Cálculo de la velocidad media e instantánea

Un vehículo robot está explorando la superficie de Marte. El módulo de descenso estacionario es el origen de las coordenadas; y la superficie marciana circundante está en el plano xy. El vehículo, que representamos como un punto, tiene coordenadas x y y que varían con el tiempo:

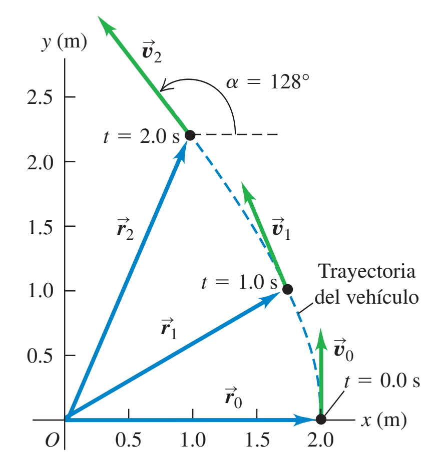
$$x = 2.0 \text{ m} - (0.25 \text{ m/s}^2)t^2$$
$$y = (1.0 \text{ m/s})t + (0.025 \text{ m/s}^3)t^3$$

a) Obtenga las coordenadas del vehículo y su distancia con respecto al módulo en $t = 2.0$ s. *b*) Obtenga los vectores desplazamiento y velocidad media del vehículo entre $t = 0.0$ s y $t = 2.0$ s. *c*) Deduzca una expresión general para el vector velocidad instantánea $\vec{v}$ del vehículo. Exprese $\vec{v}$ en $t = 2.0$ s en forma de componentes y en términos de magnitud y dirección.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema implica movimiento en dos dimensiones, por lo que debemos usar las ecuaciones vectoriales obtenidas en esta sección. En la figura 3.5 se muestra la trayectoria del vehículo (línea punteada). Usaremos la ecuación (3.1) para la posición $\vec{r}$, la expresión $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ para el desplazamiento, la ecuación (3.2) para la velocidad media y las ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7) para

3.5 En $t = 0.0$ s el vehículo tiene el vector de posición $\vec{r}_0$ y el vector velocidad instantánea es $\vec{v}_0$. Asimismo, $\vec{r}_1$ y $\vec{v}_1$son los vectores en $t = 1.0$ s; $\vec{r}_2$ y $\vec{v}_2$ son los vectores en $t = 2.0$ s.



Continúa

la velocidad instantánea y su dirección y magnitud. Las incógnitas están definidas en el enunciado del problema.

EJECUTAR: *a*) En el instante $t = 2.0$ s las coordenadas del vehículo son

$$x = 2.0\text{ m} - (0.25\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s})^2 = 1.0\text{ m}$$
$$y = (1.0\text{ m/s})(2.0\text{ s}) + (0.025\text{ m/s}^3)(2.0\text{ s})^3 = 2.2\text{ m}$$

La distancia del vehículo al origen en este instante es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1.0\text{ m})^2 + (2.2\text{ m})^2} = 2.4\text{ m}$$

b) Para obtener el desplazamiento y la velocidad media durante el intervalo dado, primero expresamos el vector de posición $\vec{r}$ en función del tiempo *t*. De acuerdo con la ecuación (3.1), este es:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}\\ &= [2.0\text{ m} - (0.25\text{ m/s}^2)t^2]\hat{\imath}\\ &\quad + [(1.0\text{ m/s})t + (0.025\text{ m/s}^3)t^3]\hat{\jmath}\end{aligned}$$

En el instante $t = 0.0$ s el vector de posición $\vec{r}_0$ es

$$\vec{r}_0 = (2.0\text{ m})\hat{\imath} + (0.0\text{ m})\hat{\jmath}$$

Del inciso *a*) sabemos que, en $t = 2.0$ s, el vector de posición $\vec{r}_2$ es

$$\vec{r}_2 = (1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath}$$

Por lo tanto, el desplazamiento entre $t = 0.0$ s y $t = 2.0$ s es

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 &= (1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath} - (2.0\text{ m})\hat{\imath}\\ &= (-1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Durante este intervalo el vehículo se desplazó 1.0 m en la dirección negativa de *x* y 2.2 m en la dirección positiva de *y*. De acuerdo con la ecuación (3.2), la velocidad media en este intervalo es el desplazamiento dividido entre el tiempo transcurrido:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} &= \frac{(-1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath}}{2.0\text{ s} - 0.0\text{ s}}\\ &= (-0.50\text{ m/s})\hat{\imath} + (1.1\text{ m/s})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Las componentes de esta velocidad media son $v_{\text{med-}x} = -0.50$ m/s y $v_{\text{med-}y} = 1.1$ m/s.

c) De acuerdo con la ecuación (3.4), las componentes de la velocidad *instantánea* son las derivadas de las coordenadas respecto a *t*:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-0.25\text{ m/s}^2)(2t)$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1.0\text{ m/s} + (0.025\text{ m/s}^3)(3t^2)$$

Así, el vector velocidad instantánea es

$$\begin{aligned}\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} &= (-0.50\text{ m/s}^2)t\hat{\imath}\\ &\quad + [1.0\text{ m/s} + (0.075\text{ m/s}^3)t^2]\hat{\jmath}\end{aligned}$$

En el tiempo $t = 2.0$ s, las componentes del vector velocidad $\vec{v}_2$ son

$$v_{2x} = (-0.50\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s}) = -1.0\text{ m/s}$$
$$v_{2y} = 1.0\text{ m/s} + (0.075\text{ m/s}^3)(2.0\text{ s})^2 = 1.3\text{ m/s}$$

La magnitud de la velocidad instantánea (es decir, la rapidez) en $t = 2.0$ s es

$$\begin{aligned}v_2 &= \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{(-1.0\text{ m/s})^2 + (1.3\text{ m/s})^2}\\ &= 1.6\text{ m/s}\end{aligned}$$

La figura 3.5 muestra la dirección del vector velocidad $\vec{v}_2$, el cual tiene un ángulo α entre 90° y 180° con respecto al eje positivo *x*. De la ecuación (3.7) tenemos

$$\arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{1.3\text{ m/s}}{-1.0\text{ m/s}} = -52°$$

El ángulo es menor que 180°; de manera que el valor correcto del ángulo es $\alpha = 180° - 52° = 128°$, o 38° al oeste del norte.

EVALUAR: Compare las componentes de la velocidad *media* que obtuvimos en el inciso *b*) para el intervalo de $t = 0.0$ s a $t = 2.0$ s ($v_{\text{med-}x} = -0.50$ m/s, $v_{\text{med-}y} = 1.1$ m/s) con las componentes de la velocidad *instantánea* en $t = 2.0$ s que obtuvimos en el inciso *c*) ($v_{2x} = -1.0$ m/s, $v_{2y} = 1.3$ m/s). La comparación indica que, al igual que sucede en una sola dimensión, el vector velocidad media $\vec{v}_{\text{med}}$ durante un intervalo, en general, *no* es igual a la velocidad instantánea $\vec{v}$ al final del intervalo (véase el ejemplo 2.1).

La figura 3.5 muestra los vectores de posición $\vec{r}$ y los vectores velocidad instantánea en $t = 0.0$ s, 1.0 s y 2.0 s. (Se invita al lector a calcular estas cantidades en $t = 0.0$ s y $t = 1.0$ s). Observe que $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria en todos los puntos. La magnitud de $\vec{v}$ aumenta conforme el vehículo avanza, lo que indica que su rapidez está aumentando.

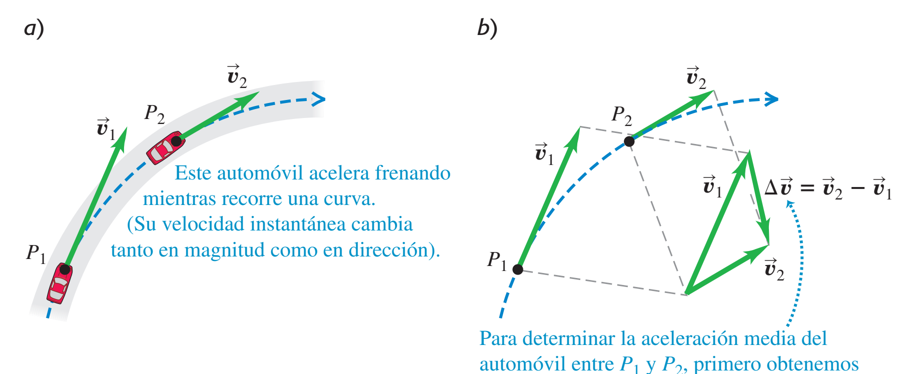
Evalúe su comprensión de la sección 3.1 ¿En cuál de las siguientes situaciones el vector velocidad media $\vec{v}_{\text{med}}$ en un intervalo *sería* igual a la velocidad instantánea $\vec{v}$ al final del intervalo? **i.** Un cuerpo que se mueve en una trayectoria curva a rapidez constante; **ii.** un cuerpo que se mueve en una trayectoria curva y aumenta su rapidez; **iii.** un cuerpo que se mueve en línea recta a rapidez constante; **iv.** un cuerpo que se mueve en línea recta y aumenta su rapidez.

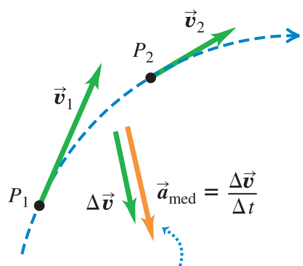
3.2 El vector aceleración

Consideremos ahora la *aceleración* de una partícula que se mueve en el espacio. Al igual que en el movimiento rectilíneo, la aceleración describe cómo cambia la velocidad de la partícula; pero como ahora tratamos la velocidad como un vector, la aceleración describirá los cambios *tanto* en la magnitud de la velocidad (es decir, la rapidez) *como* en la dirección de la velocidad (esto es, la dirección en que se mueve la partícula).

En la figura 3.6*a*, un automóvil (tratado como partícula) se desplaza en una trayectoria curva. Los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ representan las velocidades instantáneas del auto en

3.6 *a*) Un automóvil se mueve a lo largo de una curva de P_1 a P_2. *b*) Cómo obtener $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ mediante resta de vectores. *c*) El vector $\vec{a}_{med} = \Delta\vec{v}/\Delta t$ representa la aceleración media entre P_1 y P_2.





el instante t_1, cuando el automóvil está en el punto P_1, y en t_2 cuando se encuentra en el punto P_2. Las dos velocidades pueden diferir tanto en magnitud como en dirección. Durante el intervalo de t_1 a t_2, el *cambio vectorial de velocidad* es $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}$, de modo que $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$ (figura 3.6*b*). Definimos la **aceleración media** $\vec{a}_{med}$ del automóvil en este intervalo como el cambio de velocidad dividido entre el intervalo $t_2 - t_1 = \Delta t$:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad \text{(vector aceleración media)} \qquad (3.8)$$



La aceleración media es una cantidad *vectorial* en la misma dirección que el vector $\Delta\vec{v}$ (figura 3.6*c*). La componente *x* de la ecuación (3.8) es $a_{med\text{-}x} = (v_{2x} - v_{1x})/(t_2 - t_1) = \Delta v_x/\Delta t$, que es exactamente la ecuación (2.4) para la aceleración media en movimiento rectilíneo.

Al igual que en el capítulo 2, definimos la **aceleración instantánea** $\vec{a}$ (una cantidad *vectorial*) en el punto P_1 como el límite de la aceleración media cuando el punto P_2 se acerca a P_1, de modo que $\Delta\vec{v}$ y Δt se acercan a cero (figura 3.7). La aceleración instantánea también es igual a la tasa instantánea de cambio de velocidad con el tiempo:

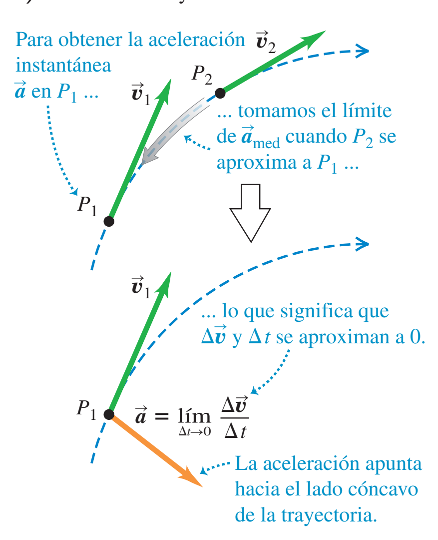
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{(vector aceleración instantánea)} \qquad (3.9)$$

El vector velocidad $\vec{v}$, como vimos, es tangente a la trayectoria de la partícula. No obstante, el vector aceleración instantánea $\vec{a}$, *no* tiene que ser tangente a la trayectoria. La figura 3.7*a* muestra que si la trayectoria es curva, $\vec{a}$ apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria, es decir, hacia el interior de la curva descrita por la partícula. La aceleración es tangente a la trayectoria solo si la partícula se mueve en línea recta (figura 3.7*b*).

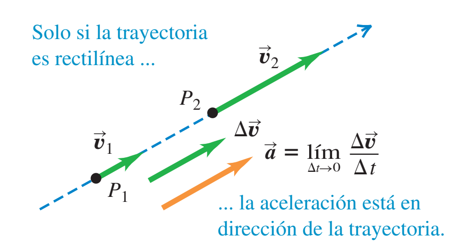
CUIDADO **Cualquier partícula que sigue una trayectoria curva está acelerando** Cuando una partícula sigue una trayectoria curva, su aceleración siempre es distinta de cero, aun si se mueve con rapidez constante. Quizás esta conclusión es contraria a la intuición, pero más bien va contra el uso cotidiano de la palabra "aceleración" para indicar que la velocidad aumenta. La definición más precisa de la ecuación (3.9) indica que la aceleración es diferente de cero cuando el vector velocidad cambia de cualquier forma, ya sea en su magnitud, dirección o en ambas.

3.7 *a*) Aceleración instantánea $\vec{a}$ en el punto P_1 de la figura 3.6. *b*) Aceleración instantánea para movimiento rectilíneo.

a) Aceleración: trayectoria curva

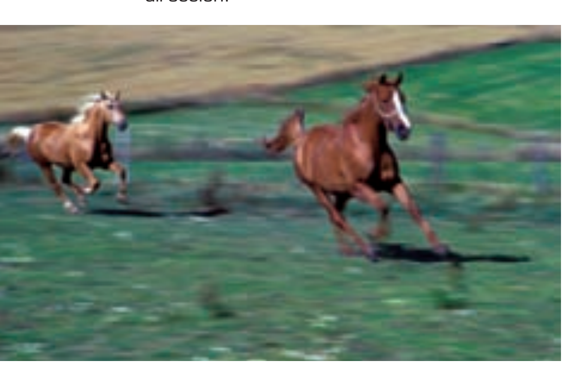


b) Aceleración: trayectoria en línea recta



Para convencerse de que una partícula no tiene aceleración cero cuando se mueve en una trayectoria curva con rapidez constante, piense en lo que siente cuando viaja en automóvil. Si el auto acelera, usted tiende a moverse en dirección

Aplicación Caballos en una trayectoria curva
Al inclinarse y al golpear el suelo con sus cascos a cierto ángulo, estos caballos adquieren la aceleración lateral necesaria para realizar un cambio repentino de dirección.



opuesta a la aceleración del vehículo. (Veremos por qué en el capítulo 4). Así, tendemos a movernos hacia atrás cuando el automóvil acelera hacia adelante (aumenta su velocidad), y hacia el frente cuando el automóvil acelera hacia atrás (es decir, cuando frena). Si el automóvil da vuelta en un camino horizontal, tendemos a deslizarnos hacia afuera de la curva; por lo tanto, el auto tiene una aceleración hacia adentro de la curva.

Normalmente nos interesará la aceleración instantánea, no la media. A partir de ahora, usaremos el término "aceleración" para referirnos al vector aceleración instantánea $\vec{a}$.

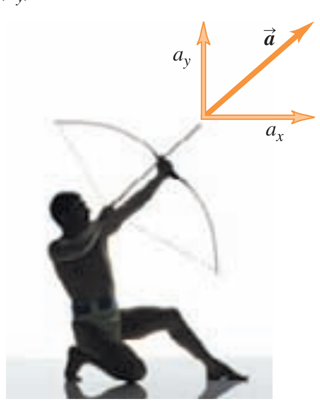
Cada componente del vector aceleración es la derivada de la componente correspondiente de la velocidad:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} \qquad \text{(componentes de la aceleración instantánea)} \tag{3.10}$$

En términos de vectores unitarios,

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} \tag{3.11}$$

3.8 Cuando se dispara la flecha, su vector aceleración tiene tanto una componente horizontal (a_x) como una componente vertical (a_y).



La componente x de las ecuaciones (3.10) y (3.11), $a_x = dv_x/dt$, es la expresión de la sección 2.3 para la aceleración instantánea en una dimensión, ecuación (2.5). La figura 3.8 muestra un ejemplo de vector aceleración que tiene componentes tanto x como y.

Como cada componente de velocidad es la derivada de la coordenada correspondiente, expresamos las componentes a_x, a_y y a_z del vector aceleración $\vec{a}$ como

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{3.12}$$

y al vector aceleración $\vec{a}$ como

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \tag{3.13}$$

Ejemplo 3.2 Cálculo de la aceleración media e instantánea



Veamos otra vez los movimientos del vehículo robot del ejemplo 3.1. *a*) Obtenga las componentes de la aceleración media de $t = 0.0$ s a $t = 2.0$ s. *b*) Determine la aceleración instantánea en $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En el ejemplo 3.1, obtuvimos las componentes de la velocidad instantánea del vehículo en el tiempo t:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-0.25\ \text{m/s}^2)(2t) = (-0.50\ \text{m/s}^2)t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1.0\ \text{m/s} + (0.025\ \text{m/s}^3)(3t^2)$$
$$= 1.0\ \text{m/s} + (0.075\ \text{m/s}^3)t^2$$

Utilizaremos las relaciones vectoriales entre velocidad, aceleración media y aceleración instantánea. En el inciso *a*), determinamos los valores de v_x y v_y al principio y al final del intervalo, y después usamos la ecuación (3.8) para calcular las componentes de la aceleración media. En el inciso *b*) obtuvimos las expresiones de las componentes de la aceleración instantánea en cualquier tiempo t derivando las componentes de la velocidad respecto al tiempo, como en las ecuaciones (3.10).

EJECUTAR: *a*) En el ejemplo 3.1 vimos que para $t = 0.0$ s las componentes de velocidad son

$$v_x = 0.0\ \text{m/s} \qquad v_y = 1.0\ \text{m/s}$$

a que en $t = 2.00$ s las componentes son

$$v_x = -1.0\ \text{m/s} \qquad v_y = 1.3\ \text{m/s}$$

Así, las componentes de la aceleración media en el intervalo de $t = 0.0$ s a $t = 2.0$ s son

$$a_{\text{med-}x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{-1.0\ \text{m/s} - 0.0\ \text{m/s}}{2.0\ \text{s} - 0.0\ \text{s}} = -0.50\ \text{m/s}^2$$

$$a_{\text{med-}y} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{1.3\ \text{m/s} - 1.0\ \text{m/s}}{2.0\ \text{s} - 0.0\ \text{s}} = 0.15\ \text{m/s}^2$$

b) Con las ecuaciones (3.10), obtenemos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -0.50 \text{ m/s}^2 \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = (0.075 \text{ m/s}^3)(2t)$$

De modo que el vector aceleración instantánea $\vec{a}$ en el tiempo t es

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} = (-0.50 \text{ m/s}^2)\hat{\imath} + (0.15 \text{ m/s}^3)t\hat{\jmath}$$

En el instante $t = 2.0$ s, las componentes de la aceleración y el vector aceleración son

$$a_x = -0.50 \text{ m/s}^2 \qquad a_y = (0.15 \text{ m/s}^3)(2.0 \text{ s}) = 0.30 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = (-0.50 \text{ m/s}^2)\hat{\imath} + (0.30 \text{ m/s}^2)\hat{\jmath}$$

La magnitud de la aceleración en este instante es

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$= \sqrt{(-0.50 \text{ m/s}^2)^2 + (0.30 \text{ m/s}^2)^2} = 0.58 \text{ m/s}^2$$

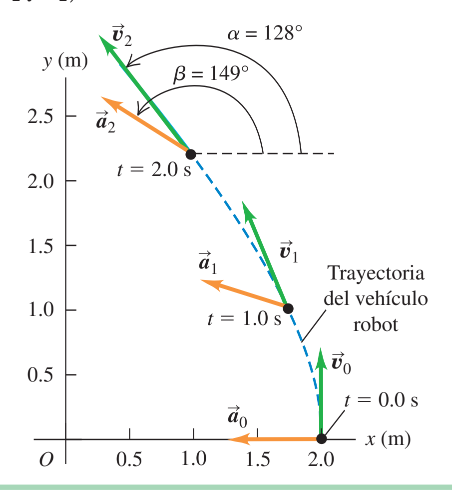
Un diagrama de este vector (figura 3.9) muestra que el ángulo β de la dirección de $\vec{a}$ con respecto al eje x positivo está entre 90° y 180°. Con la ecuación (3.7), tenemos

$$\arctan\frac{a_y}{a_x} = \arctan\frac{0.30 \text{ m/s}^2}{-0.50 \text{ m/s}^2} = -31°$$

Así que $\beta = 180° + (-31°) = 149°$.

EVALUAR: La figura 3.9 muestra la trayectoria y los vectores velocidad y aceleración del vehículo en $t = 0.0$ s, 1.0 s y 2.0 s. (Se invita al lector a utilizar los resultados del inciso *b*) para calcular la aceleración instantánea en $t = 0.0$ s y $t = 1.0$ s). Observe que $\vec{v}$ y $\vec{a}$ *no* están en la misma dirección en ninguno de estos momentos. El vector velocidad $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria en cada punto (como siempre), y el de aceleración $\vec{a}$ apunta hacia el lado cóncavo de esta.

3.9 Trayectoria del vehículo robot que muestra la velocidad y aceleración en $t = 0.0$ s ($\vec{v}_0$ y $\vec{a}_0$), $t = 1.0$ s ($\vec{v}_1$ y $\vec{a}_1$), y $t = 2.0$ s ($\vec{v}_2$ y $\vec{a}_2$).



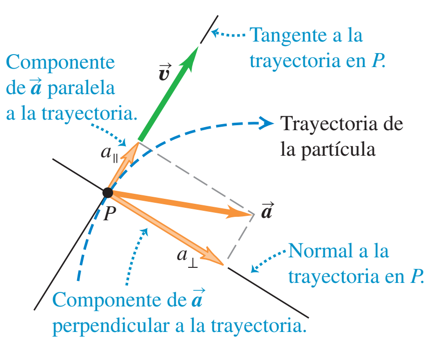
Componentes perpendicular y paralela de la aceleración

Las ecuaciones (3.10) nos hablan acerca de las componentes del vector $\vec{a}$ aceleración instantánea de una partícula a lo largo de los ejes x, y y z. Otra manera útil de visualizar $\vec{a}$ es en términos de su componente *paralela* a la trayectoria de la partícula, es decir, paralela a la velocidad, y su componente *perpendicular* a la trayectoria, y por lo tanto, perpendicular a la velocidad (figura 3.10). Esto es porque la componente paralela $a_\parallel$ nos habla acerca de los cambios en la *rapidez* de la partícula; mientras que la componente perpendicular $a_\perp$ nos indica los cambios en la *dirección del movimiento* de la partícula. Para ver por qué las componentes paralela y perpendicular de $\vec{a}$ tienen tales propiedades, consideremos dos casos especiales.

En la figura 3.11*a*, el vector aceleración tiene la misma dirección que la velocidad $\vec{v}_1$, de manera que $\vec{a}$ tiene solo una componente paralela $a_\parallel$ (es decir, $a_\perp = 0$). El cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$ en un intervalo pequeño Δt tiene la misma dirección que $\vec{a}$ y, por lo tanto, que $\vec{v}_1$. La velocidad $\vec{v}_2$ al final de Δt está en la misma dirección que $\vec{v}_1$ pero tiene mayor magnitud. Es decir, durante el intervalo Δt la partícula de la figura 3.11*a* se movió en línea recta con rapidez creciente (compare con la figura 3.7*b*).

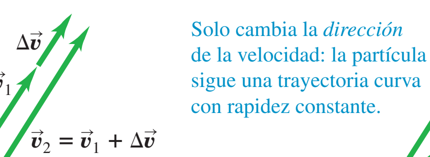
En la figura 3.11*b*, la aceleración es *perpendicular* a la velocidad, de manera que $\vec{a}$ tiene solo una componente perpendicular $a_\perp$ (es decir, $a_\parallel = 0$). En un intervalo

3.10 La aceleración puede descomponerse en una componente $a_\parallel$ paralela a la trayectoria (es decir, a lo largo de la tangente a la trayectoria) y una componente $a_\perp$ perpendicular a la trayectoria (es decir, a lo largo de la normal a la trayectoria).



3.11 El efecto de la aceleración con dirección *a*) paralela y *b*) perpendicular a la velocidad de la partícula.

a) Aceleración paralela a la velocidad:



b) Aceleración perpendicular a la velocidad:

Solo cambia la *dirección* de la velocidad: la partícula sigue una trayectoria curva con rapidez constante.

$\vec{v}_1$ $\Delta\vec{v}$ ϕ $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$ $\vec{a}$

pequeño Δt, el cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$ es muy cercanamente perpendicular a $\vec{v}_1$, por lo que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ tienen direcciones diferentes. Al aproximarse el intervalo Δt a cero, el ángulo ϕ en la figura también se acerca a cero, $\Delta\vec{v}$ se vuelve perpendicular *tanto* a $\vec{v}_1$ *como* a $\vec{v}_2$, y $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ tienen la misma magnitud. Dicho de otro modo, la rapidez de la partícula no cambia, pero la dirección del movimiento se modifica y la trayectoria de la partícula se curva.

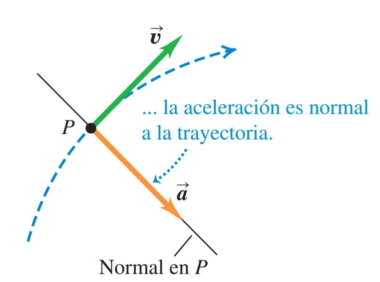
En el caso más general, la aceleración $\vec{a}$ tiene componentes *tanto* paralela *como* perpendicular a la velocidad $\vec{v}$, como en la figura 3.10. Entonces, cambiarán la rapidez de la partícula (descrita por la componente paralela $a_{\parallel}$) *y* su dirección (descrita por la componente perpendicular $a_{\perp}$) por lo que seguirá una trayectoria curva.

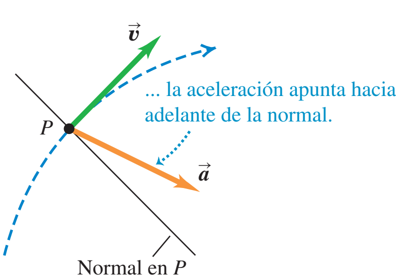
La figura 3.12 muestra una partícula que se mueve sobre una trayectoria curva en tres situaciones distintas: rapidez constante, creciente y decreciente. Si la rapidez es constante, $\vec{a}$ es perpendicular, o *normal*, a la trayectoria y a $\vec{v}$ y apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria (figura 3.12*a*). Si la rapidez aumenta, todavía hay una componente perpendicular de $\vec{a}$, pero también una paralela con la misma dirección que $\vec{v}$ (figura 3.12*b*). Entonces $\vec{a}$ apunta hacia adelante de la normal a la trayectoria (como en el ejemplo 3.2). Si la rapidez disminuye, la componente paralela tiene dirección opuesta a $\vec{v}$, y $\vec{a}$ apunta hacia atrás de la normal a la trayectoria (figura 3.12*c*; compare con la figura 3.7*a*). Usaremos otra vez estas ideas en la sección 3.4 al estudiar el caso especial de movimiento en un círculo.

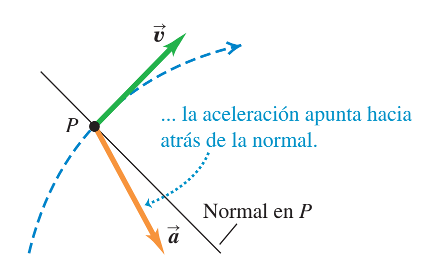


PhET: Maze Game

3.12 Vectores de velocidad y aceleración de una partícula que pasa por un punto P en una trayectoria curva con rapidez *a*) constante, *b*) creciente y *c*) decreciente.







Ejemplo 3.3 Cálculo de las componentes paralela y perpendicular de la aceleración



Para el vehículo de los ejemplos 3.1 y 3.2, obtenga las componentes paralela y perpendicular de la aceleración en $t = 2.0$ s.

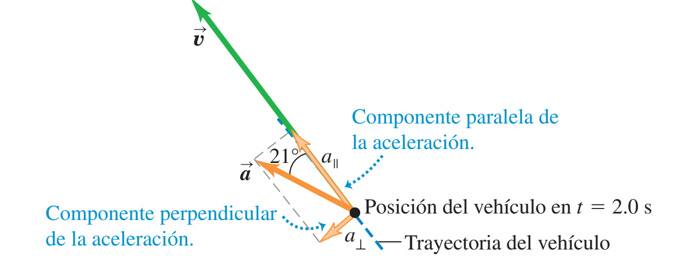
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Queremos obtener las componentes del vector aceleración $\vec{a}$ que sean paralela y perpendicular al vector velocidad $\vec{v}$. En los ejemplos 3.1 y 3.2 obtuvimos las direcciones de $\vec{v}$ y $\vec{a}$ respectivamente; la figura 3.9 muestra los resultados. Con estas direcciones podemos determinar el ángulo entre los dos vectores y las componentes de $\vec{a}$ con respecto a la dirección de $\vec{v}$.

EJECUTAR: En el ejemplo 3.2 vimos que en $t = 2.0$ s la partícula tiene una aceleración de magnitud 0.58 m/s^2 con un ángulo de 149° con respecto al eje $+x$. Por el ejemplo 3.1, sabemos que en ese instante el vector velocidad tiene un ángulo de 128° con respecto al eje $+x$. Por lo tanto, el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{v}$ es 149° − 128° = 21° (figura 3.13). De modo que las componentes de aceleración paralela y perpendicular a $\vec{v}$ son

$$a_{\parallel} = a \cos 21° = (0.58 \text{ m/s}^2)\cos 21° = 0.54 \text{ m/s}^2$$
$$a_{\perp} = a \operatorname{sen} 21° = (0.58 \text{ m/s}^2)\operatorname{sen} 21° = 0.21 \text{ m/s}^2$$

3.13 Componentes paralela y perpendicular de la aceleración del vehículo en $t = 2.0$ s.



EVALUAR: La componente paralela $a_{\parallel}$ es positiva (tiene la misma dirección que $\vec{v}$), lo cual indica que la rapidez aumenta en ese instante. El valor de $a_{\parallel} = +0.54$ m/s^2 significa que la rapidez está aumentando en ese instante a una tasa de 0.54 m/s por segundo. La componente perpendicular $a_{\perp}$ no es cero, lo que significa que en ese instante el vehículo está dando vuelta; es decir, el vehículo cambia de dirección y sigue una trayectoria curva.



Ejemplo conceptual 3.4 Aceleración de un esquiador

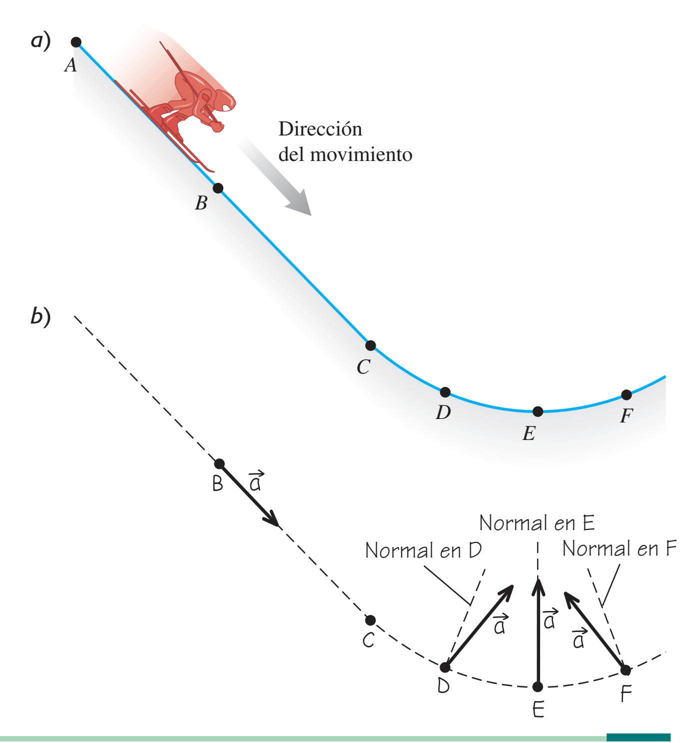
Un esquiador se desplaza sobre una rampa de salto (figura 3.14*a*). La rampa es recta entre *A* y *C*, y curva a partir de *C*. La rapidez del esquiador aumenta al moverse pendiente abajo del punto *A* al punto *E*, donde su rapidez es máxima, disminuyendo a partir de ahí. Dibuje la dirección del vector aceleración en los puntos *B*, *D*, *E* y *F*.

SOLUCIÓN

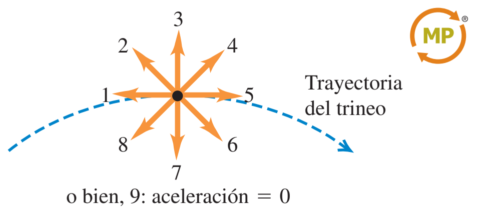
La figura 3.14*b* muestra la solución. En el punto *B*, el esquiador se desplaza en línea recta con rapidez creciente, así que su aceleración apunta cuesta abajo, en la misma dirección que su velocidad. En los puntos *D*, *E* y *F*, el esquiador sigue una trayectoria curva, así que su aceleración tiene una componente perpendicular a la trayectoria (hacia el lado cóncavo de la misma) en cada uno de estos puntos. En el punto *D* también existe una componente de la aceleración en la dirección del movimiento porque su rapidez aún va en aumento. Por lo tanto, el vector aceleración apunta *adelante* de la normal a su trayectoria en el punto *D*, como se muestra en la figura 3.14*b*. La rapidez del esquiador no cambia instantáneamente en *E*; la rapidez es máxima en este punto, así que su derivada es cero. Por lo tanto, no hay componente paralela de $\vec{a}$, y la aceleración es perpendicular al movimiento. En el punto *F* la aceleración tiene una componente *opuesta a* la dirección de su movimiento porque la rapidez está disminuyendo. De manera que el vector aceleración apunta *hacia atrás* de la normal a la trayectoria.

En la siguiente sección examinaremos la aceleración del esquiador después de salir de la rampa.

3.14 *a*) La trayectoria del esquiador. *b*) Nuestra solución.



Evalúe su comprensión de la sección 3.2 Un trineo viaja por la cima de una colina cubierta de nieve. El trineo disminuye su rapidez conforme asciende por un lado de la colina y la aumenta cuando desciende por el otro lado. ¿Cuál de los vectores (1 a 9) en la figura muestra correctamente la dirección de la aceleración del trineo en la cima? (Considere el 9 como la aceleración cero). ❙



MP

3.3 Movimiento de proyectiles



Video Tutor Demo

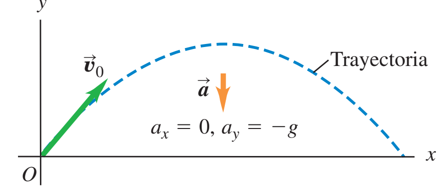
Un **proyectil** es un cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada completamente por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire. Una pelota bateada, un balón de fútbol lanzado, un paquete que se deja caer desde un avión y una bala disparada por un rifle son proyectiles. El camino que sigue un proyectil se conoce como su **trayectoria**.

Para analizar este tipo de movimiento tan común, partiremos de un modelo idealizado que representa el proyectil como una partícula con aceleración constante (debida a la gravedad) tanto en magnitud como en dirección. Se ignoran los efectos de la resistencia del aire, así como la curvatura y rotación de la Tierra. Como todos los modelos, este tiene limitaciones. La curvatura de la Tierra debe considerarse en el vuelo de misiles de largo alcance; asimismo, la resistencia del aire es de importancia vital para un paracaidista. No obstante, podemos aprender mucho analizando este modelo sencillo. En el resto del capítulo, la frase "movimiento de proyectil" implicará que se desprecia la resistencia del aire. En el capítulo 5 veremos qué sucede cuando la resistencia no puede ignorarse.

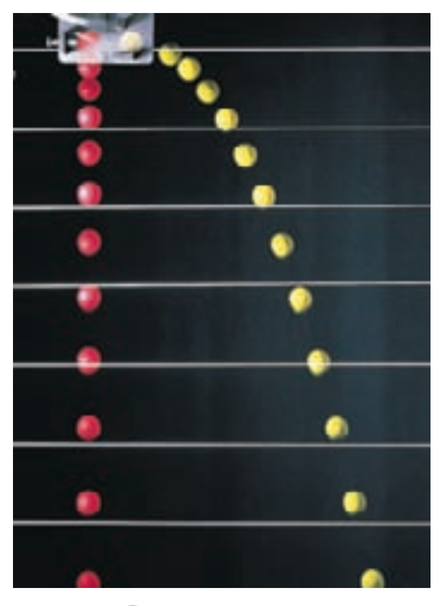
El movimiento de un proyectil siempre se limita a un plano vertical, determinado por la dirección de la velocidad inicial (figura 3.15). Esto se debe a que la aceleración

3.15 Trayectoria idealizada de un proyectil.

- Un proyectil se mueve en un plano vertical que tiene un vector velocidad inicial $\vec{v}_0$.
- Su trayectoria depende solo de $\vec{v}_0$ y de la aceleración hacia abajo debida a la gravedad.

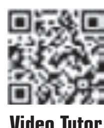


3.16 La pelota roja se deja caer desde el reposo y la amarilla se proyecta horizontalmente al mismo tiempo; las imágenes sucesivas en esta fotografía estroboscópica están separadas por intervalos de tiempo iguales. En un instante determinado, ambas pelotas tienen la misma posición y, velocidad y y aceleración y, a pesar de tener diferentes posición y velocidad en x.



MasteringPHYSICS®

ActivPhysics 3.1: Solving Projectile Motion Problems
ActivPhysics 3.2: Two Balls Falling
ActivPhysics 3.3: Changing the *x*-velocity
ActivPhysics 3.4: Projecting *x-y*-Accelerations









Video Tutor Demo **Video Tutor Demo** **Video Tutor Demo**

causada por la gravedad es exclusivamente vertical; la gravedad no puede acelerar al proyectil de forma lateral. Por lo tanto, este movimiento es *bidimensional*. Llamaremos al plano de movimiento, el plano de coordenadas xy, con el eje x horizontal y el eje y vertical hacia arriba.

La clave del análisis del movimiento de proyectiles es que podemos tratar por separado las coordenadas x y y. La componente x de la aceleración es cero, y la componente y es constante e igual a $-g$. (Por definición, g siempre es positiva, pero por las direcciones de coordenadas elegidas, a_y es negativa). Entonces, *podemos analizar el movimiento de un proyectil como una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante.* La figura 3.16 muestra dos proyectiles con movimientos diferentes en x, pero con idéntico movimiento en y; uno se deja caer desde el reposo y el otro se proyecta horizontalmente, aunque ambos proyectiles caen la misma distancia en el mismo tiempo.

Entonces podemos expresar todas las relaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración del proyectil con ecuaciones independientes para las componentes horizontal y vertical. Las componentes de $\vec{a}$ son

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g \text{ (movimiento de proyectiles, sin resistencia del aire)} \tag{3.14}$$

Como las aceleraciones x y y son constantes, podemos usar las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) directamente. Por ejemplo, suponga que en $t = 0$ la partícula está en el punto (x_0, y_0) y que en este instante sus componentes de velocidad tienen los valores iniciales v_{0x} y v_{0y}. Las componentes de la aceleración son $a_x = 0$, $a_y = -g$. Considerando primero el movimiento en x, sustituimos a_x por 0 en las ecuaciones (2.8) y (2.12). Obtenemos

$$v_x = v_{0x} \tag{3.15}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t \tag{3.16}$$

Para el movimiento en y, sustituimos x por y, v_x por v_y, v_{0x} por v_{0y}, y a_x por $a_y = -g$:

$$v_y = v_{0y} - gt \tag{3.17}$$

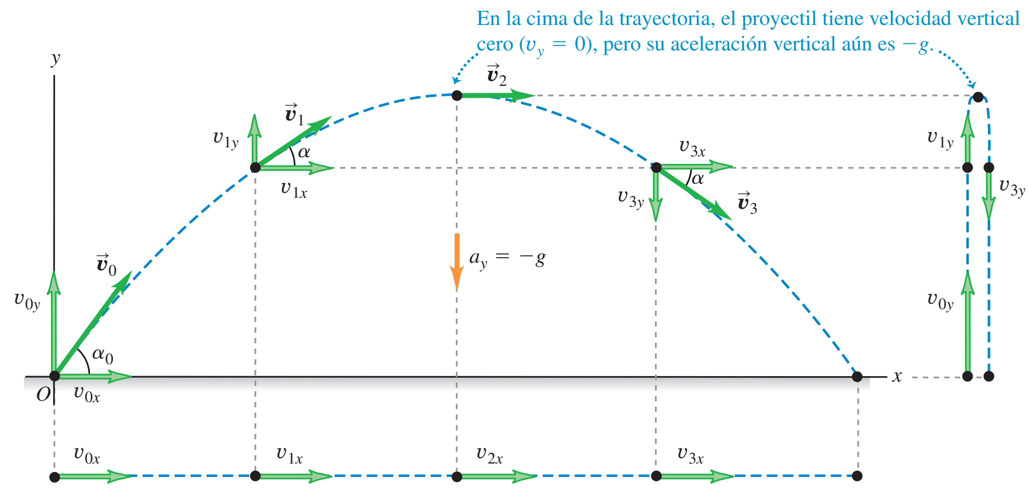
$$y = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{3.18}$$

Por lo general, lo más sencillo es tomar la posición inicial (en $t = 0$) como el origen; así, $x_0 = y_0 = 0$. Este punto podría ser la posición de una pelota en el instante t cuando abandona la mano del lanzador, o la posición de una bala cuando sale del cañón de un arma.

La figura 3.17 muestra la trayectoria de un proyectil que parte de (o pasa por) el origen en el tiempo $t = 0$, junto con su posición, velocidad y componentes de veloci-

3.17 Si se ignora la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil es una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante.





dad en intervalos iguales. La componente x de la aceleración es cero, así que v_x es constante. La componente y de la aceleración es constante y diferente de cero, así que v_y cambia cantidades iguales en intervalos iguales, exactamente como si el proyectil fuera lanzado verticalmente con la misma velocidad y inicial.

También podemos representar la velocidad inicial $\vec{v}_0$ con su magnitud v_0 (la rapidez inicial) y su ángulo α_0 con el eje $+x$ (figura 3.18). En términos de estas cantidades, las componentes v_{0x} y v_{0y} de la velocidad inicial son

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 \qquad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 \tag{3.19}$$

Si sustituimos estas relaciones en las ecuaciones (3.15) a (3.18), haciendo $x_0 = y_0 = 0$, tenemos

$$x = (v_0 \cos\alpha_0)t \qquad \text{(movimiento de un proyectil)} \tag{3.20}$$

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \text{(movimiento de un proyectil)} \tag{3.21}$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0 \qquad \text{(movimiento de un proyectil)} \tag{3.22}$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 - gt \qquad \text{(movimiento de un proyectil)} \tag{3.23}$$

Estas ecuaciones describen la posición y velocidad del proyectil de la figura 3.17 en cualquier instante t.

Podemos obtener mucha información de las ecuaciones (3.20) a (3.23). Por ejemplo, en cualquier instante, la distancia r del proyectil al origen (la magnitud del vector de posición $\vec{r}$) está dada por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.24}$$

La rapidez del proyectil (la magnitud de su velocidad) en cualquier instante es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{3.25}$$

La *dirección* de la velocidad, en términos del ángulo α que forma con el eje $+x$ (véase la figura 3.17), está dada por

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \tag{3.26}$$

El vector velocidad $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria en todos los puntos.

Podemos deducir una ecuación para la forma de la trayectoria en términos de x y y eliminando t. De las ecuaciones (3.20) y (3.21), que suponen que $x_0 = y_0 = 0$, obtenemos $t = x/(v_0 \cos\alpha_0)$ y

$$y = (\tan\alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}x^2 \tag{3.27}$$

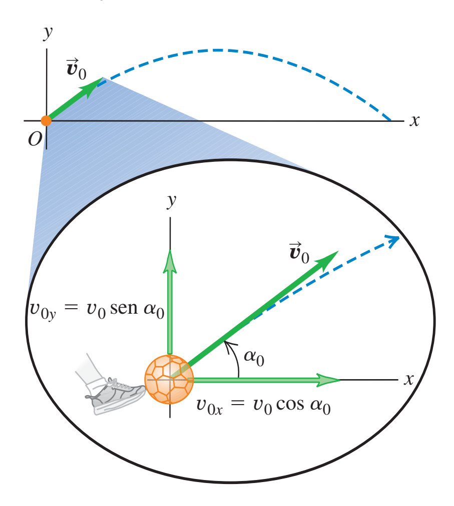
No se preocupe por los detalles de esta ecuación; lo importante es su forma general. Como v_0, $\tan\alpha_0$, $\cos\alpha_0$ y g son constantes, la ecuación (3.27) tiene la forma

$$y = bx - cx^2$$

donde b y c son constantes. Esta es la ecuación de una *parábola*. En el modelo simplificado de movimiento de proyectiles, la trayectoria siempre es una parábola (figura 3.19).

Cuando la resistencia del aire *no es* insignificante y debe considerarse, el cálculo de la trayectoria se vuelve mucho más complicado; los efectos de dicha resistencia dependen de la velocidad, por lo que la aceleración ya no es constante. La figura 3.20

3.18 Las componentes de la velocidad inicial v_{0x} y v_{0y} de un proyectil (como un balón de fútbol que se patea) se relacionan con la rapidez inicial v_0 y el ángulo inicial α_0.



MasteringPHYSICS

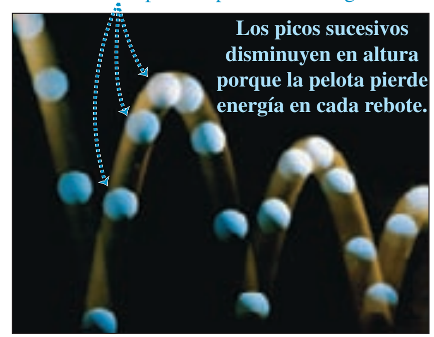
PhET: Projectile Motion
ActivPhysics 3.5: Initial Velocity Components
ActivPhysics 3.6: Target Practice I
ActivPhysics 3.7: Target Practice II



Video Tutor Demo

3.19 Las trayectorias casi parabólicas *a*) de una pelota que rebota y *b*) de borbotones de roca fundida expulsada por un volcán.

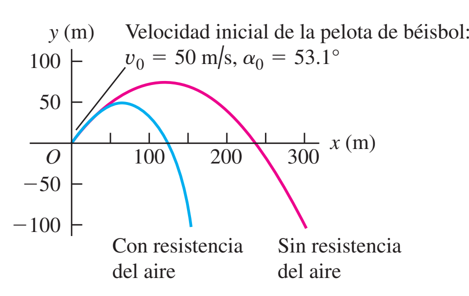
a)



b)



3.20 La resistencia del aire tiene un efecto acumulativo considerable sobre el movimiento de una pelota de béisbol. En esta simulación, permitimos que la pelota caiga por debajo de la altura desde la cual se lanzó (por ejemplo, la pelota podría haberse lanzado desde un acantilado).



muestra una simulación computarizada de la trayectoria de una pelota de béisbol tanto sin resistencia del aire como con una resistencia proporcional al cuadrado de la rapidez de la pelota. Vemos que el efecto de la resistencia es muy grande, la altura máxima y el alcance se reducen, y la trayectoria ya no es una parábola. (Si se observa cuidadosamente la figura 3.19*b*, se ve que las trayectorias de los borbotones volcánicos se desvían de una forma similar a una parábola).

Ejemplo conceptual 3.5 Aceleración de un esquiador (*continuación*)

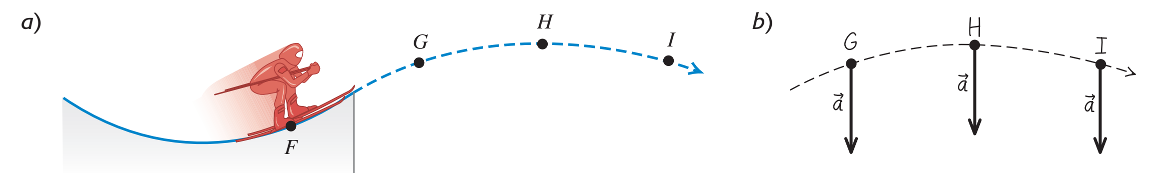


Consideremos de nuevo al esquiador del ejemplo conceptual 3.4. ¿Qué aceleración tiene en los puntos *G*, *H* e *I* de la figura 3.21*a* *después* de que sale de la rampa? Ignore la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

La figura 3.21*b* muestra la respuesta. La aceleración del esquiador cambió de un punto a otro mientras estaba en la rampa, pero tan pronto como sale de esta, se convierte en un proyectil. Así, en los puntos *G*, *H* e *I*, y de hecho en *todos* los puntos después de salir de la rampa, la aceleración del esquiador apunta verticalmente hacia abajo y tiene magnitud *g*. Por más compleja que sea la aceleración de una partícula antes de convertirse en proyectil, su aceleración como proyectil está dada por $a_x = 0$, $a_y = -g$.

3.21 *a*) Trayectoria del esquiador durante el salto. *b*) La solución.



Estrategia para resolver problemas 3.1 Movimiento de proyectiles



NOTA: Las estrategias utilizadas en las secciones 2.4 y 2.5 para problemas de aceleración constante en línea recta también sirven aquí.

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* El concepto clave que debemos recordar es que durante el movimiento de un proyectil, la aceleración es hacia abajo y tiene magnitud constante *g*. Observe que las ecuaciones para el movimiento de proyectiles no son válidas durante el *lanzamiento* de una pelota, porque durante el lanzamiento actúan tanto la mano del lanzador como la gravedad. Las ecuaciones solo se aplican *después* de que la pelota sale de la mano del lanzador.

PLANTEAR *el problema* con los siguientes pasos:

1. Defina su sistema de coordenadas y dibuje sus ejes. Normalmente lo más sencillo es tomar el eje *x* como horizontal y el eje *y* hacia arriba, y colocar el origen en la posición inicial ($t = 0$), donde el cuerpo se vuelve un proyectil (como cuando la pelota sale de la mano del lanzador). Entonces, las componentes de la aceleración (constante) son $a_x = 0$, $a_y = -g$, y la posición inicial es $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$.
2. Elabore una lista de las cantidades conocidas e incógnitas, y determine cuáles incógnitas son sus objetivos. Por ejemplo, en algunos problemas se da la velocidad inicial (ya sea las componentes, o la magnitud y dirección) y se pide obtener las coordenadas y componentes de velocidad en un instante posterior. En cualquier caso, usará las ecuaciones (3.20) a (3.23). [Las ecuaciones (3.24) a (3.27) también podrían ser útiles]. Asegúrese de tener tantas ecuaciones como incógnitas por determinar.
3. Plantee el problema con palabras y luego tradúzcalo a símbolos. Por ejemplo, ¿*cuándo* llega la partícula a cierto punto? (Es decir, ¿en qué valor de *t*?). ¿*Dónde* está la partícula cuando la velocidad tiene cierto valor? (Es decir, ¿cuánto valen *x* y *y* cuando v_x o v_y tienen ese valor?). Puesto que $v_y = 0$ en el punto más alto de la trayectoria, la pregunta "¿cuándo alcanza el proyectil su punto más alto?" equivale a "¿cuánto vale *t* cuando $v_y = 0$?". Asimismo, la pregunta "¿cuándo vuelve el proyectil a su altura inicial?" equivale a "¿cuánto vale *t* cuando $y = y_0$?".

EJECUTAR *la solución:* Use las ecuaciones elegidas para obtener las incógnitas. Resista la tentación de dividir la trayectoria en segmentos y analizarlos individualmente. ¡No hay que volver a comenzar cuando el proyectil llega a su altura máxima! Lo más fácil suele ser usar los mismos ejes y escala de tiempo durante todo el problema. Si necesita valores numéricos, utilice $g = 9.80\ \text{m/s}^2$.

EVALUAR *la respuesta:* Como siempre, examine sus resultados para ver si son lógicos y si los valores numéricos son razonables.

Ejemplo 3.6 Cuerpo que se proyecta horizontalmente

Un acróbata en motocicleta se lanza del borde de un risco. Justo en el borde, su velocidad es horizontal con magnitud de 9.0 m/s. Obtenga la posición, distancia desde el borde y velocidad de la motocicleta después de 0.50 s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 3.22 muestra el diagrama de la trayectoria del motociclista. Una vez que el acróbata sale del risco, se mueve como un proyectil. Elegimos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el borde del risco, así que $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$. La velocidad inicial $\vec{v}_0$ en el borde del risco es horizontal (es decir, $\alpha_0 = 0$), así que sus componentes son $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0 = 9.0$ m/s y $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 = 0$. Para determinar la posición de la motocicleta en $t = 0.50$ s, usamos las ecuaciones (3.20) y (3.21), luego calculamos la distancia al origen con la ecuación (3.24). Por último, usamos las ecuaciones (3.22) y (3.23) para determinar las componentes de velocidad en $t = 0.50$ s.

EJECUTAR: De acuerdo con las ecuaciones (3.20) y (3.21), las coordenadas x y y en $t = 0.50$ s son

$$x = v_{0x}t = (9.0 \text{ m/s})(0.50 \text{ s}) = 4.5 \text{ m}$$

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 = -\tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(0.50 \text{ s})^2 = -1.2 \text{ m}$$

El valor negativo de y indica que en este instante la motocicleta está por debajo de su punto inicial.

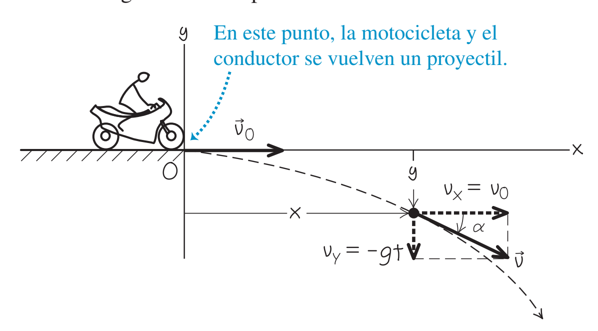
De acuerdo con la ecuación (3.24), la distancia de la motocicleta al origen en $t = 0.50$ s es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4.5 \text{ m})^2 + (-1.2 \text{ m})^2} = 4.7 \text{ m}$$

Según las ecuaciones (3.22) y (3.23), las componentes de la velocidad en $t = 0.50$ s son

$$v_x = v_{0x} = 9.0 \text{ m/s}$$
$$v_y = -gt = (-9.80 \text{ m/s}^2)(0.50 \text{ s}) = -4.9 \text{ m/s}$$

3.22 Diagrama de este problema.



La motocicleta tiene la misma velocidad horizontal v_x que cuando salió del risco en $t = 0$, pero, además, hay una velocidad vertical v_y hacia abajo (negativa). El vector velocidad en $t = 0.50$ s es

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (9.0 \text{ m/s})\hat{\imath} + (-4.9 \text{ m/s})\hat{\jmath}$$

A partir de la ecuación (3.25), la rapidez (magnitud de la velocidad) en $t = 0.50$ s es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$
$$= \sqrt{(9.0 \text{ m/s})^2 + (-4.9 \text{ m/s})^2} = 10.2 \text{ m/s}$$

De acuerdo con la ecuación (3.26), el ángulo a del vector velocidad es

$$\alpha = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan\left(\frac{-4.9 \text{ m/s}}{9.0 \text{ m/s}}\right) = -29°$$

La velocidad está dirigida 29° por abajo de la horizontal.

EVALUAR: Al igual que en la figura 3.17, el movimiento horizontal de la motocicleta no cambia por la gravedad; la motocicleta se sigue moviendo horizontalmente a 9.0 m/s, cubriendo 4.5 m en 0.50 s. La motocicleta tiene cero velocidad inicial vertical, de modo que cae verticalmente igual que un objeto que se deja caer desde el reposo y desciende una distancia de $\frac{1}{2}gt^2 = 1.2$ m en 0.50 s.

Ejemplo 3.7 Altura y alcance de un proyectil I: una pelota de béisbol bateada

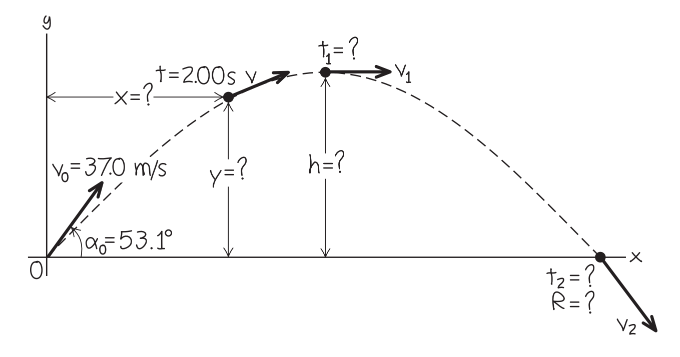


Un bateador golpea una pelota de béisbol de modo que esta sale del bate a una rapidez $v_0 = 37.0$ m/s con un ángulo $\alpha_0 = 53.1°$. *a*) Calcule la posición de la pelota y su velocidad (magnitud y dirección) cuando $t = 2.00$ s. *b*) Determine cuándo la pelota alcanza el punto más alto de su vuelo y su altura h en ese punto. *c*) Obtenga el *alcance horizontal R*, es decir, la distancia horizontal desde el punto de partida hasta donde la pelota cae al suelo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Como muestra la figura 3.20, la resistencia del aire afecta significativamente el movimiento de una pelota de béisbol; no obstante, por sencillez, en este ejemplo la ignoraremos y usaremos las ecuaciones del movimiento de proyectiles para describir el movimiento. La pelota sale del bate en $t = 0$ a un metro más o menos arriba del suelo, pero ignoraremos esta distancia y supondremos que sale del nivel del suelo ($y_0 = 0$). La figura 3.23 muestra el diagrama de

3.23 Diagrama de este problema.



la trayectoria de la pelota. Usaremos el mismo sistema de coordenadas que en las figuras 3.17 y 3.18, de modo que podremos usar las ecua-

Continúa

ciones (3.20) a (3.23). Las incógnitas son *a*) la posición y velocidad de la pelota 2.00 s después de perder contacto con el bate; *b*) el tiempo t cuando la pelota alcanza su altura máxima (es decir, cuando $v_y = 0$) y la coordenada y en ese momento, y *c*) la coordenada x cuando la pelota vuelve a tocar el suelo ($y = 0$).

EJECUTAR: *a*) Queremos obtener x, y, v_x y v_y en $t = 2.00$ s. La velocidad inicial de la pelota tiene las componentes

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0 = (37.0 \text{ m/s}) \cos 53.1° = 22.2 \text{ m/s}$$
$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 = (37.0 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 53.1° = 29.6 \text{ m/s}$$

De acuerdo con las ecuaciones (3.20) a (3.23),

$$x = v_{0x}t = (22.2 \text{ m/s})(2.00 \text{ s}) = 44.4 \text{ m}$$
$$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = (29.6 \text{ m/s})(2.00 \text{ s}) - \tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s})^2 = 39.6 \text{ m}$$
$$v_x = v_{0x} = 22.2 \text{ m/s}$$
$$v_y = v_{0y} - gt = 29.6 \text{ m/s} - (9.80 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s}) = 10.0 \text{ m/s}$$

La componente y de la velocidad es positiva en $t = 2.00$ s, de modo que la pelota todavía va en ascenso (figura 3.23). La magnitud y dirección de la velocidad se obtienen de las ecuaciones (3.25) y (3.26):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(22.2 \text{ m/s})^2 + (10.0 \text{ m/s})^2} = 24.4 \text{ m/s}$$
$$\alpha = \arctan\left(\frac{10.0 \text{ m/s}}{22.2 \text{ m/s}}\right) = \arctan 0.450 = 24.2°$$

La dirección de la velocidad (es decir, la dirección del movimiento) es 24.2° arriba de la horizontal.

b) En el punto más alto, la velocidad vertical v_y es cero. Sea ese instante t_1; entonces,

$$v_y = v_{0y} - gt_1 = 0$$
$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{29.6 \text{ m/s}}{9.80 \text{ m/s}^2} = 3.02 \text{ s}$$

La altura h en el punto más alto es el valor de y cuando $t = t_1$:

$$h = v_{0y}t_1 - \tfrac{1}{2}gt_1^2 = (29.6 \text{ m/s})(3.02 \text{ s}) - \tfrac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(3.02 \text{ s})^2 = 44.7 \text{ m}$$

c) Obtendremos el alcance horizontal en dos pasos. Primero, determinamos el tiempo t_2 cuando $y = 0$ (la pelota está en el suelo):

$$y = 0 = v_{0y}t_2 - \tfrac{1}{2}gt_2^2 = t_2\left(v_{0y} - \tfrac{1}{2}gt_2\right)$$

Esta es una ecuación cuadrática en t_2, con dos raíces:

$$t_2 = 0 \qquad \text{y} \qquad t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2(29.6 \text{ m/s})}{9.80 \text{ m/s}^2} = 6.04 \text{ s}$$

La pelota está en $y = 0$ en estos dos tiempos. La pelota *abandona* el suelo en $t_2 = 0$, y en $t_2 = 2v_{0y}/g = 6.04$ s es cuando regresa al suelo.

El alcance horizontal R es el valor de x cuando la pelota vuelve al suelo, en $t_2 = 6.04$ s:

$$R = v_{0x}t_2 = (22.2 \text{ m/s})(6.04 \text{ s}) = 134 \text{ m}$$

La componente vertical de la velocidad cuando la pelota toca el suelo es

$$v_y = v_{0y} - gt_2 = 29.6 \text{ m/s} - (9.80 \text{ m/s}^2)(6.04 \text{ s}) = -29.6 \text{ m/s}$$

Es decir, v_y tiene la misma magnitud que la velocidad vertical inicial v_{0y} pero dirección opuesta (hacia abajo). Como v_x es constante, el ángulo $\alpha = -53.1°$ (debajo de la horizontal) en este punto es el negativo del ángulo inicial $\alpha_0 = 53.1°$.

EVALUAR: A menudo es útil verificar los resultados obteniéndolos de una forma distinta. Por ejemplo, también podemos obtener la altura máxima del inciso *b*) aplicando la fórmula de aceleración constante, la ecuación (2.13), para el movimiento en y:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$$

En el punto más alto, $v_y = 0$ y $y = h$. Se debe despejar h de esta ecuación y obtener el mismo resultado calculado en el inciso *b*). ¿Es así?

Observe que el tiempo en que la pelota golpea el suelo, $t_2 = 6.04$ s, es exactamente el doble del tiempo en que alcanza su punto más alto, $t_1 = 3.02$ s. De modo que el tiempo de bajada es igual al tiempo de subida. Esto *siempre* es así, si los puntos inicial y final tienen la misma elevación y se ignora la resistencia del aire.

Observe también que $h = 44.7$ m del inciso *b*) es comparable con la altura de 52.4 m del techo sobre el campo de juego en el Metrodomo Hubert H. Humphrey en Mineápolis, y el alcance horizontal $R = 134$ m del inciso *c*) es mayor que la distancia de 99.7 m entre *home* y la barda del jardín derecho del Campo Safeco en Seattle. En realidad, debido a la resistencia del aire (la cual se ignoró), una pelota bateada con la velocidad inicial y el ángulo utilizados aquí no subirá tan alto ni llegará tan lejos como hemos calculado (véase la figura 3.20).

Ejemplo 3.8 Altura y alcance de un proyectil II: Altura máxima, alcance máximo

Para un proyectil lanzado con rapidez v_0 a un ángulo inicial α_0 entre 0° y 90°, obtenga la altura máxima h y el alcance horizontal R (véase la figura 3.23). Para una v_0 dada, ¿qué valor de α_0 da la altura máxima? ¿Y qué valor da el alcance horizontal máximo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Estos son casi los mismos incisos *b*) y *c*) del ejemplo 3.7, excepto que ahora buscamos expresiones generales para h y R. También nos interesan los valores de α_0 que dan los valores

máximos de h y R. En el inciso *b*) del ejemplo 3.7 vimos que el proyectil alcanza el punto máximo de su trayectoria (de manera que $v_y = 0$) en el tiempo $t_1 = v_{0y}/g$, y en el inciso *c*) determinamos que el proyectil regresa a su altura inicial (por lo que $y = y_0$) en el tiempo $t_2 = 2v_{0y}/g = 2t_1$. Usaremos la ecuación (3.21) para determinar la coordenada y de h en t_1, y la ecuación (3.20) para calcular la coordenada x de R en t_2. Expresaremos nuestras respuestas en términos de la rapidez de lanzamiento v_0 y el ángulo de disparo α_0 usando las ecuaciones (3.19).

EJECUTAR: De acuerdo con las ecuaciones (3.19), $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0$ y $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha_0$. Por lo tanto, podemos escribir el tiempo t_1 en que $v_y = 0$ como

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{g}$$

La ecuación (3.21) nos da la altura $y = h$ en ese instante:

$$h = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)\left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{g}\right) - \tfrac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_0}{2g}$$

Para una rapidez de lanzamiento dada v_0, el valor máximo de h se da con $\operatorname{sen} \alpha_0 = 1$ y $\alpha_0 = 90°$; es decir, cuando el proyectil se lanza verticalmente hacia arriba. (Si se lanza horizontalmente, como en el ejemplo 3.6, $\alpha_0 = 0$ ¡y la altura máxima es cero!).

El tiempo t_2 en que el proyectil regresa al suelo es

$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{g}$$

El alcance horizontal R es el valor de x en este instante. De acuerdo con la ecuación (3.20), este es

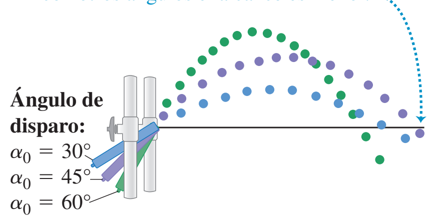
$$R = (v_0 \cos \alpha_0)t_2 = (v_0 \cos \alpha_0)\frac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha_0}{g}$$

(Se usó la identidad trigonométrica $2 \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 = \operatorname{sen} 2\alpha_0$, que se encuentra en el apéndice B). El valor máximo de $\operatorname{sen} 2\alpha_0$ es 1; esto ocurre cuando $2\alpha_0 = 90°$, o bien, $\alpha_0 = 45°$. Este ángulo da el alcance máximo para una rapidez inicial dada si se ignora la resistencia del aire.

EVALUAR: La figura 3.24 se basa en una fotografía compuesta de tres trayectorias de una pelota proyectada desde un cañón de resorte con ángulos de 30°, 45° y 60°. La rapidez inicial v_0 es aproximadamente igual en los tres casos. El alcance horizontal es mayor para el ángulo de 45°. Los alcances son aproximadamente los mismos para los ángulos de 30° y 60°. ¿Puede usted demostrar que, para un valor dado de v_0, el alcance es igual para un ángulo inicial α_0 y para un ángulo inicial de $90° - \alpha_0$? (Este no es el caso de la figura 3.24 debido a la resistencia del aire).

CUIDADO **Altura y alcance de un proyectil** No recomendamos memorizar las expresiones anteriores para h, R y $R_{máx}$. Son aplicables solo en las circunstancias especiales que describimos. En particular, las expresiones para el alcance R y alcance máximo $R_{máx}$ *solo* pueden utilizarse cuando las alturas de lanzamiento y aterrizaje son iguales. En muchos de los problemas al final de este capítulo, estas ecuaciones *no* deben aplicarse.

3.24 Un ángulo de disparo de 45° produce el alcance horizontal máximo. El alcance es menor con ángulos de 30° y 60°.



Ejemplo 3.9 Alturas inicial y final distintas

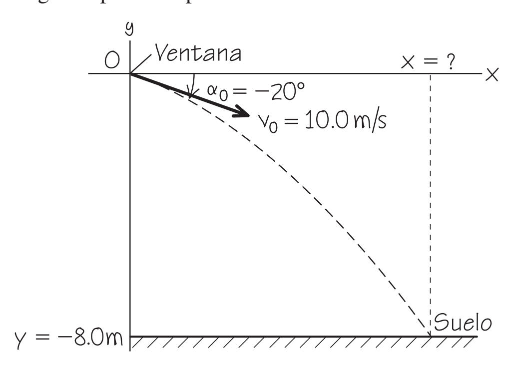


Usted lanza una pelota desde una ventana a 8.0 m del suelo. Cuando la pelota sale de su mano, se mueve a 10.0 m/s con un ángulo de 20° abajo de la horizontal. ¿A qué distancia horizontal de su ventana llegará la pelota al piso? Ignore la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Al igual que en los ejemplos 3.7 y 3.8, queremos determinar la coordenada horizontal de un proyectil cuando tiene un valor determinado de y. La diferencia en este caso es que el valor de y *no* es el mismo que el valor inicial. Una vez más, elegimos el eje x como horizontal, y el eje y hacia arriba, y colocamos el origen de las coordenadas en el punto donde la pelota sale de su mano (figura 3.25). Así, tenemos $v_0 = 10.0$ m/s y $\alpha_0 = -20°$ (el ángulo es negativo porque la velocidad inicial está debajo de la horizontal). Nuestra incógnita es el valor de x cuando la pelota llega al suelo en $y = -8.0$ m. Usamos la ecuación (3.21) para obtener el instante t cuando esto sucede; después, calculamos el valor de x en ese instante con la ecuación (3.20).

3.25 Diagrama para este problema.



EJECUTAR: Para determinar t, rescribimos la ecuación (3.21) en la forma normal de una ecuación cuadrática en t:

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t + y = 0$$

Continúa

Las raíces de esta ecuación son

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \pm \sqrt{(-v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)^2 - 4\left(\frac{1}{2}g\right)y}}{2\left(\frac{1}{2}g\right)}$$

$$= \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_0 - 2gy}}{g}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix}(10.0\ \text{m/s})\ \operatorname{sen}(-20°) \\ \pm\sqrt{(10.0\ \text{m/s})^2\ \operatorname{sen}^2(-20°) - 2(9.80\ \text{m/s}^2)(-8.0\ \text{m})}\end{bmatrix}}{9.80\ \text{m/s}^2}$$

$$= -1.7\ \text{s} \quad \text{o} \quad 0.98\ \text{s}$$

Desechamos la raíz negativa, ya que se refiere a un tiempo previo al lanzamiento. La raíz positiva nos indica que la pelota llega al suelo en $t = 0.98$ s. De acuerdo con la ecuación (3.20), la coordenada x en ese instante es

$$x = (v_0 \cos \alpha_0)t = (10.0\ \text{m/s})[\cos(-20°)](0.98\ \text{s})$$
$$= 9.2\ \text{m}$$

La pelota llega al suelo a una distancia horizontal de 9.2 m de la ventana.

EVALUAR: La raíz $t = -1.7$ s es un ejemplo de solución "ficticia" para una ecuación cuadrática. Ya vimos esto en el ejemplo 2.8 de la sección 2.5; le recomendamos repasarlo.



Ejemplo 3.10 El cuidador del zoológico y el mono

Un mono escapa del zoológico y sube a un árbol. Como el cuidador no logra atraerlo, dispara un dardo sedante directamente hacia el mono (figura 3.26). El mono salta en el instante en que el dardo sale del cañón del rifle. Demuestre que el dardo golpeará al mono, *siempre* que lo alcance antes de que este llegue al piso y se aleje.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Tenemos *dos* cuerpos que se mueven como proyectiles: el dardo y el mono. Ambos tienen posición y velocidad iniciales distintas; sin embargo, entran en movimiento de proyectil al mismo tiempo $t = 0$. Primero usaremos la ecuación (3.20) para encontrar el tiempo t en que las coordenadas x_{mono} y x_{dardo} son iguales. Luego, usaremos la ecuación (3.21) para verificar si y_{mono} y y_{dardo} también son iguales en ese instante; si lo son, el dardo golpeará al mono.

Elegimos las direcciones x y y acostumbradas, y colocamos el origen de las coordenadas en el extremo del cañón del rifle (figura 3.26).

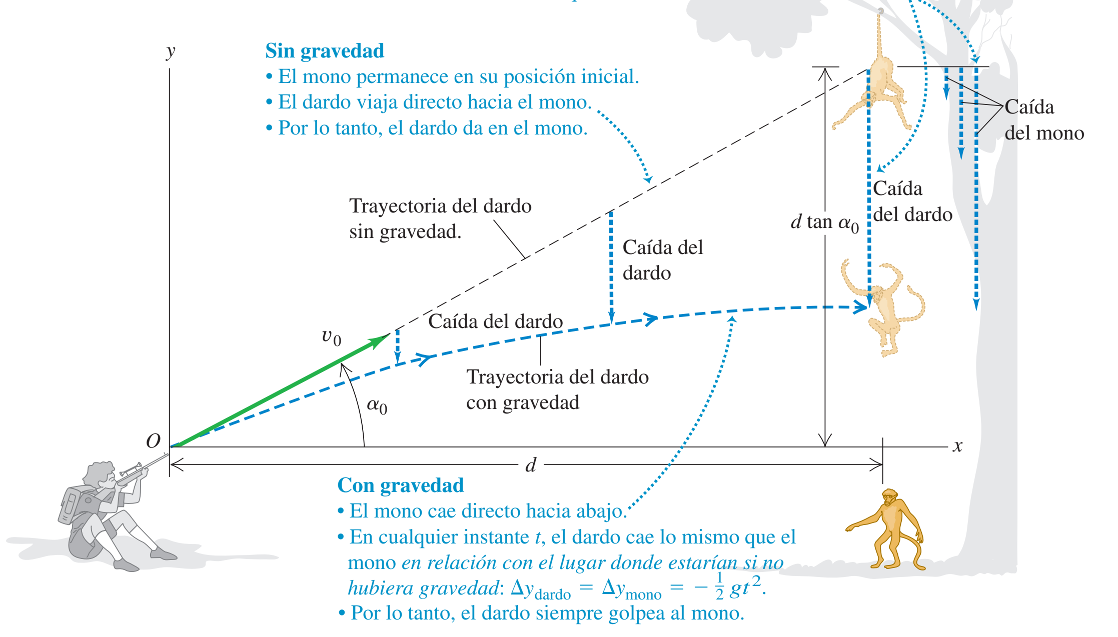
EJECUTAR: El mono cae verticalmente, así que $x_{mono} = d$ en todo momento. La ecuación (3.20) nos indica que $x_{dardo} = (v_0 \cos \alpha_0)t$. Despejamos el tiempo t cuando las coordenadas x son iguales:

$$d = (v_0 \cos \alpha_0)t \quad \text{así que} \quad t = \frac{d}{v_0 \cos \alpha_0}$$

Se debe demostrar ahora que $y_{mono} = y_{dardo}$ en este instante. El mono está en caída libre unidimensional; su posición en cualquier momento está dada por la ecuación (2.12) cambiando debidamente los símbolos. La figura 3.26 muestra que la altura inicial del mono arriba del cañón del rifle es $y_{mono\text{-}0} = d \tan \alpha_0$, así que

$$y_{mono} = d \tan \alpha_0 - \tfrac{1}{2}gt^2$$

3.26 El dardo con sedante golpea al mono que cae.



De acuerdo con la ecuación (3.21),

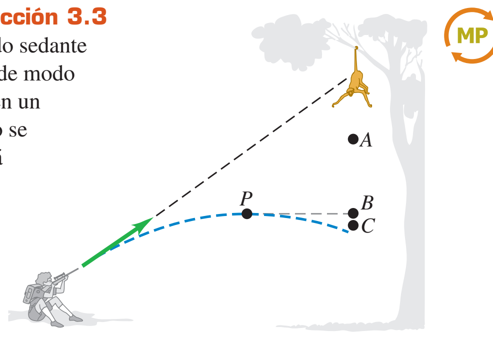
$$y_{\text{dardo}} = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Comparando estas dos ecuaciones, vemos que si $d \tan \alpha_0 = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t$ en el instante en que las dos coordenadas x son iguales, entonces $y_{\text{mono}} = y_{\text{dardo}}$ (el dardo habrá acertado). Para demostrar que esto sucede, sustituimos t por $d/(v_0 \cos \alpha_0)$, el instante en que $x_{\text{mono}} = x_{\text{dardo}}$. Con seguridad, obtenemos

$$(v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0) \frac{d}{v_0 \cos \alpha_0} = d \tan \alpha_0$$

EVALUAR: Hemos demostrado que, cuando las coordenadas y del dardo y el mono son iguales en el mismo instante, las coordenadas x también lo son; un dardo dirigido a la posición inicial del mono *siempre* lo golpeará, sin importar v_0 (siempre que el mono no llegue al suelo primero). Este resultado es independiente de g, la aceleración debida a la gravedad. Sin gravedad ($g = 0$), el mono no se movería, y el dardo viajaría en línea recta para golpearlo. Con gravedad, ambos "caen" la misma distancia $gt^2/2$ por debajo de sus posiciones cuando $t = 0$ y el dardo de todos modos golpea al mono (figura 3.26).

Evalúe su comprensión de la sección 3.3 En el ejemplo 3.10, suponga que el dardo sedante tiene una velocidad relativamente baja, de modo que el dardo alcanza su altura máxima en un punto P antes de golpear al mono, como se indica en la figura. Cuando el dardo está en P, ¿el mono estará en **i.** el punto A (más alto que P), **ii.** el punto B (a la misma altura que P) o **iii.** en el punto C (más abajo que P)? Ignore la resistencia del aire.



3.4 Movimiento en círculo

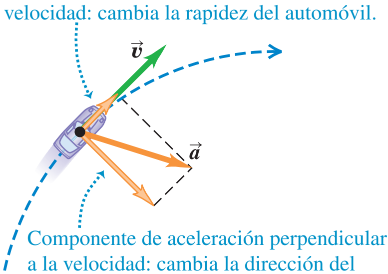
Cuando una partícula se mueve en una trayectoria curva, la dirección de su velocidad cambia. Como vimos en la sección 3.2, esto significa que la partícula *debe* tener una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria, incluso si la rapidez es constante (véase la figura 3.11*b*). En esta sección calcularemos la aceleración para el importante caso especial de movimiento en círculo.

Movimiento circular uniforme

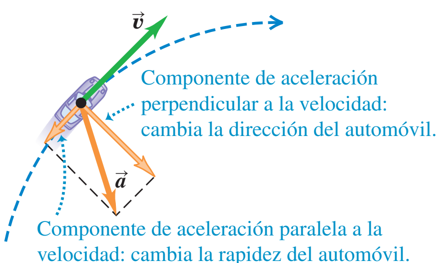
Cuando una partícula se mueve en un círculo con *rapidez constante*, el movimiento se conoce como **movimiento circular uniforme**. Un automóvil que da vuelta en una curva de radio constante con rapidez constante, un satélite en órbita circular y un patinador que describe un círculo con rapidez constante son ejemplos de este movimiento (figura 3.27c; compárela con la figura 3.12*a*). No hay componente de aceleración paralela (tangente) a la trayectoria; si la hubiera, la rapidez cambiaría. El vector aceleración es perpendicular (normal) a la trayectoria y, por lo tanto, se dirige hacia adentro (¡nunca hacia afuera!), al centro de la trayectoria circular. Esto causa el cambio en la dirección de la velocidad, sin que cambie la rapidez.

3.27 Un automóvil con movimiento circular. Si el automóvil tiene movimiento circular uniforme como en *c*), la rapidez es constante y la aceleración se dirige hacia el centro de la trayectoria circular (compare con la figura 3.12).

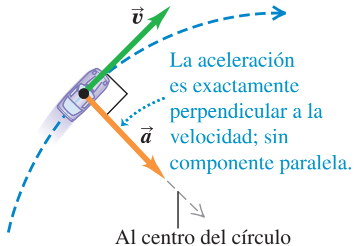
a) **El automóvil aumenta su rapidez en una trayectoria circular**



b) **El automóvil disminuye su rapidez en una trayectoria circular**

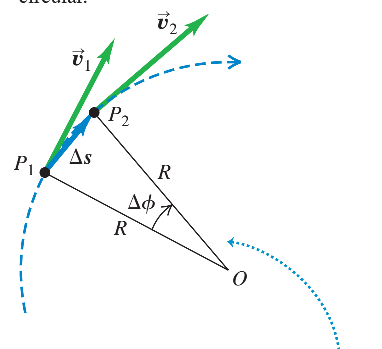


c) **Movimiento circular uniforme:** Rapidez constante en una trayectoria circular

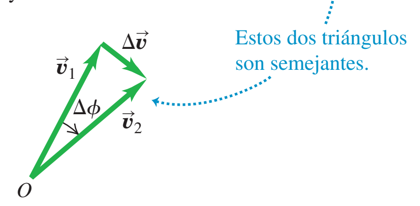


3.28 Determinación del cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$, aceleración media $\vec{a}_{med}$, y aceleración instantánea $\vec{a}_{rad}$ de una partícula que se mueve en círculo con rapidez constante.

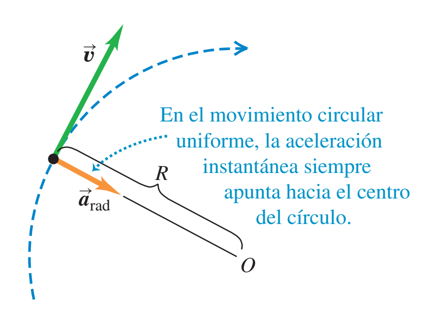
a) Una partícula se mueve una distancia Δs con rapidez constante en una trayectoria circular.



b) El cambio correspondiente en velocidad y aceleración media



c) Aceleración instantánea



Se puede obtener una relación sencilla para la magnitud de la aceleración en movimiento circular uniforme. Iniciamos con la figura 3.28*a*, la cual muestra una partícula que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular de radio R con centro en O. La partícula se mueve de P_1 a P_2 en un tiempo Δt. El cambio vectorial en la velocidad $\Delta\vec{v}$ durante este tiempo se muestra en la figura 3.28*b*.

Los ángulos identificados como $\Delta\phi$ en las figuras 3.28*a* y 3.28*b* son iguales porque $\vec{v}_1$ es perpendicular a la línea OP_1, y $\vec{v}_2$ es perpendicular a la línea OP_2. Por lo tanto, los triángulos en las figuras 3.28*a* y 3.28*b* son *semejantes*. Las razones de los lados correspondientes en triángulos semejantes son iguales, así que

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v_1} = \frac{\Delta s}{R} \qquad \text{o bien,} \qquad |\Delta\vec{v}| = \frac{v_1}{R}\Delta s$$

La magnitud a_{med} de la aceleración media durante Δt es, entonces,

$$a_{med} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

La magnitud a de la aceleración *instantánea* $\vec{a}$ en el punto P_1 es el límite de esta expresión conforme P_2 se acerca a P_1:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Si el intervalo Δt es muy corto, Δs es la distancia que se mueve la partícula en la trayectoria curva. De modo que el límite de $\Delta s/\Delta t$ es la rapidez v_1 en el punto P_1. Además, P_1 puede ser cualquier punto de la trayectoria, así que podemos omitir el subíndice y representar con v la rapidez en cualquier punto. Entonces,

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(movimiento circular uniforme)} \qquad (3.28)$$

Se agrega el subíndice "rad" para recordar que la dirección de la aceleración instantánea en cualquier punto siempre se encuentra a lo largo de un radio del círculo (hacia el centro; véase las figuras 3.27*c* y 3.28*c*). En conclusión, *en el movimiento circular uniforme, la magnitud a_{rad} de la aceleración instantánea es igual al cuadrado de la rapidez v dividido entre el radio R del círculo; su dirección es perpendicular a $\vec{v}$ y hacia adentro sobre el radio*.

Como la aceleración en el movimiento circular uniforme siempre apunta al centro del círculo, en ocasiones se le llama **aceleración centrípeta**. La palabra "centrípeta" se deriva de dos vocablos griegos que significan "que busca el centro". La figura 3.29*a* muestra las direcciones de los vectores velocidad y aceleración en varios puntos para una partícula con movimiento circular uniforme.

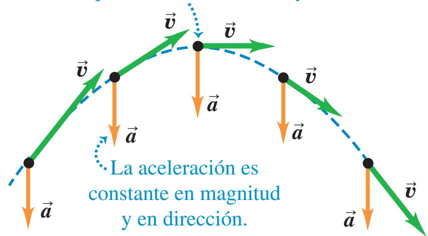
3.29 Aceleración y velocidad *a*) de una partícula con movimiento circular uniforme y *b*) de un proyectil sin resistencia del aire.

a) Movimiento circular uniforme

La aceleración tiene magnitud constante, pero dirección variable.

La velocidad y la aceleración siempre son perpendiculares.

b) Movimiento de un proyectil



CUIDADO **Movimiento circular uniforme contra movimiento de proyectiles** La aceleración en el movimiento circular uniforme (figura 3.29*a*) tiene algunas similitudes con la aceleración en el movimiento de proyectiles sin resistencia del aire (figura 3.29*b*), pero también existen algunas diferencias importantes. En ambas clases de movimiento la *magnitud* de la aceleración siempre es la misma. Sin embargo, en el movimiento circular uniforme la *dirección* de $\vec{a}$ cambia continuamente, de manera que siempre apunta hacia el centro del círculo. (En la parte superior del círculo, la aceleración apunta hacia abajo; en la parte inferior del círculo, la aceleración apunta hacia arriba). En contraste, en el movimiento de proyectiles, la dirección de $\vec{a}$ es la misma en todo momento.

También podemos expresar la magnitud de la aceleración en el movimiento circular uniforme en términos del **periodo** T del movimiento, es decir, el tiempo que dura una revolución (una vuelta completa alrededor del círculo). En un tiempo T, la partícula recorre una distancia igual a la circunferencia $2\pi R$, así que su rapidez es

$$v = \frac{2\pi R}{T} \tag{3.29}$$

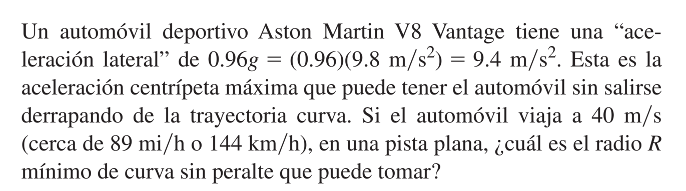
Al sustituir esto en la ecuación (3.28), obtenemos la expresión alternativa

$$a_{\text{rad}} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad \text{(movimiento circular uniforme)} \tag{3.30}$$



PhET: Ladybug Revolution
PhET: Motion in 2D

Ejemplo 3.11 Aceleración centrípeta en un camino curvo



Un automóvil deportivo Aston Martin V8 Vantage tiene una "aceleración lateral" de $0.96g = (0.96)(9.8\ \text{m/s}^2) = 9.4\ \text{m/s}^2$. Esta es la aceleración centrípeta máxima que puede tener el automóvil sin salirse derrapando de la trayectoria curva. Si el automóvil viaja a 40 m/s (cerca de 89 mi/h o 144 km/h), en una pista plana, ¿cuál es el radio R mínimo de curva sin peralte que puede tomar?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: El automóvil tiene movimiento circular uniforme porque se desplaza con rapidez constante en una curva, que es un segmento de un círculo. Se usa la ecuación (3.28) para obtener la incógnita R en términos de la aceleración centrípeta dada a_{rad} y la rapidez v:

$$R = \frac{v^2}{a_{\text{rad}}} = \frac{(40\ \text{m/s})^2}{9.4\ \text{m/s}^2} = 170\ \text{m (aproximadamente 560 ft)}$$

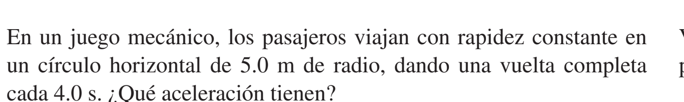
Este es el radio *mínimo* porque a_{rad} es la aceleración centrípeta *máxima*.

EVALUAR: El radio de giro mínimo R es proporcional al *cuadrado* de la rapidez; por lo tanto, incluso una reducción pequeña en la rapidez puede reducir R considerablemente. Por ejemplo, si v disminuye un 20% (de 40 a 32 m/s), R disminuirá un 36% (de 170 a 109 m).

Otra forma de reducir el radio requerido es *peraltar* la curva. Investigaremos esta opción en el capítulo 5.



Ejemplo 3.12 Aceleración centrípeta en un juego mecánico



En un juego mecánico, los pasajeros viajan con rapidez constante en un círculo horizontal de 5.0 m de radio, dando una vuelta completa cada 4.0 s. ¿Qué aceleración tienen?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La rapidez es constante, así que se trata de movimiento circular uniforme. Nos dan el radio $R = 5.0$ m y el periodo $T = 4.0$ s, así que se puede usar la ecuación (3.30) para calcular la aceleración directamente, o se puede calcular v con la ecuación (3.29) y luego obtener la aceleración con la ecuación (3.28).

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (3.30),

$$a_{\text{rad}} = \frac{4\pi^2(5.0\ \text{m})}{(4.0\ \text{s})^2} = 12\ \text{m/s}^2 = 1.3g$$

Verificamos esta respuesta usando el segundo enfoque indirecto. A partir de la ecuación (3.29), la rapidez es

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(5.0\ \text{m})}{4.0\ \text{s}} = 7.9\ \text{m/s}$$

La aceleración centrípeta es entonces,

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} = \frac{(7.9\ \text{m/s})^2}{5.0\ \text{m}} = 12\ \text{m/s}^2$$

EVALUAR: Al igual que en el ejemplo 3.11, la dirección de $\vec{a}$ siempre es hacia el centro del círculo. La magnitud de $\vec{a}$ es relativamente suave conforme el juego mecánico avanza; algunas montañas rusas someten a sus pasajeros a aceleraciones de hasta $4g$.

Aplicación Cuidado: ¡Se aproximan curvas cerradas!
Estos carros de la montaña rusa tienen movimiento circular no uniforme: frenan y aceleran conforme se mueven alrededor de un lazo vertical. Las grandes aceleraciones implicadas en un viaje a alta velocidad alrededor de un lazo ajustado significan un esfuerzo adicional en los sistemas circulatorios de los pasajeros; por esa razón, las personas con afecciones cardiacas deben abstenerse de subirse a la montaña rusa.



Movimiento circular no uniforme

En esta sección, hemos supuesto que la rapidez de la partícula es constante conforme viaja alrededor de un círculo. Si la rapidez varía, tenemos un **movimiento circular no uniforme**. En el movimiento circular no uniforme, la ecuación (3.28) nos sigue dando la componente *radial* de la aceleración $a_{rad} = v^2/R$, que siempre es *perpendicular* a la velocidad instantánea y dirigida al centro del círculo. Sin embargo, puesto que la rapidez v tiene valores distintos en diferentes puntos del movimiento, el valor de a_{rad} no es constante. La aceleración radial (centrípeta) es mayor en el punto del círculo donde la rapidez es mayor.

En el movimiento circular no uniforme también hay una componente de aceleración *paralela* a la velocidad instantánea (véase las figuras 3.27*a* y 3.27*b*). Esta es la componente $a_{\parallel}$ que vimos en la sección 3.2, y aquí la llamamos a_{tan} para destacar que es *tangente* al círculo. La componente de aceleración tangencial a_{tan} es igual a la tasa de cambio de la *rapidez*. Entonces,

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \quad \text{y} \quad a_{tan} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad \text{(movimiento circular no uniforme)} \tag{3.31}$$

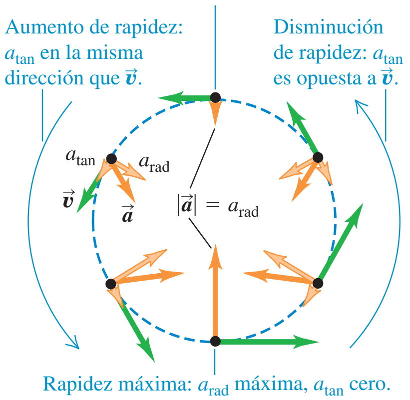
La componente tangencial tiene la misma dirección de la velocidad si la partícula está acelerando, y la dirección opuesta si está frenando (figura 3.30). Si la rapidez de la partícula es constante, $a_{tan} = 0$.

CUIDADO Movimiento circular uniforme contra no uniforme Observe que las dos cantidades

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad \text{y} \quad \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|$$

no son iguales. La primera, igual a la aceleración tangencial, es la tasa de cambio de la rapidez; es igual a cero siempre que una partícula se mueve con rapidez constante, incluso cuando cambia la dirección de su movimiento (como en el movimiento circular *uniforme*). La segunda es la magnitud de la aceleración vectorial; es igual a cero solo cuando el *vector* aceleración es cero, es decir, cuando la partícula se mueve en línea recta con rapidez constante. En el movimiento circular *uniforme* $|d\vec{v}/dt| = a_{rad} = v^2/r$; en el movimiento circular *no uniforme* también existe una componente tangencial de la aceleración, de manera que $|d\vec{v}/dt| = \sqrt{a_{rad}^2 + a_{tan}^2}$.

3.30 Partícula que se mueve en un lazo vertical, como un carrito de montaña rusa, con rapidez variable.



Evalúe su comprensión de la sección 3.4 Suponga que la partícula de la figura 3.30 experimenta una aceleración cuatro veces mayor en la parte inferior del lazo que en la parte superior del mismo. En comparación con la rapidez en la parte superior del lazo, ¿la rapidez en la parte inferior del lazo es **i.** $\sqrt{2}$ veces mayor; **ii.** 2 veces mayor; **iii.** $2\sqrt{2}$ veces mayor; **iv.** 4 veces mayor; o **v.** 16 veces mayor?



3.5 Velocidad relativa

Sin duda, usted ha observado que un automóvil que avanza lentamente parece moverse hacia atrás cuando usted lo rebasa. En general, si dos observadores miden la velocidad de un cuerpo en movimiento, obtienen diferentes resultados si uno de ellos se mueve en relación con el otro. La velocidad que un observador determinado percibe es la velocidad *relativa* a él, o simplemente la **velocidad relativa**. La figura 3.31 muestra una situación donde la comprensión de la velocidad relativa es extremadamente importante.

Primero consideraremos la velocidad relativa en línea recta, y luego la generalizaremos para un plano.

Velocidad relativa en una dimensión

Una pasajera camina con una velocidad de 1.0 m/s por el pasillo del vagón de un ferrocarril que se mueve a 3.0 m/s (figura 3.32*a*). ¿Cuál es la velocidad de la pasajera?

Esta es una pregunta sencilla, pero no tiene una sola respuesta. Para un segundo pasajero sentado en el tren, la mujer se mueve a 1.0 m/s. Para un ciclista que está detenido junto al tren, la pasajera se mueve a 1.0 m/s + 3.0 m/s = 4.0 m/s. Un observador en otro tren que va en la dirección opuesta daría otra respuesta. Debemos especificar quién es el observador y dar la velocidad *relativa* a él. La velocidad de la pasajera relativa al tren es 1.0 m/s, la velocidad relativa al ciclista es 4.0 m/s, etcétera. Cada observador, equipado en principio con un metro y un cronómetro, constituye lo que llamamos un **marco de referencia**. Así, un marco de referencia es un sistema de coordenadas más una escala de tiempo.

Sea A el marco de referencia del ciclista (en reposo con respecto al suelo) y B el marco de referencia del tren en movimiento. En el movimiento rectilíneo, la posición de un punto P relativa al marco de referencia A está dada por $x_{P/A}$ (la posición de P con respecto a A), y la posición de P con respecto al marco B está dada por $x_{P/B}$ (véase la figura 3.32*b*). La distancia del origen de B respecto al origen de A es $x_{B/A}$. La figura 3.32*b* indica que

$$x_{P/A} = x_{P/B} + x_{B/A} \qquad (3.32)$$

En palabras, la coordenada de P en relación con A es igual a la coordenada de P en relación con B más la coordenada de B en relación con A.

La velocidad de P relativa al marco A, denotada con $v_{P/A\text{-}x}$, es la derivada de $x_{P/A}$ con respecto al tiempo. Las otras velocidades se obtienen de igual manera, así que la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (3.32) nos da la relación entre las velocidades:

$$\frac{dx_{P/A}}{dt} = \frac{dx_{P/B}}{dt} + \frac{dx_{B/A}}{dt} \qquad \text{o bien,}$$

$$v_{P/A\text{-}x} = v_{P/B\text{-}x} + v_{B/A\text{-}x} \qquad \text{(velocidad relativa en una línea)} \qquad (3.33)$$

Volviendo al caso de la pasajera en el tren de la figura 3.32, vemos que A es el marco de referencia del ciclista, B es el marco de referencia del tren y el punto P representa a la mujer. Usando la notación anterior, tenemos

$$v_{P/B\text{-}x} = +1.0 \text{ m/s} \qquad v_{B/A\text{-}x} = +3.0 \text{ m/s}$$

De acuerdo con la ecuación (3.33), la velocidad $v_{P/A}$ de la pasajera relativa al ciclista es

$$v_{P/A\text{-}x} = +1.0 \text{ m/s} + 3.0 \text{ m/s} = +4.0 \text{ m/s}$$

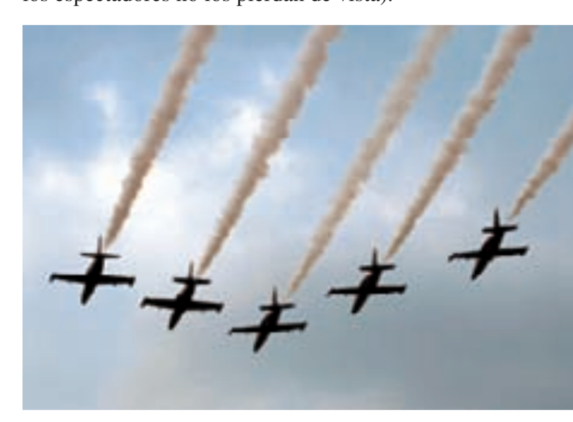
como ya sabíamos.

En este ejemplo, ambas velocidades van hacia la derecha, y hemos tomado esta dirección como positiva. Si la pasajera camina hacia la *izquierda* en relación con el tren, entonces, $v_{P/B\text{-}x} = -1.0$ m/s, y su velocidad relativa al ciclista es $v_{P/A\text{-}x} = -1.0$ m/s + 3.0 m/s = +2.0 m/s. La suma de la ecuación (3.33) siempre es algebraica, y cualquiera o todas las velocidades pueden ser negativas.

Si la pasajera se asoma por la ventana, le parecerá que el ciclista estacionario se mueve hacia atrás; llamamos $v_{A/P\text{-}x}$ a la velocidad del ciclista relativa a ella. Es evidente que esta es el negativo de la velocidad de la *pasajera* en relación con el ciclista, $v_{P/A\text{-}x}$. En general, si A y B son dos puntos o marcos de referencia cualesquiera,

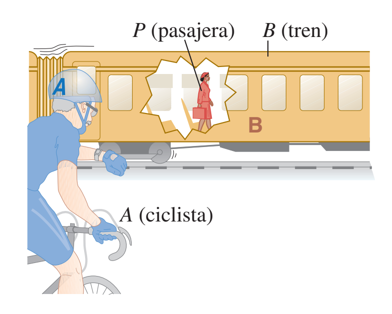
$$v_{A/B\text{-}x} = -v_{B/A\text{-}x} \qquad (3.34)$$

3.31 Los pilotos de acrobacias aéreas enfrentan un complicado problema de velocidades relativas. Deben estar pendientes de su movimiento en relación con el aire (y así mantener un flujo suficiente de aire sobre las alas para la sustentación), su movimiento en relación con los otros aviones (para mantener una formación cerrada sin chocar) y su movimiento en relación con el público (para que los espectadores no los pierdan de vista).

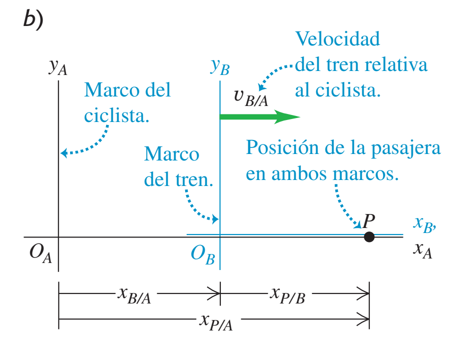


3.32 *a*) Una pasajera camina dentro de un tren. *b*) La posición de la mujer relativa al marco de referencia del ciclista y al marco de referencia del tren.

a)



b)



Estrategia para resolver problemas 3.2 Velocidad relativa



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Siempre que lea la frase "velocidad relativa a" o "velocidad con respecto a", seguramente le resultarán útiles los conceptos de velocidad relativa.

PLANTEAR *el problema:* Dibuje e identifique todos los marcos de referencia del problema. Cada cuerpo en movimiento tiene su propio marco de referencia; además, casi siempre se tiene que incluir el marco de referencia de la superficie terrestre. (Enunciados como "el automóvil viaja al norte a 90 km/h" se refieren implícitamente a la velocidad del auto relativa a la superficie terrestre). Use los títulos para identificar la incógnita. Por ejemplo, si quiere obtener la velocidad de un automóvil (C) con respecto a un autobús (B), la incógnita es $v_{C/B\text{-}x}$.

EJECUTAR *la solución:* Despeje la incógnita empleando la ecuación (3.33). (Si las velocidades no tienen la misma dirección, será preciso usar la forma vectorial de esta ecuación, que deduciremos más adelante en esta misma sección). Es importante observar el orden de los dobles subíndices en la ecuación (3.33): $v_{B/A\text{-}x}$ significa "velocidad de B relativa a A". Estos subíndices obedecen a un tipo de álgebra, como muestra la ecuación (3.33). Si consideramos a cada uno como una fracción, la fracción del miembro izquierdo es el *producto* de las fracciones del miembro derecho: $P/A = (P/B)(B/A)$. Se puede aplicar esta regla a cualquier cantidad de marcos de referencia. Por ejemplo, si hay tres marcos de referencia distintos A, B y C, la ecuación (3.33) se convierte en

$$v_{P/A\text{-}x} = v_{P/C\text{-}x} + v_{C/B\text{-}x} + v_{B/A\text{-}x}$$

EVALUAR *la respuesta:* Esté pendiente de los signos menos (−) en su respuesta. Si la incógnita es la velocidad de un automóvil relativa a un autobús ($v_{C/B\text{-}x}$), asegúrese de no haber calculado por equivocación la velocidad del *autobús* relativa al *automóvil* ($v_{B/C\text{-}x}$). Si cometió este error, la ecuación (3.34) le dará la respuesta correcta.

Ejemplo 3.13 Velocidad relativa en un camino recto

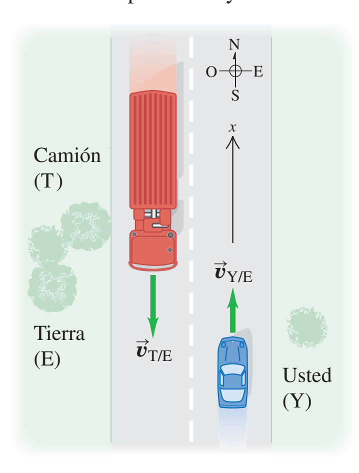


Usted viaja al norte en un camino recto de dos carriles con rapidez constante de 88 km/h. Un camión que viaja con rapidez constante de 104 km/h se acerca a usted en el otro carril (figura 3.33). Obtenga *a*) la velocidad del camión relativa a usted y *b*) su velocidad relativa al camión. *c*) ¿Cómo cambian las velocidades relativas una vez que los dos vehículos se han pasado? Considere este problema como unidimensional.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En este problema sobre velocidades relativas en una recta, hay tres marcos de referencia: usted (Y), el camión (T) y la superficie de la Tierra (E). Fijemos la dirección positiva hacia el norte (figura 3.33). Entonces, su velocidad relativa a la Tierra es $v_{Y/E\text{-}x} = +88$ km/h. En un principio, el camión se acerca a usted, así que debe ir hacia el sur, y su velocidad relativa a la Tierra es $v_{T/E\text{-}x} = -104$ km/h. Las incógnitas de los incisos *a*) y *b*) son $v_{T/Y\text{-}x}$ y $v_{Y/T\text{-}x}$, respectivamente. Utilizaremos la ecuación (3.33) para obtener la primera incógnita, y la ecuación (3.34) para obtener la segunda.

3.33 Marcos de referencia para usted y el camión.



EJECUTAR: *a*) Para obtener $v_{T/Y\text{-}x}$, escribimos la ecuación (3.33) para la velocidad conocida $v_{T/E\text{-}x}$ y reacomodamos:

$$v_{T/E\text{-}x} = v_{T/Y\text{-}x} + v_{Y/E\text{-}x}$$
$$v_{T/Y\text{-}x} = v_{T/E\text{-}x} - v_{Y/E\text{-}x}$$
$$= -104 \text{ km/h} - 88 \text{ km/h} = -192 \text{ km/h}$$

El camión se desplaza a 192 km/h en la dirección negativa (al sur) en relación con usted.

b) De acuerdo con la ecuación (3.34),

$$v_{Y/T\text{-}x} = -v_{T/Y\text{-}x} = -(-192 \text{ km/h}) = +192 \text{ km/h}$$

Usted se desplaza a 192 km/h en la dirección positiva (al norte) en relación con el camión.

c) Las velocidades relativas *no* cambian después de que los vehículos se pasan. Las *posiciones* relativas de los cuerpos no importan. Después de que el camión lo pasa, aún se desplaza a 192 km/h hacia el sur en relación con usted, pero ahora se aleja en vez de acercarse.

EVALUAR: Para comprobar la respuesta del inciso *b*), se usa la ecuación (3.33) directamente en la forma $v_{Y/T\text{-}x} = v_{Y/E\text{-}x} + v_{E/T\text{-}x}$. (La velocidad de la Tierra relativa al camión es opuesta a la velocidad del camión con respecto a la Tierra: $v_{E/T\text{-}x} = -v_{T/E\text{-}x}$.) ¿Obtuvo el mismo resultado?

Velocidad relativa en dos o tres dimensiones

Podemos ampliar el concepto de velocidad relativa para incluir el movimiento en un plano o en el espacio, usando la suma vectorial para combinar velocidades. Suponga que la mujer de la figura 3.32*a* camina no por el pasillo del vagón, sino de un costado al otro, con rapidez de 1.0 m/s (figura 3.34*a*). Nuevamente podemos describir la posición P de la pasajera en dos marcos de referencia distintos: A para el observador

detenido al lado del tren y B para el tren en movimiento; pero en lugar de las coordenadas x usamos vectores de posición $\vec{r}$ porque el problema es bidimensional. Entonces, como muestra la figura 3.34*b*,

$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{P/B} + \vec{r}_{B/A} \tag{3.35}$$

Igual que antes, tomamos la derivada con respecto al tiempo de esta ecuación para obtener una relación entre las velocidades; la velocidad de P relativa a A es $\vec{v}_{P/A} = d\vec{r}_{P/A}/dt$ y así para las demás velocidades. Obtenemos

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A} \quad \text{(velocidad relativa en el espacio)} \tag{3.36}$$

La ecuación (3.36) se conoce como *transformación galileana de la velocidad* y relaciona la velocidad de un cuerpo P con respecto al marco A y su velocidad con respecto al marco B ($\vec{v}_{P/A}$ y $\vec{v}_{P/B}$, respectivamente), con la velocidad del marco B con respecto al marco A ($\vec{v}_{B/A}$). Si las tres velocidades están en la misma línea, entonces la ecuación (3.36) se reduce a la ecuación (3.33) para las componentes de las velocidades a lo largo de esa línea.

Si el tren se desplaza a una $v_{B/A} = 3.0$ m/s en relación con el suelo y la velocidad de la mujer relativa al vagón tiene magnitud $v_{P/B} = 1.0$ m/s, su vector velocidad $\vec{v}_{P/A}$ relativo al suelo es como se muestra en la figura 3.34*c*. Entonces, el teorema de Pitágoras nos da

$$v_{P/A} = \sqrt{(3.0\ \text{m/s})^2 + (1.0\ \text{m/s})^2} = \sqrt{10\ \text{m}^2/\text{s}^2} = 3.2\ \text{m/s}$$

La figura 3.34*c* también indica que la *dirección* del vector velocidad de la mujer relativa al suelo forma un ángulo ϕ con el vector velocidad del tren $\vec{v}_{B/A}$, donde

$$\tan\phi = \frac{v_{P/B}}{v_{B/A}} = \frac{1.0\ \text{m/s}}{3.0\ \text{m/s}} \qquad \text{y} \qquad \phi = 18°$$

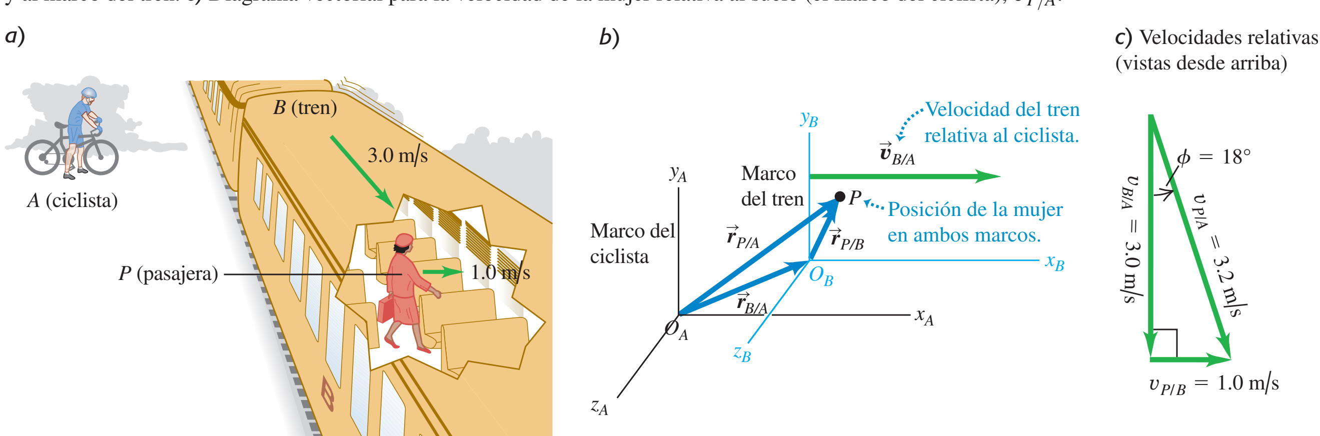
Como en el caso del movimiento rectilíneo, tenemos la regla general de que si A y B son dos puntos o marcos de referencia *cualesquiera*,

$$\vec{v}_{A/B} = -\vec{v}_{B/A} \tag{3.37}$$

La velocidad de la mujer con respecto al tren es el negativo de la velocidad del tren con respecto a ella, etcétera.

A principios del siglo XX, en su teoría especial de la relatividad, Albert Einstein demostró que la relación de la suma de velocidades establecida en la ecuación (3.36) se debe modificar cuando la rapidez se aproxima a la rapidez de la luz, que se denota con c. Resulta que si la mujer de la figura 3.32*a* pudiera caminar por el pasillo a $0.30c$ y el tren pudiera viajar a $0.90c$, entonces la rapidez de la mujer relativa al suelo no sería de $1.20c$ sino de $0.94c$. ¡Nada puede viajar más rápido que la luz! Regresaremos a la teoría especial de la relatividad en el capítulo 37 del volumen 2.

3.34 *a*) Una pasajera camina a lo ancho de un vagón de ferrocarril. *b*) Posición de la mujer relativa al marco de referencia del ciclista y al marco del tren. *c*) Diagrama vectorial para la velocidad de la mujer relativa al suelo (el marco del ciclista), $\vec{v}_{P/A}$.





Ejemplo 3.14 Vuelo con viento cruzado

La brújula de un avión indica que se dirige hacia el norte, y su velocímetro indica que vuela a 240 km/h. Si hay un viento de 100 km/h de oeste a este, ¿cuál es la velocidad del avión relativa a la Tierra?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se trata de un problema de velocidad en dos dimensiones (hacia el norte y hacia el este), así que tenemos un problema de velocidad relativa usando vectores. Nos dan la magnitud y dirección de la velocidad del avión (P) relativa al aire (A), así como la magnitud y dirección de la velocidad del viento, que es la velocidad del aire A con respecto a la Tierra (E):

$$\vec{v}_{P/A} = 240\ \text{km/h} \qquad \text{al norte}$$
$$\vec{v}_{A/E} = 100\ \text{km/h} \qquad \text{al este}$$

Usaremos la ecuación (3.36) para obtener nuestras incógnitas: la magnitud y dirección de la velocidad $\vec{v}_{P/E}$ del avión relativa a la Tierra.

EJECUTAR: Usando la ecuación (3.36), tenemos

$$\vec{v}_{P/E} = \vec{v}_{P/A} + \vec{v}_{A/E}$$

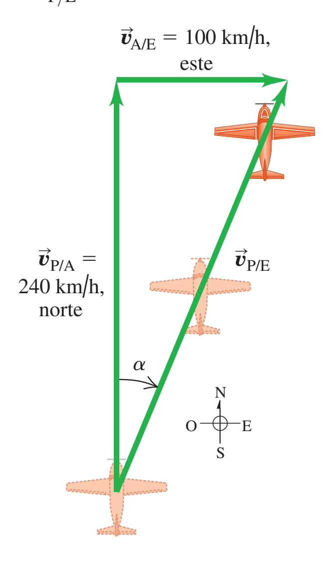
La figura 3.35 muestra las tres velocidades relativas en el triángulo rectángulo obtenido de esta suma vectorial; las incógnitas son la rapidez $v_{P/E}$ y el ángulo α. Del diagrama obtenemos

$$v_{P/E} = \sqrt{(240\ \text{km/h})^2 + (100\ \text{km/h})^2} = 260\ \text{km/h}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{100\ \text{km/h}}{240\ \text{km/h}}\right) = 23°\ \text{E del N}$$

EVALUAR: Se pueden verificar los resultados haciendo mediciones a escala del dibujo de la figura 3.35. El viento lateral aumenta la rapidez del avión relativa al suelo, pero desvía a la nave de su curso.

3.35 El avión apunta al norte, pero el viento sopla al este, dando la velocidad resultante $\vec{v}_{P/E}$ relativa a la Tierra.





Ejemplo 3.15 Corrección por viento cruzado

Considerando el viento y la rapidez del avión del ejemplo 3.14, ¿qué dirección debería tomar el piloto para viajar al norte? ¿Cuál será su velocidad relativa a la Tierra?

SOLUCIÓN

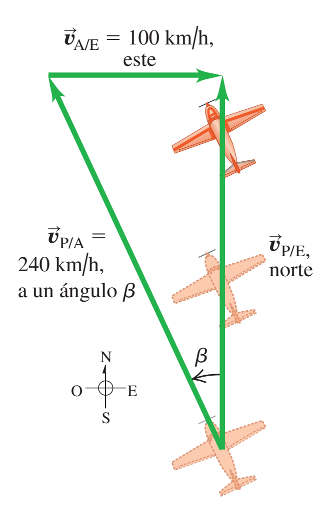
IDENTIFICAR y PLANTEAR: Como en el ejemplo 3.14, este es un problema de velocidad relativa con vectores. La figura 3.36 es un dibujo a escala de la situación. Nuevamente, los vectores se suman de acuerdo con la ecuación (3.36) y se forma un triángulo rectángulo:

$$\vec{v}_{P/E} = \vec{v}_{P/A} + \vec{v}_{A/E}$$

Como muestra la figura 3.36, el piloto apunta la nariz del avión con un ángulo β hacia el viento para compensar su efecto. Este ángulo, que nos da la dirección del vector $\vec{v}_{P/A}$ (la velocidad del avión relativa al aire), es una de nuestras incógnitas. La otra es la rapidez del avión sobre el suelo, que es la magnitud del vector $\vec{v}_{P/E}$ (la velocidad del avión relativa a la Tierra). Veamos las cantidades que conocemos y las que desconocemos:

$$\vec{v}_{P/E} = \text{magnitud desconocida} \qquad \text{al norte}$$
$$\vec{v}_{P/A} = 240\ \text{km/h} \qquad \text{dirección desconocida}$$
$$\vec{v}_{A/E} = 100\ \text{km/h} \qquad \text{al este}$$

3.36 El piloto debe apuntar el avión en la dirección del vector $\vec{v}_{P/A}$ para viajar al norte en relación con la Tierra.



Podemos calcular las incógnitas empleando la figura 3.36 y trigonometría.

EJECUTAR: Por la figura 3.36, la rapidez $v_{P/E}$ y el ángulo β son

$$v_{P/E} = \sqrt{(240\ \text{km/h})^2 - (100\ \text{km/h})^2} = 218\ \text{km/h}$$

$$\beta = \arcsen\left(\frac{100\ \text{km/h}}{240\ \text{km/h}}\right) = 25°$$

El piloto debe dirigirse 25° al oeste del norte, y su rapidez con respecto al suelo es entonces de 218 km/h.

EVALUAR: Observe que había dos incógnitas, la magnitud de un vector y la dirección de un vector, tanto en este ejemplo como en el 3.14. La diferencia es que, en el ejemplo 3.14, la magnitud y dirección se referían al *mismo* vector ($\vec{\boldsymbol{v}}_{P/E}$); en tanto que en este ejemplo se refieren a vectores *distintos* ($\vec{\boldsymbol{v}}_{P/E}$ y $\vec{\boldsymbol{v}}_{P/A}$).

Mientras se espera que un *viento de frente* reduzca la rapidez de un avión en relación con el suelo, este ejemplo demuestra que un *viento cruzado* también lo hace. Es una triste realidad de la industria aeronáutica.

Evalúe su comprensión de la sección 3.5 Suponga que la nariz de un avión apunta al este y que la nave tiene una velocidad de vuelo de 150 km/h. Debido al viento, el avión se mueve al *norte* en relación con el suelo y su rapidez relativa al suelo es de 150 km/h. ¿Cuál es la velocidad del aire relativa a la Tierra? **i.** 150 km/h de este a oeste; **ii.** 150 km/h de sur a norte; **iii.** 150 km/h de sureste a noroeste; **iv.** 212 km/h de este a oeste; **v.** 212 km/h de sur a norte; **vi.** 212 km/h de sureste a noroeste; **vii.** no hay velocidad del aire posible que cause esto.

MP



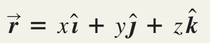
CAPÍTULO 3 RESUMEN

Vectores de posición, velocidad y aceleración: El vector de posición $\vec{r}$ de un punto P en el espacio es el vector del origen a P. Sus componentes son las coordenadas x, y y z.

El vector velocidad media $\vec{v}_{med}$ durante el intervalo Δt es el desplazamiento $\Delta\vec{r}$ (el cambio del vector de posición $\vec{r}$) dividido entre Δt. El vector velocidad instantánea $\vec{v}$ es la derivada de $\vec{r}$, con respecto al tiempo, y sus componentes son las derivadas de x, y y z con respecto al tiempo. La rapidez instantánea es la magnitud de $\vec{v}$. La velocidad $\vec{v}$ de una partícula siempre es tangente a la trayectoria de la partícula. (Véase el ejemplo 3.1).

El vector aceleración media $\vec{a}_{med}$ durante el intervalo de tiempo Δt es igual a $\Delta\vec{v}$ (el cambio en el vector velocidad $\vec{v}$) dividido entre Δt. El vector aceleración instantánea $\vec{a}$ es la derivada de $\vec{v}$, con respecto al tiempo, y sus componentes son las derivadas de v_x, v_y y v_z con respecto al tiempo. (Véase el ejemplo 3.2).

La componente de aceleración paralela a la dirección de la velocidad instantánea afecta la rapidez; en tanto que la componente de $\vec{a}$ perpendicular a $\vec{v}$ afecta la dirección del movimiento. (Véase los ejemplos 3.3 y 3.4).



$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \qquad (3.1)$$

$$\vec{v}_{med} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (3.2)$$

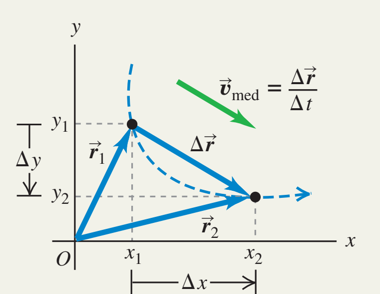
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (3.3)$$

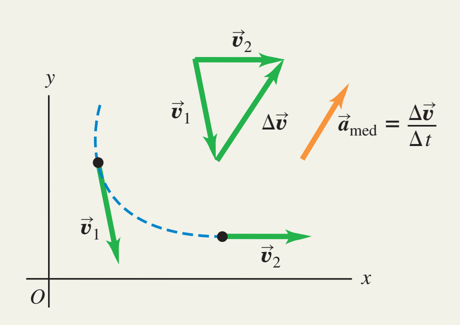
$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad (3.4)$$

$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (3.8)$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (3.9)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \qquad (3.10)$$





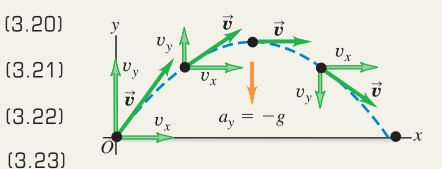
Movimiento de proyectiles: En el movimiento de proyectiles sin resistencia del aire, $a_x = 0$ y $a_y = -g$. Las coordenadas y componentes de la velocidad son funciones sencillas del tiempo, y la forma de la trayectoria siempre es una parábola. Normalmente, el origen se coloca en la posición inicial del proyectil. (Véase los ejemplos 3.5 a 3.10).

$$x = (v_0 \cos\alpha_0)t \qquad (3.20)$$

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad (3.21)$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0 \qquad (3.22)$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 - gt \qquad (3.23)$$

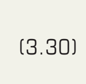


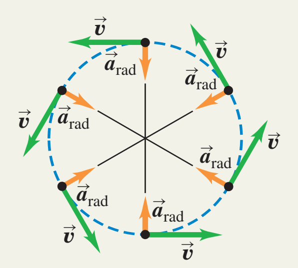
Movimiento circular uniforme y no uniforme: Cuando una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio R con rapidez constante v (movimiento circular uniforme), su aceleración $\vec{a}$ está dirigida hacia el centro del círculo y es perpendicular a $\vec{v}$. La magnitud a_{rad} de la aceleración se puede expresar en términos de v y R, o en términos de R y el periodo T (el tiempo que tarda la partícula en dar una vuelta), donde $v = 2\pi R/T$. (Véase los ejemplos 3.11 y 3.12).

Si la rapidez en un movimiento circular no es constante (movimiento circular no uniforme), habrá una componente radial de $\vec{a}$ dada por la ecuación (3.28) o la ecuación (3.30), pero también habrá una componente de $\vec{a}$ paralela (tangencial) a la trayectoria; esta componente tangencial es igual a la tasa de cambio de la rapidez, dv/dt.

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \qquad (3.28)$$

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \qquad (3.30)$$





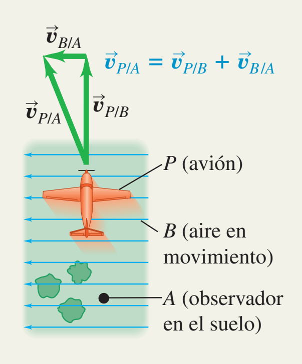
Velocidad relativa: Cuando un cuerpo P se mueve en relación con un cuerpo (o marco de referencia) B, y B se mueve en relación con A, denotamos la velocidad de P relativa a B con $\vec{v}_{P/B}$, la velocidad de P relativa a A con $\vec{v}_{P/A}$, y la velocidad de B relativa a A con $\vec{v}_{B/A}$. Si todas estas velocidades están en la misma línea, sus componentes sobre la línea están relacionadas por la ecuación (3.33). De forma más general, estas velocidades están relacionadas por la ecuación (3.36). (Véase los ejemplos 3.13 a 3.15).

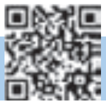
$$v_{P/A\text{-}x} = v_{P/B\text{-}x} + v_{B/A\text{-}x} \qquad (3.33)$$

(velocidad relativa en una línea)

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A} \qquad (3.36)$$

(velocidad relativa en el espacio)

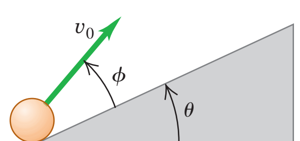




PROBLEMA PRÁCTICO Lanzamiento hacia arriba de un plano inclinado

Se dispara una esfera con una velocidad inicial v_0 a un ángulo ϕ arriba de la superficie de un plano, que a la vez, está inclinado un ángulo θ por encima de la horizontal (figura 3.37). *a*) Calcule la distancia, medida a lo largo del plano inclinado, del punto de lanzamiento al punto donde la esfera golpea el plano inclinado. *b*) ¿Cuál es el ángulo ϕ que da el alcance máximo, medido a lo largo del plano inclinado? Ignore la resistencia del aire.

3.37 Lanzamiento de una esfera en una rampa inclinada.



GUÍA DE SOLUCIÓN



Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.

IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Como no hay resistencia del aire, este es un problema de movimiento de proyectiles. El objetivo es determinar el punto donde la trayectoria parabólica de la esfera cruza el plano inclinado.
2. Elija los ejes *x* y *y* así como la posición del origen. Si tiene duda, use las sugerencias incluidas en la Estrategia de solución de problemas 3.1 de la sección 3.3.
3. En las ecuaciones de proyectiles de la sección 3.3, el ángulo de disparo α_0 se mide a partir de la horizontal. ¿Cuál es este ángulo en términos de θ y ϕ? ¿Cuáles son las componentes iniciales *x* y *y* de la velocidad inicial de la esfera?
4. Será necesario escribir una ecuación que relacione *x* y *y* de los puntos a lo largo del plano inclinado. ¿Cuál es esta ecuación? (Esto es un asunto de geometría y trigonometría, no de física).

EJECUTAR

5. Escriba las ecuaciones de las coordenadas *x* y *y* de la esfera en función del tiempo *t*.
6. Cuando la esfera golpea el plano inclinado, *x* y *y* están relacionadas por la ecuación que se obtuvo en el paso 4. Con base en esto, ¿en qué tiempo *t* golpea la esfera el plano inclinado?
7. Con base en la respuesta del paso 6, ¿en qué coordenadas *x* y *y* cae la esfera sobre el plano inclinado? ¿A qué distancia se encuentra este punto del punto de lanzamiento?
8. ¿Qué valor de ϕ proporciona la distancia *máxima* del punto de lanzamiento al punto de llegada? (Use sus conocimientos de cálculo).

EVALUAR

9. Verifique sus respuestas para el caso en que $\theta = 0$, lo que corresponde a que el plano sea horizontal en lugar de inclinado. (Usted ya conoce las respuestas para este caso. ¿Sabe por qué?).

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P3.1 Un péndulo simple (una masa que oscila en el extremo de una cuerda) oscila en un arco circular. ¿Qué dirección tiene la aceleración de la masa en los extremos del arco? ¿Y en el punto medio? En cada caso, explique cómo obtuvo su respuesta.

P3.2 Vuelva a dibujar la figura 3.11*a* como si $\vec{a}$ fuera antiparalela a $\vec{v}_1$. ¿La partícula se mueve en línea recta? ¿Qué pasa con la rapidez?

P3.3 Un proyectil se mueve en una trayectoria parabólica sin resistencia del aire. ¿Hay un punto donde $\vec{a}$ sea paralela a $\vec{v}$? ¿Y perpendicular a $\vec{v}$? Explique su respuesta.

P3.4 Cuando se dispara un rifle a un blanco lejano, el cañón no se apunta exactamente al blanco. ¿Por qué? ¿El ángulo de corrección depende de la distancia al blanco?

P3.5 En el instante en que usted dispara una bala horizontalmente con un rifle, deja caer otra bala desde la altura del cañón. Si no hay resistencia del aire, ¿qué bala llegará primero al suelo? Explique su respuesta.

P3.6 Se deja caer un paquete desde un avión que vuela en línea recta con altitud y rapidez constantes. Si se ignora la resistencia del aire, ¿qué trayectoria del paquete observaría el piloto? ¿Y una persona situada en el suelo?

P3.7 Dibuje las seis gráficas de las componentes *x* y *y* de posición, velocidad y aceleración contra el tiempo, para el movimiento de un proyectil con $x_0 = y_0 = 0$ y $0 < \alpha_0 < 90°$.

P3.8 Si una rana puede saltar con la misma rapidez inicial sin importar la dirección (hacia adelante o hacia arriba), ¿cuál es la altura vertical máxima a la cual puede saltar en relación con su alcance horizontal máximo, $R_{\text{máx}} = v_0^2/g$?

P3.9 Se dispara un proyectil hacia arriba con un ángulo θ por encima de la horizontal con una rapidez inicial v_0. Al llegar a su máxima altura, ¿cuáles son su vector velocidad, su rapidez y su vector aceleración?

P3.10 En el movimiento circular uniforme, ¿cuáles son la velocidad *media* y la aceleración *media* durante una revolución? Explique su respuesta.

P3.11 En el movimiento circular uniforme, ¿cómo cambia la aceleración cuando la rapidez aumenta al triple? ¿Y cuando el radio se reduce por un factor de 2, es decir, a la mitad?

P3.12 En el movimiento circular uniforme, la aceleración es perpendicular a la velocidad en todo instante. ¿Sigue siendo válido esto cuando el movimiento no es uniforme, es decir, cuando la rapidez no es constante?

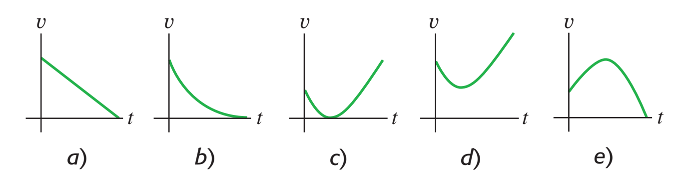
P3.13 Incluso sin viento, las gotas de lluvia suelen dejar rayas diagonales en las ventanas laterales de un automóvil en movimiento. ¿Por qué? ¿Es la misma explicación para las rayas diagonales en el parabrisas?

P3.14 En una tormenta con viento fuerte, ¿qué determina la orientación óptima para sostener un paraguas?

P3.15 Imagine que está en la ribera oeste de un río que fluye al norte a 1.2 m/s. Usted nada con rapidez de 1.5 m/s relativa al agua, y el río tiene 60 m de ancho. ¿Qué trayectoria relativa a la Tierra le permitirá cruzar el río en el menor tiempo? Explique su razonamiento.

P3.16 Se lanza una piedra hacia el aire con un ángulo por encima de la horizontal, y se ignora la resistencia del aire. ¿Cuál de las gráficas en la figura P3.16 describe mejor la *rapidez* v de la piedra en función del tiempo t mientras está en el aire?

Figura **P3.16**



EJERCICIOS

Sección 3.1 Vectores de posición y velocidad

3.1 • Una ardilla tiene coordenadas x y y (1.1 m, 3.4 m) en $t_1 = 0$, y coordenadas (5.3 m, –0.5 m) en $t_2 = 3.0$ s. Para este intervalo, obtenga *a*) las componentes de la velocidad media, y *b*) la magnitud y dirección de esta velocidad.

3.2 • Un rinoceronte se encuentra en el origen de las coordenadas en $t_1 = 0$. Para el intervalo de $t_1 = 0$ a $t_2 = 12.0$ s, la velocidad media del animal tiene una componente x de -3.8 m/s y una componente y de 4.9 m/s. En $t_2 = 12.0$ s, *a*) ¿qué coordenadas x y y tiene el rinoceronte? *b*) ¿A qué distancia está del origen?

3.3 •• **CALC** Un diseñador de páginas Web crea una animación en la que un punto en una pantalla de computadora tiene una posición $\vec{r} = [4.0\text{ cm} + (2.5\text{ cm/s}^2)t^2]\hat{\imath} + (5.0\text{ cm/s})t\hat{\jmath}$. *a*) Determine la magnitud y dirección de la velocidad media del punto entre $t = 0$ y $t = 2.0$ s. *b*) Calcule la magnitud y dirección de la velocidad instantánea en $t = 0$, en $t = 1.0$ s y en $t = 2.0$ s. *c*) Dibuje la trayectoria del punto de $t = 0$ a $t = 2.0$ s, y muestre las velocidades calculadas en el inciso *b*).

3.4 • **CALC** La posición de una ardilla que corre por un parque está dada por $\vec{r} = [(0.280\text{ m/s})t + (0.0360\text{ m/s}^2)t^2]\hat{\imath} + (0.0190\text{ m/s}^3)t^3\hat{\jmath}$. *a*) ¿Cuáles son $v_x(t)$ y $v_y(t)$, las componentes x y y de la velocidad de la ardilla, en función del tiempo? *b*) En $t = 5.00$ s ¿a qué distancia está la ardilla de su posición inicial? *c*) En $t = 5.00$ s, ¿cuáles son la magnitud y dirección de la velocidad de la ardilla?

Sección 3.2 El vector aceleración

3.5 • Un jet vuela con altitud constante. En el instante $t_1 = 0$, tiene componentes de velocidad $v_x = 90$ m/s, $v_y = 110$ m/s. En $t_2 = 30.0$ s, las componentes son $v_x = -170$ m/s, $v_y = 40$ m/s. *a*) Dibuje los vectores de velocidad en t_1 y t_2. ¿En qué difieren? Para este intervalo, calcule *b*) las componentes de la aceleración media, y *c*) la magnitud y dirección de dicha aceleración.

3.6 •• Un perro que corre en un campo tiene componentes de velocidad $v_x = 2.6$ m/s y $v_y = -1.8$ m/s en $t_1 = 10.0$ s. Para el intervalo de $t_1 = 10.0$ s a $t_2 = 20.0$ s, la aceleración media del perro tiene magnitud de 0.45 m/s^2 y dirección de 31.0° medida del eje $+x$ al eje $+y$. En $t_2 = 20.0$ s, *a*) ¿qué componentes x y y tiene la velocidad del perro? *b*) ¿Qué magnitud y dirección tiene esa velocidad? *c*) Dibuje los vectores velocidad en t_1 y t_2. ¿En qué difieren?

3.7 •• **CALC** Las coordenadas de un ave que vuela en el plano xy están dadas por $x(t) = \alpha t$ y $y(t) = 3.0\text{ m} - \beta t^2$, donde $\alpha = 2.4$ m/s y $\beta = 1.2$ m/s^2. *a*) Dibuje la trayectoria del ave entre $t = 0$ y $t = 2.0$ s. *b*) Calcule los vectores velocidad y aceleración del ave en función de t. *c*) Obtenga la magnitud y dirección de la velocidad y aceleración del ave en $t = 2.0$ s. *d*) Dibuje los vectores velocidad y aceleración en $t = 2.0$ s. En este instante, ¿el ave acelera, frena o su rapidez instantánea no cambia? ¿Está dando vuelta? Si es así, ¿en qué dirección?

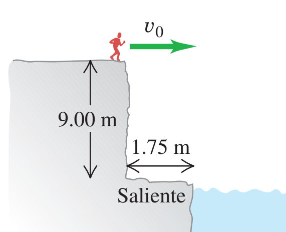
Sección 3.3 Movimiento de proyectiles

3.8 • **CALC** Un automóvil controlado a distancia se mueve en un estacionamiento vacío. La velocidad del automóvil en función del tiempo está dada por $\vec{v} = [5.00\text{ m/s} - (0.0180\text{ m/s}^3)t^2]\hat{\imath} + [2.00\text{ m/s} + (0.550\text{ m/s}^2)t]\hat{\jmath}$. *a*) ¿Cuáles son $a_x(t)$ y $a_y(t)$, las componentes x y y de la aceleración del auto en función del tiempo? *b*) ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la velocidad en $t = 8.00$ s? *c*) ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la aceleración en $t = 8.00$ s?

3.9 • Un libro de física que se desliza sobre una mesa horizontal a 1.10 m/s cae y llega al piso en 0.350 s. Ignore la resistencia del aire. Calcule *a*) la altura de la mesa con respecto al piso; *b*) la distancia horizontal del borde de la mesa al punto donde cae el libro; *c*) las componentes horizontal y vertical así como la magnitud y dirección de la velocidad del libro justo antes de tocar el piso. *d*) Dibuje las gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.10 •• Una intrépida nadadora de 510 N de peso se lanza desde un risco con un impulso horizontal, como se muestra en la figura E3.10. ¿Qué rapidez mínima debe tener al saltar de lo alto del risco para no chocar con la saliente en la base, que tiene una anchura de 1.75 m y está 9.00 m abajo del borde del risco?

Figura **E3.10**



3.11 • Dos grillos, Chirpy y Milada, saltan desde lo alto de un acantilado vertical. Chirpy simplemente se deja caer y llega al suelo en 3.50 s, en tanto que Milada salta horizontalmente con una rapidez inicial de 95.0 cm/s. ¿A qué distancia de la base del acantilado tocará Milada el suelo?

3.12 • Un mariscal de campo novato lanza un balón con una componente de velocidad inicial hacia arriba de 12.0 m/s y una componente de velocidad horizontal de 20.0 m/s. Ignore la resistencia del aire. *a*) ¿Cuánto tiempo tardará el balón en llegar al punto más alto de la trayectoria? *b*) ¿A qué altura está este punto? *c*) ¿Cuánto tiempo pasa (desde que se lanza) para que el balón vuelva a su nivel original? ¿Cómo se compara este tiempo con el calculado en el inciso *a*)? *d*) ¿Qué distancia horizontal viaja el balón en este tiempo? *e*) Dibuje las gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.13 •• **Salto del río I.** Un automóvil que viaja horizontalmente llega al borde de un puente durante una tormenta y el conductor descubre que el río arrasó el puente. El conductor debe llegar al otro lado, así que decide saltar la brecha con su automóvil. La orilla en la que se encuentra está 21.3 m arriba del río, mientras que la orilla opuesta está a solo 1.8 m sobre las aguas. El río es un torrente embravecido con una anchura de 61.0 m. *a*) ¿Qué tan rápido deberá ir el auto cuando llegue al borde para saltar el río y llegar a salvo al otro lado? *b*) ¿Qué rapidez tendrá el auto justo antes de que aterrice?

3.14 • **BIO** **El campeón saltador del mundo de los insectos.** El *Philaenus spumarius*, tiene el récord mundial de salto entre los insec-

tos. Con un salto a un ángulo de 58.0° arriba de la horizontal, algunos de estos bichos pequeños alcanzan una altura máxima de 58.7 cm arriba del nivel del suelo. (Véase la revista *Nature*, vol. 424, del 31 de julio de 2003, p. 509). *a*) ¿Cuál es la velocidad de despegue en este salto? *b*) ¿Cuál es la distancia horizontal que cubrió el insecto en este récord mundial de salto?

3.15 •• Dentro de una nave espacial en reposo sobre la Tierra, una pelota rueda desde la parte superior de una mesa horizontal y cae al piso a una distancia D de la pata de la mesa. Esta nave espacial ahora desciende en el inexplorado planeta X. El comandante, el Capitán Curioso, hace rodar la misma pelota desde la misma mesa con la misma rapidez inicial que en la Tierra, y se da cuenta de que la pelota cae al piso a una distancia de $2.76D$ de la pata de la mesa. ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad en el planeta X?

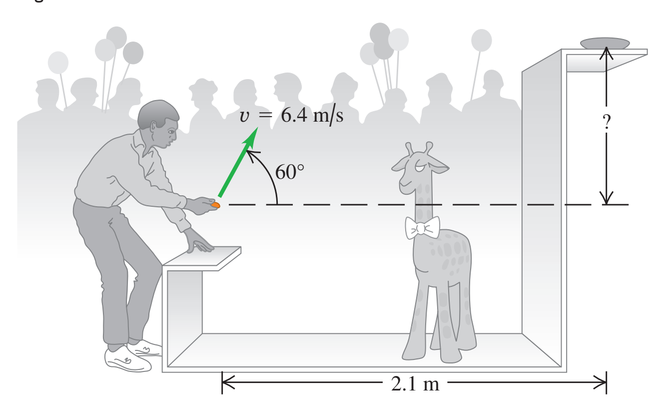
3.16 • Se dispara un proyectil desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 50.0 m/s a 60.0° por encima de la horizontal sin que sufra resistencia del aire. *a*) Determine las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial del proyectil. *b*) ¿Cuánto tarda el proyectil en alcanzar su punto más alto? *c*) Calcule su altura máxima por encima del suelo. *d*) ¿Qué tan lejos del punto de lanzamiento cae el proyectil al suelo? *e*) Determine las componentes horizontal y vertical de su aceleración y velocidad en el punto de su máxima altura.

3.17 • Un beisbolista de grandes ligas batea una pelota de modo que esta sale del bate con una rapidez de 30.0 m/s y un ángulo de 36.9° sobre la horizontal. Ignore la resistencia del aire. *a*) ¿En cuáles *dos* instantes la pelota se encuentra a 10.0 m sobre el punto en que salió del bate? *b*) Obtenga las componentes horizontal y vertical de la velocidad de la pelota en cada uno de los dos instantes calculados en el inciso *a*). *c*) ¿Qué magnitud y dirección tiene la velocidad de la pelota al regresar al nivel en el que se bateó?

3.18 • Un atleta, lanzador de bala, arroja la bala a cierta altura sobre el nivel del suelo con velocidad de 12.0 m/s, 51.0° sobre la horizontal. La bala golpea el suelo 2.08 s después. Ignore la resistencia del aire. *a*) ¿Cuáles son las componentes de la aceleración de la bala durante el vuelo? *b*) ¿Cuáles son las componentes de la velocidad de la bala al principio y al final de su trayectoria? *c*) A qué distancia horizontal llegó la bala? *d*) ¿Por qué la expresión para R del ejemplo 3.8 *no* da la respuesta correcta para el inciso *c*)? *e*) ¿A qué altura sobre el suelo se lanzó la bala? *f*) Dibuje las gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.19 •• **Gane el premio.** En una feria, se puede ganar una jirafa de peluche lanzando una moneda a un platito, el cual está sobre una repisa más arriba del punto en que la moneda sale de la mano y a una distancia horizontal de 2.1 m desde ese punto (figura E3.19). Si usted lanza la moneda con velocidad de 6.4 m/s, a un ángulo de 60° sobre la horizontal, la moneda caerá en el platito. Ignore la resistencia del aire. *a*) ¿A qué altura está la repisa sobre el punto donde se lanza la moneda? *b*) ¿Qué componente vertical tiene la velocidad de la moneda justo antes de caer en el platito?

Figura **E3.19**



3.20 •• Suponga que el ángulo de salida α_0 de la figura 3.26 es de 42.0° y la distancia d es de 3.00 m. ¿Dónde se encontrarán el dardo y el mono, si la rapidez inicial del dardo es de *a*) 12.0 m/s? *b*) ¿8.0 m/s? *c*) ¿Qué sucederá si la rapidez inicial del dardo es de 4.0 m/s? Dibuje la trayectoria en cada caso.

3.21 •• Un hombre está de pie en la azotea de un edificio de 15.0 m de altura y lanza una piedra con una velocidad de 30.0 m/s a un ángulo de 33.0° sobre la horizontal. Puede ignorar la resistencia del aire. Calcule *a*) la altura máxima que alcanza la piedra sobre la azotea; *b*) la magnitud de la velocidad de la piedra justo antes de golpear el suelo; y *c*) la distancia horizontal desde la base del edificio hasta el punto donde la piedra golpea el suelo. *d*) Dibuje las gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.22 • Los bomberos lanzan un chorro de agua a un edificio en llamas, utilizando una manguera de alta presión que imprime al agua una rapidez de 25.0 m/s al salir por la boquilla. Una vez que sale de la manguera, el agua se mueve como proyectil. Los bomberos ajustan el ángulo de elevación α de la manguera hasta que el agua tarda 3.00 s en llegar a un edificio que está a 45.0 m de distancia. Ignore la resistencia del aire y suponga que la boquilla de la manguera está a nivel del suelo. *a*) Calcule el ángulo de elevación α. *b*) Determine la rapidez y aceleración del agua en el punto más alto de su trayectoria. *c*) ¿A qué altura sobre el suelo llega el agua sobre el edificio, y con qué rapidez lo hace?

3.23 •• Un globo de 124 kg que lleva una canastilla de 22 kg desciende con velocidad constante de 20.0 m/s. Una piedra de 1.0 kg se lanza desde la canastilla con una velocidad inicial de 15.0 m/s perpendicular a la trayectoria del globo en descenso, medida en relación con una persona en reposo en la canastilla. Esa persona ve que la piedra choca contra el suelo 6.00 s después de lanzarse. Suponga que el globo continúa su descenso con la misma rapidez constante de 20.0 m/s. *a*) ¿A qué altura estaba el globo cuando se lanzó la piedra? *b*) ¿Y cuando chocó contra el suelo? *c*) En el instante en que la piedra tocó el suelo, ¿a qué distancia estaba de la canastilla? *d*) Determine las componentes horizontal y vertical de la velocidad de la piedra justo antes de chocar contra el suelo, relativas a un observador **i.** en reposo en la canastilla; **ii.** en reposo en el suelo.

Sección 3.4 Movimiento en círculo

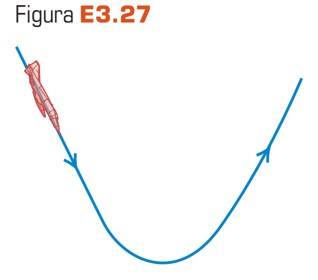
3.24 •• BIO **Mareos.** Mantenemos el equilibrio, al menos en parte, gracias a la endolinfa del oído interno. El giro de la cabeza desplaza este líquido, produciendo mareos. Suponga que un bailarín (o un patinador) está girando muy rápido a 3.0 revoluciones por segundo alrededor de un eje vertical que pasa por el centro de su cabeza. Aun cuando la distancia varía de una persona a otra, el oído interno se encuentra aproximadamente a 7.0 cm del eje de giro. ¿Cuál es la aceleración radial (en m/s^2 y en función de g) de la endolinfa?

3.25 •• La Tierra tiene 6380 km de radio y gira una vez sobre su eje en 24 h. *a*) ¿Qué aceleración radial tiene un objeto en el ecuador? Dé su respuesta en m/s^2 y como fracción de g. *b*) Si a_{rad} en el ecuador fuera mayor que g, los objetos saldrían volando hacia el espacio. (Veremos por qué en el capítulo 5). ¿Cuál tendría que ser el periodo de rotación de la Tierra para que esto sucediera?

3.26 •• Un modelo de rotor de helicóptero tiene cuatro aspas, cada una de 3.40 m de longitud desde el eje central hasta la punta. El modelo gira en un túnel de viento a 550 rpm. *a*) ¿Qué rapidez lineal tiene la punta del aspa en m/s? *b*) ¿Qué aceleración radial tiene la punta del aspa, expresada como un múltiplo de la aceleración debida a la gravedad, g?

3.27 • BIO **Desmayo de un piloto en un descenso en picada.** Un jet vuela en picada como se muestra en la figura E3.27. La parte inferior de la trayectoria es un cuarto de círculo con un radio de curvatura de 350 m. De acuerdo con pruebas médicas, los pilotos pierden la conciencia a una aceleración de 5.5g. ¿A qué rapidez (en m/s y en mph) perdería la conciencia el piloto en este descenso?

Figura **E3.27**



3.28 • El radio de la órbita terrestre alrededor del Sol (suponiendo que fuera circular) es de 1.50×10^8 km, y la Tierra la recorre en 365 días. *a*) Calcule la magnitud de la velocidad orbital de la Tierra en m/s. *b*) Calcule la aceleración radial de la Tierra hacia el Sol en m/s^2. *e*) Repita los incisos *a*) y *b*) para el movimiento del planeta Mercurio (radio orbital = 5.79×10^7 km, periodo orbital = 88.0 días).

3.29 • Una rueda de la fortuna de 14.0 m de radio gira sobre un eje horizontal en su centro (figura E3.29). La rapidez lineal de un pasajero en el borde es constante e igual a 7.00 m/s. ¿Qué magnitud y dirección tiene la aceleración del pasajero al pasar *a*) por el punto más bajo de su movimiento circular? *b*) ¿Por el punto más alto de su movimiento circular? *c*) ¿Cuánto tiempo tarda una revolución de la rueda?

Figura **E3.29**



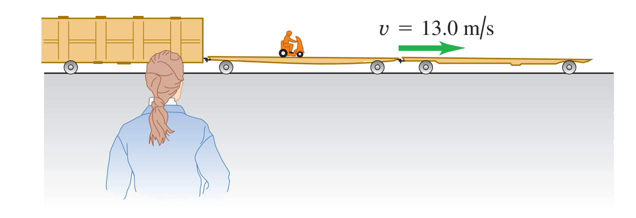
3.30 •• BIO **Hipergravedad.** En el Centro de Investigación Ames de la NASA, se utiliza el enorme centrifugador “20-G” para probar los efectos de aceleraciones muy elevadas (“hipergravedad”) sobre los pilotos y los astronautas. En este dispositivo, un brazo de 8.84 m de largo gira en torno a uno de sus extremos en un plano horizontal, mientras el astronauta se encuentra sujeto con una banda en el otro extremo. Suponga que el astronauta está alineado en el brazo con su cabeza en el extremo exterior. La aceleración máxima sostenida a la que los seres humanos se han sometido en esta máquina comúnmente es de 12.5g. *a*) ¿Qué tan rápido debe moverse la cabeza del astronauta para experimentar esta aceleración máxima? *b*) ¿Cuál es la *diferencia* entre la aceleración de su cabeza y pies, si el astronauta mide 2.00 m de altura? *c*) ¿Qué tan rápido, en rpm (rev/min), gira el brazo para producir la aceleración sostenida máxima?

Sección 3.5 Velocidad relativa

3.31 • Una “banda móvil” en un aeropuerto se mueve a 1.0 m/s y tiene 35.0 m de largo. Si una mujer entra en un extremo y camina a 1.5 m/s en relación con la banda móvil, ¿cuánto tardará en llegar al otro extremo si camina *a*) en la misma dirección en que se mueve la banda? *b*) ¿Y en la dirección opuesta?

3.32 • La plataforma de un ferrocarril viaja a la derecha con rapidez de 13.0 m/s relativa a un observador que está de pie en tierra. Alguien se mueve en motoneta sobre la plataforma (figura E3.32). ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tiene la motoneta relativa a la plataforma si su velocidad relativa al observador en el suelo es *a*) 18.0 m/s a la derecha? *b*) ¿3.0 m/s a la izquierda? *c*) ¿Cero?

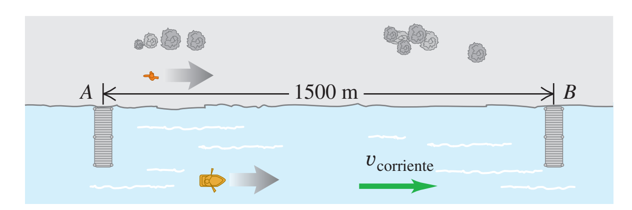
Figura **E3.32**



3.33 •• Una canoa tiene una velocidad de 0.40 m/s al sureste, relativa a la Tierra. La canoa está en un río que fluye al este a 0.50 m/s en relación con la Tierra. Calcule la velocidad (magnitud y dirección) de la canoa relativa al río.

3.34 • Dos muelles, *A* y *B*, están situados en un río; *B* está 1500 m río abajo de *A* (figura E3.34). Dos amigos deben ir de *A* a *B* y regresar. Uno rema su bote con rapidez constante de 4.00 km/h relativa al agua; el otro camina por la orilla en tierra con rapidez constante de 4.00 km/h. La velocidad del río es 2.80 km/h en la dirección de *A* a *B*. ¿Cuánto tardará cada persona en hacer el viaje redondo?

Figura **E3.34**



3.35 • **Cruce del río I.** Un río fluye al sur con rapidez de 2.0 m/s. Un hombre cruza el río en una lancha de motor con velocidad relativa al agua de 4.2 m/s al este. El río mide 800 m de ancho. *a*) ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tiene la lancha relativa a la Tierra? *b*) ¿Cuánto tiempo tarda en cruzar el río? *c*) ¿A qué distancia al sur de su punto de partida llegará a la otra orilla?

3.36 • **Cruce del río II.** *a*) ¿Qué dirección debería tomar la lancha del ejercicio 3.35 para llegar a un punto en la orilla opuesta directamente al este de su punto de partida? (La rapidez de la lancha relativa al agua sigue siendo 4.2 m/s). *b*) ¿Qué velocidad tendría la lancha relativa a la Tierra? *c*) ¿Cuánto tardaría en cruzar el río?

3.37 •• La nariz de un avión ultraligero apunta al sur, y el velocímetro indica 35 m/s. Hay un viento de 10 m/s que sopla al suroeste relativo a la Tierra. *a*) Dibuje un diagrama de suma vectorial que muestre la relación de $\vec{v}_{P/E}$ (velocidad del avión relativa a la Tierra) con los dos vectores dados. *b*) Si *x* es al este y *y* al norte, obtenga las componentes de $\vec{v}_{P/E}$. *c*) Obtenga la magnitud y dirección def $\vec{v}_{P/E}$.

3.38 •• Un piloto desea volar al oeste. Un viento de 80.0 km/h (aproximadamente 50 mi/h) sopla al sur. *a*) Si la rapidez (en aire estacionario) del avión es de 320.0 km/h (aproximadamente 200 mi/h), ¿qué dirección debe tomar el piloto? *b*) ¿Cuál es la rapidez del avión sobre el suelo? Ilustre con un diagrama vectorial.

3.39 •• BIO **Aves migratorias.** Los gansos canadienses viajan principalmente en dirección norte-sur por mucho más de mil kilómetros en algunos casos, viajando a velocidades hasta de 100 km/h aproximadamente. Si una de estas aves vuela a 100 km/h en relación con el aire,

pero hay un viento de 40 km/h que sopla de oeste a este, *a*) ¿a qué ángulo en relación con la dirección norte-sur debería volar esta ave de modo que viaje directamente hacia el sur en relación con el suelo? *b*) ¿Cuánto tiempo le tomará al ganso cubrir una distancia terrestre de 500 km de norte a sur? (*Nota:* Incluso en noches nubladas, muchas aves pueden volar usando el campo magnético de la Tierra para identificar la dirección norte-sur).

PROBLEMAS

3.40 •• Iniciando en el punto *A*, un atleta corre con una rapidez constante de 6.0 m/s alrededor de una pista circular de 100 m de diámetro, como se muestra en la figura P3.40. Obtenga las componentes *x* y *y* de la velocidad media de este corredor y la aceleración media entre los puntos *a*) *A* y *B*, *b*) *A* y *C*, *c*) *C* y *D* y *d*) *A* y *A* (una vuelta completa). *e*) Calcule la magnitud de la velocidad media del corredor entre *A* y *B*. ¿La rapidez media es igual a la magnitud de su velocidad media? ¿Por qué? *f*) ¿Cómo puede cambiar esta velocidad si está corriendo a rapidez constante?

Figura **P3.40**

3.41 • CALC Se realiza el lanzamiento de un cohete, con un ángulo específico, desde la parte superior de una torre, cuya altura es $h_0 =$ 50.0 m. A causa del diseño de los motores, sus coordenadas de posición tienen la forma $x(t) = A + Bt^2$ y $y(t) = C + Dt^3$, donde *A*, *B*, *C* y *D* son constantes. Además, la aceleración del cohete 1.00 s después del lanzamiento es $\vec{a} = (4.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath})$ m/s^2. Considere que la base de la torre es el origen de las coordenadas. *a*) Determine las constantes *A*, *B*, *C* y *D*, incluyendo sus unidades en el SI. *b*) En el instante posterior al lanzamiento del cohete, ¿cuáles son sus vectores de aceleración y velocidad? *c*) ¿Cuáles son las componentes *x* y *y* de la velocidad del cohete 10.0 s después del lanzamiento, y qué tan rápido se mueve el cohete? *d*) ¿Cuál es el vector de posición del cohete 10.0 s después del lanzamiento?

3.42 ••• CALC Un cohete de modelo defectuoso se mueve en el plano *xy* (la dirección +*y* es vertical hacia arriba). La aceleración del cohete tiene componentes dadas por $a_x(t) = \alpha t^2$ y $a_y(t) = \beta - \gamma t$, donde $\alpha = 2.50$ m/s^4, $\beta = 9.00$ m/s^2 y $\gamma = 1.40$ m/s^3. En $t = 0$ el cohete está en el origen y tiene velocidad $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\imath} + v_{0y}\hat{\jmath}$ con $v_{0x} = 1.00$ m/s y $v_{0y} = 7.00$ m/s. *a*) Calcule los vectores de velocidad y posición en función del tiempo. *b*) ¿Qué altura máxima alcanza el cohete? *c*) Dibuje la trayectoria del cohete. *d*) ¿Qué desplazamiento horizontal tiene el cohete al volver a $y = 0$?

3.43 •• CALC Si $\vec{r} = bt^2\hat{\imath} + ct^3\hat{\jmath}$, donde *b* y *c* son constantes positivas, ¿cuándo el vector velocidad forma un ángulo de 45.0° con los ejes *x* y *y*?

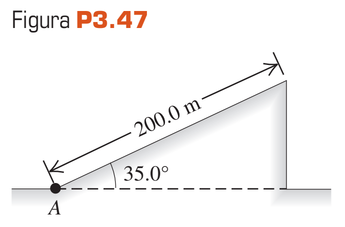
3.44 •• CALC La posición de una libélula que vuela paralela al suelo está dada en función del tiempo por $\vec{r} = [2.90\text{ m} + (0.0900\text{ m/s}^2)t^2]\hat{\imath} - (0.0150\text{ m/s}^3)t^3\hat{\jmath}$. *a*) ¿En qué instante *t* el vector velocidad del insecto forma un ángulo de 30.0º en sentido horario a partir del eje +*x*? *b*) En el tiempo calculado en el inciso *a*), ¿cuáles son la magnitud y dirección del vector aceleración del insecto?

3.45 •• PA CALC Un pequeño avión de juguete vuela en el plano *xy* paralelo al suelo. En el intervalo $t = 0$ a $t = 1.00$ s, su velocidad en función del tiempo está dada por $\vec{v} = (1.20\text{ m/s}^2)t\hat{\imath} + [12.0\text{ m/s} - (2.00\text{ m/s}^2)t]\hat{\jmath}$. ¿En qué valor de *t* la velocidad del avión es perpendicular a su aceleración?

3.46 •• CALC Una ave vuela en el plano *xy* con un vector velocidad dado por $\vec{v} = (\alpha - \beta t^2)\hat{\imath} + \gamma t\hat{\jmath}$, donde $\alpha = 2.4$ m/s, $\beta = 1.6$ m/s^3 y $\gamma = 4.0$ m/s^2. La dirección +*y* es vertical hacia arriba. En $t = 0$, el ave está en el origen. *a*) Calcule los vectores de posición y aceleración del ave en función del tiempo. *b*) ¿Qué altura (coordenada *y*) tiene el ave al volar sobre $x = 0$ por primera vez después de $t = 0$?

3.47 ••• PA Un cohete de prueba se lanza acelerándolo a 1.25 m/s^2 sobre un plano inclinado de 200.0 m, partiendo del reposo en el punto *A* (figura P3.47). El plano inclinado se eleva a 35.0° por encima de la horizontal, y en el instante en que el cohete sale del plano, sus motores se apagan y queda sujeto solamente a la gravedad (se puede ignorar la resistencia del aire). Determine *a*) la altura máxima sobre el suelo a la que llega el cohete, y *b*) el alcance máximo horizontal del cohete más allá del punto *A*.

Figura **P3.47**



3.48 • Atletismo en Marte. En el salto de longitud, una atleta se lanza en un ángulo por encima del suelo y cae a la misma altura, tratando de alcanzar la máxima distancia horizontal. Suponga que en la Tierra, ella permanece en el aire durante un tiempo *T*, alcanza una altura máxima *h* y una distancia horizontal *D*. Si ella saltara *exactamente* de la misma forma durante una competencia en Marte, donde g_{Marte} es igual a 0.379 del valor de *g* en la Tierra, determine su tiempo en el aire, su altura máxima y la distancia horizontal alcanzada. Exprese cada una de estas tres cantidades en términos de su valor en la Tierra. Ignore la resistencia del aire en ambos planetas.

3.49 •• ¡Dinamita! Una cuadrilla de demolición usa dinamita para derribar un edificio viejo. Los fragmentos del edificio salen disparados en todas direcciones, y después se encuentran a distancias de hasta 50 m de la explosión. Estime la rapidez máxima con que salieron disparados los fragmentos. Describa todas las suposiciones que haga.

3.50 ••• BIO Espiral ascendente. Es común ver a las aves de presa ascender en corrientes calientes de aire. La trayectoria que siguen puede ser una trayectoria espiral. Es posible modelar un movimiento espiral como movimiento circular uniforme combinado con una velocidad constante hacia arriba. Suponga que un ave describe un círculo completo con radio de 6.00 m cada 5.00 s y asciende verticalmente a razón constante de 3.00 m/s. Determine lo siguiente: *a*) la rapidez del ave relativa al suelo; *b*) la aceleración del ave (magnitud y dirección): y *c*) el ángulo entre el vector velocidad del ave y la horizontal.

3.51 •• Un veterinario está en la selva provisto de una cerbatana cargada con un dardo sedante. El veterinario y un mono astuto de 1.5 kg se encuentran a 25 m arriba del suelo en árboles separados 70 m. En el momento justo en que el veterinario dispara el dardo horizontalmente al mono, este se deja caer del árbol en un vano intento por escapar del dardo. ¿Qué velocidad de salida mínima debe tener el dardo para golpear al mono antes de que este llegue al suelo?

3.52 ••• Una doble de cine se deja caer desde un helicóptero que está a 30.0 m sobre el suelo y se mueve con una velocidad constante, cuyas componentes son de 10.0 m/s hacia arriba y 15.0 m/s horizontal hacia el sur. Ignore la resistencia del aire. *a*) ¿En qué punto del suelo (relativo a la posición del helicóptero cuando ella cae) se deberían haber colocado los colchones de hule espuma que amortiguan el golpe? *b*) Dibuje las gráficas *x*-*t*, *y*-*t*, v_x-*t* y v_y-*t* para su movimiento.

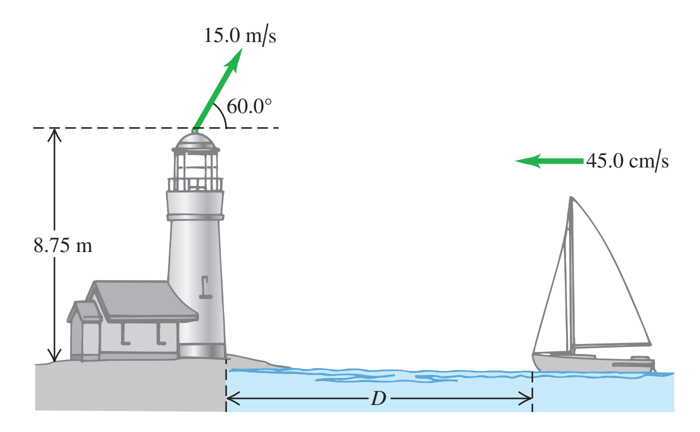
3.53 •• Al combatir los incendios forestales, los aviones apoyan a los equipos terrestres dejando caer agua sobre el fuego. Un piloto practica tirando un bote con tinte rojo, tratando de acertar a un blanco en el suelo. Si el avión vuela horizontalmente a 90.0 m de altura con rapidez de 64.0 m/s (143 mi/h), ¿a qué distancia horizontal del blanco el piloto debería soltar el bote? Ignore la resistencia del aire.

3.54 •• Un cañón, situado a 60.0 m de la base de un risco vertical de 25.0 m de altura, dispara un obús de 15 kg con un ángulo de 43.0° sobre la horizontal, hacia el risco. *a*) ¿Qué velocidad inicial mínima debe tener el obús para librar el borde superior del risco? *b*) El suelo en la parte superior del risco es plano, con una altura constante de 25.0 m arriba del cañón. En las condiciones del inciso *a*), ¿a qué distancia del borde del risco cae el obús?

3.55 •• Un avión vuela con una velocidad de 90.0 m/s a un ángulo de 23.0° arriba de la horizontal. Cuando está 114 m directamente arriba de un perro parado en el suelo plano, se cae una maleta del compartimento de equipaje. ¿A qué distancia del perro caerá la maleta? Ignore la resistencia del aire.

3.56 ••• Conforme un barco se acerca al muelle a 45.0 cm/s, es necesario lanzarle la pieza de un equipo importante para que pueda atracar. El equipo se lanza a 15.0 m/s a 60.0° por encima de la horizontal desde lo alto de una torre en la orilla del agua, a 8.75 m por encima de la cubierta del barco (figura P3.56). Para que el equipo caiga enfrente del barco, ¿a qué distancia *D* del muelle debería estar el barco cuando se lance el equipo? Se ignora la resistencia del aire.

Figura **P3.56**



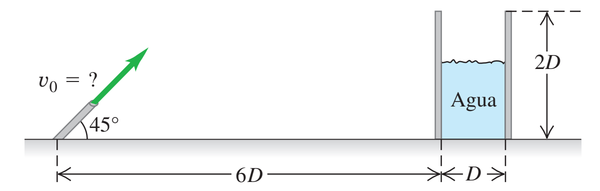
3.57 • **PA CALC** Un cohete de juguete es lanzado con una velocidad inicial de 12.0 m/s en dirección horizontal desde la azotea de un edificio de 30.0 m de alto. El motor del cohete produce una aceleración horizontal de $(1.60\ \text{m/s}^3)t$, en la misma dirección de la velocidad inicial, y en la dirección vertical actúa *g*, hacia abajo. Se puede ignorar la resistencia del aire. ¿Qué distancia horizontal viaja el cohete antes de llegar al suelo?

3.58 •• **Una misión de auxilio.** Un avión deja caer pacas de heno para el ganado atrapado en una ventisca en las Grandes Llanuras. El piloto libera las pacas a 150 m arriba del nivel del suelo cuando el avión vuela a 75 m/s en una dirección de 55° arriba de la horizontal. ¿A qué distancia enfrente del ganado debería el piloto tirar el heno para que las pacas caigan en el punto donde están atrapados los animales?

3.59 ••• **El jonrón más largo.** Según el *Libro de récords Guiness*, el jonrón más largo que se ha medido fue bateado por Roy "Dizzy" Carlyle en un juego de ligas menores. La pelota viajó 188 m (618 ft) antes de caer al suelo fuera del parque. *a*) Suponiendo que la velocidad inicial de la pelota estuviera a 45° sobre la horizontal e ignorando la resistencia del aire, ¿cuál debió ser la rapidez inicial de la pelota si se bateó en un punto a 0.9 m (3.0 ft) sobre el suelo? Suponga que el suelo es perfectamente plano. *b*) ¿A qué altura habría pasado la bola sobre una barda de 3.0 m (10 ft) situada a 116 m (380 ft) de *home*?

3.60 ••• Se utiliza una manguera para llenar de agua un contenedor cilíndrico grande de diametro *D* y altura 2*D*. La manguera lanza el agua a 45° sobre la horizontal, desde el mismo nivel que la base del tanque, y se encuentra a una distancia de 6*D* (figura P3.60) de este. ¿En qué *intervalo* de rapideces de lanzamiento (v_0) el agua entrará en el contenedor? Ignore la resistencia del aire, y exprese su respuesta en términos de *D* y de *g*.

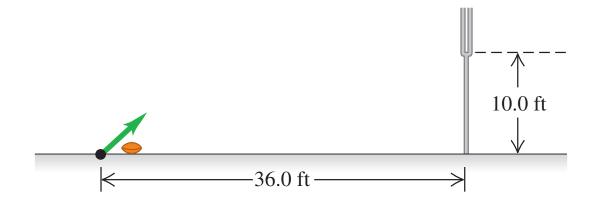
Figura **P3.60**



3.61 •• Se lanza un proyectil desde el nivel del suelo sin que haya resistencia del aire. Usted quiere evitar que el proyectil entre en una capa de inversión térmica en la atmósfera a una altura *h* por encima del suelo. *a*) ¿Cuál es la máxima rapidez de lanzamiento que se podría imprimir al proyectil si se lanza en línea recta hacia arriba? Exprese su respuesta en términos de *h* y *g*. *b*) Suponga que el lanzador disponible dispara los proyectiles al doble de la rapidez máxima de lanzamiento que usted determinó en el inciso *a*). ¿A qué ángulo máximo por encima de la horizontal debería lanzarse el proyectil? *c*) ¿A qué distancia (en términos de *h*) del lanzador cae al suelo el proyectil en el inciso *b*)?

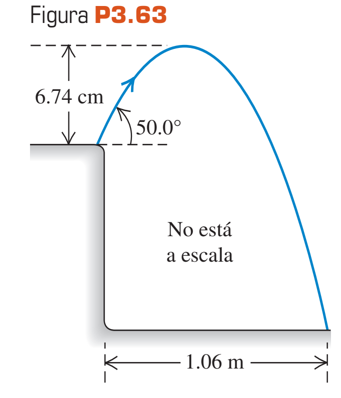
3.62 •• **Patear un gol de campo.** En fútbol americano, después de anotar un *touchdown*, el equipo tiene la oportunidad de ganar un punto más pateando el balón por encima de una barra sostenida entre dos postes. La barra está colocada en posición horizontal a 10.0 ft por encima del suelo, y el balón se patea desde el nivel del suelo a una distancia horizontal de 36.0 ft con respecto a la barra (figura P3.62). Las medidas del fútbol se indican en unidades del sistema inglés pero, para este problema, realice la conversión a unidades del SI. *a*) Hay un ángulo mínimo por encima del suelo, de tal forma que si el balón se lanza por debajo de este ángulo, jamás podrá saltar por encima de la barra, sin importar la rapidez que le imprima la patada. ¿Cuál es ese ángulo? *b*) Si el balón se patea a 45.0° por encima de la horizontal, ¿cuál debe ser su rapidez inicial para apenas alcanzar a librar la barra? Exprese su respuesta en m/s y km/h.

Figura **P3.62**



3.63 •• Un saltamontes salta hacia el aire del borde de un risco vertical, como se muestra en la figura P3.63. Use la información de la figura para determinar *a*) la rapidez inicial del saltamontes y *b*) la altura del risco.

Figura **P3.63**

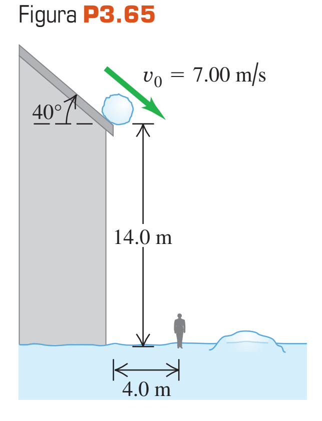


3.64 •• **Récord mundial.** En el lanzamiento de bala, un evento atlético de pista y campo, se lanza un objeto (la bala) de 7.3 kg a un ángulo aproximado de 40° en relación con la pierna izquierda recta del lanzador. El récord mundial de 23.11 m lo estableció Randy Barnes en 1990. Suponiendo

que Barnes lanzó la bala a 40° a una altura de 2.00 m arriba del suelo, ¿con qué rapidez, en m/s y mph, la lanzó?

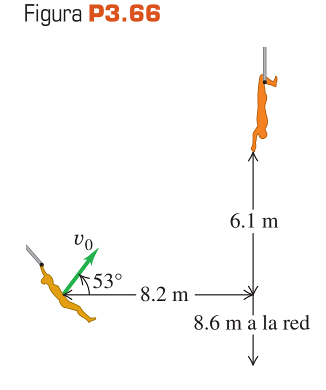
3.65 ••• ¡Cuidado! Una bola de nieve rueda del techo de un granero con una inclinación hacia abajo de 40° (figura P3.65). El borde del techo está a 14.0 m del suelo y la bola tiene una rapidez de 7.00 m/s al salir del techo. Ignore la resistencia del aire. *a*) ¿A qué distancia del borde del granero golpea la bola el piso si no golpea otra cosa al caer? *b*) Dibuje las gráficas *x-t*, *y-t*, v_x-*t* y v_y-*t* para el movimiento del inciso *a*). *c*) Un hombre de 1.9 m de estatura está de pie a 4.0 m del borde del granero. ¿Le caerá encima la bola de nieve?

Figura **P3.65**



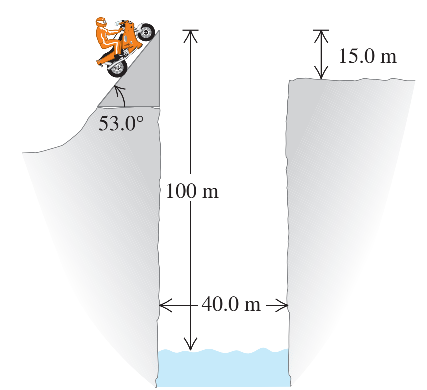
3.66 ••• En el trapecio volador. Un nuevo acto circense se llama Los Acróbatas de Texas. La hermosa Mary Belle se mece en un trapecio y se proyecta con un ángulo de 53°, y se supone que es atrapada por Joe Bob, cuyas manos están 6.1 m arriba y 8.2 m adelante del punto de lanzamiento (figura P3.66). Puede ignorarse la resistencia del aire. *a*) ¿Qué rapidez inicial v_0 debe tener Mary Bell para alcanzar justamente a Joe Bob? *b*) Para la rapidez inicial calculada en el inciso *a*), ¿qué magnitud y dirección tiene la velocidad de Mary Belle cuando alcanza a Joe Bob? *c*) Suponiendo que Mary Belle tiene la rapidez inicial calculada en el inciso *a*), dibuje las gráficas *x-t*, *y-t*, v_x-*t* y v_y-*t* que muestren el movimiento de los dos trapecistas. Las gráficas deberán mostrar el movimiento hasta el momento en que Mary Belle llega a Joe Bob. *d*) La noche del debut, Joe Bob no atrapa a Mary Belle. ¿Qué distancia horizontal recorre ella, desde su punto de lanzamiento, antes de caer en la red que está 8.6 m debajo de dicho punto?

Figura **P3.66**



3.67 •• Salto del río II. Un profesor de física hacía acrobacias audaces en su tiempo libre. Su última acrobacia fue un intento por saltar un río en motocicleta (figura P3.67). La rampa de despegue está inclinada 53.0°, el río mide 40.0 m de ancho y la ribera lejana está 15.0 m más abajo que la parte superior de la rampa. El río está a 100 m abajo de la rampa. Puede ignorarse la resistencia del aire. *a*) ¿Qué rapidez se necesita en la parte superior de la rampa para alcanzar apenas el borde de la ribera lejana? *b*) Si su rapidez es solo la mitad del valor obtenido en *a*), ¿dónde cayó?

Figura **P3.67**



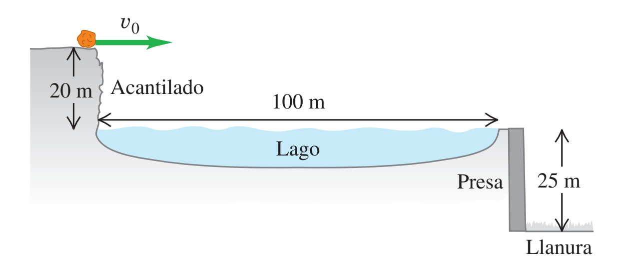
3.68 •• Se lanza una piedra de la azotea de un edificio con velocidad v_0 y ángulo α_0 con respecto a la horizontal. La altura del edificio es *h*. Puede ignorarse la resistencia del aire. Calcule la magnitud de la velocidad de la piedra justo antes de tocar el suelo, y demuestre que es independiente de α_0.

3.69 • Un carro de 5500 kg, que lleva un lanzador vertical de cohetes, avanza a la derecha con rapidez constante de 30.0 m/s por un camino horizontal. Se lanza un cohete de 45.0 kg verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 40.0 m/s relativa al carro. *a*) ¿Qué altura alcanzará el cohete? *b*) ¿A qué distancia del carro caerá el cohete a tierra? *c*) ¿Qué distancia avanza el carro mientras el cohete está en el aire? *d*) ¿Con qué ángulo, relativo a la horizontal y medido por un observador en reposo en el suelo, viaja el cohete en el momento en que sale disparado? *e*) Dibuje la trayectoria del cohete vista por un observador: **i.** estacionario en el carro; **ii.** estacionario en el suelo.

3.70 • Se lanza una pelota de 2.7 kg verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 20.0 m/s desde el borde de un acantilado de 45.0 m de altura. En el instante de lanzamiento, una mujer comienza a correr alejándose de la base del acantilado con rapidez constante de 6.00 m/s. La mujer corre en línea recta sobre suelo plano, y puede ignorarse la acción de la resistencia del aire sobre la pelota. *a*) ¿Con qué ángulo arriba de la horizontal deberá lanzarse la pelota para que la corredora la atrape justo antes de que toque el suelo, y qué distancia corre la mujer antes de atrapar la pelota? *b*) Dibuje la trayectoria de la pelota vista por: **i.** una persona en reposo en el suelo; **ii.** la corredora.

3.71 • Un peñasco de 76.0 kg está rodando horizontalmente hacia el borde de un acantilado que está 20 m arriba de la superficie de un lago, como se indica en la figura P3.71. La parte superior de la cara vertical de una presa está a 100 m del pie del acantilado, al nivel de la superficie del lago. Hay una llanura 25 m debajo de la parte superior de la presa. *a*) ¿Qué rapidez mínima debe tener la roca al perder contacto con el acantilado para llegar hasta la llanura sin golpear la presa? *b*) ¿A qué distancia del pie de la presa caerá la roca en la llanura?

Figura **P3.71**



3.72 •• Lanzamiento de almuerzo. Henrietta va a su clase de física trotando por la acera, a 3.05 m/s. Su esposo Bruce se da cuenta de que ella salió con tanta prisa que olvidó su almuerzo, así que corre a la ventana de su apartamento, que está a 38.0 m directamente arriba de la acera, para lanzárselo. Bruce lanza el almuerzo horizontalmente 9.00 s después de que Henrietta pasó debajo de la ventana, y ella lo atrapa corriendo. Ignore la resistencia del aire. *a*) ¿Con qué rapidez inicial debe haber lanzado Bruce el almuerzo para que Henrietta lo atrapara justo antes de tocar la acera? *b*) ¿Dónde está ella cuando atrapa el almuerzo?

3.73 ••• Dos tanques participan en un ejercicio de maniobras en terreno plano. El primero lanza una bala de práctica que se encuentra cargada con pintura, con rapidez de salida de 250 m/s a 10.0° sobre la horizontal, mientras avanza hacia el segundo tanque con una rapidez de 15.0 m/s relativa al suelo. El segundo tanque va en retirada a 35.0 m/s relativa al suelo, pero es alcanzado por la bala. Ignore la resistencia del aire y suponga que la bala golpea al tanque a la misma altura a la que fue disparada. Calcule la distancia entre los tanques *a*) cuando se disparó la bala y *b*) en el momento del impacto.

3.74 ••• PA **¡Bang!** Un estudiante está sentado en una plataforma a una altura h sobre el suelo. Lanza un petardo horizontalmente con una rapidez v. Sin embargo, un viento que sopla paralelo al suelo imprime al petardo una aceleración horizontal constante de magnitud a. El resultado es que el petardo cae al suelo directamente abajo del estudiante. Determine la altura h en términos de v, a y g. Ignore el efecto de la resistencia del aire sobre el movimiento vertical.

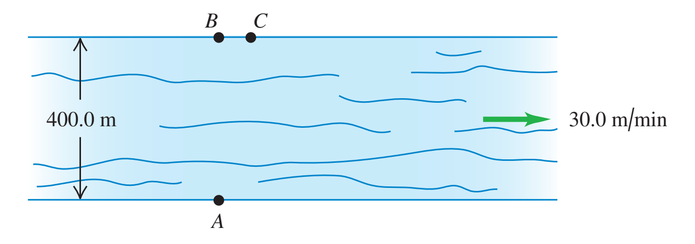
3.75 •• En una celebración del 4 de julio, se lanza un petardo desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 25.0 m/s a 30.0° con respecto a la *vertical*. Cuando alcanza su altura máxima, estalla en muchos fragmentos lanzando una ráfaga de chispas. Dos de esos fragmentos viajan hacia adelante inicialmente a 20.0 m/s a ±53.0° con respecto a la horizontal; ambas cantidades se miden *relativas al petardo original justo antes de que estalle*. ¿Con qué ángulos con respecto a la horizontal se mueven inicialmente los dos fragmentos justo después del estallido, según las mediciones de un espectador ubicado en el suelo?

3.76 • Cuando se encuentra a 145 m por encima del suelo, un cohete, que viaja verticalmente hacia arriba a una rapidez constante de 8.50 m/s relativa al suelo, lanza un segundo cohete con una rapidez de 12.0 m/s a un ángulo de 53.0° por encima de la horizontal; ambas cantidades son resultado de las mediciones que realiza un astronauta que va sentado en el interior del primer cohete. Después de ser disparado, el segundo cohete entra en caída libre. *a*) En el momento en que se lanza el segundo cohete, ¿cuáles son las componentes horizontal y vertical de su velocidad en relación con **i.** el astronauta que va sentado dentro del cohete y **ii.** la estación de control de la misión ubicada en tierra? *b*) Determine la rapidez inicial y el ángulo de lanzamiento del segundo cohete de acuerdo con las mediciones del centro de control. *c*) ¿Cuál es la altura máxima por encima del suelo que alcanza el segundo cohete?

3.77 ••• En una película de aventuras, el héroe debe lanzar una granada desde su auto, que viaja a 90.0 km/h, al de su enemigo, que viaja a 110 km/h. El auto del enemigo está 15.8 m adelante del auto del héroe cuando este suelta la granada. Si el héroe lanza la granada de manera que su velocidad inicial relativa al héroe esté a 45° sobre la horizontal, ¿qué magnitud de velocidad inicial deberá tener? Ambos autos viajan en la misma dirección en un camino plano, y puede ignorarse la resistencia del aire. Obtenga la magnitud de la velocidad relativa tanto al héroe como a la Tierra.

3.78 • Un río de 400.0 m de ancho fluye de oeste a este a 30.0 m/min. La lancha donde usted viaja se desplaza a 100.0 m/min relativa al agua, sin importar la dirección en que apunte. Para cruzar el río, usted parte de un muelle en el punto A en la ribera sur. Hay una lancha que llega a tierra directamente en el sentido opuesto, en el punto B de la ribera norte, y también una que llega al punto C, 75.0 m corriente abajo desde B (figura P3.78). *a*) ¿A qué punto de la ribera norte llegaría usted a tierra, si su lancha apuntara perpendicularmente a la corriente del agua, y qué distancia viajaría? *b*) Si usted dirige inicialmente su lancha justo hacia el punto C y no cambiara ese rumbo en relación con la orilla, ¿a qué punto de la ribera norte llegaría? *c*) Para llegar al punto C: **i.** ¿con qué rumbo debería dirigir su bote?, **ii.** ¿cuánto tiempo tardaría en cruzar el río?, **iii.** ¿qué distancia viajaría? y **iv.** ¿cuál sería la rapidez de su lancha según la medición de un observador situado en la ribera del río?

Figura **P3.78**



3.79 • CALC **Cicloide.** Una partícula se mueve en el plano xy. Sus coordenadas están dadas en función del tiempo por

$$x(t) = R(\omega t - \operatorname{sen} \omega t) \qquad y(t) = R(1 - \cos \omega t)$$

donde R y ω son constantes. *a*) Dibuje la trayectoria de la partícula. (Es la trayectoria de un punto en el borde de un aro que rueda con rapidez constante sobre una superficie horizontal. La curva descrita por el punto conforme se mueve en el espacio se llama *cicloide*). *b*) Determine las componentes de velocidad y de aceleración de la partícula en cualquier instante t. *c*) ¿En qué instantes la partícula está momentáneamente en reposo? ¿Qué coordenadas tiene la partícula en esos instantes? ¿Qué magnitud y dirección tiene la aceleración en esos instantes? *d*) ¿La magnitud de la aceleración depende del tiempo? Compare este movimiento con el movimiento circular uniforme.

3.80 •• Se dispara un proyectil desde el punto A con un ángulo por encima de la horizontal. En su punto más alto, después de haber viajado una distancia horizontal D a partir de su punto de lanzamiento, explota súbitamente en dos fragmentos idénticos que viajan horizontalmente con velocidades iguales, pero en sentido opuesto, según las mediciones *relativas al proyectil justo antes de que explote*. Si un fragmento cae de regreso en el punto A, ¿a qué distancia de A (en términos de D) caerá el otro fragmento?

3.81 •• El piloto de un avión fija un curso al oeste según la brújula y mantiene una rapidez de 220 km/h. Después de volar 0.500 h, el piloto se encuentra sobre una ciudad a 120 km al oeste y 20 km al sur de su punto de partida. *a*) Calcule la velocidad del viento (magnitud y dirección). *b*) Si dicha velocidad es de 40 km/h al sur, ¿qué curso debe fijar el piloto para viajar al oeste? Use la misma rapidez de vuelo de 220 km/h.

3.82 •• **Gotas de lluvia.** Cuando la velocidad de un tren es de 12.0 m/s al este, las gotas de lluvia que caen verticalmente con respecto a la Tierra dejan huellas inclinadas 30.0° con respecto a la vertical en las ventanillas del tren. *a*) ¿Qué componente horizontal tiene la velocidad de una gota con respecto a la Tierra? ¿Y con respecto al tren? *b*) ¿Qué magnitud tiene la velocidad de la gota con respecto a la Tierra? ¿Y con respecto al tren?

3.83 ••• En un juego de la Copa Mundial de Fútbol, Juan corre al norte hacia la portería con una rapidez de 8.00 m/s relativa al suelo. Un compañero le pasa el balón, el cual lleva una rapidez de 12.0 m/s y se mueve en una dirección 37.0° al este del norte, relativa al suelo. ¿Qué magnitud y dirección tiene la velocidad del balón relativa a Juan?

3.84 •• Un elevador sube con rapidez constante de 2.50 m/s. Un perno se afloja y cae del techo del elevador, ubicado 3.00 m arriba del piso. *a*) ¿Cuánto tarda en llegar al piso del elevador? *b*) ¿Qué rapidez tiene el perno justo cuando toca el piso según un observador en el elevador? *c*) ¿Y según un observador de pie en uno de los pisos del edificio? *d*) Según el observador del inciso *c*), ¿qué distancia recorrió el perno entre el techo y el piso del elevador?

3.85 • PA Suponga que el elevador del problema 3.84 parte del reposo y mantiene una aceleración constante hacia arriba de 4.00 m/s^2, y que el perno se cae justo en el instante en que el elevador comienza a moverse. *a*) ¿Cuánto tiempo tarda el perno en tocar el piso del elevador? *b*) Justo cuando toca el piso, ¿qué tan rápido se mueve el perno de acuerdo con un observador **i.** en el elevador, **ii.** situado en un piso del edificio? *c*) De acuerdo con cada observador del inciso *b*), ¿qué distancia recorre el perno entre el techo y el piso del elevador?

3.86 •• Dos jugadoras de fútbol, Mia y Alice, corren mientras Alice pasa el balón a Mia. Esta última corre hacia el norte con una rapidez de 6.00 m/s. La velocidad del balón relativa a Mia es de 5.00 m/s en una dirección de 30° al este del sur. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la velocidad del balón relativa al suelo?

3.87 ••• **Movimiento de proyectil en una pendiente.** Remítase al problema práctico del capítulo 3. *a*) Un arquero ubicado en un terreno con inclinación ascendente constante de 30.0° apunta hacia un blanco situado 60.0 m más arriba del plano inclinado. La flecha en el arco y el centro del blanco están ambos a 1.50 m sobre el suelo. Justo al salir del arco, la rapidez inicial de la flecha es de 32.0 m/s. ¿Con qué ángulo sobre la *horizontal* debería apuntar el arquero para dar en el blanco? Si hay dos ángulos, calcule el menor. Tal vez necesite resolver la ecuación del ángulo por iteración, es decir, por ensayo y error. Compare el ángulo con el que se necesita cuando el suelo está horizontal, con pendiente igual a 0. *b*) Repita el problema con una pendiente constante *hacia abajo* de 30.0°.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

3.88 ••• **CALC** Un proyectil se lanza desde un punto *P*. Su movimiento es tal que su distancia respecto a *P* siempre aumenta. Determine el ángulo máximo arriba de la horizontal con que pudo haberse lanzado. Ignore la resistencia del aire.

3.89 ••• Dos estudiantes pasean en canoa por un río. Mientras van río arriba, dejan caer accidentalmente una botella vacía al agua, después de lo cual reman durante 60 minutos hasta llegar a un punto a 2.0 km río arriba. En ese momento, se dan cuenta de que la botella no está y, preocupados por la ecología, se dan vuelta y reman río abajo. Alcanzan la botella (que se ha estado moviendo con la corriente) 5.0 km río abajo del punto donde se dieron la vuelta, y la recogen. *a*) Suponiendo que reman con rapidez constante, ¿con qué rapidez fluye el río? *b*) ¿Qué rapidez tendría la canoa en un lago tranquilo remando con la misma rapidez del inciso *a*)?

3.90 ••• **PA** Un cohete diseñado para colocar cargas pequeñas en órbita es transportado a una altitud de 12.0 km sobre el nivel del mar, por un avión comercial modificado. Cuando el avión está volando en línea recta, con rapidez constante de 850 km/h, deja caer el cohete. Después, el avión mantiene la misma altitud y rapidez, y sigue volando en línea recta. El cohete cae durante un lapso corto, después del cual se enciende el motor. A partir de ese momento, los efectos combinados del empuje y la gravedad imparten al cohete una aceleración constante de magnitud 3.00*g* dirigida a un ángulo de 30.0° arriba de la horizontal. Por motivos de seguridad, el cohete deberá estar por lo menos a 1.00 km adelante del avión cuando vuelva a alcanzar la altitud de este. Hay que determinar el tiempo mínimo que el cohete debe caer antes de que su motor se encienda. Se puede ignorar la resistencia del aire. La respuesta debe incluir **i.** un diagrama que muestre las trayectorias de vuelo del cohete y del avión, identificadas en varios puntos con vectores que representen su velocidad y su aceleración; **ii.** una gráfica *x*-*t* que muestre los movimientos del cohete y del avión; y **iii.** una gráfica *y*-*t* que muestre los movimientos del cohete y del avión. En el diagrama y las gráficas, indique los momentos cuando el cohete se deja caer, cuando el motor del cohete se enciende y cuando el cohete en ascenso alcanza la altura del avión.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

Un ciclista que va por una curva a rapidez constante tiene una aceleración dirigida hacia el interior de la curva (véase la sección 3.2, en especial, la figura 3.12*a*).

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

3.1 Respuesta: iii. Si la velocidad instantánea $\vec{v}$ es constante durante un intervalo, su valor en cualquier punto (incluyendo el final del intervalo) es igual a la velocidad media $\vec{v}_{med}$ durante el intervalo. En **i** y **ii,** la dirección de $\vec{v}$ al final del intervalo es tangente a la trayectoria en ese punto; mientras que la dirección de $\vec{v}_{med}$ apunta del inicio de la trayectoria al final de la misma (en la dirección del desplazamiento neto). En **iv**, $\vec{v}$ y $\vec{v}_{med}$ se encuentran a lo largo de la línea recta, aunque $\vec{v}$ tiene una magnitud mayor porque la rapidez ha ido en aumento.

3.2 Respuesta: vector 7 En el punto más alto de la trayectoria del trineo, la rapidez es mínima. En ese punto, la rapidez no aumenta ni disminuye, y la componente paralela de la aceleración (es decir, la componente horizontal) es cero. La aceleración solo tiene una componente perpendicular hacia el interior de la trayectoria curva del trineo. En otras palabras, la aceleración es hacia abajo.

3.3 Respuesta: i. Si no hubiera gravedad ($g = 0$), el mono no caería y el dardo seguiría una trayectoria recta (que se indica como línea punteada). El efecto de la gravedad es hacer que tanto el mono como el dardo caigan la misma distancia $\frac{1}{2}gt^2$ por debajo de sus posiciones con $g = 0$. El punto *A* tiene la misma distancia debajo de la posición inicial del mono que el punto *P* debajo de la recta punteada, así que el punto *A* es donde encontraríamos al mono en el instante en cuestión.

3.4 Respuesta: ii. Tanto en la parte alta como en la baja del lazo, la aceleración es puramente radial y está dada por la ecuación (3.28). El radio *R* es el mismo en ambos puntos, así que la diferencia de aceleración se debe exclusivamente a las diferencias de rapidez. Puesto que a_{rad} es proporcional al cuadrado de v, la rapidez deberá ser dos veces mayor en la parte baja del lazo que en su parte alta.

3.5 Respuesta: vi. El efecto del viento es anular el movimiento hacia el este del avión e imprimirle un movimiento hacia el norte. Así que la velocidad del aire en relación con el suelo (la velocidad del viento) debe tener una componente de 150 km/h hacia el oeste y una componente de 150 km/h hacia el norte. La combinación de ambas es un vector con magnitud $\sqrt{(150\text{ km/h})^2 + (150\text{ km/h})^2} = 212\text{ km/h}$ que apunta hacia el noroeste.

Problema práctico

Respuestas: ***a***) $R = \dfrac{2v_0^2}{g}\dfrac{\cos(\theta + \phi)\text{sen}\,\phi}{\cos^2\theta}$ ***b***) $\phi = 45° - \dfrac{\theta}{2}$

4 LEYES DEL MOVIMIENTO DE NEWTON



? Este miembro del equipo de una escudería empuja hacia adelante un automóvil de carreras. ¿El automóvil lo empuja hacia atrás? Si es así, ¿lo empuja hacia atrás con la misma magnitud de fuerza, o con una magnitud diferente?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- El significado del concepto de fuerza en la física y por qué las fuerzas son vectores.
- La importancia de la fuerza neta sobre un objeto y lo que sucede cuando es igual a cero.
- La relación entre la fuerza neta sobre un objeto, la masa del objeto y su aceleración.
- Cómo se relacionan las fuerzas que dos objetos ejercen entre sí.

En los dos últimos capítulos vimos cómo utilizar el lenguaje y las matemáticas de la *cinemática* para describir el movimiento en una, dos o tres dimensiones. Sin embargo, ¿qué *ocasiona* que los cuerpos se muevan como lo hacen? Por ejemplo, ¿cómo puede un remolcador empujar un transatlántico que es mucho más pesado que él? ¿Por qué es más difícil controlar un automóvil en hielo mojado que en concreto seco? Las respuestas a estas preguntas y a otras similares nos llevan al tema de la **dinámica**, es decir, la relación entre el movimiento y las fuerzas que lo provocan.

En este capítulo usaremos dos conceptos nuevos, la *fuerza* y la *masa*, para analizar los principios de la dinámica. Estos principios fueron establecidos claramente por primera vez por Sir Isaac Newton (1642-1727), y actualmente se conocen como **leyes del movimiento de Newton**. La primera ley dice que si la fuerza neta sobre un cuerpo es cero, su movimiento no cambia. La segunda ley relaciona la fuerza con la aceleración cuando la fuerza neta *no* es cero. La tercera ley es una relación entre las fuerzas que ejercen dos cuerpos que interactúan entre sí.

Newton no *obtuvo* matemáticamente las tres leyes, sino que las *dedujo* de un sinnúmero de experimentos realizados por otros científicos, especialmente Galileo Galilei (quien murió el mismo año en que nació Newton). Dichas leyes son verdaderamente fundamentales porque no pueden deducirse ni demostrarse a partir de otros principios. Las leyes de Newton son la base de la **mecánica clásica** (también llamada **mecánica newtoniana**); al usarlas, podremos comprender los tipos de movimiento más conocidos. Las leyes de Newton requieren modificación solo en situaciones que implican rapideces muy altas (cercanas a la rapidez de la luz) o en espacios muy pequeños (como el interior de un átomo).

El planteamiento de las leyes de Newton es sencillo, pero muchos estudiantes las encuentran difíciles de comprender y manejar. La razón es que, antes de estudiar física, hemos pasado años caminando, lanzando pelotas, empujando cajas y haciendo muchas otras actividades que implican movimiento. Al hacerlo, hemos desarrollado

ciertas ideas de "sentido común" con respecto al movimiento y sus causas. Sin embargo, muchas de esas ideas de "sentido común" no resisten un análisis lógico. Una buena parte de la tarea de este capítulo, y del resto de nuestro estudio de la física, es ayudar a reconocer cuándo las ideas del "sentido común" nos llevan al error, y cómo ajustar nuestro entendimiento del mundo físico de modo que sea congruente con lo que nos dicen los experimentos.

4.1 Fuerza e interacciones

En el lenguaje cotidiano, **fuerza** es un empujón o un tirón. Una definición más adecuada es que una fuerza es una *interacción* entre dos cuerpos o entre un cuerpo y su entorno (figura 4.1). Por esa razón, siempre nos referimos a la fuerza que un cuerpo *ejerce* sobre un segundo cuerpo. Cuando empujamos un automóvil atascado en la nieve, ejercemos una fuerza sobre el auto; un cable de acero ejerce una fuerza sobre la viga que levanta en una construcción, etcétera. Como se muestra en la figura 4.1, la fuerza es una cantidad *vectorial*: podemos empujar un cuerpo o tirar de él en diferentes direcciones.

Cuando una fuerza implica contacto directo entre dos cuerpos, como un empujón o un tirón que se ejerce con la mano sobre un objeto, la llamamos **fuerza de contacto**. Las figuras 4.2*a*, 4.2*b* y 4.2*c* muestran tres tipos comunes de fuerzas de contacto. La **fuerza normal** (figura 4.2*a*) es ejercida sobre un objeto por cualquier superficie con la que esté en contacto. El adjetivo *normal* significa que la fuerza siempre actúa perpendicular a la superficie de contacto, sin importar el ángulo de esa superficie. En cambio, la **fuerza de fricción** (figura 4.2*b*) ejercida sobre un objeto por una superficie actúa *paralela* a la superficie, en la dirección opuesta al deslizamiento. La fuerza del tirón ejercida por una cuerda o por un cordel tenso sobre un objeto al cual se ata se llama **fuerza de tensión** (figura 4.2*c*). Cuando usted tira de la correa de su perro, la fuerza que tira del collar es una fuerza de tensión.

Además de las fuerzas de contacto, también hay **fuerzas de largo alcance** que actúan aunque los cuerpos estén separados por un espacio vacío. La fuerza entre dos imanes es un ejemplo de este tipo de fuerza, al igual que la gravedad (figura 4.2*d*); la Tierra atrae hacia sí cualquier objeto que se deje caer, incluso cuando no haya contacto directo entre el objeto y la Tierra. La fuerza de atracción gravitacional que la Tierra ejerce sobre un cuerpo se llama **peso del cuerpo**.

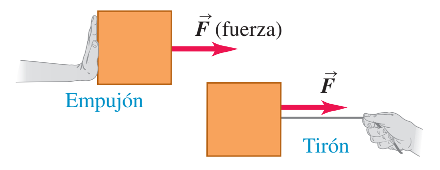
Para describir una fuerza vectorial $\vec{F}$, debemos indicar la *dirección* en la cual actúa, así como su *magnitud*, es decir, la cantidad que describe "cuánto" o "qué tanto" la fuerza empuja o tira. La unidad de magnitud de fuerza en el SI es el *newton*, que se abrevia N. (Daremos una definición precisa del newton en la sección 4.3). La tabla 4.1 presenta algunas magnitudes de fuerza comunes.

Tabla 4.1 Magnitudes de fuerzas comunes

Fuerza gravitacional del Sol sobre la Tierra	3.5×10^{22} N
Fuerza de empuje de un transbordador espacial durante el lanzamiento	3.1×10^{7} N
Peso de una ballena azul grande	1.9×10^{6} N
Fuerza de tracción máxima de una locomotora	8.9×10^{5} N
Peso de un jugador de fútbol americano de 250 lb	1.1×10^{3} N
Peso de una manzana mediana	1 N
Peso de los huevos de insecto más pequeño	2×10^{-6} N
Fuerza de atracción eléctrica entre el protón y el electrón en un átomo de hidrógeno	8.2×10^{-8} N
Peso de una bacteria muy pequeña	1×10^{-18} N
Peso de un átomo de hidrógeno	1.6×10^{-26} N
Peso de un electrón	8.9×10^{-30} N
Fuerza de atracción gravitacional entre el protón y el electrón en un átomo de hidrógeno	3.6×10^{-47} N

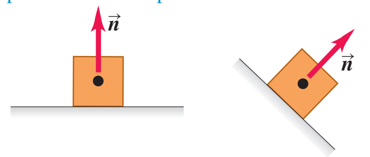
4.1 Algunas propiedades de las fuerzas.

- Una fuerza es un empujón o un tirón.
- Una fuerza es una interacción entre dos objetos o entre un objeto y su entorno.
- Una fuerza es una cantidad vectorial con magnitud y dirección.

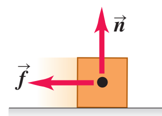


4.2 Cuatro tipos de fuerzas comunes.

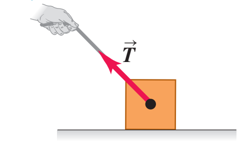
a) **Fuerza normal $\vec{n}$:** Cuando un objeto descansa o se empuja sobre una superficie, esta ejerce un empujón sobre el objeto que es perpendicular a la superficie.



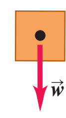
b) **Fuerza de fricción $\vec{f}$:** Además de la fuerza normal, una superficie puede ejercer una fuerza de fricción sobre un objeto que es paralela a la superficie.



c) **Fuerza de tensión $\vec{T}$:** La fuerza de un tirón ejercida sobre un objeto por una cuerda, un cordón, etcétera.

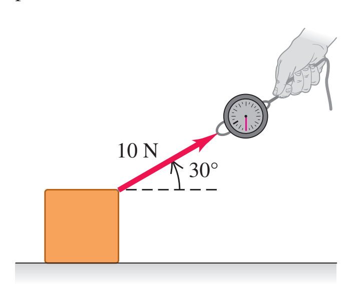


d) **Peso $\vec{w}$:** El tirón de la gravedad sobre un objeto es una fuerza de largo alcance (una fuerza que actúa a la distancia).

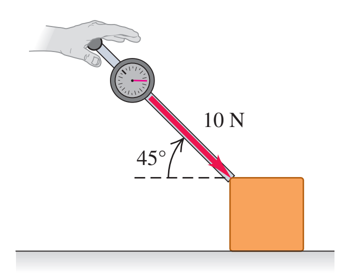


4.3 Uso de una flecha como vector para indicar la fuerza que ejercemos cuando *a*) tiramos de un bloque con una cuerda, o *b*) lo empujamos con un palo.

a) Un tirón de 10 N dirigido a 30° por encima de la horizontal



b) Un empujón de 10 N dirigido a 45° por debajo de la horizontal



Un instrumento común para medir magnitudes de fuerza es la *balanza de resorte*, que consiste en un resorte en espiral dentro de una caja, con una varilla unida a un extremo. Cuando se aplican fuerzas a los extremos del resorte, este se estira y la cantidad de elongación depende de la fuerza. Se puede hacer una escala en la varilla y calibrarla usando varios cuerpos idénticos de 1 N de peso cada uno. Cuando uno, dos o más de estos cuerpos se suspenden simultáneamente de la balanza, la fuerza total que estira el resorte es 1 N, 2 N, etcétera, y podemos marcar las posiciones correspondientes en el puntero de 1 N, 2 N, etcétera. Luego podemos usar el instrumento para medir la magnitud de una fuerza desconocida. Se puede hacer un instrumento similar para fuerzas que empujan en lugar de tirar.

La figura 4.3 muestra una balanza de resorte que se utiliza para medir el tirón o el empujón que se aplica a una caja. En ambos casos, se dibuja un vector que representa la fuerza aplicada. La longitud del vector muestra la magnitud; cuanto más grande sea el vector, mayor será la magnitud de la fuerza.

Superposición de fuerzas

Cuando se lanza una pelota, hay al menos dos fuerzas que actúan sobre ella: el empujón de la mano y el tirón hacia abajo que ejerce la gravedad. Los experimentos muestran que si dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ actúan al mismo tiempo en el mismo punto de un cuerpo (figura 4.4), el efecto sobre el movimiento del cuerpo es el mismo que el de una sola fuerza $\vec{R}$ igual a la suma vectorial de las fuerzas originales: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. En general, *el efecto de cualquier cantidad de fuerzas aplicadas a un punto de un cuerpo es el mismo que el de una sola fuerza igual a la suma vectorial de las fuerzas*. Este valioso principio se conoce como **superposición de fuerzas**.

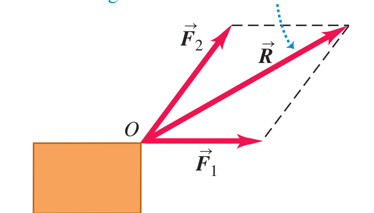
El principio de superposición de fuerzas es de enorme importancia, y lo usaremos muchas veces en nuestro estudio de la física. Por ejemplo, en la figura 4.5*a*, la fuerza $\vec{F}$ actúa sobre un cuerpo en el punto O. Las componentes vectoriales de $\vec{F}$ en las direcciones Ox y Oy son $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$. Cuando $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$ se aplican simultáneamente, como en la figura 4.5*b*, el efecto es idéntico al de la fuerza original $\vec{F}$. De modo que *cualquier fuerza puede sustituirse por sus vectores componentes, actuando en el mismo punto*.

Suele ser más conveniente describir una fuerza $\vec{F}$ en términos de sus componentes x y y, F_x y F_y, en lugar de sus vectores componentes (recuerde de la sección 1.8 que los *vectores componentes* son vectores, pero las *componentes* solo son números). En el caso de la figura 4.5, F_x y F_y son ambas positivas; para otras orientaciones de $\vec{F}$, cualquiera de ellas puede ser negativa o cero.

Los ejes de coordenadas no necesariamente deben ser verticales y horizontales. La figura 4.6 muestra una caja que es arrastrada hacia arriba sobre una rampa por una fuerza $\vec{F}$, representada por sus componentes F_x y F_y paralela y perpendicular a la rampa inclinada.

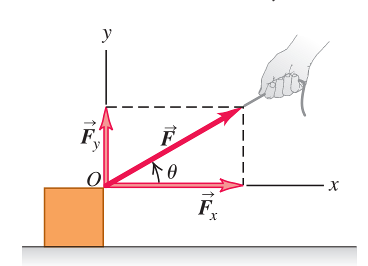
4.4 Superposición de fuerzas.

Dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ que actúan sobre un cuerpo en el punto O tienen el mismo efecto que una sola fuerza $\vec{R}$ igual a su suma vectorial.

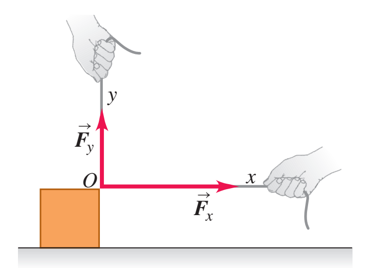


4.5 La fuerza $\vec{F}$, que actúa en un ángulo θ con respecto al eje x, se puede sustituir por sus vectores componentes rectangulares, $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$.

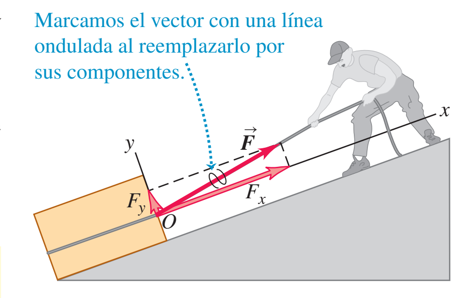
a) Vectores componentes: $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$
Componentes: $F_x = F\cos\theta$ y $F_y = F\,\text{sen}\,\theta$



b) Los vectores componentes $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$ tienen juntos el mismo efecto que la fuerza original $\vec{F}$.



CUIDADO **Uso de una línea ondulada en diagramas de fuerza** En la figura 4.6, se dibujó una línea ondulada sobre el vector fuerza $\vec{F}$ para indicar que lo sustituimos por sus componentes x y y. De lo contrario, el diagrama incluiría la misma fuerza dos veces. Esto se hará en cualquier diagrama de fuerza donde una fuerza se sustituya por sus componentes. Busque esta línea ondulada en otras figuras de este capítulo y capítulos posteriores.



4.6 F_x y F_y son las componentes de $\vec{F}$ paralela y perpendicular a la superficie del plano inclinado.

A menudo necesitaremos obtener la suma vectorial (resultante) de *todas* las fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Esto se conoce como la **fuerza neta** que actúa sobre el cuerpo. Usaremos la letra griega $\sum$ (sigma mayúscula, que equivale a la S romana) para denotar sumatoria. Si las fuerzas son $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, etcétera, abreviaremos la sumatoria como

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = \sum \vec{F} \qquad (4.1)$$

Donde $\sum \vec{F}$ se lee como "suma vectorial de las fuerzas" o "fuerza neta". La versión de la ecuación (4.1) con componentes es el par de ecuaciones

$$R_x = \sum F_x \qquad R_y = \sum F_y \qquad (4.2)$$

donde $\sum F_x$ es la suma de las componentes x y $\sum F_y$ es la suma de las componentes y (figura 4.7). Cada componente puede ser positiva o negativa, así que tenga cuidado con los signos al sumar. (Tal vez quiera revisar la sección 1.8).

Una vez que se tienen R_x y R_y, puede obtenerse la magnitud y la dirección de la fuerza neta $\vec{R} = \sum \vec{F}$ que actúa sobre el cuerpo. La magnitud es

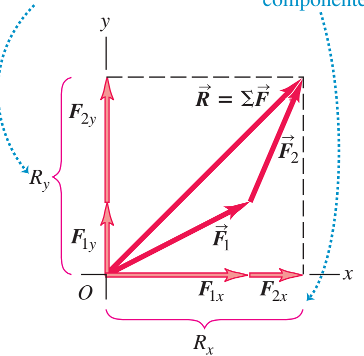
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

y el ángulo θ entre $\vec{R}$ y el eje $+x$ puede obtenerse de la relación $\tan \theta = R_y/R_x$. Las componentes R_x y R_y pueden ser positivas, negativas o cero, y el ángulo θ puede estar en cualquier cuadrante.

En problemas tridimensionales, las fuerzas pueden tener componentes z; así que se agrega la ecuación $R_z = \sum F_z$ a la ecuación (4.2). La magnitud de la fuerza neta es entonces

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

4.7 Obtención de las componentes de la suma vectorial (resultante) $\vec{R}$ de dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.



Ejemplo 4.1 Superposición de fuerzas

Tres luchadores profesionales pelean por el mismo cinturón de campeonato. La figura 4.8*a* muestra las tres fuerzas horizontales que cada luchador aplica al cinturón, como se ve desde arriba. Las magnitudes de las tres fuerzas son $F_1 = 250$ N, $F_2 = 50$ N y $F_3 = 120$ N. Obtenga las componentes x y y de la fuerza neta sobre el cinturón, así como la magnitud y dirección.

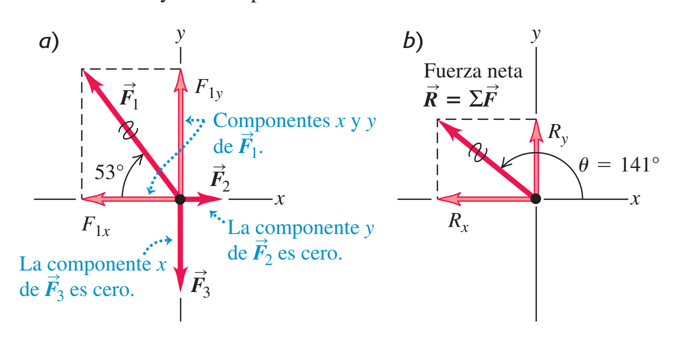
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este es un problema de suma vectorial en el cual los vectores representan fuerzas. Se desea calcular las componentes x y y de la fuerza neta $\vec{R}$, así que utilizaremos el método de componentes de la suma vectorial expresada en las ecuaciones (4.2). Una vez que tenemos las componentes de $\vec{R}$, podemos calcular su magnitud y dirección.

EJECUTAR: De acuerdo con la figura 4.8*a*, los ángulos entre las tres fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ y el eje $+x$ son $\theta_1 = 180° - 53° = 127°$, $\theta_2 = 0°$ y $\theta_3 = 270°$. Las componentes x y y de las tres fuerzas son

$$F_{1x} = (250\text{ N})\cos 127° = -150\text{ N}$$
$$F_{1y} = (250\text{ N})\,\text{sen}\,127° = 200\text{ N}$$
$$F_{2x} = (50\text{ N})\cos 0° = 50\text{ N}$$

4.8 *a*) Tres fuerzas que actúan sobre el cinturón. *b*) La fuerza neta $\vec{R} = \sum \vec{F}$ y sus componentes.



$$F_{2y} = (50\text{ N})\,\text{sen}\,0° = 0\text{ N}$$
$$F_{3x} = (120\text{ N})\cos 270° = 0\text{ N}$$
$$F_{3y} = (120\text{ N})\,\text{sen}\,270° = -120\text{ N}$$

De acuerdo con la ecuación (4.2), la fuerza neta $\vec{R} = \sum \vec{F}$ tiene las componentes

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = (-150\text{ N}) + 50\text{ N} + 0\text{ N} = -100\text{ N}$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 200\text{ N} + 0\text{ N} + (-120\text{ N}) = 80\text{ N}$$

Continúa

La fuerza neta tiene una componente x negativa y una componente y positiva, como se muestra en la figura 4.8*b*.

La magnitud de $\vec{R}$ es

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-100\ \text{N})^2 + (80\ \text{N})^2} = 128\ \text{N}$$

Para obtener el ángulo entre la fuerza neta y el eje $+x$, usamos la ecuación (1.8):

$$\theta = \arctan \frac{R_y}{R_x} = \arctan\left(\frac{80\ \text{N}}{-100\ \text{N}}\right) = \arctan(-0.80)$$

La arcotangente de -0.80 es $-39°$, pero la figura 4.8*b* muestra que la fuerza neta se encuentra en el segundo cuadrante. Por lo tanto, la solución correcta es $\theta = -39° + 180° = 141°$.

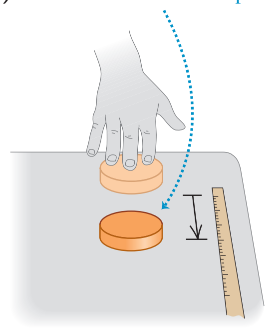
EVALUAR: La fuerza neta *no* es cero, y vemos intuitivamente que el luchador 1 (quien ejerce la mayor fuerza $F_1 = 250$ N sobre el cinturón) probablemente se quedará con el cinturón después del forcejeo.

Se invita al lector a verificar la dirección de $\vec{R}$ sumando los vectores $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ gráficamente. ¿Su diagrama revela que $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ apunta al segundo cuadrante como se determinó anteriormente?

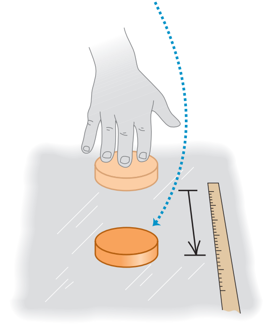
Evalúe su comprensión de la sección 4.1 La figura 4.6 muestra una fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre una caja. Con los ejes x y y que se indican en la figura, ¿qué enunciado acerca de las componentes de la fuerza *gravitacional* que la Tierra ejerce sobre la caja (su peso) es *correcto*? **i.** Las componentes x y y son ambas positivas. **ii.** La componente x es cero y la componente y es positiva. **iii.** La componente x es negativa y la componente y es positiva. **iv.** Las componentes x y y son ambas negativas. **v.** La componente x es cero y la componente y es negativa. **vi.** La componente x es positiva y la componente y es negativa.

4.9 Cuanto más resbaladiza sea la superficie, mayor será el desplazamiento del disco después de que se le da una velocidad inicial. En una mesa de hockey de aire *c*), la fricción es casi cero y el disco sigue con velocidad casi constante.

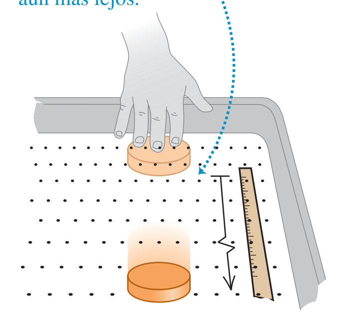
a) Mesa: el disco se detiene pronto.



b) Hielo: el disco se desliza más lejos.



c) Mesa de hockey de aire: el disco se desliza aún más lejos.



4.2 Primera ley de Newton

¿Cómo afectan el movimiento de un cuerpo las fuerzas que actúan sobre él? Para contestar esta pregunta, consideremos primero qué sucede cuando la fuerza neta sobre un cuerpo es *cero*. Sin duda el lector estará de acuerdo en que si un cuerpo se encuentra en reposo y ninguna fuerza neta actúa sobre él (es decir, no hay empujón ni tirón netos), el cuerpo permanecerá en reposo. Pero, ¿qué sucedería si la fuerza neta es cero y actúa sobre un cuerpo en *movimiento*?

Para saber qué pasa en este caso, suponga que usted desliza un disco de hockey sobre una mesa horizontal, aplicándole una fuerza horizontal con la mano (figura 4.9*a*). Cuando usted deja de empujar, el disco *no* sigue moviéndose indefinidamente; se frena y se detiene. Para mantenerlo en movimiento, hay que seguir empujándolo (es decir, aplicando una fuerza). Podríamos llegar a la conclusión de "sentido común" de que los cuerpos en movimiento naturalmente se detienen y que se necesita una fuerza para mantener el movimiento.

Imagine ahora que usted empuja el disco en una superficie de hielo liso (figura 4.9*b*). Al dejar de empujar, el disco se desliza mucho más lejos antes de detenerse. Ponga el disco y empújelo en una mesa de hockey de aire, donde flota sobre un delgado "cojín" de aire, y llegará aún más lejos (figura 4.9*c*). En cada caso, lo que frena el disco es la *fricción*, una interacción entre la superficie inferior del disco y la superficie sobre la que se desliza. Cada superficie ejerce una fuerza de fricción sobre el disco, la cual se resiste a su movimiento; la diferencia entre los tres casos es la magnitud de la fuerza de fricción. El hielo ejerce menos fricción que la superficie de la mesa, y el disco viaja más lejos. Las moléculas de gas de la mesa de hockey de aire son las que menos fricción ejercen. Si pudiéramos eliminar totalmente la fricción, el disco nunca se frenaría y no necesitaríamos fuerza alguna para mantener el disco en movimiento, una vez que este haya iniciado. Así, la idea de "sentido común" de que se requiere una fuerza para conservar el movimiento es *incorrecta*.

Experimentos como el que describimos demuestran que, si *ninguna* fuerza neta actúa sobre un cuerpo, este permanece en reposo, *o bien*, se mueve con velocidad constante en línea recta. Una vez que un cuerpo se pone en movimiento, no se necesita una fuerza neta para mantenerlo en movimiento; tal observación se conoce como *primera ley del movimiento de Newton*:

Primera ley del movimiento de Newton: Un cuerpo sobre el que no actúa una fuerza neta se mueve con velocidad constante (que puede ser cero) y aceleración cero.

La tendencia de un cuerpo a seguir moviéndose una vez iniciado su movimiento es resultado de una propiedad llamada **inercia**. Usamos inercia cuando tratamos de sacar salsa de tomate de una botella agitándola. Primero hacemos que la botella (y la salsa del interior) se mueva hacia adelante; al mover la botella bruscamente hacia atrás, la salsa tiende a seguir moviéndose hacia adelante y, con suerte, caerá en nuestra hamburguesa. La tendencia de un cuerpo en reposo a permanecer en ese estado también se debe a la inercia. Quizás el lector haya visto sacar un mantel de un tirón por debajo de la vajilla sin romper nada. La fuerza sobre la vajilla no basta para moverla mucho durante el breve lapso que toma retirar el mantel.

Cabe señalar que lo que importa en la primera ley de Newton es la fuerza *neta*. Por ejemplo, dos fuerzas actúan sobre un libro en reposo en una mesa horizontal: una fuerza de apoyo hacia arriba, o fuerza normal, ejercida por la mesa (véase la figura 4.2*a*) y la fuerza hacia abajo debida a la atracción gravitacional terrestre (una fuerza de largo alcance que actúa aun si la mesa está separada del suelo; véase la figura 4.2*d*). El empuje hacia arriba de la superficie es tan grande como la atracción gravitacional hacia abajo, así que la fuerza *neta* sobre el libro (la suma vectorial de las dos fuerzas) es cero. De acuerdo con la primera ley de Newton, si el libro está en reposo en la mesa, sigue en reposo. El mismo principio se aplica a un disco de hockey que se desliza en una superficie horizontal sin fricción: la resultante del empuje hacia arriba de la superficie y la atracción gravitacional hacia abajo es cero. Si el disco está en movimiento, sigue moviéndose con velocidad constante porque la fuerza *neta* que actúa sobre él es cero.

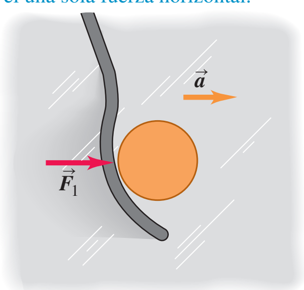
Veamos otro ejemplo. Suponga que un disco de hockey descansa en una superficie horizontal con fricción despreciable, como una mesa de hockey de aire o una plancha de hielo húmedo. Si el disco está inicialmente en reposo y luego una sola fuerza horizontal $\vec{F}_1$ actúa sobre él (figura 4.10*a*), comenzará a moverse. Si el disco ya se estaba moviendo, la fuerza cambiará su rapidez, su dirección, o ambas, dependiendo de la dirección de la fuerza. En este caso, la fuerza neta $\vec{F}_1$, *no* es cero. (También hay dos fuerzas verticales, la atracción gravitacional de la Tierra y la fuerza normal hacia arriba ejercida por la superficie. Pero como ya dijimos, estas dos fuerzas se cancelan).

Suponga ahora que aplicamos una segunda fuerza $\vec{F}_2$ (figura 4.10*b*), igual en magnitud a $\vec{F}_1$ pero de dirección opuesta. Una fuerza es el negativo de la otra, $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, y su suma vectorial es cero:

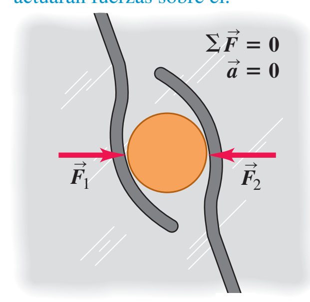
$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + (-\vec{F}_1) = \mathbf{0}$$

4.10 *a*) Un disco de hockey acelera en la dirección de la fuerza aplicada $\vec{F}_1$. *b*) Si la fuerza es cero, la aceleración es cero y el disco está en equilibrio.

a) Sobre una superficie sin fricción, un disco acelera cuando actúa sobre él una sola fuerza horizontal.



b) Un objeto sobre el que actúan varias fuerzas cuya suma vectorial es cero se comporta como si no actuaran fuerzas sobre él.



Otra vez vemos que, si el cuerpo está inicialmente en reposo, sigue en reposo; y si se mueve, seguirá moviéndose en la misma dirección con rapidez constante. Estos resultados indican que, en la primera ley de Newton, *si la fuerza neta es igual a cero, es lo mismo que si no hubiera fuerzas aplicadas*. Este es justamente el principio de superposición de fuerzas que vimos en la sección 4.1.

Cuando un cuerpo está en reposo o se mueve con velocidad constante (en línea recta), decimos que el cuerpo está en **equilibrio**. Para que un cuerpo esté en equilibrio, no deben actuar fuerzas sobre él, o deben actuar varias fuerzas cuya resultante, es decir, la fuerza neta, sea cero:

$$\sum \vec{F} = \mathbf{0} \qquad \text{(cuerpo en equilibrio)} \qquad (4.3)$$

Para que esto se cumpla, cada componente de la fuerza neta debe ser cero; por lo tanto,

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \text{(cuerpo en equilibrio)} \qquad (4.4)$$

Estamos suponiendo que el cuerpo puede representarse adecuadamente como una partícula puntual. Si el cuerpo tiene tamaño finito, tendremos que considerar también en *qué parte* del cuerpo se aplican las fuerzas. Volveremos a esto en el capítulo 11.

Aplicación Viaje en trineo con la primera ley de Newton
La gravedad ejerce una fuerza hacia abajo sobre el niño y el trineo, pero se equilibra con una fuerza normal hacia arriba ejercida por el suelo. El pie del adulto ejerce una fuerza hacia adelante que se equilibra con la fuerza hacia atrás de la fricción sobre el trineo. Por lo tanto, no hay una fuerza neta sobre el niño y el trineo, y ambos se deslizan a velocidad constante.



Ejemplo conceptual 4.2 Fuerza neta cero significa velocidad constante



En la película clásica de ciencia ficción de 1950 *Rocketship X-M*, una nave viaja en el vacío del espacio exterior, lejos de cualquier planeta, cuando sus motores se descomponen. El resultado es que la nave baja su velocidad y se detiene. ¿Qué dice la primera ley de Newton acerca de esto?

SOLUCIÓN

Después de que el motor se detiene, no hay fuerzas que actúen sobre la nave espacial, de modo que, según la primera ley de Newton, *no* se detendrá, sino que seguirá moviéndose en línea recta con rapidez constante. En algunas películas de ciencia ficción se ha utilizado muy adecuadamente la ciencia; pero esta no fue una de ellas.

Ejemplo conceptual 4.3 Velocidad constante significa fuerza neta igual a cero



Usted conduce un Maserati Gran Turismo S en una pista de prueba recta a una rapidez constante de 250 km/h, y rebasa a un Volkswagen Beetle 1971 que va a 75 km/h constantes. ¿Sobre qué auto es mayor la fuerza neta?

SOLUCIÓN

La palabra clave aquí es “neta”. Ambos automóviles están en equilibrio porque sus velocidades son constantes; por lo tanto, la primera ley de Newton dice que la fuerza *neta* sobre cada uno de ellos es *cero*.

Esto parece ir contra el “sentido común”, que nos dice que el automóvil más rápido debe estar impulsado por una fuerza mayor. Gracias al motor de alta potencia de su Maserati, es verdad que la pista ejerce una fuerza hacia adelante sobre este, la cual es mayor que la ejercida sobre el Volkswagen. Pero sobre los automóviles también actúa una fuerza *hacia atrás* debida a la fricción con el camino y la resistencia del aire. Cuando un automóvil viaja con velocidad constante, la suma vectorial de las fuerzas hacia atrás y hacia adelante es igual a cero. Existe más resistencia del aire sobre el Maserati, el cual se mueve más rápido, que sobre el Volkswagen, que se mueve más lento, por lo que el motor del Maserati debe ser más potente que el del Volkswagen.

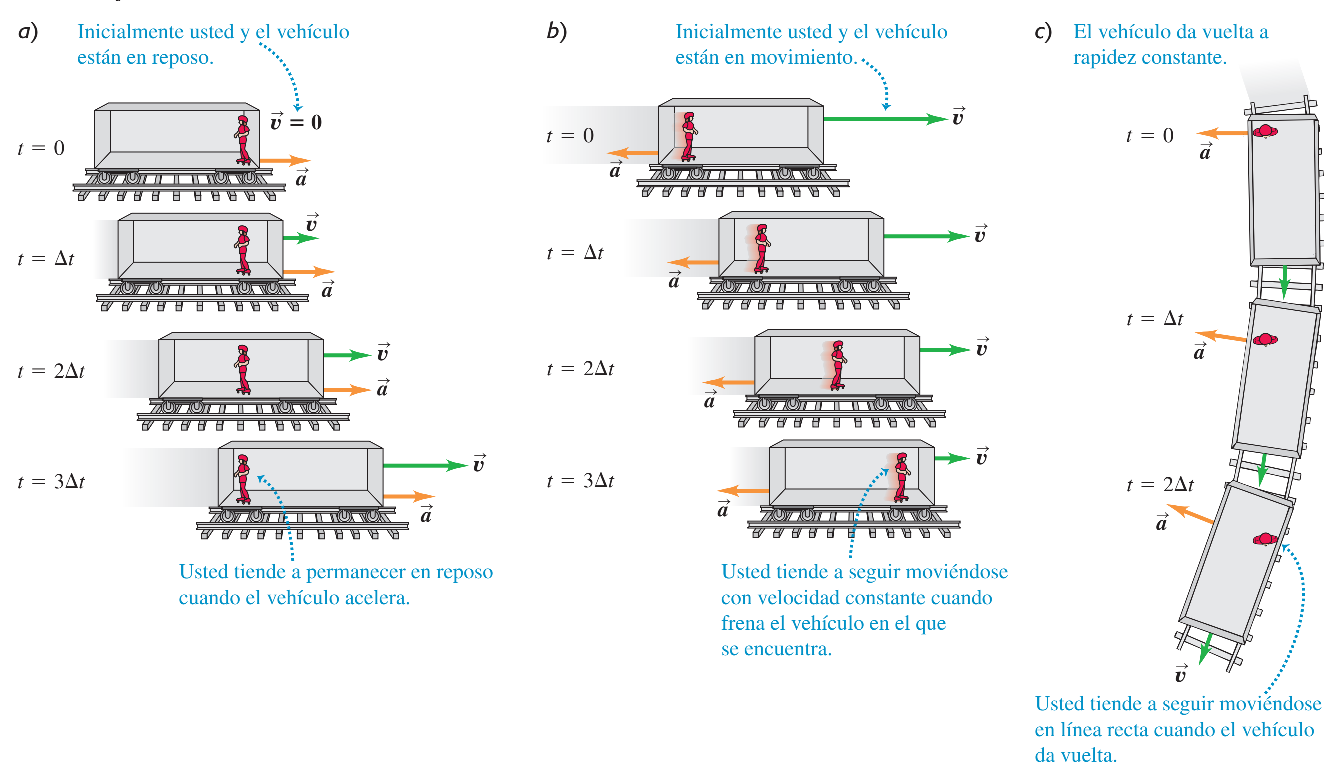
Marcos de referencia inerciales

Al analizar la velocidad relativa en la sección 3.5, presentamos el concepto de *marco de referencia*. Este concepto es fundamental para las leyes del movimiento de Newton. Suponga que está en un autobús que viaja por una carretera recta y acelera. Si pudiera ponerse de pie en el pasillo usando patines, comenzaría a moverse *hacia atrás* en relación con el autobús, conforme este aumenta su rapidez. En cambio, si el autobús frenara, usted comenzaría a moverse hacia adelante por el pasillo. En ambos casos, parecería que no se cumple la primera ley de Newton: no actúa una fuerza neta sobre usted, pero su velocidad cambia. ¿Qué sucede aquí?

La cuestión es que el autobús acelera con respecto al suelo y este *no* es un marco de referencia adecuado para la primera ley de Newton. Esta es válida en algunos marcos de referencia, pero no en otros. Un marco de referencia en el que *es* válida la primera ley de Newton es un **marco de referencia inercial**. La Tierra es aproximadamente un marco de referencia inercial, pero el autobús no. (La Tierra no es un marco plenamente inercial debido a la aceleración asociada a su rotación y su movimiento alrededor del Sol, aunque estos efectos son bastante pequeños; véase los ejercicios 3.25 y 3.28). Debido a que la primera ley de Newton se utiliza para definir lo que es un marco de referencia inercial, a veces se le conoce como *ley de la inercia*.

La figura 4.11 nos ayuda a entender lo que sentimos al viajar en un vehículo que acelera. En la figura 4.11*a*, un vehículo está inicialmente en reposo y luego comienza a acelerar hacia la derecha. Una pasajera en patines (los cuales casi eliminan los efectos de la fricción) prácticamente no tiene fuerza neta actuando sobre ella; por lo tanto, tiende a seguir en reposo en relación con el marco de referencia inercial de la Tierra. Al acelerar el vehículo, la pasajera se mueve hacia atrás con respecto al vehículo. Del mismo modo, una pasajera en un vehículo que está frenando tiende a seguir moviéndose con velocidad constante relativa a la Tierra, por lo que esta pasajera se mueve hacia adelante con respecto al vehículo (figura 4.11*b*). El vehículo también acelera si se mueve con rapidez constante pero da vuelta (figura 4.11*c*). En este caso, la pasajera

4.11 Viaje en un vehículo con aceleración.



tiende a seguir moviéndose en línea recta con rapidez constante en relación con la Tierra; con respecto al vehículo, la pasajera se mueve hacia el exterior de la curva.

En los casos de la figura 4.11, un observador en el marco de referencia del vehículo podría concluir que *hay* una fuerza neta que actúa sobre la pasajera, ya que la velocidad de ella *relativa al vehículo* cambia en cada caso. Esto no es correcto; la fuerza neta sobre la pasajera es cero. El error del observador es tratar de aplicar la primera ley de Newton en el marco de referencia del vehículo, que *no* es inercial y en el cual dicha ley no es válida (figura 4.12). En este libro *solo* usaremos marcos de referencia inerciales.

Hemos mencionado solo un marco de referencia (aproximadamente) inercial: la superficie de la Tierra. No obstante, hay muchos otros. Si tenemos un marco de referencia inercial A, donde se cumple la primera ley de Newton, *cualquier* otro marco de referencia B también será inercial si se mueve con velocidad constante $\vec{v}_{B/A}$ relativa a A. Para demostrarlo, usamos la relación de velocidad relativa de la ecuación (3.36) de la sección 3.5:

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A}$$

Suponga que P es un cuerpo que se mueve con velocidad constante $\vec{v}_{P/A}$ con respecto a un marco inercial A. Por la primera ley de Newton, la fuerza neta sobre este cuerpo es cero. La velocidad de P relativa a otro marco B tiene un valor distinto, $\vec{v}_{P/B} = \vec{v}_{P/A} - \vec{v}_{B/A}$. Pero si la velocidad relativa $\vec{v}_{B/A}$ de los dos marcos es constante, entonces $\vec{v}_{P/B}$ también es constante, y B también es un marco inercial; la velocidad de P en este marco es constante y la fuerza neta sobre P es cero, así que la primera ley de Newton se cumple en B. Observadores en los marcos A y B diferirán en cuanto a la velocidad de P, pero coincidirán en que la velocidad es constante (aceleración cero) y que no hay fuerza neta actuando sobre P.

4.12 Desde el marco de referencia de este automóvil, parece que una fuerza empuja hacia adelante a los maniquíes para pruebas de choque, cuando el automóvil se detiene repentinamente. Sin embargo, tal fuerza no existe realmente: al detenerse el vehículo, los maniquíes se siguen moviendo hacia adelante como consecuencia de la primera ley de Newton.



No hay un marco de referencia inercial que sea preferible a todos los demás para formular las leyes de Newton. Si un marco es inercial, todos los que se muevan con velocidad constante relativa a él serán inerciales. Desde esta perspectiva, el estado de reposo y el de movimiento con velocidad constante no son muy diferentes; ambos se dan cuando la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es cero.

Evalúe su comprensión de la sección 4.2 ¿En cuál de las siguientes situaciones la fuerza neta sobre el cuerpo es cero? **i.** Un avión que vuela al norte con rapidez constante de 120 m/s y altitud constante; **ii.** un automóvil que sube en línea recta por una colina con pendiente de 3°, a una rapidez constante de 90 km/h; **iii.** un halcón que vuela en círculos con rapidez constante de 20 km/h a una altura constante de 15 m a campo abierto; **iv.** una caja con superficies lisas, sin fricción, que está en la parte de atrás de un camión cuando este acelera hacia adelante en un camino plano a 5 m/s^2. ❙

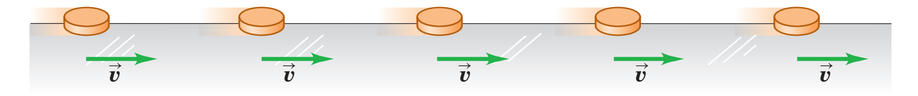
4.3 Segunda ley de Newton

La primera ley de Newton nos dice que cuando una fuerza neta igual a cero actúa sobre un cuerpo, este se mueve a velocidad constante y su aceleración es cero. En la figura 4.13*a*, un disco de hockey se desliza a la derecha sobre hielo húmedo, donde la fricción es despreciable, de modo que no actúan fuerzas horizontales sobre el disco; la fuerza de la gravedad hacia abajo y la fuerza de contacto hacia arriba ejercida por el hielo suman cero. Así, la fuerza neta $\sum\vec{F}$ que actúa sobre el disco es cero, el disco tiene aceleración cero y su velocidad es constante.

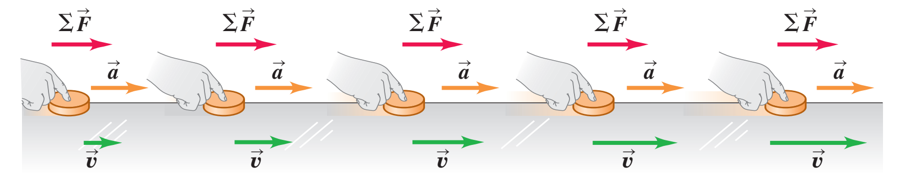
Sin embargo, ¿qué sucede si la fuerza neta *no* es cero? En la figura 4.13*b* se aplica una fuerza horizontal constante al disco en la dirección de su movimiento. Entonces, $\sum\vec{F}$ es constante y en la misma dirección horizontal que $\vec{v}$. Vemos que, mientras la fuerza actúa, la velocidad del disco cambia a ritmo constante; es decir, el disco se

4.13 Análisis de la relación entre la aceleración de un cuerpo y la fuerza neta que actúa sobre este (aquí, un disco de hockey sobre una superficie sin fricción).

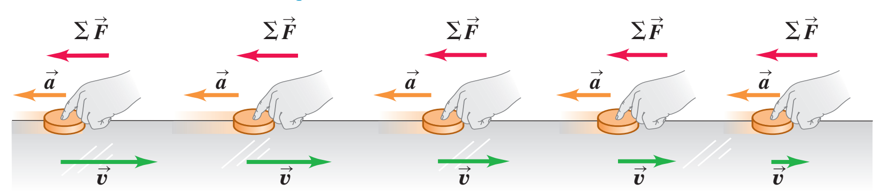
a) Un disco que se mueve con velocidad constante (en equilibrio): $\sum\vec{F} = \mathbf{0}$, $\vec{a} = \mathbf{0}$



b) Una fuerza neta constante en la dirección del movimiento provoca una aceleración constante en la misma dirección de la fuerza neta.



c) Una fuerza neta constante opuesta a la dirección del movimiento produce una aceleración constante en la misma dirección que la fuerza neta.



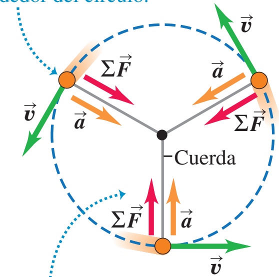
mueve con aceleración constante. La rapidez del disco aumenta, así que la aceleración $\vec{a}$ tiene la misma dirección que $\vec{v}$ y $\sum\vec{F}$.

En la figura 4.13*c* invertimos la dirección de la fuerza sobre el disco, de modo que $\sum\vec{F}$ actúe en la dirección opuesta a $\vec{v}$. Aquí también el disco tiene una aceleración; se mueve cada vez más lentamente a la derecha. La aceleració $\vec{a}$ en este caso es a la izquierda, en la misma dirección que $\sum\vec{F}$. Como en el caso anterior, el experimento muestra que la aceleración es constante si $\sum\vec{F}$ es constante.

La conclusión es que *una fuerza neta que actúa sobre un cuerpo hace que este acelere en la misma dirección de la fuerza neta*. Si la magnitud de la fuerza neta es constante, como en las figuras 4.13*b* y 4.13*c*, también lo será la magnitud de la aceleración.

Estas conclusiones sobre fuerza neta y aceleración también son válidas para un cuerpo que se mueve en trayectoria curva. Por ejemplo, la figura 4.14 muestra un disco de hockey que se mueve en un círculo horizontal en una superficie de hielo con fricción despreciable. Se ata una cuerda al disco y a un palo clavado en el hielo; la cuerda ejerce una fuerza de tensión hacia adentro de magnitud constante. La fuerza neta y la aceleración tienen magnitud constante y están dirigidas al centro del círculo. La rapidez del disco es constante, así que se trata de un movimiento circular uniforme, como vimos en la sección 3.4.

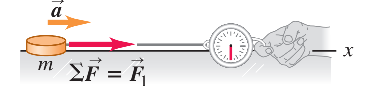
4.14 Vista superior de un disco de hockey con movimiento circular uniforme en una superficie horizontal sin fricción.



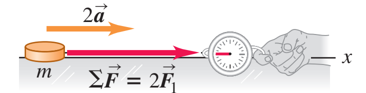
La figura 4.15*a* ilustra otro experimento que explora la relación entre la aceleración y la fuerza neta. Aplicamos una fuerza horizontal constante a un disco de hockey en una superficie horizontal sin fricción, usando la balanza de resorte descrita en la sección 4.1, con el resorte estirado una cantidad constante. Al igual que en las figuras 4.13*b* y 4.13*c*, esta fuerza horizontal es igual a la fuerza neta sobre el disco. Si alteramos la magnitud de la fuerza neta, la aceleración cambia en la misma proporción. Al duplicar la fuerza neta, se duplica la aceleración (figura 4.15*b*); al reducir a la mitad la fuerza neta, se reduce a la mitad la aceleración (figura 4.15*c*), y así sucesivamente. Muchos experimentos semejantes muestran que *para un cuerpo dado, la magnitud de la aceleración es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza neta que actúa sobre él.*

4.15 Para un cuerpo de cierta masa m, la magnitud de la aceleración del cuerpo es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza neta que actúa sobre él.

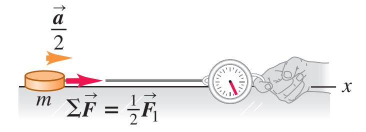
a) Una fuerza neta constante $\Sigma\vec{F}$ provoca una aceleración constante $\vec{a}$.



b) Al duplicarse la fuerza neta, se duplica la aceleración.



c) Al reducirse a la mitad la fuerza neta, la aceleración se reduce a la mitad.



Masa y fuerza

Nuestros resultados indican que para un cuerpo dado, la *razón* de la magnitud $|\sum\vec{F}|$ de la fuerza neta y la magnitud $a = |\vec{a}|$ de la aceleración es constante, sin importar la magnitud de la fuerza neta. Llamamos a esta razón *masa inercial* o simplemente **masa** del cuerpo y la indicamos con m. Es decir,

$$m = \frac{|\sum\vec{F}|}{a} \quad \text{o bien} \quad |\sum\vec{F}| = ma \quad \text{o bien} \quad a = \frac{|\sum\vec{F}|}{m} \tag{4.5}$$

La masa es una medida cuantitativa de la inercia, la cual se analizó en la sección 4.2. La última de las ecuaciones (4.5) indica que cuanto mayor sea su masa, más se "resiste" un cuerpo a ser acelerado. Cuando sostenemos en la mano una fruta en el supermercado y la movemos un poco hacia arriba y hacia abajo para estimar su peso, estamos aplicando una fuerza para saber cuánto acelera la fruta hacia arriba y hacia abajo. Si la fuerza ocasiona una aceleración grande, la fruta tiene una masa pequeña; si la misma fuerza genera solo una aceleración pequeña, la fruta tiene una masa grande. De la misma forma, si golpeamos una pelota de ping-pong y un balón de baloncesto con la misma fuerza, el balón tendrá una aceleración mucho menor porque su masa es mucho mayor.

La unidad de masa en el SI es el **kilogramo**. En la sección 1.3 dijimos que el kilogramo se define oficialmente como la masa de un cilindro de una aleación de platino-iridio que se encuentra en una bóveda cerca de París. Podemos usar este kilogramo estándar, junto con la ecuación (4.5), para definir el **newton**:

Un newton es la cantidad de fuerza neta que proporciona una aceleración de 1 metro por segundo al cuadrado a un cuerpo con masa de 1 kilogramo.

Esta definición permite calibrar las balanzas de resorte y otros instrumentos que miden fuerzas. Por la forma en que definimos el newton, está relacionado con las unidades de masa, longitud y tiempo. Para que la ecuación (4.5) sea dimensionalmente congruente, debe cumplirse que

$$1 \text{ newton} = (1 \text{ kilogramo})(1 \text{ metro por segundo al cuadrado})$$

o bien,

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Esta relación se usará muchas veces en los próximos capítulos, así que téngala presente.

También podemos usar la ecuación (4.5) para comparar una masa con la masa estándar y así *medir* masas. Suponga que se aplica una fuerza neta constante $\sum\vec{F}$ a un cuerpo de masa conocida m_1, y se observa una aceleración de magnitud a_1 (figura 4.16*a*). Luego se aplica la misma fuerza a otro cuerpo con masa desconocida m_2 y se observa una aceleración de magnitud a_2 (figura 4.16*b*). Entonces, según la ecuación (4.5),

$$m_1 a_1 = m_2 a_2$$

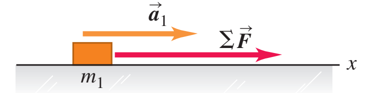
$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{(misma fuerza neta)} \tag{4.6}$$

Para la misma fuerza neta, la razón de las masas de dos cuerpos es el inverso de la razón de sus aceleraciones. En principio, podríamos usar la ecuación (4.6) para medir una masa desconocida m_2, pero suele ser más fácil determinar la masa indirectamente midiendo el *peso* del cuerpo. Volveremos a esto en la sección 4.4.

Cuando dos cuerpos de masas m_1 y m_2 se unen, vemos que la masa del cuerpo compuesto siempre es $m_1 + m_2$ (figura 4.16*c*). Esta propiedad aditiva de la masa tal vez parezca evidente, pero debe verificarse experimentalmente. En última instancia, la masa de un cuerpo está relacionada con el número de protones, electrones y neutrones que contiene. Esta no sería una buena forma de *definir* la masa porque no hay manera práctica de contar tales partículas. No obstante, el concepto de masa es la forma más importante de describir la cantidad de materia de un cuerpo.

4.16 Para una fuerza neta constante determinada, $\sum\vec{F}$ que actúa sobre un cuerpo, la aceleración es inversamente proporcional a la masa del cuerpo. Las masas se suman como escalares ordinarios.

a) Una fuerza $\sum\vec{F}$ conocida provoca que un objeto con masa m_1 tenga una aceleración $\vec{a}_1$.



b) Al aplicar la misma fuerza $\sum\vec{F}$ a un segundo objeto, se percibe la aceleración que nos permite medir la masa.



c) Cuando se unen dos objetos, el mismo procedimiento indica que su masa compuesta es la suma de sus masas individuales.



Enunciado de la segunda ley de Newton

Nos hemos cuidado de decir que la fuerza *neta* sobre un cuerpo hace que este se acelere. Los experimentos demuestran que si se aplica a un cuerpo una combinación de fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, etcétera, el cuerpo tendrá la misma aceleración (magnitud y dirección) que cuando se aplica una sola fuerza igual a la suma vectorial $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots$. En otras palabras, el principio de superposición de fuerzas (véase la figura 4.4) también se cumple cuando la fuerza neta no es cero y el cuerpo está acelerado.

La ecuación (4.5) relaciona la magnitud de la fuerza neta sobre un cuerpo con la magnitud de la aceleración que produce. También vimos que la dirección de la fuerza neta es igual a la dirección de la aceleración, sea la trayectoria del cuerpo recta o curva. Newton reunió todas estas relaciones y resultados experimentales en un solo enunciado conciso que ahora llamamos *segunda ley del movimiento de Newton*:

Segunda ley del movimiento de Newton: **Si una fuerza externa neta actúa sobre un cuerpo, este se acelera. La dirección de la aceleración es la misma que la de la fuerza neta. El vector de fuerza neta es igual a la masa del cuerpo multiplicada por su aceleración.**

En símbolos,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{(segunda ley del movimiento de Newton)} \qquad (4.7)$$

Un enunciado alternativo establece que la aceleración de un cuerpo tiene la misma dirección que la fuerza neta que actúa sobre él, y es igual a la fuerza neta dividida entre la masa del cuerpo:

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

La segunda ley de Newton es una ley fundamental de la naturaleza, la relación básica entre fuerza y movimiento. Casi todo el resto del capítulo y la totalidad del siguiente se dedican a explicar cómo se aplica este principio en diversas situaciones.

La ecuación (4.7) tiene muchas aplicaciones prácticas (figura 4.17). De hecho, el lector la ha usado toda su vida para medir la aceleración de su cuerpo. En su oído interno, células pilosas microscópicas detectan la magnitud y dirección de la fuerza que deben ejercer para acelerar pequeñas membranas junto con el resto del cuerpo. Por la segunda ley de Newton, la aceleración de las membranas, y por ende la de todo el cuerpo, es proporcional a esta fuerza y tiene la misma dirección. Así, ¡usted puede sentir la magnitud y dirección de su aceleración incluso con los ojos cerrados!

4.17 El diseño de las motocicletas de alto desempeño depende fundamentalmente de la segunda ley de Newton. Para aumentar al máximo la aceleración, el diseñador hace a la motocicleta lo más ligera posible (es decir, reduce la masa al mínimo) y utiliza el motor más potente posible (es decir, aumenta al máximo la fuerza).



Uso de la segunda ley de Newton

Existen por lo menos cuatro aspectos de la segunda ley de Newton que merecen atención especial. Primero, la ecuación (4.7) es *vectorial*. Normalmente la usaremos en forma de componentes, con una ecuación para cada componente de fuerza y la componente de aceleración correspondiente:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum F_z = ma_z \quad \text{(segunda ley del movimiento de Newton)} \qquad (4.8)$$

Este conjunto de ecuaciones de componentes equivale a la ecuación vectorial única (4.7). Cada componente de la fuerza neta es igual a la masa multiplicada por la componente correspondiente de la aceleración.

Segundo, el enunciado de la segunda ley de Newton se refiere a fuerzas *externas*, es decir, fuerzas ejercidas sobre el cuerpo por otros cuerpos de su entorno. Un cuerpo no puede afectar su propio movimiento ejerciendo una fuerza sobre sí mismo; si fuera posible, ¡podríamos levantarnos hasta el techo tirando de nuestro cinturón! Por ello, solo se incluyen fuerzas externas en la suma $\sum \vec{F}$ en las ecuaciones (4.7) y (4.8).

Tercero, las ecuaciones (4.7) y (4.8) solo son válidas si la masa m es *constante*. Es fácil pensar en sistemas con masa variable, como un camión tanque con fugas, un cohete o un vagón de ferrocarril en movimiento que se impulsa con carbón; sin embargo, tales sistemas se manejan mejor usando el concepto de momento que veremos en el capítulo 8.

Por último, la segunda ley de Newton solo es válida en marcos de referencia inerciales, al igual que la primera ley. Por lo tanto, no es válida en el marco de referencia de cualquiera de los vehículos con aceleración de la figura 4.11; con respecto a esos marcos, la pasajera acelera aunque la fuerza neta sobre ella sea cero. Normalmente supondremos que la Tierra es una aproximación adecuada a un marco inercial, aunque estrictamente no lo es por su rotación y movimiento orbital.

CUIDADO **$m\vec{a}$ no es una fuerza** Tenga en cuenta que aun cuando el vector $m\vec{a}$ sea igual a la suma vectorial $\sum \vec{F}$ de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, el vector $m\vec{a}$ *no* es una fuerza. La aceleración es el *resultado* de una fuerza neta distinta de cero; no es una fuerza por sí misma. Es "sentido común" pensar que hay una "fuerza de aceleración" que nos empuja contra el asiento cuando nuestro automóvil acelera hacia adelante desde el reposo. Pero *no existe tal*

Aplicación Culpa de la segunda ley de Newton
Este automóvil se detuvo por la segunda ley de Newton: el árbol ejerció una fuerza externa sobre el auto, al darle una aceleración que redujo su velocidad a cero.



MasteringPHYSICS®
ActivPhysics 2.1.3: Tension Change
ActivPhysics 2.1.4: Sliding on an Incline



Video Tutor Demo

fuerza; más bien, nuestra inercia nos hace tender a permanecer en reposo con respecto a la Tierra, y el automóvil que acelera (véase la figura 4.11*a*). Esta confusión de "sentido común" surge al tratar de aplicar la segunda ley de Newton donde no es válida: en un marco de referencia no inercial de un automóvil en aceleración. Nosotros siempre examinaremos el movimiento solo en marcos de referencia *inerciales*.

En el aprendizaje de cómo usar la segunda ley de Newton, empezaremos con ejemplos de movimiento rectilíneo. Después, en el capítulo 5, consideraremos casos más generales y desarrollaremos estrategias más detalladas para resolver problemas.



Ejemplo 4.4 Cálculo de la aceleración a partir de una fuerza

Un trabajador aplica una fuerza horizontal constante con magnitud de 20 N a una caja con masa de 40 kg que descansa en un piso plano con fricción despreciable. ¿Cuál es la aceleración de la caja?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En este problema intervienen una fuerza y una aceleración, de modo que se empleará la segunda ley de Newton. En *cualquier* problema que implique fuerzas, los primeros pasos consisten en elegir un sistema de coordenadas e identificar todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en cuestión. Suele ser conveniente elegir un eje que apunte en la dirección de la aceleración del cuerpo o en la dirección opuesta que, en este caso, es horizontal. Por lo tanto, tomamos el eje $+x$ en la dirección de la fuerza horizontal aplicada (es decir, la dirección en la que se acelera la caja) y el eje $+y$ hacia arriba (figura 4.18). En casi todos los problemas de fuerzas que veremos (incluido este), todos los vectores de fuerza están en un plano, así que no se usa el eje z.

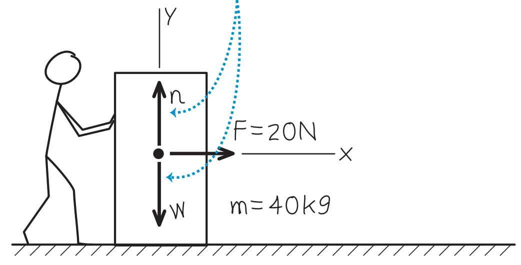
Las fuerzas que actúan sobre la caja son: **i.** la fuerza horizontal $\vec{F}$ ejercida por el trabajador, cuya magnitud es 20 N; **ii.** el peso $\vec{w}$ de la caja, es decir, la fuerza hacia abajo producida por la atracción gravitacional que ejerce la Tierra; y **iii.** la fuerza de soporte hacia arriba $\vec{n}$ ejercida por el piso. Como en la sección 4.2, llamamos a $\vec{n}$ fuerza *normal* porque es normal (perpendicular) a la superficie de contacto. (Usamos una n cursiva para evitar confusiones con la abreviatura N, de newton). Consideramos que la fricción es despreciable, así que no hay fuerza de fricción.

Puesto que la caja no se mueve verticalmente, la aceleración y es cero: $a_y = 0$. Nuestra incógnita es la componente x de la aceleración, a_x. La obtendremos usando la segunda ley de Newton en forma de componentes, dada por la ecuación (4.8).

EJECUTAR: Por la figura 4.18, solo la fuerza de 20 N ejercida por el trabajador tiene una componente x distinta de cero. Por lo tanto, la primera de las ecuaciones (4.8) nos indica que

$$\sum F_x = F = 20\text{ N} = ma_x$$

4.18 Diagrama de este problema. Las baldosas bajo la caja están recién enceradas, así que suponemos que la fricción es despreciable.



Por lo tanto, la componente x de la aceleración es

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{20\text{ N}}{40\text{ kg}} = \frac{20\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}{40\text{ kg}} = 0.50\text{ m/s}^2$$

EVALUAR: La aceleración apunta en la dirección $+x$, igual que la fuerza neta. La fuerza neta es constante, así que la aceleración también es constante. Si conocemos la posición y velocidad iniciales de la caja, podremos calcular su posición y velocidad en cualquier instante posterior con las ecuaciones de movimiento y aceleración constante del capítulo 2.

Para obtener a_x, no tuvimos que usar la componente y de la segunda ley de Newton, ecuaciones (4.8), $\Sigma F_y = ma_y$. Utilizando esta ecuación, ¿puede usted demostrar que la magnitud n de la fuerza normal en esta situación es igual al peso de la caja?



Ejemplo 4.5 Cálculo de la fuerza a partir de la aceleración

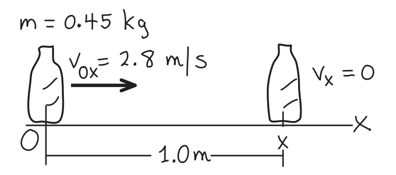
Una camarera empuja una botella de salsa de tomate con masa de 0.45 kg a la derecha sobre un mostrador horizontal liso. Al soltarla, la botella tiene una rapidez de 2.8 m/s, luego se frena por la fuerza de fricción constante ejercida por el mostrador. La botella se desliza 1.0 m antes de detenerse. ¿Qué magnitud y dirección tiene la fuerza de fricción que actúa sobre la botella?

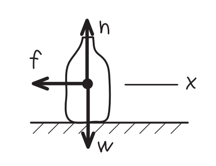
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema implica fuerzas y aceleración (el frenado de la botella de salsa), así que usaremos la segunda ley de Newton para resolverlo. Como en el ejemplo 4.4, se elige un sistema de coordenadas y se identifican las fuerzas que actúan sobre la botella (figura 4.19). Elegimos el eje $+x$ en la dirección en que se desliza la botella, y tomaremos como origen el punto donde la botella

4.19 Diagrama de este problema.

Dibujamos un diagrama para el movimiento de la botella y uno que muestra las fuerzas sobre la botella.





sale de la mano de la camarera. La fuerza de fricción $\vec{f}$ frena la botella, así que su dirección debe ser opuesta a la dirección de la velocidad (véase la figura 4.13*c*).

Nuestra incógnita es la magnitud f de la fuerza de fricción. La obtendremos usando la componente x de la segunda ley de Newton, ecuaciones (4.8). No hemos hablado de la componente x de la aceleración, a_x, pero sabemos que es constante porque la fuerza de fricción que causa la aceleración es constante. Por lo tanto, podemos calcular a_x usando la fórmula de aceleración constante de la sección 2.4. Conocemos las coordenadas x inicial y final de la botella ($x_0 = 0$ y $x = 1.0$ m) y su velocidad en x inicial y final ($v_{0x} = 2.8$ m/s y $v_x = 0$), de modo que la ecuación más fácil de usar es la ecuación (2.13), $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$.

EJECUTAR: Resolvemos la ecuación (2.13) despejando a_x:

$$a_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2(x - x_0)} = \frac{(0\text{ m/s})^2 - (2.8\text{ m/s})^2}{2(1.0\text{ m} - 0\text{ m})} = -3.9\text{ m/s}^2$$

El signo negativo indica que la aceleración de la botella es hacia la *izquierda* en la figura 4.19, opuesta a su velocidad, como debe ser, pues la botella se está frenando. La fuerza neta en la dirección x es la componente $-f$ de la fuerza de fricción, así que

$$\sum F_x = -f = ma_x = (0.45\text{ kg})(-3.9\text{ m/s}^2)$$
$$= -1.8\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2 = -1.8\text{ N}$$

El signo negativo indica que la fuerza sobre la botella está dirigida a la izquierda. La *magnitud* de la fuerza de fricción es $f = 1.8$ N.

EVALUAR: Para verificar el resultado, lo invitamos a repetir el cálculo con el eje $+x$ dirigido a la *izquierda* en la figura 4.19. Encontrará que ΣF_x es igual a $+f = +1.8$ N (porque la fuerza de fricción ahora está en la dirección $+x$), y nuevamente encontrará que $f = 1.8$ N. Las respuestas de las *magnitudes* de las fuerzas ¡no dependen de la elección de los ejes de coordenadas!

Notas acerca de las unidades

Conviene hablar un poco acerca de las unidades. En el sistema métrico cgs (que no usamos aquí), la unidad de masa es el gramo (10^{-3} kg), y la unidad de distancia es el centímetro, igual a 10^{-2} m. La unidad cgs de fuerza se llama *dina*:

$$1\text{ dina} = 1\text{ g}\cdot\text{cm/s}^2 = 10^{-5}\text{ N}$$

En el sistema británico, la unidad de fuerza es la *libra* (o libra-fuerza) y la unidad de masa es el *slug* (figura 4.20). La unidad de aceleración es el pie por segundo al cuadrado, así que

$$1\text{ libra} = 1\text{ slug}\cdot\text{ft/s}^2$$

La definición oficial de libra es

$$1\text{ libra} = 4.448221615260\text{ newtons}$$

Conviene recordar que una libra es aproximadamente 4.4 N, y un newton es aproximadamente 0.22 lb. Otro hecho que resulta útil recordar: un cuerpo con una masa de 1 kg tiene un peso de aproximadamente 2.2 lb en la superficie terrestre.

Las unidades de fuerza, masa y aceleración en los tres sistemas se listan en la tabla 4.2.

4.20 A pesar de su nombre, la unidad inglesa de masa nada tiene que ver con el tipo de "slug" (babosa) mostrado aquí. Una babosa de jardín común tiene una masa de unos 15 gramos, lo que equivale aproximadamente a 10^{-3} slugs.



Tabla 4.2 Unidades de fuerza, masa y aceleración

Sistemas de unidades	Fuerza	Masa	Aceleración
SI	newton (N)	kilogramo (kg)	m/s^2
cgs	dina (dyn)	gramo (g)	cm/s^2
Británico	libra (lb)	slug	ft/s2

Evalúe su comprensión de la sección 4.3 Ordene las siguientes situaciones de acuerdo con la magnitud de la aceleración del objeto, de la más baja a la más alta. ¿Hay casos que tengan la misma magnitud de aceleración? **i.** Sobre un objeto de 2.0 kg actúa una fuerza neta de 2.0 N; **ii.** sobre un objeto de 2.0 kg actúa una fuerza neta de 8.0 N; **iii.** sobre un objeto de 8.0 kg actúa una fuerza neta de 2.0 N; **iv.** sobre un objeto de 8.0 kg actúa una fuerza neta de 8.0 N. MP

4.4 Masa y peso

Una de las fuerzas más conocidas es el *peso* de un cuerpo, la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre el cuerpo. (Si usted estuviera en otro planeta, su peso sería la fuerza gravitacional que ese planeta ejerce sobre usted). Por desgracia, es común usar incorrecta e indistintamente los términos *masa* y *peso* en la conversación cotidiana. Es absolutamente indispensable que el lector entienda con claridad las diferencias entre estas dos cantidades físicas.

MasteringPHYSICS
ActivPhysics 2.9: Pole-Vaulter Vaults

La masa describe las propiedades *inerciales* de un cuerpo; es lo que mantiene a la vajilla sobre la mesa cuando retiramos el mantel de un tirón. A mayor masa, se necesitará más fuerza para provocar una aceleración dada; esto se refleja en la segunda ley de Newton, $\sum\vec{F} = m\vec{a}$.

El peso, en cambio, es una *fuerza* ejercida sobre un cuerpo por la atracción de la Tierra. La masa y el peso están relacionados: los cuerpos con masa grande tienen un peso grande. Sería difícil arrojar a cierta distancia un peñasco por su gran *masa*, y sería difícil levantarlo del suelo por su gran *peso*.

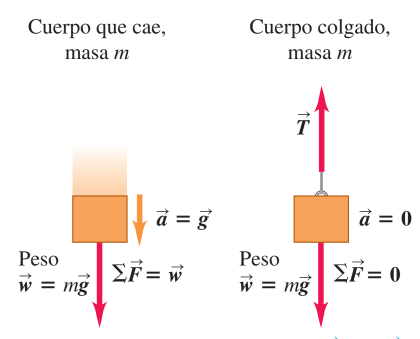
Para entender la relación entre masa y peso, observe que un cuerpo en caída libre tiene una aceleración de magnitud g, y por la segunda ley de Newton, una fuerza debe producir esa aceleración. Si un cuerpo de 1 kg cae con una aceleración de 9.8 m/s^2, la fuerza requerida tiene la magnitud

$$F = ma = (1\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) = 9.8\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2 = 9.8\text{ N}$$

La fuerza que hace que el cuerpo se acelere hacia abajo es su peso. Cualquier cuerpo con una masa de 1 kg, cercano a la superficie de la Tierra, *debe* tener un peso de 9.8 N para tener la aceleración que observamos en la caída libre. En términos más generales, un cuerpo de masa m debe tener un peso de magnitud w dado por

$$w = mg \qquad \text{(magnitud del peso de un cuerpo de masa } m\text{)} \qquad (4.9)$$

4.21 Relación entre masa y peso.



• La relación entre masa y peso es: $\vec{w} = m\vec{g}$.
• La relación es la misma si un cuerpo está cayendo o en reposo.

Por lo tanto, la magnitud w del peso de un cuerpo es directamente proporcional a su masa m. El peso de un cuerpo es una fuerza, una cantidad vectorial, y podemos escribir la ecuación (4.9) como ecuación vectorial (figura 4.21):

$$\vec{w} = m\vec{g} \qquad (4.10)$$

Recuerde que g es la *magnitud* de $\vec{g}$, la aceleración debida a la gravedad, por lo tanto, g siempre es positiva, por definición. Así, w, dada por la ecuación (4.9) es la *magnitud* del peso y también es positiva siempre.

CUIDADO **El peso de un cuerpo actúa en todo momento** Es importante entender que el peso de un cuerpo actúa sobre el cuerpo *todo el tiempo*, esté en caída libre o no. Si colgamos un objeto de una cuerda, está en equilibrio y su aceleración es cero; pero su peso, dado por la ecuación (4.10) sigue tirando hacia abajo sobre él (figura 4.21). En este caso, la cuerda tira del objeto hacia arriba con una fuerza ascendente. La *suma vectorial* de las fuerzas es cero, pero el peso continúa actuando.

Ejemplo conceptual 4.6 Fuerza neta y aceleración en caída libre



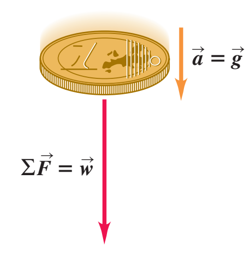
En el ejemplo 2.6, se dejó caer, del reposo, una moneda de un euro desde la Torre Inclinada de Pisa. Si la moneda cae libremente, considerando que los efectos del aire son despreciables, ¿cómo varía la fuerza neta sobre la moneda conforme esta cae?

SOLUCIÓN

En caída libre, la aceleración $\vec{a}$ de la moneda es constante e igual a $\vec{g}$. Por la segunda ley de Newton, la fuerza neta $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ también es constante e igual a $m\vec{g}$, que es el peso $\vec{w}$ de la moneda (figura 4.22). La velocidad de la moneda cambia durante la caída, pero la fuerza neta que actúa sobre ella permanece constante. (Si esto le sorprende, debería volver a leer el ejemplo conceptual 4.3).

La fuerza neta sobre una moneda en caída libre es constante incluso si inicialmente se lanza hacia arriba. La fuerza que nuestra mano ejerce sobre la moneda al lanzarla es una fuerza de contacto, y desaparece apenas la moneda pierde contacto con la mano. De aquí en adelante, la única fuerza que actúa sobre la moneda es su peso $\vec{w}$.

4.22 La aceleración de un objeto en caída libre es constante, lo mismo que la fuerza neta que actúa sobre él.

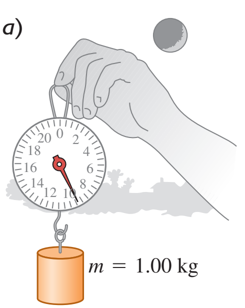


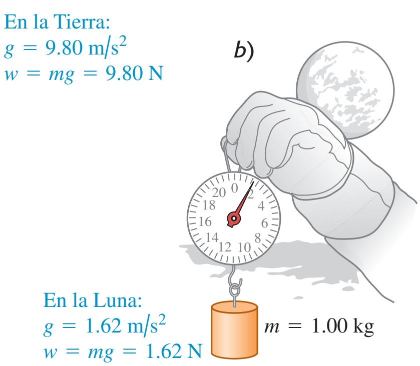
Variación de g con la ubicación

Usaremos $g = 9.80\ \text{m/s}^2$ para problemas en la Tierra (o bien, si los demás datos del problema se dan con solo dos cifras significativas, $g = 9.8\ \text{m/s}^2$). En realidad, el valor de g varía un poco en diferentes puntos de la superficie terrestre, entre 9.78 y $9.82\ \text{m/s}^2$, porque la Tierra no es perfectamente esférica y por los efectos de su rotación y el movimiento orbital. En un punto donde $g = 9.80\ \text{m/s}^2$, el peso de un kilogramo estándar es $w = 9.80$ N. En un punto donde $g = 9.78\ \text{m/s}^2$, el peso es $w = 9.78$ N, pero la masa sigue siendo 1 kg. El peso de un cuerpo varía de un lugar a otro; la masa no.

Si llevamos un kilogramo estándar a la superficie lunar, donde la aceleración en caída libre (igual al valor de g en la superficie lunar) es de $1.62\ \text{m/s}^2$, su peso será 1.62 N, pero su masa será aún de 1 kg (figura 4.23). Un astronauta de 80.0 kg pesa $(80.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 784$ N en la Tierra, pero en la Luna solo pesaría $(80.0\ \text{kg})(1.62\ \text{m/s}^2) = 130$ N. En el capítulo 13 veremos cómo calcular el valor de g en la superficie lunar o en otros planetas.

4.23 El peso de una masa de 1 kilogramo *a*) en la Tierra y *b*) en la Luna.



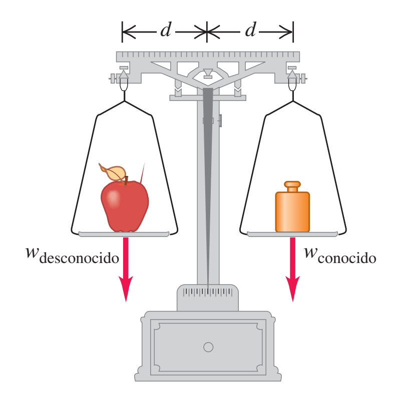


Medición de masa y peso

En la sección 4.3 describimos una forma de comparar masas comparando sus aceleraciones cuando se someten a la misma fuerza neta. Usualmente, sin embargo, la forma más fácil de medir la masa de un cuerpo consiste en medir su peso, por lo general comparándolo con un estándar. La ecuación (4.9) afirma que dos cuerpos que tienen el mismo peso en cierto lugar también tienen la misma masa. Podemos comparar pesos con mucha precisión; la conocida balanza de brazos iguales (figura 4.24) puede determinar con gran precisión (hasta de 1 parte en 10^6) cuando los pesos de dos cuerpos son iguales y, por lo tanto, cuando sus masas lo son.

El concepto de masa desempeña dos papeles un tanto distintos en mecánica. El peso de un cuerpo (la fuerza gravitacional que actúa sobre él) es proporcional a su masa; podemos llamar *masa gravitacional* a la propiedad relacionada con interacciones gravitacionales. Por otro lado, podemos llamar *masa inercial* a la propiedad inercial que aparece en la segunda ley de Newton. Si estas dos cantidades fueran distintas, la aceleración debida a la gravedad podría ser distinta para diferentes cuerpos. Sin embargo, experimentos de gran precisión han concluido que *son* iguales, con una precisión mayor de 1 parte en 10^{12}.

4.24 Una balanza de brazos iguales determina la masa de un cuerpo (como una manzana) comparando su peso con un peso conocido.



CUIDADO **No confunda masa con peso** En la vida cotidiana, con frecuencia se usan incorrectamente las unidades del SI para masa y peso. Expresiones incorrectas como "esta caja pesa 6 kg" son casi universales. Lo que queremos decir es que la *masa* de la caja, la cual quizá se determinó indirectamente *pesándola*, es de 6 kg. ¡Tenga cuidado de evitar este error en su trabajo! En el SI, el peso (una fuerza) se mide en newtons, mientras que la masa se mide en kilogramos.

Ejemplo 4.7 Masa y peso

Un Rolls-Royce Phantom de 2.49×10^4 N que viaja en la dirección $+x$ hace una parada de emergencia; la componente x de la fuerza neta que actúa sobre él es -1.83×10^4 N. ¿Qué aceleración tiene?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Nuestra incógnita es la componente x de la aceleración del automóvil, a_x. Usaremos la segunda ley de Newton de la componente x para relacionar fuerza y aceleración, es decir, las ecuaciones (4.8). Para ello, necesitamos conocer la masa del automóvil. Sin embargo, dado que el newton es una unidad de fuerza, sabemos que 2.49×10^4 N es el *peso* del automóvil, no su masa. Por lo tanto, usaremos primero la ecuación (4.9) para determinar la masa del automóvil a partir de su peso. El automóvil tiene una velocidad x positiva y está frenando, de modo que su aceleración x es negativa.

EJECUTAR: La masa del automóvil es

$$m = \frac{w}{g} = \frac{2.49 \times 10^4\ \text{N}}{9.80\ \text{m/s}^2} = \frac{2.49 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{9.80\ \text{m/s}^2}$$
$$= 2540\ \text{kg}$$

Continúa

Entonces, $\Sigma F_x = ma_x$ nos da

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{-1.83 \times 10^4 \text{ N}}{2540 \text{ kg}} = \frac{-1.83 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{2540 \text{ kg}}$$
$$= -7.20 \text{ m/s}^2$$

EVALUAR: El signo negativo implica que el vector aceleración apunta en la dirección $-x$, como se esperaba. La magnitud de la aceleración es bastante alta; los pasajeros de este automóvil experimentarán una enorme fuerza hacia atrás en sus hombros por los cinturones de seguridad.

La aceleración también es igual a $-0.735g$. El número -0.735 es la razón entre -1.83×10^4 N (la componente x de la fuerza neta) y 2.49×10^4 N (el peso). De hecho, la aceleración de un cuerpo expresada como múltiplo de g *siempre* es igual a la razón entre la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo y su peso. ¿Entiende por qué?

Evalúe su comprensión de la sección 4.4 Suponga que un astronauta llega a un planeta donde $g = 19.6$ m/s^2. En comparación con la Tierra, ¿le sería más fácil, más difícil o igual de fácil caminar ahí? ¿Le sería más fácil, más difícil o igual de fácil atrapar una pelota que se mueve horizontalmente a 12 m/s? (Suponga que el traje espacial es un modelo ligero que no impide en absoluto los movimientos del astronauta). ❙

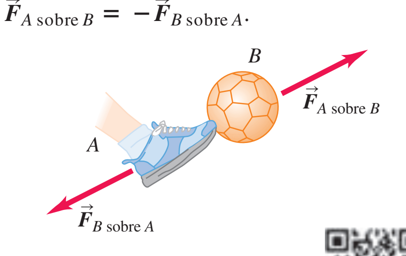
4.5 Tercera ley de Newton

Una fuerza que actúa sobre un cuerpo siempre es el resultado de su interacción con otro cuerpo, así que las fuerzas siempre vienen en pares. No podemos tirar de una perilla sin que esta tire de nosotros. Al patear un balón de fútbol, la fuerza hacia adelante que el pie ejerce sobre él lo lanza en su trayectoria, pero sentimos la fuerza que el balón ejerce sobre el pie. Si pateamos un peñasco, el dolor que sentimos se debe a la fuerza que el peñasco ejerce sobre el pie.

En todos estos casos, la fuerza que ejercemos sobre el otro cuerpo tiene dirección opuesta a la que el cuerpo ejerce sobre nosotros. Los experimentos indican que, al interactuar dos cuerpos, las fuerzas que ejercen mutuamente son *iguales en magnitud* y *opuestas en dirección*. Esta es la *tercera ley del movimiento de Newton*:

Tercera ley del movimiento de Newton: Si el cuerpo A ejerce una fuerza sobre el cuerpo B (una "acción"), entonces, el cuerpo B ejerce una fuerza sobre el cuerpo A (una "reacción"). Estas dos fuerzas tienen la misma magnitud pero dirección opuesta, y actúan sobre cuerpos *diferentes*.

4.25 Si el cuerpo A ejerce una fuerza $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$ sobre el cuerpo B, entonces, el cuerpo B ejerce una fuerza $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$ sobre el cuerpo A que tiene la misma magnitud, pero dirección opuesta: $\vec{F}_{A \text{ sobre } B} = -\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$.



Video Tutor Demo

Por ejemplo, en la figura 4.25, $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$ es la fuerza aplicada *por* el cuerpo A (primer subíndice) *sobre* el cuerpo B (segundo subíndice), y $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$ es la fuerza aplicada *por* el cuerpo B (primer subíndice) *sobre* el cuerpo A (segundo subíndice). El enunciado matemático de la tercera ley es

$$\vec{F}_{A \text{ sobre } B} = -\vec{F}_{B \text{ sobre } A} \quad \text{(tercera ley del movimiento de Newton)} \tag{4.11}$$

No importa si un cuerpo es inanimado (como el balón de la figura 4.25) y el otro no lo es (como el pateador): necesariamente ejercen fuerzas entre sí que cumplen la ecuación (4.11).

En el enunciado de la tercera ley de Newton, "acción" y "reacción" son las dos fuerzas opuestas (en la figura 4.25, $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$ y $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$), y algunas veces las llamamos **par acción-reacción**. Esto *no* implica una relación de causa y efecto; podemos considerar cualquiera de las fuerzas como la "acción", y la otra como la "reacción". A menudo decimos simplemente que las fuerzas son "iguales y opuestas" para indicar que tienen igual magnitud, pero dirección opuesta.

CUIDADO **Las dos fuerzas en un par acción-reacción actúan sobre cuerpos diferentes** Destacamos que las dos fuerzas descritas en la tercera ley de Newton actúan sobre cuerpos *distintos*. Esto es importante en problemas que implican la primera o segunda ley de Newton, en los que actúan fuerzas sobre un solo cuerpo. Por ejemplo, la fuerza neta que actúa sobre el balón de la figura 4.25 es la suma vectorial del peso del balón y la fuerza $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$ ejercida por el pateador. No incluimos $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$ porque esta fuerza actúa sobre el pateador, no sobre el balón. ❙

En la figura 4.25, las fuerzas de acción y reacción son de *contacto*, y solo existen cuando los dos cuerpos se tocan. Sin embargo, la tercera ley de Newton también es válida para las fuerzas de *largo alcance* que no requieren contacto físico, como la atracción gravitacional. Una pelota de ping-pong ejerce una fuerza gravitacional hacia arriba sobre la Tierra, igual en magnitud a la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce hacia abajo sobre la pelota. Si dejamos caer la pelota, esta y la Tierra se aceleran una hacia la otra. La fuerza neta sobre cada cuerpo tiene la misma magnitud, pero la aceleración de la Tierra es pequeñísima porque su masa es muy grande. Y sin embargo, ¡se mueve!

Ejemplo conceptual 4.8 ¿Cuál fuerza es mayor?

Después de que su automóvil deportivo se descompone, usted lo empuja hacia el taller mecánico más cercano. Cuando el automóvil comienza a moverse, ¿cómo es la fuerza que usted ejerce sobre el automóvil en comparación con la que este ejerce sobre usted? ¿Y cómo se comparan esas fuerzas cuando usted empuja el auto con rapidez constante?

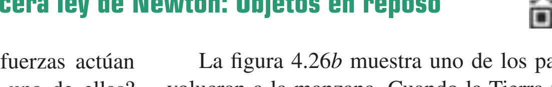
SOLUCIÓN

La tercera ley de Newton dice que en *ambos* casos, la fuerza que usted ejerce sobre el automóvil es igual en magnitud y opuesta en dirección a la que el auto ejerce sobre usted. Es cierto que usted debe empujar con más fuerza para poner en movimiento el automóvil que para mantenerlo en movimiento; sin embargo, no importa qué tan fuerte empuje, el automóvil lo empuja a usted con tanta fuerza como usted a él. La tercera ley de Newton da el mismo resultado si los cuerpos están en reposo, moviéndose con velocidad constante o acelerando.

Quizá se pregunte cómo el automóvil "sabe" que debe empujarlo a usted con la misma magnitud de fuerza que usted ejerce sobre él. Podría ser útil visualizar las fuerzas que usted y el automóvil ejercen mutuamente como interacciones entre los átomos de la superficie de sus manos y los átomos de la superficie del automóvil. Tales interacciones son similares a diminutos resortes entre átomos adyacentes, y un resorte comprimido ejerce fuerzas de la misma magnitud en ambos extremos.

No obstante, la razón fundamental por la que sabemos que objetos con distinta masa ejercen fuerzas de la misma magnitud entre sí es porque los experimentos nos dicen que así es. La física es algo más que una mera colección de reglas y ecuaciones; más bien, es una descripción sistemática del mundo natural basada en la experimentación y la observación.

Ejemplo conceptual 4.9 Aplicación de la tercera ley de Newton: Objetos en reposo



Una manzana está en reposo sobre una mesa. ¿Qué fuerzas actúan sobre ella? ¿Cuál es la fuerza de reacción para cada una de ellas? ¿Cuáles son los pares acción-reacción?

SOLUCIÓN

La figura 4.26*a* muestra las fuerzas que actúan sobre la manzana. En el diagrama, $\vec{F}_{\text{Tierra sobre manzana}}$ es el peso de la manzana, es decir, la fuerza gravitacional hacia abajo ejercida *por* la Tierra *sobre* la manzana. Asimismo, $\vec{F}_{\text{mesa sobre manzana}}$ es 1a fuerza hacia arriba ejercida *por* la mesa *sobre* la manzana.

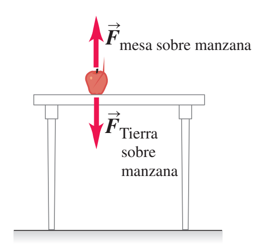
La figura 4.26*b* muestra uno de los pares acción-reacción que involucran a la manzana. Cuando la Tierra tira de la manzana, con una fuerza $\vec{F}_{\text{Tierra sobre manzana}}$, la manzana ejerce una fuerza igualmente intensa hacia arriba, $\vec{F}_{\text{manzana sobre Tierra}}$ sobre la Tierra. Por la tercera ley de Newton (ecuación 4.11),

$$\vec{F}_{\text{manzana sobre Tierra}} = -\vec{F}_{\text{Tierra sobre manzana}}$$

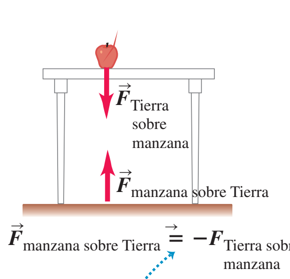
Además, la mesa empuja la manzana hacia arriba con fuerza $\vec{F}_{\text{mesa sobre manzana}}$ y la reacción correspondiente es la fuerza hacia

4.26 Las dos fuerzas de un par acción-reacción siempre actúan sobre cuerpos distintos.

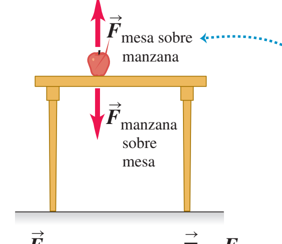
a) Las fuerzas que actúan sobre la manzana



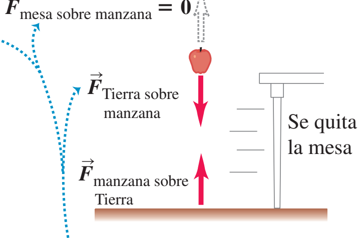
b) El par acción-reacción para la interacción entre la manzana y la Tierra



c) El par acción-reacción para la interacción entre la manzana y la mesa



d) Se elimina una de las fuerzas que actúan sobre la manzana



Continúa

abajo $\vec{F}_{\text{manzana sobre mesa}}$ que la manzana ejerce sobre la mesa (figura 4.26*c*).

$$\vec{F}_{\text{manzana sobre mesa}} = -\vec{F}_{\text{mesa sobre manzana}}$$

Las dos fuerzas que actúan sobre la manzana, $\vec{F}_{\text{mesa sobre manzana}}$ y $\vec{F}_{\text{Tierra sobre manzana}}$, *no* constituyen un par acción-reacción aunque sean iguales en magnitud y de dirección opuesta. No representan la interacción de dos cuerpos; son dos fuerzas distintas que actúan sobre el *mismo* cuerpo. La figura 4.26*d* muestra otra forma de mirar esto. Si quitáramos repentinamente la mesa debajo de la manzana, las fuerzas $\vec{F}_{\text{manzana sobre mesa}}$ y $\vec{F}_{\text{mesa sobre manzana}}$ serían cero, pero $\vec{F}_{\text{manzana sobre Tierra}}$ y $\vec{F}_{\text{Tierra sobre manzana}}$ seguirían existiendo (la interacción gravitacional aún estaría presente). Puesto que $\vec{F}_{\text{mesa sobre manzana}}$ ahora es cero, no puede ser el negativo de $\vec{F}_{\text{Tierra sobre manzana}}$ (que es distinta de cero), y estas fuerzas no pueden ser un par acción-reacción. *Las dos fuerzas en un par acción-reacción* ***nunca*** *actúan sobre el mismo cuerpo*.



Ejemplo conceptual 4.10 Aplicación de la tercera ley de Newton: Objetos en movimiento

Un cantero arrastra un bloque de mármol sobre un piso tirando de una cuerda atada al bloque (figura 4.27*a*). El bloque podría estar o no en equilibrio. ¿Qué relaciones hay entre las diversas fuerzas? ¿Cuáles son los pares acción-reacción?

SOLUCIÓN

Usaremos los subíndices B para el bloque, R para la cuerda y M para el hombre. En la figura 4.27*b* el vector $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ representa la fuerza ejercida por el *hombre* sobre la *cuerda*; su reacción es la fuerza igual y opuesta $\vec{F}_{\text{R sobre M}}$ ejercida por la *cuerda* sobre el *hombre*. De manera similar, el vector $\vec{F}_{\text{R sobre B}}$ es la fuerza ejercida por la *cuerda* sobre el *bloque*; su reacción es la fuerza igual y opuesta $\vec{F}_{\text{B sobre R}}$ que el *bloque* ejerce sobre la *cuerda*. Para estos dos pares acción-reacción (figura 4.27*b*), tenemos

$$\vec{F}_{\text{R sobre M}} = -\vec{F}_{\text{M sobre R}} \quad \text{y} \quad \vec{F}_{\text{B sobre R}} = -\vec{F}_{\text{R sobre B}}$$

Tenga claro que las fuerzas $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ y $\vec{F}_{\text{B sobre R}}$ (figura 4.27*c*) *no* son un par acción-reacción, porque ambas actúan sobre el *mismo* cuerpo (la cuerda); una acción y su reacción siempre *deben* actuar sobre cuerpos *distintos*. Además, las fuerzas $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ y $\vec{F}_{\text{B sobre R}}$ no necesariamente tienen la misma magnitud. Si aplicamos la segunda ley de Newton a la cuerda, obtenemos

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{\text{M sobre R}} + \vec{F}_{\text{B sobre R}} = m_{\text{cuerda}}\vec{a}_{\text{cuerda}}$$

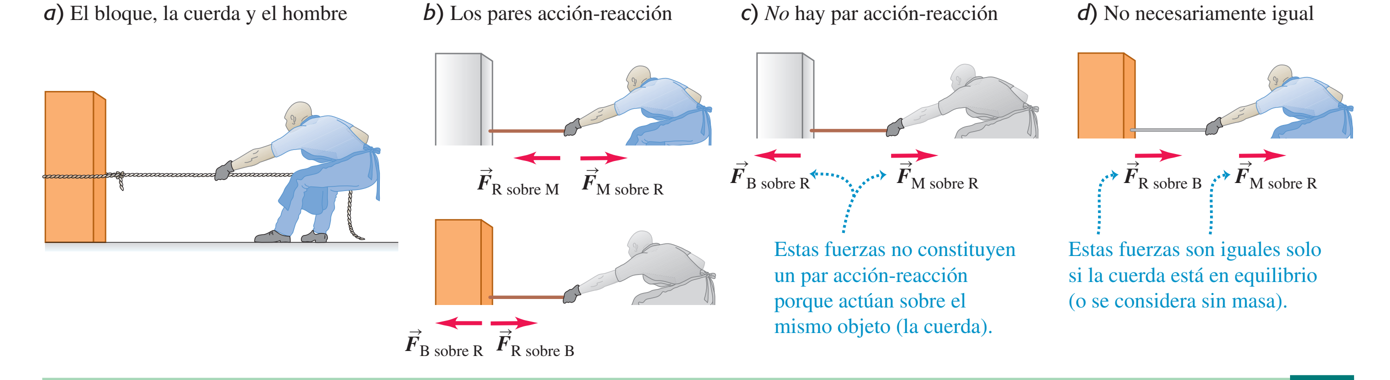
Si el bloque y la cuerda tienen una aceleración (es decir, si su rapidez está aumentando o disminuyendo), la cuerda no está en equilibrio y $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ deberá tener distinta magnitud que $\vec{F}_{\text{B sobre R}}$. En contraste, las fuerzas de acción-reacción $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ y $\vec{F}_{\text{R sobre M}}$ siempre tienen la misma magnitud, al igual que $\vec{F}_{\text{R sobre B}}$ y $\vec{F}_{\text{B sobre R}}$. La tercera ley de Newton se cumple, ya sea que los cuerpos estén acelerando o no.

En el caso especial en que la cuerda se encuentra en equilibrio, las fuerzas $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ y $\vec{F}_{\text{B sobre R}}$ tienen igual magnitud y son opuestas en dirección. Pero esto es un ejemplo de la *primera* ley de Newton, no de la tercera; estas dos son fuerzas sobre el mismo cuerpo, no fuerzas ejercidas por un cuerpo sobre otro. Otra forma de ver esto es que, en el equilibrio, $\vec{a}_{\text{cuerda}} = \mathbf{0}$ en la ecuación anterior. Entonces, $\vec{F}_{\text{B sobre R}} = -\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ por la primera o la segunda ley de Newton.

Otro caso especial es cuando la cuerda está acelerando, pero tiene masa insignificante en comparación con el bloque o el hombre. En este caso, $m_{\text{cuerda}} = 0$ en la ecuación anterior y, otra vez, $\vec{F}_{\text{B sobre R}} = -\vec{F}_{\text{M sobre R}}$. Puesto que $\vec{F}_{\text{B sobre R}}$ *siempre* es igual a $-\vec{F}_{\text{R sobre B}}$ por la tercera ley de Newton (son un par acción-reacción), en este caso de la "cuerda sin masa", $\vec{F}_{\text{R sobre B}}$ también es igual a $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$.

Para ambos casos de la "cuerda sin masa" y el caso de la cuerda en equilibrio, la fuerza de la cuerda sobre el bloque es igual en magnitud y dirección a la fuerza del hombre sobre la cuerda (figura 4.27*d*). Es decir, podemos visualizar la cuerda "transmitiendo" al bloque la fuerza que ejerce el hombre sobre la cuerda. Este es un punto de vista útil, pero recuerde que *solo* es válido si la cuerda tiene masa insignificante o está en equilibrio.

4.27 Identificación de las fuerzas que actúan cuando un hombre tira de una cuerda atada a un bloque.





Ejemplo conceptual 4.11 ¿Una paradoja de la tercera ley de Newton?

En el ejemplo conceptual 4.10 vimos que el cantero tira de la combinación cuerda-bloque con la misma fuerza con que esa combinación tira de él. ¿Por qué, entonces, el bloque se mueve mientras el hombre permanece en un solo lugar?

SOLUCIÓN

Para resolver esta contradicción aparente, recuerde la diferencia entre la *segunda* ley de Newton y la *tercera*. Las únicas fuerzas que intervienen en la segunda ley son las que actúan *sobre* el cuerpo en cuestión. La suma vectorial de esas fuerzas determina la aceleración de ese cuerpo (si acaso acelera). En contraste, la tercera ley de Newton relaciona las fuerzas que dos cuerpos *distintos* ejercen *uno sobre el otro*. La tercera ley, por sí sola, nada nos dice acerca del movimiento de cualquiera de los dos cuerpos.

Cuando la combinación cuerda-bloque inicialmente está en reposo, comenzará a deslizarse si la fuerza que ejerce el cantero $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ es *mayor* que la fuerza de fricción que ejerce el piso sobre el bloque (figura 4.28). (El bloque tiene base lisa, lo cual ayuda a reducir la fricción). Por lo tanto, hay una fuerza neta hacia la derecha sobre la combinación cuerda-bloque, de manera que acelera hacia la derecha. En contraste, el cantero *no* se mueve porque la fuerza neta que actúa sobre él es *cero*. Puesto que el hombre tiene zapatos con suelas antideslizantes que no se resbalan sobre el piso, la fuerza de fricción que el piso ejerce sobre él es suficiente para equilibrar el tirón de la cuerda sobre él, $\vec{F}_{\text{R sobre M}}$. (Tanto el bloque como el hombre experimentan también una fuerza de gravedad hacia abajo y una fuerza normal hacia arriba ejercida por el piso, las cuales se equilibran entre sí y se anulan, por lo que no se incluyeron en la figura 4.28).

Una vez que el bloque se mueve con la rapidez deseada, el hombre no tendrá que tirar con tanta fuerza; solo deberá desarrollar la fuerza suficiente para equilibrar exactamente la fuerza de fricción sobre el bloque. Entonces, la fuerza neta sobre el bloque en movimiento es cero,

4.28 Las fuerzas horizontales que actúan sobre la combinación bloque-cuerda (izquierda) y el hombre (derecha). (No se muestran las fuerzas verticales).

y el bloque se seguirá moviendo hacia el hombre con velocidad constante, de acuerdo con la primera ley de Newton.

Concluimos que el bloque se acelera mientras el hombre no lo hace debido a las diferentes fuerzas de fricción que actúan sobre ellos. Si el piso estuviera recién encerado, de modo que la fricción entre el piso y los zapatos del cantero fuera pequeña, el tirón de la cuerda haría que el bloque empezara a deslizarse a la derecha *y* él comenzaría a deslizarse hacia la izquierda.

La moraleja de este ejemplo es que, al analizar el movimiento de un cuerpo, debemos recordar que solo las fuerzas que actúan *sobre* ese cuerpo determinan su movimiento. Desde esta perspectiva, la tercera ley de Newton es solo una herramienta que nos ayuda a identificar las fuerzas.

Un cuerpo al cual se aplican fuerzas que tiran de sus extremos, como la cuerda de la figura 4.27, está en *tensión*. La **tensión** en cualquier punto es la magnitud de la fuerza que actúa en él (véase la figura 4.2*c*). En la figura 4.27*b*, la tensión en el extremo derecho de la cuerda es la magnitud de $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ (o de $\vec{F}_{\text{R sobre M}}$), y en el izquierdo, la magnitud de $\vec{F}_{\text{B sobre R}}$ (o de $\vec{F}_{\text{R sobre B}}$). Si la cuerda está en equilibrio y solo actúan sobre ella fuerzas en sus extremos, la tensión es *igual* en ambos extremos y en toda la cuerda. Por lo tanto, si las magnitudes de $\vec{F}_{\text{B sobre R}}$ y $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ son de 50 N, la tensión en la cuerda es 50 N (*no* 100 N). El vector de fuerza *total* $\vec{F}_{\text{B sobre R}} + \vec{F}_{\text{M sobre R}}$ que actúa sobre la cuerda en este caso ¡es cero!

Hacemos hincapié una vez más en una verdad fundamental: las dos fuerzas en un par acción-reacción *nunca* actúan sobre el mismo cuerpo. Recordar este hecho sencillo a menudo le ayudará a evitar confusiones acerca de los pares acción-reacción y de la tercera ley de Newton.

Evalúe su comprensión de la sección 4.5 Usted conduce su automóvil por un camino rural y un mosquito se estrella contra el parabrisas. ¿Qué tiene mayor magnitud: la fuerza que el auto ejerció sobre el mosquito o la que este ejerció sobre el vehículo? ¿O son iguales las magnitudes? Si son diferentes, ¿cómo podemos conciliar este hecho con la tercera ley de Newton? Si son iguales, ¿por qué el mosquito se aplasta y el auto no sufre daños?

MasteringPHYSICS®

ActivPhysics 2.1.1: Force Magnitudes



Video Tutor Demo



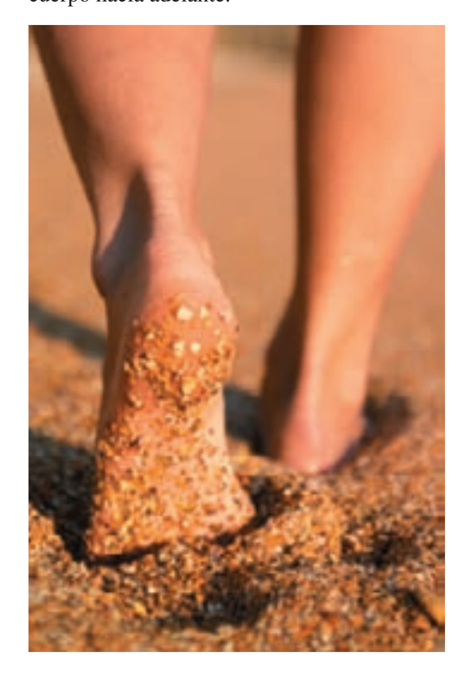
Video Tutor Demo

4.6 Diagramas de cuerpo libre

Las tres leyes del movimiento de Newton incluyen todos los principios básicos que necesitamos para resolver una amplia variedad de problemas de mecánica. Estas leyes tienen un planteamiento muy sencillo; sin embargo, el proceso de aplicarlas a situaciones específicas a menudo constituye un verdadero reto. En esta breve sección mencionaremos tres ideas clave y técnicas que se usan en cualquier problema donde intervienen las leyes de Newton. El lector aprenderá otras en el capítulo 5, donde se amplía el uso de las leyes de Newton a situaciones más complicadas.

1. *La primera ley de Newton y la segunda se refieren a un cuerpo específico*. Al usar la primera ley de Newton, $\sum\vec{F} = \mathbf{0}$, en una situación de equilibrio, o la segunda, $\sum\vec{F} = m\vec{a}$, en una situación sin equilibrio, debemos decidir desde un principio a qué cuerpo nos estamos refiriendo. Esta decisión tal vez parezca trivial, pero no lo es.
2. *Solo importan las fuerzas que actúan sobre el cuerpo*. La sumatoria $\sum\vec{F}$ incluye todas las fuerzas que actúan *sobre* el cuerpo en cuestión. Por lo tanto, una vez que usted haya elegido el cuerpo que analizará, tendrá que identificar todas las fuerzas que actúan sobre él. No se confunda entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y las fuerzas que este ejerce sobre algún otro. Por ejemplo, para analizar a una persona que camina, incluiríamos en $\sum\vec{F}$ la fuerza que el suelo ejerce sobre la persona al caminar, pero *no* la fuerza que la persona ejerce sobre el suelo (figura 4.29). Estas fuerzas forman un par acción-reacción y están relacionadas por la tercera ley de Newton; pero en $\sum\vec{F}$ solo entra el miembro del par que actúa sobre el cuerpo que se esté considerando.
3. *Los diagramas de cuerpo libre son indispensables para identificar las fuerzas relevantes*. Un **diagrama de cuerpo libre** es un diagrama que muestra solamente el cuerpo elegido, "libre" de su entorno, con vectores que muestran las magnitudes y direcciones de todas las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo por todos los cuerpos que interactúan con él. Ya mostramos algunos diagramas de cuerpo libre en las figuras 4.18, 4.19, 4.21 y 4.26*a*. No olvide incluir todas las fuerzas que actúan *sobre* el cuerpo, y cuídese también de *no* incluir fuerzas que el cuerpo ejerza sobre otro cuerpo. En particular, las dos fuerzas de un par acción-reacción *nunca* deben aparecer en el mismo diagrama de cuerpo libre, porque nunca actúan sobre el mismo cuerpo. Además, tampoco se incluyen las fuerzas que un cuerpo ejerce sobre sí mismo, ya que estas no pueden afectar su movimiento.

4.29 El simple acto de caminar depende esencialmente de la tercera ley de Newton. Para iniciar el movimiento hacia adelante, empujamos el suelo hacia atrás con el pie. En reacción, el suelo empuja nuestro pie (y por lo tanto todo nuestro cuerpo) hacia adelante con una fuerza de la misma magnitud. Esta fuerza *externa*, aplicada por el suelo, es la que acelera nuestro cuerpo hacia adelante.



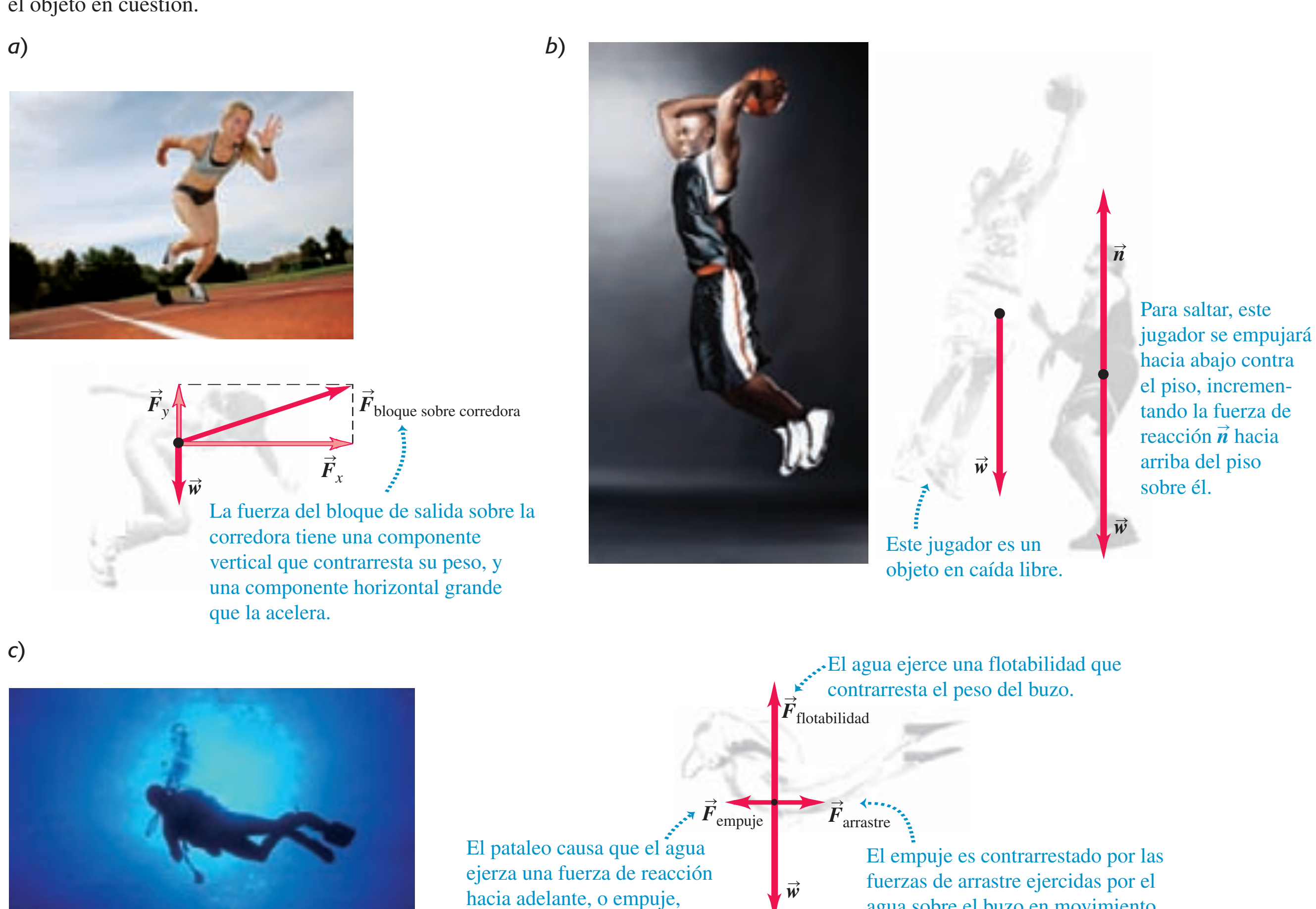
CUIDADO **Fuerzas en los diagramas de cuerpo libre** Al terminar de dibujar un diagrama de cuerpo libre, usted *debe* ser capaz de contestar, para cada fuerza, la pregunta: ¿Qué otro cuerpo está aplicando dicha fuerza? Si no logra responderla, tal vez está tratando con una fuerza inexistente. Cuídese sobre todo de evitar fuerzas ficticias como "la fuerza de aceleración" o "la fuerza $m\vec{a}$", que mencionamos en la sección 4.3.

Si en un problema interviene más de un cuerpo, hay que analizarlo y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo. Por ejemplo, la figura 4.27*c* muestra un diagrama de cuerpo libre por separado para la cuerda en el caso en que esta se considera sin masa (no actúa fuerza gravitacional sobre ella). La figura 4.28 también muestra diagramas para el bloque y el cantero; sin embargo, estos *no* son realmente diagramas de cuerpo libre porque no muestran todas las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo. (Faltan las fuerzas verticales: la fuerza del peso ejercida por la Tierra y la fuerza normal hacia arriba ejercida por el piso).

La figura 4.30 ilustra tres situaciones reales y los diagramas de cuerpo libre correspondientes. Observe que en cada situación una persona ejerce una fuerza sobre algo de su entorno; pero la fuerza que se destaca en el diagrama de cuerpo libre de la persona es la reacción de los objetos del entorno *sobre* la persona.

Evalúe su comprensión de la sección 4.6 La flotabilidad que se ilustra en la figura 4.30*c* es la mitad de un par acción-reacción. ¿Cuál fuerza es la otra mitad de este par? **i.** El peso del buzo; **ii.** la fuerza de empuje hacia adelante; **iii.** la fuerza de arrastre hacia atrás; **iv.** la fuerza hacia abajo que el buzo ejerce sobre el agua; **v.** la fuerza hacia atrás que el buzo ejerce sobre el agua al patalear.

4.30 Ejemplos de diagramas de cuerpo libre. En cada caso, el diagrama de cuerpo libre muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre el objeto en cuestión.

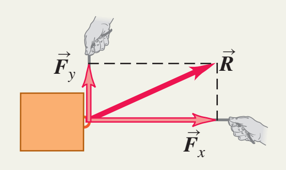


RESUMEN



Fuerza como vector: La fuerza es una medida cuantitativa de la interacción de dos cuerpos. Es una cantidad vectorial. Si varias fuerzas actúan sobre un cuerpo, el efecto sobre su movimiento es igual al que se da cuando una sola fuerza, igual a la suma vectorial (resultante) de las fuerzas, actúa sobre el cuerpo. (Véase el ejemplo 4.1).

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = \sum \vec{F} \quad (4.1)$$



La fuerza neta sobre un cuerpo y la primera ley de Newton: La primera ley de Newton dice que, si la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo (la *fuerza neta*) es cero, el cuerpo está en equilibrio y tiene aceleración cero. Si el cuerpo está inicialmente en reposo, permanece en reposo; si está inicialmente en movimiento, sigue moviéndose con velocidad constante. Esta ley solo es válida en marcos de referencia inerciales. (Véase los ejemplos 4.2 y 4.3).

$$\sum \vec{F} = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

Masa, aceleración y segunda ley de Newton: Las propiedades inerciales de un cuerpo se caracterizan por su *masa*. La aceleración de un cuerpo bajo la acción de un conjunto de fuerzas dado es directamente proporcional a la suma vectorial de las fuerzas (la *fuerza neta*) e inversamente proporcional a la masa del cuerpo. Esta relación es la segunda ley de Newton. Al igual que la primera ley, esta solo es válida en marcos de referencia inerciales. La unidad de fuerza se define en términos de las unidades de masa y aceleración. En el SI, la unidad de fuerza es el newton (N), igual a 1 kg · m/s^2. (Véase los ejemplos 4.4 y 4.5).

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (4.7)$$

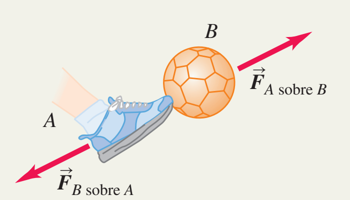
$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum F_z = ma_z \quad (4.8)$$

Peso: El peso $\vec{w}$ de un cuerpo es la fuerza gravitacional ejercida sobre él por la Tierra. El peso es una cantidad vectorial. La magnitud del peso de un cuerpo en un lugar específico es igual al producto de su masa m por la magnitud de la aceleración debida a la gravedad g en ese lugar. Mientras que el peso de un cuerpo depende de su ubicación, la masa es independiente del lugar de medición. (Véase los ejemplos 4.6 y 4.7).

$$w = mg \quad (4.9)$$

Tercera ley de Newton y pares acción-reacción: La tercera ley de Newton dice que cuando dos cuerpos interactúan, ejercen fuerzas uno sobre otro que en todo instante son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Estas fuerzas se denominan fuerzas de acción-reacción y cada una actúa solo sobre uno de los dos cuerpos; nunca actúan sobre el mismo cuerpo. (Véase los ejemplos 4.8 a 4.11).

$$\vec{F}_{A \text{ sobre } B} = -\vec{F}_{B \text{ sobre } A} \quad (4.11)$$



PROBLEMA PRÁCTICO Eslabones de una cadena

Un estudiante sostiene una cadena que tiene tres eslabones, cada uno con una masa $m = 0.250$ kg, con una cuerda ligera. Él tira de la cuerda hacia arriba de modo que ejerce una fuerza ascendente de 9.00 N sobre la cadena. *a*) Elabore un diagrama de cuerpo libre de la cadena completa, considerada como un cuerpo, y uno para cada uno de los tres eslabones. *b*) Use los diagramas del inciso *a*) y las leyes de Newton para calcular **i.** la aceleración de la cadena, **ii.** la fuerza ejercida por el eslabón superior sobre el eslabón medio, y **iii.** la fuerza ejercida por el eslabón medio sobre el eslabón inferior. Considere a la cuerda sin masa.

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Existen cuatro objetos de interés en este problema: la cadena como un todo y los tres eslabones individuales. Para cada uno de estos cuatro objetos, elabore una lista de fuerzas externas que actúan sobre él. Además de la fuerza de gravedad, su lista debe incluir solo fuerzas ejercidas por otros objetos que *tocan* el objeto en cuestión.
2. Algunas de las fuerzas de las listas forman pares de acción-reacción (un par es la fuerza del eslabón superior sobre el eslabón medio y la fuerza del eslabón medio sobre el eslabón superior). Identifique todos estos pares.
3. Use las listas para dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada uno de los cuatro objetos. Elija los ejes de coordenadas.
4. Use las listas para determinar cuántas incógnitas existen en este problema. ¿Cuáles son estas?

EJECUTAR

5. Escriba una ecuación de la segunda ley de Newton para cada uno de los cuatro objetos y una ecuación de la tercera ley de Newton por cada par de acción-reacción. Por lo menos debe tener tantas ecuaciones como incógnitas haya (véase el paso 4). ¿Así es?
6. Despeje las incógnitas de las ecuaciones.

EVALUAR

7. Verifique sus resultados sustituyéndolos en las ecuaciones del paso 6. Esto es especialmente importante si usted terminó con más ecuaciones en el paso 5 de las que usó en el paso 6.
8. Ordene la fuerza de la cuerda sobre la cadena, la fuerza del eslabón superior sobre el eslabón medio, y la fuerza del eslabón medio sobre el eslabón inferior de la magnitud más pequeña a la más grande. ¿Es lógica esta clasificación? Explique su respuesta.
9. Repita el problema para el caso donde la fuerza hacia arriba que ejerce la cuerda sobre la cadena es de solo 7.35 N. ¿Es la misma clasificación que la del paso 8? ¿Es esto razonable?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P4.1 ¿Un cuerpo puede estar en equilibrio si solo una fuerza actúa sobre él? Explique su respuesta.

P4.2 Una pelota lanzada verticalmente hacia arriba tiene velocidad cero en su punto más alto. ¿Está en equilibrio ahí? ¿Por qué?

P4.3 Un globo con helio se mantiene en el aire sin ascender ni descender. ¿Está en equilibrio? ¿Qué fuerzas actúan sobre él?

P4.4 Al volar de noche en un avión, en aire tranquilo, no tenemos sensación de movimiento, aunque el avión vaya a 800 km/h (500 mi/h). ¿Por qué?

P4.5 Si se tira de los extremos de una cuerda en equilibrio con fuerzas de igual magnitud, pero dirección opuesta, ¿por qué la tensión total en la cuerda no es cero?

P4.6 Usted ata un ladrillo al extremo de una cuerda y lo hace girar alrededor de usted en un círculo horizontal. Describa la trayectoria del ladrillo después de que usted repentinamente suelta la cuerda.

P4.7 Si un automóvil se detiene repentinamente, los pasajeros tienden a moverse hacia adelante, en relación con sus asientos. ¿Por qué? Si el automóvil da una vuelta abrupta, los pasajeros tienden a deslizarse hacia un lado. ¿Por qué?

P4.8 Algunas personas dicen que la "fuerza de la inercia" (o la "fuerza del impulso") lanza a los pasajeros hacia adelante cuando un automóvil frena bruscamente. ¿Qué error tiene esa explicación?

P4.9 Un pasajero de un autobús en movimiento, sin ventanillas, ve que una pelota que estaba en reposo en el pasillo comienza a moverse repentinamente hacia atrás. Piense en dos posibles explicaciones y en cómo determinar cuál es correcta.

P4.10 Suponga que usted elige como unidades fundamentales del SI la fuerza, la longitud y el tiempo, en lugar de la masa, la longitud y el tiempo. ¿Qué unidades tendría la masa en términos de las unidades fundamentales?

P4.11 En la Antigüedad, algunos griegos creían que el "estado natural" de un objeto era el reposo, por lo que los objetos buscarían su estado natural llegando al reposo si se les dejaba solos. Explique por qué esta visión incorrecta parecería realmente muy convincente en la vida diaria.

P4.12 ¿Por qué la Tierra es solo un marco de referencia aproximadamente inercial?

P4.13 ¿La segunda ley de Newton se cumple para un observador en una vagoneta que acelera, frena o da vuelta? Explique su respuesta.

P4.14 Algunos estudiantes llaman "fuerza de aceleración" a la cantidad $m\vec{a}$. ¿Es correcto decir que esa cantidad es una fuerza? Si es así, ¿qué ejerce dicha fuerza? Si no, ¿cómo puede describirse mejor esta cantidad?

P4.15 La aceleración de un cuerpo que cae se mide en un elevador que viaja hacia arriba a una rapidez constante de 9.8 m/s. ¿Qué resultado se obtiene?

P4.16 Se puede jugar a atrapar pelotas en un autobús que se mueve con rapidez constante en un camino recto, igual que si estuviera en reposo. ¿Podemos hacerlo si el autobús da vuelta con rapidez constante en un camino horizontal? ¿Por qué?

P4.17 Los estudiantes algunas veces afirman que la fuerza de gravedad sobre un objeto es de 9.8 m/s^2. ¿Qué es incorrecto en este punto de vista?

P4.18 La cabeza de un martillo se está aflojando de su mango de madera. ¿Cómo golpearía el mango contra una acera de concreto para apretar la cabeza? ¿Por qué funciona esto?

P4.19 ¿Por qué puede doler más patear un peñasco que un guijarro? ¿El peñasco *debe* doler más? Explique su respuesta.

P4.20 "No es la caída lo que lastima, es la parada repentina al final". Traduzca este dicho al lenguaje de las leyes del movimiento de Newton.

P4.21 Una persona puede zambullirse en el agua desde una altura de 10 m sin lastimarse, pero si salta desde un edificio de 10 m de altura y cae en una acera de concreto, seguramente se lastimará mucho. ¿A qué se debe la diferencia?

P4.22 ¿Por qué por seguridad los automóviles se diseñan de tal forma que se aplasten por el frente y por detrás? ¿Y por qué no para colisiones de lado y volcaduras?

P4.23 Al dispararse una bala de un rifle, ¿cuál es el origen de la fuerza que acelera la bala?

P4.24 Si se levanta un peso grande con una cuerda que apenas lo resiste, es posible levantarlo tirando uniformemente; pero si se da un tirón repentino, la cuerda se rompe. Explique esto en términos de las leyes del movimiento de Newton.

P4.25 Una caja grande cuelga del extremo de una cuerda vertical. ¿La tensión en la cuerda es mayor cuando la caja está en reposo, o cuando sube con rapidez constante? Si la caja sube, ¿la tensión en la cuerda es mayor cuando está acelerando, o cuando está frenando? Explique cada caso en términos de las leyes del movimiento de Newton.

P4.26 ¿Cuál siente un mayor tirón por la gravedad terrestre, una piedra de 10 kg o una piedra de 20 kg? Si usted las deja caer, ¿por qué la piedra de 20 kg no cae con el doble de la aceleración de la piedra de 10 kg? Explique su razonamiento.

P4.27 ¿Por qué es incorrecto decir que 1.0 kg *es igual* a 2.2 lb?

P4.28 Un caballo está enganchado a un carro. Puesto que el carro tira hacia atrás del caballo tan fuerte como este tira del carro, ¿por qué el carro no está en equilibrio, sin importar qué tan fuerte el caballo tire del carro?

P4.29 ¿Verdadero o falso? Usted ejerce un empujón P sobre un objeto y este lo empuja a usted hacia atrás con una fuerza F. Si el objeto se mueve a velocidad constante, entonces, F es igual a P, pero si el objeto acelera, entonces, P debe ser mayor que F.

P4.30 Un camión grande y un automóvil compacto chocan de frente. Durante la colisión, el camión ejerce una fuerza $\vec{F}_{\text{T sobre C}}$ sobre el automóvil, y este ejerce una fuerza $\vec{F}_{\text{C sobre T}}$ sobre el camión. ¿Cuál fuerza tiene mayor magnitud, o acaso son iguales? ¿Su respuesta depende de la rapidez de cada vehículo antes del choque? ¿Por qué?

P4.31 Cuando un automóvil se detiene en una carretera horizontal, ¿qué fuerza hace que frene? Cuando el auto aumenta su rapidez en la misma carretera, ¿qué fuerza hace que acelere? Explique su respuesta.

P4.32 Un automóvil compacto empuja una camioneta grande averiada, y viajan por la carretera con la misma velocidad y aceleración. Cuando el auto acelera, ¿la fuerza que ejerce sobre la camioneta es mayor, menor o de la misma magnitud que la que la camioneta ejerce sobre él? ¿A cuál de los dos vehículos se aplica la mayor fuerza neta, o acaso son iguales las fuerzas netas? Explique su respuesta.

P4.33 Considere dos personas que tiran en direcciones opuestas de los extremos de una cuerda. Por la tercera ley de Newton, la fuerza que A ejerce sobre B es tan grande como la que B ejerce sobre A. Entonces, ¿qué determina quién gana? (*Sugerencia:* Dibuje un diagrama de cuerpo libre que muestre todas las fuerzas que actúan sobre cada persona).

P4.34 En la Luna, $g = 1.62$ m/s^2. Si un ladrillo de 2 kg cae sobre su pie desde una altura de 2 m, ¿le dolerá más, menos o lo mismo en la Luna que en la Tierra? Explique su respuesta. Si se lanza el mismo ladrillo y lo golpea a usted moviéndose horizontalmente a 6 m/s, ¿le dolerá más, menos o igual en la Luna que en la Tierra? Explique su respuesta. (Suponga que en la Luna está dentro de un recinto presurizado, así que no usa traje espacial).

P4.35 Un manual para aprendices de pilotos indica: "Cuando un avión vuela a una altitud constante, sin ascender ni descender, la fuerza ascendente de sustentación de las alas es igual al peso del avión. Cuando el avión asciende a ritmo constante, la sustentación es mayor que el peso; cuando el avión desciende a ritmo constante, la sustentación es menor que el peso". ¿Son correctas estas afirmaciones? Explique su respuesta.

P4.36 Si usted tiene las manos mojadas y no dispone de una toalla, puede eliminar el exceso de agua sacudiéndolas. ¿Por qué se elimina el agua así?

P4.37 Si está en cuclillas (digamos, al examinar los libros del estante más bajo en una biblioteca o librería) y se levanta de forma repentina, probablemente sentirá un mareo temporal. ¿Cómo explican las leyes del movimiento de Newton este suceso?

P4.38 Cuando un automóvil es golpeado por atrás, los pasajeros sienten un latigazo. Use las leyes del movimiento de Newton para explicar este fenómeno.

P4.39 En un choque de frente entre dos automóviles, los pasajeros que no usan cinturón de seguridad podrían ser lanzados a través del parabrisas. Use las leyes del movimiento de Newton para explicar este fenómeno.

P4.40 En un choque de frente entre un automóvil compacto de 1000 kg y uno grande de 2500 kg, ¿cuál experimenta mayor fuerza? Explique su respuesta. ¿Cuál experimenta mayor aceleración? ¿Por qué? Ahora explique por qué los pasajeros del auto más pequeño tienen mayor probabilidad de lesionarse que los del auto grande, aunque las carrocerías de ambos vehículos tengan la misma resistencia.

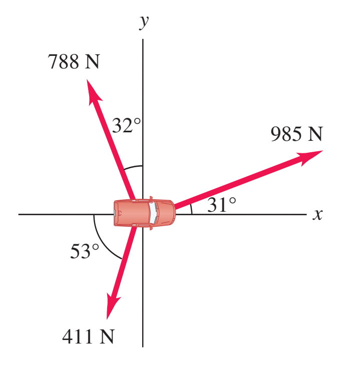
P4.41 Suponga que está en un cohete sin ventanillas que viaja en el espacio profundo, lejos de cualquier otro objeto. Sin ver hacia afuera del cohete y sin hacer contacto alguno con el mundo exterior, explique cómo podría determinar si el cohete: *a*) se mueve hacia adelante con una rapidez constante igual al 80% de la rapidez de la luz; y *b*) está acelerando hacia adelante.

EJERCICIOS

Sección 4.1 Fuerza e interacciones

4.1 • Dos fuerzas tienen la misma magnitud F. ¿Qué ángulo hay entre los dos vectores si su resultante tiene magnitud de *a*) $2F$? *b*) ¿$\sqrt{2}\,F$? *c*) ¿cero? Dibuje los tres vectores en cada situación.

Figura **E4.2**



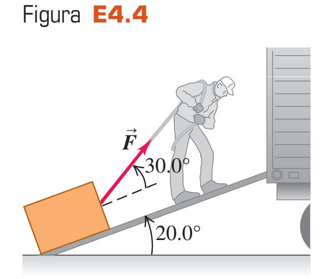
4.2 • Unos trabajadores están tratando de liberar una camioneta atascada en el lodo. Para sacar el vehículo, usan tres cuerdas horizontales que producen los vectores de fuerza mostrados en la figura E4.2. *a*) Obtenga las componentes x y y de cada uno de los tres tirones. *b*) Use las componentes para calcular la magnitud y dirección de la resultante de los tres tirones.

Figura **E4.3**

4.3 • BIO **Herida bucal.** Debido a una lesión en la boca, un paciente debe usar un tirante (figura E4.3) que produce una fuerza neta hacia arriba de 5.00 N sobre su barbilla. La tensión es la misma a lo largo del tirante. ¿A qué tensión se debe ajustar el tirante para proporcionar la fuerza necesaria hacia arriba?

4.4 • Un hombre arrastra hacia arriba un baúl por la rampa de un camión de mudanzas. La rampa está inclinada 20.0° y el hombre tira hacia arriba con una fuerza $\vec{F}$ cuya dirección forma un ángulo de 30.0° con la rampa (figura E4.4). *a*) ¿Qué fuerza $\vec{F}$ se necesita para que la componente F_x paralela a la rampa sea de 60.0 N? *b*) ¿Qué magnitud tendrá entonces la componente F_y perpendicular a la rampa?

Figura **E4.4**



4.5 •• Dos perros tiran horizontalmente de cuerdas atadas a un poste; el ángulo entre las cuerdas es de 60.0°. Si el perro *A* ejerce una fuerza de 270 N, y el *B*, de 300 N, calcule la magnitud de la fuerza resultante y el ángulo que forma con respecto a la cuerda del perro *A*.

4.6 • Dos fuerzas, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, actúan en un punto. La magnitud de $\vec{F}_1$ es de 9.00 N, y su dirección es de 60.0° sobre el eje *x* en el segundo cuadrante. La magnitud de $\vec{F}_2$ es 6.00 N, y su dirección es 53.1° bajo el eje *x* en el tercer cuadrante. *a*) Obtenga las componentes *x* y *y* de la fuerza resultante. *b*) Obtenga la magnitud de la fuerza resultante.

Sección 4.3 Segunda ley de Newton

4.7 •• Un patinador de 68.5 kg, que se desliza inicialmente a 2.40 m/s sobre hielo áspero horizontal, llega al reposo de manera uniforme en 3.52 s debido a la fricción del hielo. ¿Qué fuerza ejerce la fricción sobre el patinador?

4.8 •• Usted entra en un elevador, se para sobre una báscula y oprime el botón de "subir". También recuerda que su peso normal es de 625 N. Comience a contestar cada una de las siguientes preguntas dibujando un diagrama de cuerpo libre. *a*) Si el elevador tiene una aceleración de 2.50 m/s^2, ¿cuánto se lee en la báscula? *b*) Si usted sostiene desde el inicio un paquete de 3.85 kg con una cuerda vertical ligera, ¿cuál es la tensión en la cuerda una vez que el elevador comienza a acelerar?

4.9 • Una caja descansa sobre un estanque helado que actúa como superficie horizontal sin fricción. Si un pescador aplica una fuerza horizontal de 48.0 N a la caja y produce una aceleración de 3.00 m/s^2, ¿qué masa tiene la caja?

4.10 •• Un estibador aplica una fuerza horizontal constante de 80.0 N a un bloque de hielo sobre un piso horizontal, en el que la fricción es despreciable. El bloque parte del reposo y se mueve 11.0 m en 5.00 s. *a*) ¿Qué masa tiene el bloque de hielo? *b*) Si el trabajador deja de empujar a los 5.00 s, ¿qué distancia recorrerá el bloque en los siguientes 5.00 s?

4.11 • Un disco de hockey con masa de 0.160 kg está en reposo en el origen ($x = 0$) sobre la pista de patinaje horizontal sin fricción. En el tiempo $t = 0$, un jugador aplica una fuerza de 0.250 N al disco, paralela al eje *x*, y deja de aplicarla en $t = 2.00$ s. *a*) ¿Qué posición y rapidez tiene el disco en $t = 2.00$ s? *b*) Si se aplica otra vez esa fuerza en $t = 5.00$ s, ¿qué posición y rapidez tiene el disco en $t = 7.00$ s?

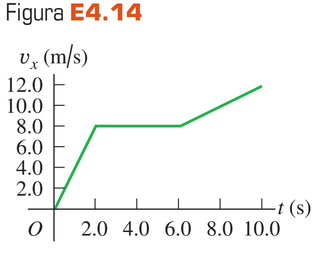
4.12 • Una fuerza horizontal neta de 140 N actúa sobre una caja con una masa de 32.5 kg que inicialmente está en reposo en el piso de una bodega. *a*) ¿Qué aceleración se produce? *b*) ¿Qué distancia recorre la caja en 10.0 s? *c*) ¿Qué rapidez tiene después de 10.0 s?

Figura **E4.13**

4.13 • Un carrito de juguete de 4.50 kg experimenta una aceleración en línea recta (el eje *x*). La gráfica de la figura E4.13 muestra esta aceleración en función del tiempo. *a*) Calcule la fuerza neta máxima sobre este carrito. ¿Cuándo ocurre esta fuerza máxima? *b*) ¿En qué instantes la fuerza neta sobre el carrito es constante? *c*) ¿Cuándo la fuerza neta es igual a cero?

4.14 • Un gato de 2.75 kg se mueve en línea recta (el eje *x*). La figura E4.14 muestra una gráfica de la componente *x* de la velocidad de este gato en función del tiempo. *a*) Calcule la fuerza neta máxima sobre este gato. ¿Cuándo ocurre dicha fuerza? *b*) ¿En qué instante la fuerza neta sobre el gato es igual a cero? *c*) ¿Cuál es la fuerza neta cuando han transcurrido 8.5 s?

Figura **E4.14**



4.15 • Un pequeño cohete de 8.00 kg quema combustible que ejerce sobre él una fuerza hacia arriba, que varía con el tiempo, mientras asciende sobre la plataforma de lanzamiento. Esta fuerza satisface la ecuación $F = A + Bt^2$. Las mediciones demuestran que en $t = 0$, la fuerza es de 100.0 N y al final de los primeros 2.00 s, es de 150.0 N. *a*) Determine las constantes *A* y *B*, incluyendo sus unidades en el SI. *b*) Obtenga la fuerza *neta* sobre este cohete y su aceleración **i.** en el instante posterior al de ignición y **ii.** 3.00 s después del inicio de la ignición. *c*) Suponga que usted estuvo usando el cohete en el espacio exterior, lejos de cualquier gravedad. ¿Cuál sería su aceleración 3.00 s después de la ignición?

4.16 • Un electrón (masa = 9.11×10^{-31} kg) sale del extremo de un cinescopio con rapidez inicial cero y viaja en línea recta hacia la rejilla donde es acelerado, a 1.80 cm de distancia, llegando a ella con rapidez de 3.00×10^6 m/s. Si la fuerza de aceleración es constante, calcule *a*) la aceleración, *b*) el tiempo para llegar a la rejilla y *c*) la fuerza neta en newtons. (Se ignora la fuerza gravitacional sobre el electrón).

Sección 4.4 Masa y peso

4.17 • Superman lanza un peñasco de 2400 N a un adversario. ¿Qué fuerza horizontal debe aplicar al peñasco para darle una aceleración horizontal de 12.0 m/s^2?

4.18 • **BIO** *a*) Una pulga ordinaria tiene una masa de 210 μg. ¿Cuántos newtons pesa? *b*) La masa de un cercopoideo normal es de 12.3 mg. ¿Cuántos newtons pesa? *c*) Un gato doméstico pesa normalmente 45 N. ¿Cuántas libras pesa y cuál es su masa en kilogramos?

4.19 • En la superficie de Io, una luna de Júpiter, la aceleración debida a la gravedad es $g = 1.81$ m/s^2. Una sandía pesa 44.0 N en la superficie terrestre. *a*) ¿Qué masa tiene la sandía en la superficie terrestre? *b*) ¿Qué masa y peso tiene en la superficie de Io?

4.20 • La mochila de un astronauta pesa 17.5 N cuando está en la Tierra, pero solo 3.24 N cuando está en la superficie de un asteroide. *a*) ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad en ese asteroide? *b*) ¿Cuál es la masa de la mochila en el asteroide?

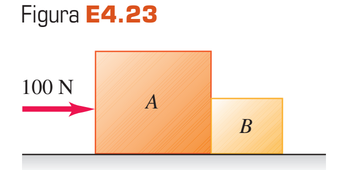
Sección 4.5 Tercera ley de Newton

4.21 • **BIO** Un velocista de alto rendimiento puede arrancar del bloque de salida con una aceleración casi horizontal de magnitud 15 m/s^2. ¿Qué fuerza horizontal debe aplicar una corredora de 55 kg al bloque de salida durante el arranque para producir esta aceleración? ¿Qué cuerpo ejerce la fuerza que impulsa a la corredora: el bloque de salida o ella misma?

4.22 Un automóvil pequeño (masa de 380 kg) empuja a un camión grande (masa de 900 kg) hacia el este sobre un camino horizontal. El automóvil ejerce una fuerza horizontal de 1200 N sobre el camión. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que el camión ejerce sobre el automóvil?

4.23 Las cajas A y B se encuentran en contacto sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura E4.23. La caja A tiene una masa de 20.0 kg y la caja B tiene una masa de 5.0 kg. Sobre la caja A se ejerce una fuerza horizontal de 100 N. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que la caja A ejerce sobre la caja B?

Figura **E4.23**



4.24 •• La fuerza normal hacia arriba que el piso de un elevador ejerce sobre un pasajero que pesa 650 N es de 620 N. ¿Cuáles son las fuerzas de reacción a estas dos fuerzas? ¿El pasajero está acelerando? Si es así, ¿cuáles son la dirección y la magnitud de la aceleración?

4.25 •• Una estudiante con 45 kg de masa se lanza desde un trampolín alto. Tomando 6.0×10^{24} kg como masa de la Tierra, ¿cuál es la aceleración de la Tierra hacia ella, si la de ella es de 9.8 m/s^2 hacia la Tierra? Suponga que la fuerza neta sobre la Tierra es la fuerza de gravedad que la estudiante ejerce sobre ella.

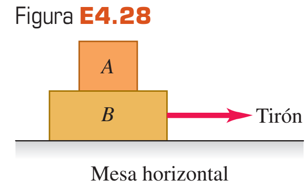
Sección 4.6 Diagramas de cuerpo libre

4.26 • Un atleta lanza una pelota de masa m directamente hacia arriba y esta no experimenta una resistencia considerable del aire. Dibuje un diagrama de cuerpo libre de esta pelota mientras está en el aire y *a*) se mueve hacia arriba; *b*) se encuentra en su punto más alto; *c*) se mueve hacia abajo. *d*) Repita los incisos *a*), *b*) y *c*) si el atleta lanza la pelota a un ángulo de 60° por encima de la horizontal, en lugar de verticalmente hacia arriba.

4.27 •• Dos cajas, A y B, descansan juntas sobre una superficie horizontal sin fricción. Las masas correspondientes son m_A y m_B. Se aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$ a la caja A y las dos cajas se mueven hacia la derecha. *a*) Dibuje los diagramas de cuerpo libre claramente especificados para cada caja A y B. Indique cuáles pares de fuerzas, si los hay, son pares acción-reacción según la tercera ley. *b*) Si la magnitud de $\vec{F}$ es menor que el peso total de las dos cajas, ¿hará que se muevan las cajas? Explique su respuesta.

4.28 •• Una persona tira horizontalmente del bloque B de la figura E4.28, haciendo que ambos bloques se muevan juntos como una unidad. Mientras este sistema se mueve, elabore un diagrama de cuerpo libre claramente especificado del bloque A, si *a*) la mesa no tiene fricción; y *b*) hay fricción entre el bloque B y la mesa, y el tirón es igual a la fuerza de fricción sobre el bloque B debido a la mesa.

Figura **E4.28**



4.29 • Una pelota cuelga de una cuerda larga atada al techo del vagón de un tren que viaja al este sobre vías horizontales. Un observador dentro del tren ve que la pelota cuelga inmóvil. Dibuje un diagrama de cuerpo libre claramente especificado para la pelota, si *a*) el tren tiene velocidad uniforme y *b*) si el tren acelera de manera uniforme. ¿La fuerza neta sobre la pelota es cero en cualquier caso? Explique su respuesta.

4.30 •• **PA** Una bala de rifle calibre .22 que viaja a 350 m/s golpea un árbol grande, penetrando a una profundidad de 0.130 m. La masa de la bala es de 1.80 g. Suponga una fuerza de frenado constante. *a*) ¿Cuánto tarda la bala en detenerse? *b*) ¿Que fuerza, en newtons, ejerce el árbol sobre la bala?

4.31 •• Una silla de 12.0 kg de masa descansa en un piso horizontal, que tiene cierta fricción. Usted empuja la silla con una fuerza $F = 40.0$ N dirigida con un ángulo de 37.0° bajo la horizontal, y la silla se desliza sobre el piso. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre claramente especificado para la silla. *b*) Use su diagrama y las leyes de Newton para calcular la fuerza normal que el piso ejerce sobre la silla.

4.32 •• Un esquiador de 65.0 kg de masa es remolcado cuesta arriba por una ladera nevada con rapidez constante, sujeto a una cuerda paralela al suelo. El terreno tiene una pendiente ascendente y constante de 26.0° sobre la horizontal, y la fricción es despreciable. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre claramente especificado para el esquiador. *b*) Calcule la tensión en la cuerda.

PROBLEMAS

4.33 **PA** Una cubeta de 4.80 kg, llena de agua, se acelera hacia arriba con una cuerda de masa despreciable, cuya resistencia a la rotura es de 75.0 N. Si la cubeta parte del reposo, ¿cuál es el tiempo mínimo requerido para elevar la cubeta una distancia vertical de 12.0 m sin que la cuerda se rompa?

4.34 ••• Una caja grande que contiene su nueva computadora descansa en la plataforma de su camioneta, que está detenida en un semáforo. El semáforo cambia a verde, usted pisa el acelerador y la camioneta se acelera. Horrorizado, ve cómo la caja comienza a deslizarse hacia la parte de atrás de la camioneta. Dibuje un diagrama de cuerpo libre claramente especificado para la camioneta y otro para la caja. Indique los pares de fuerzas, si los hay, que sean pares acción-reacción según la tercera ley. (Entre la plataforma de la camioneta y la caja *hay* fricción).

4.35 • Dos caballos tiran horizontalmente de cuerdas atadas al tronco de un árbol. Las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ que aplican al tronco son tales que la fuerza neta (resultante) $\vec{R}$ tiene magnitud igual a la de $\vec{F}_1$ y está a 90° de $\vec{F}_1$. Sea $F_1 = 1300$ N y $R = 1300$ N. Calcule la magnitud de $\vec{F}_2$ y su dirección (relativa a $\vec{F}_1$).

4.36 •• **PA** Imagine que acaba de llegar al planeta X y deja caer una pelota de 100 g desde una altura de 10.0 m, la cual tarda 2.2 s en llegar al suelo. Puede ignorar cualquier fuerza que la atmósfera del planeta ejerza sobre la pelota. ¿Cuánto pesa la pelota de 100 g en la superficie del planeta X?

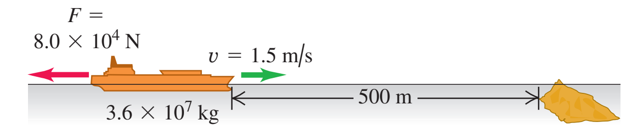
4.37 •• Dos adultos y un niño quieren empujar un carrito con ruedas en la dirección x como se ilustra en la figura P4.37. Los adultos empujan con fuerzas horizontales $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ como se muestra en la figura. *a*) Calcule la magnitud y dirección de la fuerza *más pequeña* que el niño debe ejercer. Se pueden despreciar los efectos de la fricción. *b*) Si el niño ejerce la fuerza mínima obtenida en el inciso *a*), el carrito acelerará a 2.0 m/s^2 en la dirección $+x$. ¿Cuánto pesa el carrito?

Figura **P4.37**

$F_1 = 100$ N, 60°, x, 30°, $F_2 = 140$ N

4.38 • **PA** Los motores de un buque tanque se averiaron y el viento empuja la nave con rapidez constante de 1.5 m/s directo hacia un arrecife (figura P4.38). Cuando el barco está a 500 m del arrecife, el viento cesa y el maquinista logra poner en marcha los motores. El timón está atorado, así que la única opción es intentar acelerar hacia atrás para alejarse del arrecife. La masa del buque y su carga es de 3.6×10^7 kg y los motores producen una fuerza horizontal neta de 8.0×10^4 N sobre el buque. ¿Colisionará el barco contra el arrecife? Si lo hace, ¿se derramará el petróleo? El casco puede resistir impactos a una rapidez de 0.2 m/s o menos. Puede despreciarse la fuerza de retardo que el agua ejerce sobre el casco del buque.

Figura **P4.38**



4.39 •• PA BIO **Salto vertical sin carrera.** El jugador de baloncesto Darrell Griffith tiene el récord de salto vertical sin carrera de 1.2 m (4 ft). (Esto significa que subió 1.2 m después de que sus pies se separaron del piso). Griffith pesaba 890 N (200 lb). *a*) ¿Qué rapidez tenía al separarse del piso? *b*) Si sus pies tardaron 0.300 s en separarse del piso después de que Griffith inició su salto, ¿qué aceleración media (magnitud y dirección) tuvo mientras se estaba empujando contra el piso? *c*) Dibuje su diagrama de cuerpo libre (véase la sección 4.6). En términos de las fuerzas del diagrama, ¿qué fuerza neta actuó sobre Griffith? Use las leyes de Newton y los resultados del inciso *b*) para calcular la fuerza media que aplicó sobre el piso.

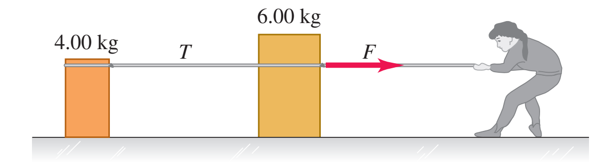
4.40 ••• PA Un anuncio asegura que cierto automóvil puede "detenerse en una moneda de 10 centavos". ¿Qué fuerza neta sería necesaria para detener un auto de 850 kg que viaja a 45.0 km/h en una distancia igual al diámetro (1.8 cm) de una moneda de 10 centavos de dólar?

4.41 •• BIO **Biomecánica humana.** El lanzamiento de béisbol más rápido que se ha medido es de 46 m/s. Por lo regular, una pelota de béisbol tiene una masa de 145 g. Si el lanzador ejerció su fuerza (suponiendo una fuerza horizontal y constante) en una distancia de 1.0 m, *a*) ¿qué fuerza produjo sobre la pelota durante este lanzamiento de establecimiento del récord? *b*) Dibuje los diagramas de cuerpo libre de la pelota durante el lanzamiento y justo *después* de salir de la mano del lanzador.

4.42 •• BIO **Biomecánica humana.** La medida del servicio de tenis más rápido, realizado por "Big Bill" Tilden en 1931, fue de 73.14 m/s. La masa de una pelota de tenis es de 57 g, y la pelota normalmente está en contacto con la raqueta durante 30.0 ms, partiendo del reposo. Suponiendo aceleración constante, *a*) ¿qué fuerza produjo la raqueta de Big Bill sobre la pelota de tenis si la golpeó horizontalmente? *b*) Dibuje los diagramas de cuerpo libre de la pelota de tenis durante el servicio y exactamente después de abandonar la raqueta.

4.43 • Dos cajas, una de 4.00 kg de masa y la otra con una masa de 6.00 kg, descansan en la superficie sin fricción de un estanque congelado, unidas por una cuerda delgada (figura P4.43). Una mujer con zapatos de golf (los cuales le dan tracción sobre el hielo) aplica un tirón horizontal F a la caja de 6.00 kg y le imparte una aceleración de 2.50 m/s^2. *a*) ¿Qué aceleración tiene la caja de 4.00 kg? *b*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la caja de 4.00 kg y úselo junto con la segunda ley de Newton para calcular la tensión T en la cuerda que une las dos cajas. *c*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la caja de 6.00 kg. ¿Qué dirección tiene la fuerza neta sobre esta caja? ¿Cuál tiene mayor magnitud, la fuerza T o la fuerza F? *d*) Use el inciso *c*) y la segunda ley de Newton para calcular la magnitud de la fuerza F.

Figura **P4.43**



4.44 • Un astronauta está unido a una nave espacial mediante un cable fuerte. El astronauta y su traje tienen una masa total de 105 kg; en tanto que la masa del cable es despreciable. La masa de la nave espacial es de 9.05×10^4 kg y está lejos de cualquier cuerpo astronómico grande, así que podemos despreciar las fuerzas gravitacionales sobre esta y sobre el astronauta. También suponemos que inicialmente la nave espacial y el astronauta están en reposo en un marco de referencia inercial. Entonces, el astronauta tira del cable con una fuerza de 80.0 N. *a*) ¿Qué fuerza ejerce el cable sobre el astronauta? *b*) Puesto que $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, ¿cómo puede un cable "sin masa" ($m = 0$) ejercer una fuerza? *c*) ¿Qué aceleración tiene el astronauta? *d*) ¿Qué fuerza ejerce el cable sobre la nave espacial? *e*) ¿Qué aceleración tiene la nave espacial?

4.45 • CALC Con la finalidad de estudiar los daños en aviones que colisionan con aves grandes, usted diseña un cañón para acelerar objetos del tamaño de un pollo, de modo que su desplazamiento en el cañón esté dado por $x = (9.0 \times 10^3\ m/s^2)t^2 - (8.0 \times 10^4\ m/s^3)t^3$. El objeto sale del cañón en $t = 0.025$ s. *a*) ¿Qué longitud debe tener el cañón? *b*) ¿Con qué rapidez salen los objetos del cañón? *c*) ¿Qué fuerza neta debe ejercerse sobre un objeto de 1.50 kg en: **i.** $t = 0$ y **ii.** $t = 0.025$ s?

4.46 •• Una nave espacial desciende verticalmente cerca de la superficie del planeta X. Un empuje hacia arriba de 25.0 kN, producido por los motores, la frena a razón de 1.20 m/s^2, pero la nave aumenta su rapidez a razón de 0.80 m/s^2 si el empuje hacia arriba es de 10.0 kN. *a*) En cada caso, ¿qué dirección tiene la aceleración de la nave? *b*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la nave. En cada caso, aumentando o disminuyendo su rapidez, ¿qué dirección tiene la fuerza neta sobre la nave? *c*) Aplique la segunda ley de Newton a cada caso, aumentando o disminuyendo su rapidez, para averiguar el peso de la nave cerca de la superficie del planeta X.

4.47 •• PA Un instrumento de 6.50 kg se cuelga de un alambre vertical dentro de una nave espacial que despega de la superficie de la Tierra. Esta nave parte del reposo y alcanza una altitud de 276 m en 15.0 s con aceleración constante. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el instrumento durante este tiempo. Indique qué fuerza es mayor. *b*) Obtenga la fuerza que ejerce el alambre sobre el instrumento.

4.48 •• Suponga que el cohete del problema 4.47 se acerca para un aterrizaje vertical, en lugar de realizar un despegue. El capitán ajusta el empuje de los motores, de manera que la magnitud de la aceleración del cohete es la misma que tenía durante el despegue. Repita los incisos *a*) y *b*).

4.49 •• BIO **Dinámica de insectos.** El *Philaenus spumarius*, campeón saltador del mundo de los insectos, tiene una masa de 12.3 mg, y cuando salta, despega del suelo a una velocidad de (en la mayoría de los saltos de mayor energía) 4.0 m/s en un salto vertical. El salto en sí dura 1.0 ms antes de que el insecto esté de vuelta en el piso. Suponiendo aceleración constante, *a*) dibuje un diagrama de cuerpo libre de este tremendo saltador durante el salto; *b*) calcule la fuerza que ejerce el suelo sobre el insecto durante el salto, y *c*) exprese la fuerza del inciso *b*) en términos del peso del insecto.

4.50 • Un elevador cargado, cuyos cables están muy desgastados, tiene masa total de 2200 kg, y los cables aguantan una tensión máxima de 28,000 N. *a*) Dibuje el diagrama de cuerpo libre del elevador. En términos de las fuerzas de su diagrama, ¿qué fuerza neta actúa sobre el elevador? Aplique la segunda ley de Newton al elevador y calcule con qué aceleración máxima puede subir el elevador sin que se rompan los cables. *b*) ¿Cuál sería la respuesta al inciso *a*) si el elevador estuviera en la Luna, donde $g = 1.62\ m/s^2$?

4.51 •• PA **Salto al suelo**. Un hombre de 75.0 kg se lanza desde una plataforma situada 3.10 m sobre el suelo. Mantiene las piernas rectas al caer, pero, al tocar el piso, dobla las rodillas y, tratado como partícula, avanza 0.60 m más antes de detenerse. *a*) ¿Qué rapidez tiene al tocar el suelo? *b*) Tratándolo como partícula, ¿con qué aceleración (magnitud y dirección) se frena, si la aceleración se supone constante? *c*) Dibuje su diagrama de cuerpo libre (véase la sección 4.6). En términos de las fuerzas del diagrama, ¿qué fuerza neta actúa sobre él? Use las leyes de Newton y los resultados del inciso *b*) para calcular la fuerza media que sus pies ejercen sobre el piso al amortiguar la caída. Exprese la fuerza en newtons y como múltiplo de su peso.

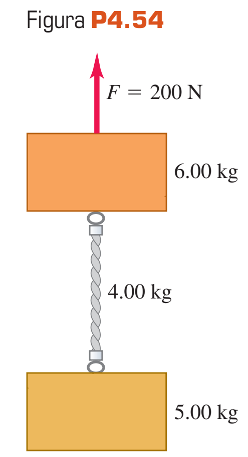
4.52 ••• PA La cabeza de un martillo de 4.9 N con velocidad inicial de 3.2 m/s hacia abajo es detenido en una distancia de 0.45 cm por un clavo en una tabla de pino. Además del peso, la persona que lo usa le aplica una fuerza descendente de 15 N. Suponga que la aceleración de la cabeza del martillo es constante mientras está en contacto con el clavo y se mueve hacia abajo. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la cabeza del martillo. Identifique la fuerza de reacción de cada

fuerza de acción del diagrama. *b*) Calcule la fuerza hacia abajo $\vec{F}$ ejercida por la cabeza del martillo sobre el clavo mientras está en contacto con él y moviéndose hacia abajo. *c*) Suponga que la tabla es de madera dura y la distancia que el martillo recorre al detenerse es de solo 0.12 cm. Las fuerzas descendentes sobre el martillo son las mismas que las del inciso *b*). ¿Qué fuerza $\vec{F}$ ejerce ahora la cabeza del martillo sobre el clavo, mientras está en contacto con él y moviéndose hacia abajo?

4.53 •• Un cable uniforme de peso w cuelga verticalmente hacia abajo, sostenido en su extremo superior por una fuerza hacia arriba de magnitud w. ¿Qué tensión hay en el cable *a*) en el extremo superior? *b*) ¿En el extremo inferior? *c*) ¿Y en medio? Su respuesta a cada inciso deberá incluir un diagrama de cuerpo libre. (*Sugerencia:* Para cada pregunta, elija como cuerpo por analizar un punto o una sección del cable). *d*) Grafique la tensión en la cuerda contra la distancia desde su extremo superior.

4.54 •• Los dos bloques de la figura P4.54 están unidos por una cuerda gruesa uniforme de 4.00 kg. Se aplica una fuerza de 200 N hacia arriba, como se indica. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el bloque de 6.00 kg, uno para la cuerda de 4.00 kg y uno para el bloque de 5.00 kg. Para cada fuerza, indique qué cuerpo la ejerce. *b*) ¿Qué aceleración tiene el sistema? *c*) ¿Qué tensión hay en la parte superior de la cuerda? *d*) ¿Y en su parte media?

Figura **P4.54**

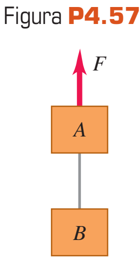


4.55 •• **PA** Un atleta, cuya masa es de 90.0 kg, está levantando pesas. Partiendo de una posición en reposo, levanta, con aceleración constante, una barra que pesa 490 N, elevándola 0.60 m en 1.6 s. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre claramente especificado para la barra y para el atleta. *b*) Use los diagramas del inciso *a*) y las leyes de Newton para determinar la fuerza total que sus pies ejercen sobre el piso mientras levanta la barra.

4.56 ••• Un globo aerostático sostiene una canasta, un pasajero y un poco de carga. Sea M la masa total. Aunque sobre el globo actúa una fuerza de sustentación ascendente, el globo inicialmente está acelerando hacia abajo a razón de $g/3$. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el globo en descenso. *b*) Determine la fuerza de sustentación hacia arriba en términos del peso total inicial Mg. *c*) El pasajero nota que se dirige hacia una catarata y determina que necesita subir. ¿Qué fracción del peso total deberá tirar por la borda para que el globo se acelere *hacia arriba* a razón de $g/2$? Suponga que la fuerza de sustentación no cambia.

4.57 **PA** Dos cajas, A y B, están unidas a cada extremo de una cuerda vertical ligera, como se muestra en la figura P4.57. A la caja A, se le aplica una fuerza constante hacia arriba $F = 80.0$ N. Partiendo del reposo, la caja B desciende 12.0 m en 4.00 s. La tensión en la cuerda que une las dos cajas es de 36.0 N. *a*) ¿Cuál es la masa de la caja B? *b*) ¿Cuál es la masa de la caja A?

Figura **P4.57**



4.58 ••• **CALC** La posición de un helicóptero de entrenamiento de 2.75×10^5 N que se prueba está dada por $\vec{r} = (0.020\ \text{m/s}^3)t^3\hat{\imath} + (2.2\ \text{m/s})t\hat{\jmath} - (0.060\ \text{m/s}^2)t^2\hat{k}$. Determine la fuerza neta sobre el helicóptero en $t = 5.0$ s.

4.59 • **CALC** Un objeto con masa m se mueve sobre el eje x. Su posición en función del tiempo está dada por $x(t) = At - Bt^3$, donde A y B son constantes. Calcule la fuerza neta sobre el objeto en función del tiempo.

4.60 • **CALC** Sobre un objeto con masa m inicialmente en reposo actúa una fuerza $\vec{F} = k_1\hat{\imath} + k_2t^3\hat{\jmath}$, donde k_1 y k_2 son constantes. Calcule la velocidad (t) del objeto en función del tiempo.

4.61 •• **PA CALC** Un objeto misterioso de masa igual a 45.0 kg es impulsado, a partir del reposo, por un cohete, en medio de un lago congelado horizontal y sin fricción. Luego se aplica una fuerza dirigida hacia el este y de magnitud $F(t) = (16.8\ \text{N/s})t$. ¿Qué distancia viaja el objeto en los primeros 5.00 s después de aplicar la fuerza?

PROBLEMAS DE DESAFÍO

4.62 ••• **CALC** Un objeto de masa m está en el origen, en reposo y en equilibrio. En $t = 0$ se aplica una fuerza $\vec{F}(t)$ con componentes

$$F_x(t) = k_1 + k_2 y \qquad F_y(t) = k_3 t$$

donde k_1, k_2 y k_3 son constantes. Calcule los vectores de posición $\vec{r}(t)$ y velocidad $\vec{v}(t)$ en función del tiempo.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

La tercera ley de Newton nos dice que el automóvil empuja al miembro del equipo exactamente con la misma fuerza con que el hombre empuja al automóvil, pero en dirección opuesta. Esto se cumple si el motor del automóvil está encendido y se mueve hacia adelante en parte por su propia potencia, o si el motor está apagado y es empujado solo por el hombre. Las magnitudes de las fuerzas son diferentes en las dos situaciones, pero en ambos casos, el empuje del automóvil sobre el hombre es exactamente igual al empuje del hombre sobre el automóvil.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

4.1 **Respuesta: iv.** La fuerza gravitacional sobre la caja apunta verticalmente hacia abajo. En la figura 4.6 el eje x apunta hacia arriba a la derecha, y el eje y apunta hacia arriba a la izquierda. Por lo tanto, la fuerza gravitacional tiene tanto una componente x como una componente y, y ambas son negativas.

4.2 **Respuesta: i, ii y iv.** En **i**, **ii** y **iv** el cuerpo no acelera, por lo que la fuerza neta sobre él es cero. (En la situación **iv**, la caja permanece en reposo, vista en el marco de referencia inercial del suelo, mientras el camión acelera hacia adelante, como la patinadora de la figura 4.11*a*). En la situación **iii**, el halcón vuela en círculo; por lo tanto, está acelerando y *no* está en equilibrio.

4.3 **Respuesta: iii, i y iv (empatados), ii.** La aceleración es igual a la fuerza neta dividida entre la masa. Por lo tanto, la magnitud de la aceleración en cada situación es

i. $a = (2.0\ \text{N})/(2.0\ \text{kg}) = 1.0\ \text{m/s}^2$;

ii. $a = (8.0\ \text{N})/(2.0\ \text{N}) = 4.0\ \text{m/s}^2$;

iii. $a = (2.0\ \text{N})/(8.0\ \text{kg}) = 0.25\ \text{m/s}^2$;

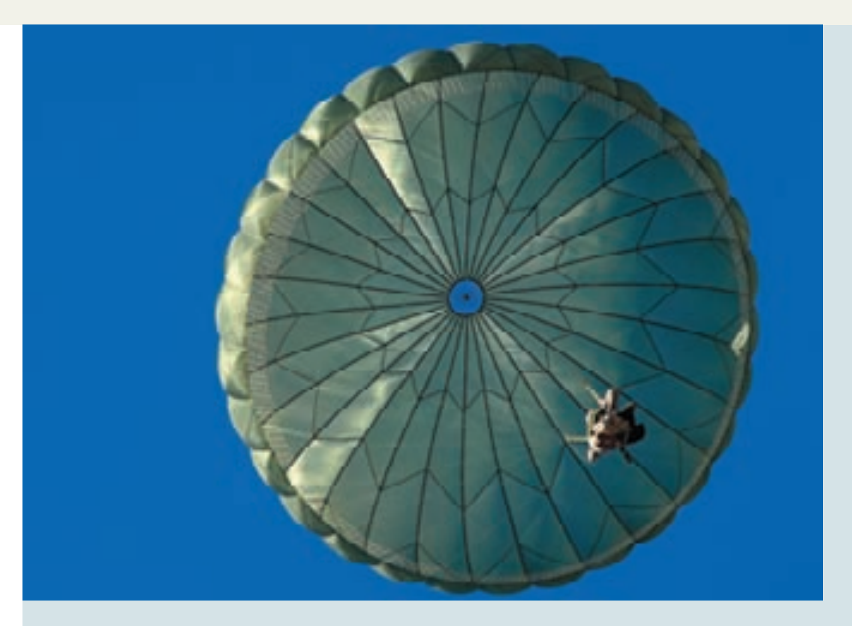
iv. $a = (8.0\ \text{N})/(8.0\ \text{kg}) = 1.0\ \text{m/s}^2$.

4.4 El astronauta requeriría esforzarse el doble para caminar porque su peso en ese planeta sería el doble que en la Tierra. En cambio, sería igual de fácil atrapar la pelota que se mueve horizontalmente. La *masa* de la pelota no cambia, así que la fuerza horizontal que el astronauta tendría que ejercer para detenerla (esto es, para impartirle la misma aceleración) sería la misma que en la Tierra.
4.5 Por la tercera ley de Newton, las dos fuerzas tienen la misma magnitud. Puesto que la masa del automóvil es mucho mayor que la del mosquito, el vehículo experimenta una aceleración minúscula, imperceptible, en respuesta a la fuerza del impacto. En cambio, el mosquito, con su masa tan pequeña, experimenta una aceleración catastróficamente alta.
4.6 **Respuesta: iv.** La flotabilidad es una fuerza *hacia arriba* que el *agua* ejerce sobre el *buzo*. Por la tercera ley de Newton, la otra mitad del par acción-reacción es una fuerza *hacia abajo* que el *buzo* ejerce sobre el *agua* y tiene la misma magnitud que la flotabilidad. Es cierto que el peso del buzo también es hacia abajo y tiene la misma magnitud que la flotabilidad; sin embargo, el peso actúa sobre el mismo cuerpo (el buzo) que la flotabilidad y, por lo tanto, estas fuerzas no constituyen un par acción-reacción

Problema práctico

Respuestas: ***a***) *Véase el Video Tutor Solution on MasteringPhysics®*
b) **i.** 2.20 m/s^2; **ii.** 6.00 N; **iii.** 3.00 N

5 APLICACIÓN DE LAS LEYES DE NEWTON



? Este paracaidista va en descenso en un paracaídas a velocidad constante. En esta situación, ¿qué fuerza tiene mayor magnitud: la de gravedad o la fuerza hacia arriba que ejerce el aire sobre el paracaidista?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo usar la primera ley de Newton para resolver problemas donde intervienen fuerzas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio.
- Cómo usar la segunda ley de Newton para resolver problemas donde intervienen fuerzas que actúan sobre un cuerpo con aceleración.
- La naturaleza de los diferentes tipos de fuerzas de fricción: de fricción estática, de fricción cinética, de fricción de rodamiento y resistencia de fluidos; y cómo resolver problemas relacionados con estas fuerzas.
- Cómo resolver problemas donde intervienen fuerzas que actúan sobre un cuerpo que se mueve en una trayectoria circular.
- Las propiedades clave de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza.

En el capítulo 4 vimos que las tres leyes de Newton del movimiento, que constituyen los cimientos de la mecánica clásica, tienen un planteamiento muy sencillo; no obstante, su *aplicación* a ciertas situaciones, como un velero para hielo que se desliza sobre un lago congelado, un trineo que se desliza colina abajo o un avión que efectúa una vuelta cerrada, requiere capacidad analítica y técnicas de solución de problemas. En este capítulo ampliaremos las destrezas para resolver problemas que el lector comenzó a desarrollar en el capítulo 4.

Comenzaremos con problemas de equilibrio, en los cuales se analizan las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en reposo o que se mueve con velocidad constante. Luego se considerarán cuerpos que no están en equilibrio, para lo que necesitaremos examinar las relaciones entre fuerzas y movimiento. Aprenderemos a describir y analizar la fuerza de contacto que actúa sobre un cuerpo que descansa o se desliza sobre una superficie. También estudiaremos las fuerzas que actúan sobre un cuerpo que se mueve en un círculo con rapidez constante. Cerraremos el capítulo con una mirada breve a la naturaleza fundamental de la fuerza y las clases de fuerzas que hay en nuestro Universo físico.

5.1 Empleo de la primera ley de Newton: Partículas en equilibrio

En el capítulo 4 aprendimos que un cuerpo está en *equilibrio* si se encuentra en reposo o se mueve con velocidad constante en un marco de referencia inercial. Una lámpara que cuelga, una mesa de cocina y un avión que vuela en línea recta con altitud y rapidez constantes son ejemplos de situaciones de equilibrio. En esta sección solo consideraremos el equilibrio de un cuerpo que puede modelarse como partícula. (En el capítulo 11 veremos cómo analizar un cuerpo en equilibrio que no se puede representar como si fuera una partícula; por ejemplo, un puente que está sostenido en

varios puntos de su longitud). El principio físico fundamental es la primera ley de Newton: si una partícula está en equilibrio, la fuerza *neta* que actúa sobre ella, es decir, la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre ella, debe ser cero:

$$\sum \vec{F} = \mathbf{0} \qquad \text{(partícula en equilibrio, forma vectorial)} \qquad (5.1)$$

Usaremos esta ecuación, con más frecuencia, en componentes:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \text{(partícula en equilibrio, en componentes)} \qquad (5.2)$$

Esta sección trata sobre el uso de la primera ley de Newton para resolver problemas de cuerpos en equilibrio. Quizás algunos de los problemas parezcan complicados; no obstante, lo importante es recordar que *todos* los problemas que implican partículas en equilibrio se resuelven de igual forma. La estrategia de solución de problemas 5.1 detalla los pasos a seguir para resolver todos estos problemas. Estudie detenidamente la estrategia, vea cómo se aplica en los ejemplos, y trate de aplicarla al resolver los problemas de tarea.

Estrategia para resolver problemas 5.1 Primera ley de Newton: Equilibrio de una partícula



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Se debe usar la *primera* ley de Newton en cualquier problema que implique fuerzas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio, es decir, que esté en reposo o en movimiento con velocidad constante. Por ejemplo, un automóvil se encuentra en equilibrio cuando está estacionado, pero también cuando viaja por una carretera recta con rapidez constante.

Si en el problema intervienen varios cuerpos y estos interactúan, también será preciso usar la *tercera* ley de Newton, la cual nos permite relacionar la fuerza que un cuerpo ejerce sobre un segundo cuerpo con la fuerza que este último ejerce sobre el primero.

Identifique la(s) incógnita(s). En los problemas de equilibrio, las incógnitas suelen ser la magnitud y dirección (el ángulo) de una de las fuerzas, o las componentes de esta.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Elabore un dibujo muy sencillo de la situación física, con dimensiones y ángulos. ¡No tiene que ser una obra de arte!
2. Para cada cuerpo en equilibrio, dibuje un diagrama de cuerpo libre. Por ahora, consideramos el cuerpo como partícula, así que represéntelo con un punto grande. *No* incluya en el diagrama los otros cuerpos que interactúan con él, como la superficie donde descansa, o una cuerda que tira de él.
3. Pregúntese ahora qué interactúa con el cuerpo tocándolo o de alguna otra forma. En el diagrama de cuerpo libre, dibuje un vector fuerza para cada interacción e identifique cada fuerza con un símbolo que represente su *magnitud*. Si conoce el ángulo de la fuerza, dibújelo con exactitud e identifíquelo. Incluya el peso del cuerpo, a menos que su masa sea insignificante. Si se conoce la masa, use $w = mg$ para obtener el peso. Una superficie en contacto con el cuerpo ejerce una fuerza normal perpendicular a la superficie y tal vez una fuerza de fricción paralela a esta. Una cuerda o una cadena, a lo largo de su longitud, solo pueden tirar de un cuerpo (no empujarlo).
4. En el diagrama de cuerpo libre *no* muestre las fuerzas que el cuerpo en cuestión *ejerce* sobre otro cuerpo. Las sumas de las ecuaciones (5.1) y (5.2) solo incluyen fuerzas que actúan *sobre* el cuerpo. Para cada fuerza sobre el cuerpo, pregúntese "¿Qué otro cuerpo causa esa fuerza?". Si no puede contestar, tal vez esté imaginando una fuerza inexistente.
5. Elija sus ejes de coordenadas e inclúyalos en su diagrama de cuerpo libre. (Si hay más de un cuerpo en el problema, es preciso elegir ejes por separado para cada cuerpo). Identifique la dirección positiva de cada eje. Si un cuerpo descansa o se desliza sobre una superficie plana, suele ser más sencillo tomar los ejes en las direcciones paralela y perpendicular a ella, aun si está inclinada.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Obtenga las componentes de cada fuerza a lo largo de cada uno de los ejes de coordenadas del cuerpo. Marque con una línea ondulada cada vector que se haya sustituido por sus componentes, para no tomarlo en cuenta dos veces. Aunque la *magnitud* de una fuerza siempre es positiva, las *componentes* de una fuerza pueden ser positivas o negativas.
2. Iguale con cero la suma algebraica de las componentes x de las fuerzas. En otra ecuación, haga lo mismo con las componentes y. (*Nunca* sume componentes x y y en una sola ecuación).
3. Si hay dos o más cuerpos, repita los pasos anteriores para cada uno. Si los cuerpos interactúan, use la tercera ley de Newton para relacionar las fuerzas que ejercen entre sí.
4. Asegúrese de tener la misma cantidad de ecuaciones independientes y de incógnitas. Resuelva estas ecuaciones para obtener las incógnitas.

EVALUAR *la respuesta:* Verifique que sus resultados sean lógicos. Si la solución es una expresión simbólica o una fórmula, verifique que esta funcione para casos especiales (valores específicos o casos extremos de diversas cantidades), con los que pueda hacer una estimación rápida.



Ejemplo 5.1 Equilibrio unidimensional: tensión en una cuerda sin masa

Una gimnasta de masa $m_G = 50.0$ kg se cuelga del extremo inferior de una cuerda colgante, de masa despreciable. El extremo superior está fijo al techo de un gimnasio. *a*) ¿Cuánto pesa la gimnasta? *b*) ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) ejerce la cuerda sobre ella? *c*) ¿Qué tensión hay en la parte superior de la cuerda?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La gimnasta y la cuerda están en equilibrio, así que podemos aplicar la primera ley de Newton a ambos cuerpos. Usaremos la tercera ley de Newton para relacionar las fuerzas que ejercen entre sí. Las incógnitas son el peso de la gimnasta, w_G, la fuerza que la parte inferior de la cuerda ejerce sobre la gimnasta (llamémosla $T_{R\text{ sobre }G}$) y la fuerza que el techo ejerce sobre la parte superior de la cuerda (llamémosla $T_{C\text{ sobre }R}$). La figura 5.1 muestra el diagrama de la situación y los diagramas de cuerpo libre de la gimnasta y la cuerda. Tomaremos el eje $+y$ hacia arriba en cada diagrama. Todas las fuerzas actúan verticalmente, así que solo tienen componente en y.

Las fuerzas $T_{R\text{ sobre }G}$ (la fuerza hacia arriba de la cuerda sobre la gimnasta en la figura 5.1*b*) y $T_{G\text{ sobre }R}$ (la fuerza hacia abajo de la gimnasta sobre la cuerda en la figura 5.1*c*) forman un par acción-reacción, así que por la tercera ley de Newton, deben tener la misma magnitud.

5.1 Diagramas para este problema.

a) La situación *b*) Diagrama de cuerpo libre de la gimnasta *c*) Diagrama de cuerpo libre de la cuerda

Observe que la figura 5.1*c* solo incluye las fuerzas que actúan *sobre* la cuerda. En particular, no incluye la fuerza que la *cuerda* ejerce sobre el *techo* (compare esto con el caso de la manzana en el ejemplo conceptual 4.9 de la sección 4.5). Asimismo, la fuerza que la cuerda ejerce sobre el techo no aparece en la figura 5.1*c*.

EJECUTAR: *a*) La magnitud del peso de la gimnasta es el producto de su masa por la aceleración debida a la gravedad, g:

$$w_G = m_G g = (50.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2) = 490\text{ N}$$

b) La fuerza gravitacional sobre la gimnasta (su peso) apunta en la dirección $-y$, así que su componente en esa dirección es $-w_G$. La fuerza hacia arriba que la cuerda ejerce sobre la gimnasta tiene magnitud desconocida $T_{R\text{ sobre }G}$ y una componente y positiva $+T_{R\text{ sobre }G}$. Calculamos esto usando la primera ley de Newton:

$$\text{Gimnasta:}\quad \sum F_y = T_{R\text{ sobre }G} + (-w_G) = 0 \quad\text{así que}$$
$$T_{R\text{ sobre }G} = w_G = 490\text{ N}$$

La cuerda tira de la gimnasta *hacia arriba* con una fuerza $T_{R\text{ sobre }G}$ de 490 N de magnitud. (Por la tercera ley de Newton, la gimnasta tira de la cuerda *hacia abajo* con una fuerza de la misma magnitud, $T_{G\text{ sobre }R} = 490$ N).

c) Hemos supuesto que la cuerda no tiene peso, así que las únicas fuerzas sobre ella son las ejercidas por el techo (fuerza hacia arriba de magnitud desconocida $T_{C\text{ sobre }R}$) y por la gimnasta (fuerza hacia abajo de magnitud $T_{G\text{ sobre }R} = 490$ N). Por la primera ley de Newton, la fuerza vertical *neta* sobre la cuerda en equilibrio debe ser igual a cero:

$$\text{Cuerda:}\quad \sum F_y = T_{C\text{ sobre }R} + (-T_{G\text{ sobre }R}) = 0 \quad\text{así que}$$
$$T_{C\text{ sobre }R} = T_{G\text{ sobre }R} = 490\text{ N}$$

EVALUAR: La *tensión* en cualquier punto de la cuerda es la magnitud de la fuerza que actúa en ese punto. En el caso de esta cuerda sin peso, la tensión $T_{G\text{ sobre }R}$ en el extremo inferior tiene el mismo valor que la tensión $T_{C\text{ sobre }R}$ en el extremo superior. De hecho, en una cuerda ideal sin peso, la tensión tiene el mismo valor en todos los puntos de la cuerda. (Véase el análisis del ejemplo conceptual 4.10 de la sección 4.5).



Ejemplo 5.2 Equilibrio unidimensional: tensión en una cuerda con masa

Calcule la tensión en cada extremo de la cuerda del ejemplo 5.1, si el peso de la cuerda es de 120 N.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Al igual que en el ejemplo 5.1, las incógnitas son las magnitudes $T_{G\text{ sobre }R}$ y $T_{C\text{ sobre }R}$ de las fuerzas que actúan sobre las partes inferior y superior de la cuerda, respectivamente. De nuevo, aplicaremos la primera ley de Newton a la gimnasta y a la cuerda, y usaremos la tercera ley de Newton para relacionar las fuerzas que la gimnasta y la cuerda ejercen una sobre la otra. Una vez más, dibujamos diagramas de cuerpo libre individuales para la gimnasta (figura 5.2*a*) y para la cuerda (figura 5.2*b*). Ahora existe una *tercera* fuerza que actúa sobre la cuerda: el peso de la cuerda, con una magnitud $w_R = 120$ N.

EJECUTAR: El diagrama de cuerpo libre de la gimnasta es el mismo del ejemplo 5.1, así que su condición de equilibrio tampoco ha cambiado. Por la tercera ley de Newton, $T_{R\text{ sobre }G} = T_{G\text{ sobre }R}$, y tenemos nuevamente

$$\text{Gimnasta:}\quad \sum F_y = T_{R\text{ sobre }G} + (-w_G) = 0 \quad\text{así que}$$
$$T_{R\text{ sobre }G} = T_{G\text{ sobre }R} = w_G = 490\text{ N}$$

La condición de equilibrio $\sum F_y = 0$ para la cuerda es ahora

$$\text{Cuerda:}\quad \sum F_y = T_{C\text{ sobre }R} + (-T_{G\text{ sobre }R}) + (-w_R) = 0$$

Observe que la componente y de $T_{C\text{ sobre }R}$ es positiva porque apunta en la dirección $+y$, pero las componentes y tanto de $T_{G\text{ sobre }R}$ como de w_R son negativas. Despejamos $T_{C\text{ sobre }R}$ y sustituimos los valores $T_{G\text{ sobre }R} = T_{R\text{ sobre }G} = 490$ N y $w_R = 120$ N:

$$T_{C\text{ sobre }R} = T_{G\text{ sobre }R} + w_R = 490\text{ N} + 120\text{ N} = 610\text{ N}$$

EVALUAR: Cuando incluimos el peso de la cuerda, la tensión es *diferente* en los dos extremos de la cuerda: 610 N en la parte superior y

490 N en la parte inferior. La fuerza $T_{C\ sobre\ R} = 610$ N que el techo ejerce debe sostener tanto el peso de 490 N de la gimnasta como el peso de 120 N de la cuerda.

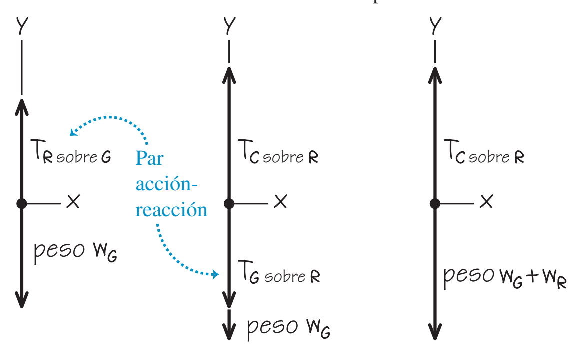
Para ver esto más claramente, se dibuja un diagrama de cuerpo libre de un cuerpo compuesto por la gimnasta y la cuerda consideradas como unidad (figura 5.2*c*). Solo actúan dos fuerzas externas sobre este cuerpo compuesto: la fuerza $T_{C\ sobre\ R}$ ejercida por el techo y el peso total $w_G + w_R = 490\ N + 120\ N = 610\ N$. (Las fuerzas $T_{G\ sobre\ R}$ y $T_{R\ sobre\ G}$ son *internas* en lo que al cuerpo compuesto se refiere. La primera ley de Newton solo se aplica para fuerzas *externas*, de modo que las fuerzas internas no se toman en cuenta). Por lo tanto, la primera ley de Newton aplicada al cuerpo compuesto es

$$\text{Cuerpo compuesto: } \sum F_y = T_{C\ sobre\ R} + [-(w_G + w_R)] = 0$$

así que $T_{C\ sobre\ R} = w_G + w_R = 610$ N.

Este método de tratar a la gimnasta y la cuerda como cuerpo compuesto es más sencillo, pero no podemos obtener la tensión $T_{G\ sobre\ R}$ en el extremo inferior de la cuerda. La moraleja es: *siempre que haya más de un cuerpo en un problema en el que intervienen las leyes de Newton, lo más pertinente es tratar a cada cuerpo individualmente*.

5.2 Diagramas para este problema, incluyendo el peso de la cuerda.



Ejemplo 5.3 Equilibrio bidimensional



En la figura 5.3*a*, un motor de peso w cuelga de una cadena unida mediante un anillo O a otras dos cadenas, una sujeta al techo y la otra a la pared. Obtenga las expresiones para la tensión en cada una de las tres cadenas en términos de w. Los pesos de las cadenas y el anillo son despreciables comparados con el peso del motor.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Las incógnitas son las magnitudes de las tensiones T_1, T_2 y T_3 en las tres cadenas (figura 5.3*a*). Todos los cuerpos están en equilibrio, así que usaremos la primera ley de Newton. Necesitamos tres ecuaciones independientes, una para cada incógnita. Sin embargo, la aplicación de la primera ley de Newton a un solo cuerpo solo nos da *dos* expresiones como las ecuaciones (5.2). Por lo tanto, será preciso considerar más de un cuerpo en equilibrio. Examinaremos el motor (sobre el que actúa T_1) y el anillo (que está unido a las tres cadenas, así que sobre él actúan las tres tensiones).

Las figuras 5.3*b* y 5.3*c* muestran los diagramas de cuerpo libre, incluyendo un sistema de coordenadas. Hay dos fuerzas que actúan sobre el motor: su peso w y la fuerza hacia arriba T_1 ejercida por la cadena vertical. Las tres fuerzas que actúan sobre el anillo son las tensiones de la cadena vertical (T_1), la de la cadena horizontal (T_2) y la de la cadena inclinada (T_3). Puesto que la cadena vertical tiene peso despreciable, ejerce fuerzas de la misma magnitud T_1 en ambos extremos (véase el ejemplo 5.1). (Si el peso de esta cadena no fuera despreciable, estas dos fuerzas tendrían diferentes magnitudes como la cuerda del ejemplo 5.2). El peso del anillo también es despreciable, por lo que no se incluye en la figura 5.3*c*.

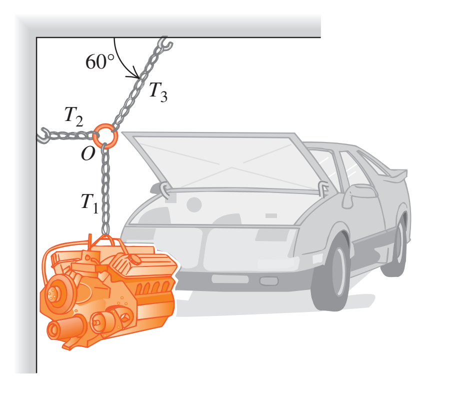
EJECUTAR: Las fuerzas que actúan sobre el motor están únicamente sobre el eje y; entonces, de acuerdo con la primera ley de Newton,

$$\text{Motor:} \quad \sum F_y = T_1 + (-w) = 0 \quad \text{y} \quad T_1 = w$$

Las cadenas horizontal e inclinada no ejercen fuerzas sobre el motor, porque no están unidas a él; aunque sí aparecen en la aplicación de la primera ley de Newton sobre el anillo. En el diagrama de cuerpo libre para el anillo (figura 5.3*c*), recuerde que T_1, T_2 y T_3 son las *magnitudes* de las fuerzas. Primero descomponemos la fuerza con magnitud T_3 en sus componentes x y y. El anillo está en equilibrio, así que usando la primera ley de Newton escribimos ecuaciones (individuales),

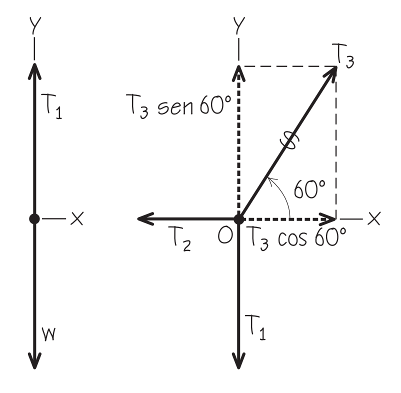
5.3 *a*) La situación. *b*) y *c*) Diagramas de cuerpo libre.

a) Motor, cadenas y anillo



b) Diagrama de cuerpo libre para el motor

c) Diagrama de cuerpo libre para el anillo O



Continúa

donde se establece que las componentes x y y de la fuerza neta sobre el anillo son iguales a cero:

$$\text{Anillo:} \quad \sum F_x = T_3 \cos 60^\circ + (-T_2) = 0$$

$$\text{Anillo:} \quad \sum F_y = T_3 \operatorname{sen} 60^\circ + (-T_1) = 0$$

Puesto que $T_1 = w$ (de la ecuación para el motor), escribimos la segunda ecuación del anillo como

$$T_3 = \frac{T_1}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{w}{\operatorname{sen} 60^\circ} = 1.2w$$

Ahora usamos este resultado en la primera ecuación del anillo:

$$T_2 = T_3 \cos 60^\circ = w\frac{\cos 60^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ} = 0.58w$$

EVALUAR: La cadena sujeta al techo ejerce una fuerza sobre el anillo con una componente *vertical* de magnitud T_1, que es igual a w. Pero, además, la fuerza tiene una componente horizontal, de modo que su magnitud T_3 es algo mayor que w. Por lo tanto, esta cadena es la que está sometida a mayor tensión y es la más susceptible de romperse.

Con la finalidad de tener suficientes ecuaciones para resolver este problema, tuvimos que considerar no solo las fuerzas sobre el motor, sino también las fuerzas que actúan sobre un segundo cuerpo (en este caso, el anillo que une las cadenas). Las situaciones de este tipo son muy comunes en problemas de equilibrio, así que tenga presente esta técnica.

Ejemplo 5.4 Un plano inclinado



Un automóvil de peso w descansa sobre una rampa sujeta a un remolque (figura 5.4*a*). Solo un cable unido al automóvil evita que baje de la rampa. (Los frenos y la transmisión del vehículo están desactivados). Calcule la tensión en el cable y la fuerza que la rampa ejerce sobre los neumáticos.

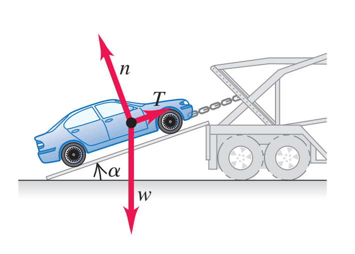
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El automóvil está en equilibrio, así que usaremos la primera ley de Newton. La rampa ejerce una fuerza individual sobre cada neumático del automóvil; pero, por sencillez, juntaremos todas estas fuerzas en una sola. Otra simplificación es que despreciaremos la fuerza de fricción que la rampa ejerce sobre los neumáticos (véase la figura 4.2*b*). Por lo tanto, la rampa solo ejerce una fuerza sobre el automóvil que es *perpendicular* a la rampa. Al igual que en la sección 4.1, llamaremos a esta fuerza la "fuerza *normal*" (véase la figura 4.2*a*). Las dos incógnitas son la magnitud n de la fuerza normal y la magnitud T de la tensión en el cable.

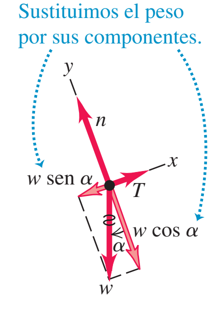
PLANTEAR: La figura 5.4 muestra la situación y el diagrama de cuerpo libre para el automóvil. Las tres fuerzas que actúan sobre el automóvil son su peso (magnitud w), la tensión del cable (magnitud T) y la fuerza normal (magnitud n). Observe que el ángulo α entre la rampa y la horizontal es igual al ángulo α entre el vector peso $\vec{w}$ y la línea normal al plano de la rampa. Observe también que tomamos los ejes de coordenadas x y y paralelo y perpendicular a la rampa, de modo que solo se necesita calcular una fuerza (el peso) en las componentes x y y. Si eligiéramos ejes que fueran horizontal y vertical, tendríamos que descomponer tanto la fuerza normal como la tensión en componentes.

5.4 Un cable sostiene un automóvil en reposo sobre una rampa.

a) Automóvil sobre una rampa



b) Diagrama de cuerpo libre del automóvil



EJECUTAR: Para escribir las componentes x y y de la primera ley de Newton, necesitamos obtener las componentes del peso. Una complicación es que el ángulo α en la figura 5.4*b* *no* se mide del eje $+x$ al eje $+y$, así que *no podemos* usar las ecuaciones (1.6) directamente para obtener las componentes. (Quizás usted desee repasar la sección 1.8, para asegurarse de que comprende este detalle importante).

Una manera de obtener las componentes de $\vec{w}$ es considerar los triángulos rectángulos de la figura 5.4*b*. El seno de α es la magnitud de la componente x de $\vec{w}$ (esto es, el cateto opuesto al ángulo α del triángulo) dividida entre la magnitud w (la hipotenusa). Asimismo, el coseno de α es la magnitud de la componente y (el cateto adyacente al ángulo α del triángulo) dividida entre w. Ambas componentes son negativas, así que $w_x = -w \operatorname{sen} \alpha$ y $w_y = -w \cos \alpha$.

Otra estrategia sería reconocer que una componente de $\vec{w}$ debe intervenir en el sen α, y la otra en el cos α. Para decidir cuál es cuál, dibuje el diagrama de cuerpo libre de modo que el ángulo α sea apreciablemente mayor o menor que 45°. (Le recomendamos no ceder a la tendencia natural de dibujar tales ángulos cercanos a 45°). Aquí dibujamos las figuras 5.4*b* de modo que α sea menor que 45°, lo que implica que sen α es menor que cos α. La figura muestra que la componente x de $\vec{w}$ es menor que la componente y, así que en la componente x deberá intervenir sen α; y en la componente y, cos α. Obtenemos otra vez $w_x = -w \operatorname{sen} \alpha$ y $w_y = -w \cos \alpha$.

En la figura 5.4*b* marcamos con una línea ondulada el vector original que representa el peso para recordar que no debemos tomarlo en cuenta dos veces. La primera ley de Newton nos da

$$\sum F_x = T + (-w \operatorname{sen} \alpha) = 0$$

$$\sum F_y = n + (-w \cos \alpha) = 0$$

(Recuerde que T, w y n son *magnitudes* de vectores y, por lo tanto, son positivas). Al despejar T y n, obtenemos

$$T = w \operatorname{sen} \alpha$$

$$n = w \cos \alpha$$

EVALUAR: Los valores obtenidos para T y n dependen del valor de a. Para verificar esta dependencia, examinaremos ciertos casos especiales. Si la rampa es horizontal (α es cero), obtenemos $T = 0$ y $n = w$. Como se podría esperar, no se necesita la tensión T del cable para sostener al automóvil, y la fuerza normal n es igual en magnitud al peso. Si la rampa es vertical ($\alpha = 90°$), obtenemos $T = w$ y $n = 0$.

La tensión T del cable sostiene todo el peso del automóvil, y no hay empuje del automóvil sobre la rampa.

CUIDADO **Quizá la fuerza normal y el peso no sean iguales** Es un error común suponer automáticamente que la magnitud n de la fuerza normal es igual al peso w: nuestro resultado demuestra que, en general, eso *no* es cierto. Siempre es mejor tratar a n como una variable y calcular su valor, como hicimos aquí.

¿Cómo cambiarían los valores de T y n si el automóvil no estuviera estacionario y el cable estuviera tirando de él para subirlo por la rampa con rapidez constante? Esto también es una situación de equilibrio, pues la velocidad del automóvil es constante. Por lo tanto, el cálculo es idéntico, y T y n tienen los mismos valores que cuando el auto está en reposo. (Es verdad que T debe ser mayor que w sen α para *iniciar* el movimiento ascendente del automóvil por la rampa, pero eso no es lo que preguntamos).

Ejemplo 5.5 Equilibrio de cuerpos unidos por un cable y una polea



Se están sacando bloques de granito de una cantera por una pendiente de 15° y los desechos se están amontonando en la cantera para llenar agujeros anteriores. Para simplificar el proceso, usted diseña un sistema en el que una cubeta con desechos (de peso w_2, incluida la cubeta) tira de un bloque de granito en un carro (de peso w_1, incluido el carro), que tiene ruedas de acero y se encuentra sobre rieles también de acero, al caer verticalmente a la cantera (figura 5.5*a*). Determine qué relación debe haber entre w_1 y w_2 para que el sistema funcione con rapidez constante. Ignore la fricción en la polea y en las ruedas del carro, y el peso del cable.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El carro y la cubeta se mueven con velocidad constante (es decir, en línea recta con rapidez constante). Así que los dos cuerpos están en equilibrio y podemos aplicar la primera ley de Newton a cada uno. Nuestra incógnita es una expresión que relacione los pesos w_1 y w_2.

La figura 5.5*b* es nuestro modelo idealizado del sistema y las figuras 5.5*c* y 5.5*d* son los diagramas de cuerpo libre. Las dos fuerzas que actúan sobre la cubeta son su peso w_2 y la tensión hacia arriba ejercida por el cable. Al igual que en el automóvil sobre la rampa del ejemplo 5.4, sobre el carro actúan tres fuerzas: su peso w_1, la fuerza normal de magnitud n ejercida por los rieles y la fuerza de tensión del cable. (Estamos ignorando la fricción, así que suponemos que los rieles no ejercen ninguna fuerza sobre el carro paralela a la pendiente). Observe que podemos orientar los ejes de forma distinta para cada cuerpo; las opciones que se muestran son las más convenientes.

Estamos suponiendo que el cable no tiene peso, así que las fuerzas de tensión que el cable ejerce sobre el carro y la cubeta tienen la misma magnitud T. Como hicimos con el automóvil en el ejemplo 5.4, representamos el peso del carro en términos de sus componentes x y y.

EJECUTAR: Aplicando $\sum F_y = 0$ a la cubeta en la figura 5.5*c*, tenemos

$$\sum F_y = T + (-w_2) = 0 \quad \text{así que} \quad T = w_2$$

Aplicando $\sum F_x = 0$ al carro (y al bloque) en la figura 5.5*d*, obtenemos

$$\sum F_x = T + (-w_1 \text{ sen } 15°) = 0 \quad \text{así que} \quad T = w_1 \text{ sen } 15°$$

Igualando las dos expresiones para T, se obtiene

$$w_2 = w_1 \text{ sen } 15° = 0.26 w_1$$

EVALUAR: Nuestro análisis no depende de la dirección en que se mueven el carro y la cubeta. Por lo tanto, el sistema puede moverse con rapidez constante en *cualquier* dirección, si el peso de la cubeta con desechos es el 26% del peso del carro y el bloque de granito. ¿Qué sucedería si w_2 fuera mayor que $0.26w_1$? ¿Y si fuera menor que $0.26w_1$?

Observe que no fue necesario aplicar la ecuación $\sum F_y = 0$ al carro y al bloque. ¿Puede usted demostrar que $n = w_1 \cos 15°$?

5.5 *a*) La situación. *b*) Nuesto modelo idealizado. *c*), *d*) Nuestros diagramas de cuerpo libre.

a) Una cubeta llena de desechos tira de un carro que lleva un bloque de granito

b) Modelo idealizado del sistema

c) Diagrama de cuerpo libre de la cubeta

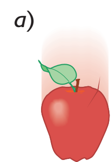
d) Diagrama de cuerpo libre del carro

Evalúe su comprensión de la sección 5.1 Un semáforo de peso w cuelga de dos cables ligeros, uno a cada lado. Los dos cables cuelgan con un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. ¿Qué tensión hay en cada cable? **i.** $w/2$; **ii.** $w/\sqrt{2}$; **iii.** w; **iv.** $w\sqrt{2}$; **v.** $2w$.

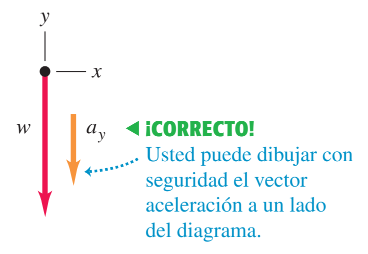


5.6 Diagramas de cuerpo libre correcto e incorrecto para un cuerpo que cae.

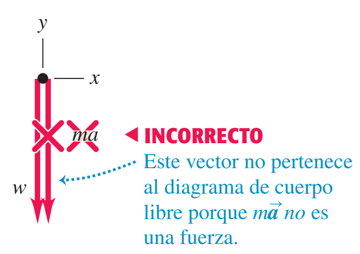
a)



b) Diagrama de cuerpo libre correcto



c) Diagrama de cuerpo libre incorrecto



5.2 Empleo de la segunda ley de Newton: Dinámica de partículas

Ahora podemos analizar problemas de *dinámica*, donde aplicaremos la segunda ley de Newton a cuerpos sobre los cuales la fuerza neta *no* es cero. Tales cuerpos *no* están en equilibrio, es decir, tienen aceleración. La fuerza neta es igual a la masa del cuerpo multiplicada por su aceleración:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad \text{(segunda ley de Newton, forma vectorial)} \tag{5.3}$$

Esta relación la usaremos con más frecuencia en componentes:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \text{(segunda ley de Newton, en componentes)} \tag{5.4}$$

La estrategia de solución de problemas que presentaremos en seguida es muy similar a la estrategia para resolver problemas 5.1 de la sección 5.1. Estúdiela con detenimiento, vea cómo se aplica en los ejemplos y úsela para resolver los problemas al final del capítulo. *Todos* los problemas de dinámica pueden resolverse con esta estrategia.

CUIDADO **$m\vec{a}$ no pertenece a los diagramas de cuerpo libre** Recuerde que la cantidad $m\vec{a}$ es el *resultado* de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, *no* es una fuerza; no es un empujón ni un tirón ejercido por algo del entorno. Al dibujar el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo con aceleración (como la fruta de la figura 5.6*a*), *nunca* incluya "la fuerza "$m\vec{a}$" porque *no existe tal fuerza* (figura 5.6*c*). Repase la sección 4.3 si esto todavía no le ha quedado claro. En ocasiones dibujaremos el vector aceleración $\vec{a}$ *junto* un diagrama de cuerpo libre, como en la figura 5.6*b*; pero *nunca* lo dibujaremos con su cola tocando el cuerpo (posición reservada exclusivamente para las fuerzas que actúan sobre el cuerpo).

Estrategia para resolver problemas 5.2 Segunda ley de Newton: Dinámica de partículas



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Se tiene que usar la segunda ley de Newton al resolver *cualquier* problema donde intervengan fuerzas que actúan sobre un cuerpo con aceleración.

Identifique la incógnita, que suele ser una aceleración o una fuerza; de lo contrario, habrá que usar otro concepto. Por ejemplo, suponga que le piden determinar con qué rapidez se está moviendo un trineo cuando llega al pie de una colina. La segunda ley de Newton le permitirá calcular la aceleración del trineo; después, tendrá que usar las relaciones para aceleración constante de la sección 2.4 y obtener la velocidad a partir de la aceleración.

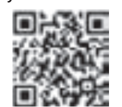
PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Elabore un dibujo sencillo de la situación que muestre los cuerpos en movimiento. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo, que muestre todas las fuerzas que actúan *sobre* el mismo. (La aceleración de un cuerpo depende de las fuerzas que actúan sobre él, *no* de las fuerzas que él ejerce sobre otros objetos). Asegúrese de ser capaz de contestar la pregunta: "¿Qué otro cuerpo está aplicando esta fuerza?" para cada fuerza de su diagrama. Nunca incluya la cantidad m en su diagrama de cuerpo libre; ¡no es una fuerza!
2. Identifique cada fuerza con un símbolo algebraico para representar su *magnitud*. Por lo regular, una de las fuerzas será el peso del cuerpo; normalmente, lo mejor es identificarlo como $w = mg$.
3. Elija los ejes de coordenadas x y y para cada objeto y muéstrelos en cada diagrama de cuerpo libre. No olvide indicar cuál es la dirección positiva de cada eje. En caso de que se conozca la dirección de la aceleración, la situación normalmente se simplifica si se elige esa dirección como la dirección positiva de uno de los ejes. Si en el problema intervienen dos o más objetos y estos se aceleran en direcciones distintas, se pueden usar distintos ejes para cada objeto.
4. Identifique otras ecuaciones que podría necesitar, además de la segunda ley de Newton, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, Por ejemplo, quizá necesite una o más de las ecuaciones para movimiento con aceleración constante. Si intervienen dos o más cuerpos, podrían existir relaciones entre sus movimientos; por ejemplo, cuando los cuerpos están unidos con una cuerda. Exprese todas esas relaciones en forma de ecuaciones que relacionen las aceleraciones de los cuerpos.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Para cada objeto, determine las componentes de las fuerzas a lo largo de cada eje de coordenadas. Cuando represente una fuerza en términos de sus componentes, marque con una línea ondulada el vector original para recordar no incluirlo dos veces.
2. Elabore una lista de todas las cantidades conocidas y desconocidas, identificando las incógnitas.
3. Para cada objeto, escriba una ecuación individual de cada componente de la segunda ley de Newton, en forma de las ecuaciones (5.4). Además, escriba las ecuaciones adicionales que identificó en el paso 4 de "Plantear". (Se necesitan tantas ecuaciones como incógnitas haya).
4. Realice el trabajo fácil: ¡los cálculos! Resuelva las ecuaciones para obtener la(s) incógnita(s).

EVALUAR *la respuesta:* ¿Su respuesta tiene las unidades correctas? (Cuando sea pertinente, utilice la conversión $1\ \text{N} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2$). ¿Tiene el signo algebraico adecuado? Si es posible, considere valores específicos o casos extremos, y compare los resultados con lo que esperaba intuitivamente. Pregúntese: "¿El resultado es lógico?".



Ejemplo 5.6 Movimiento rectilíneo con una fuerza constante

Un velero para hielo descansa sobre una superficie horizontal sin fricción (figura 5.7*a*). Sopla un viento constante en la dirección de los patines del trineo, de modo que 4.0 s después de soltarse el velero, este adquiere una velocidad de 6.0 m/s (aproximadamente 22 km/h o 13 mi/h). ¿Qué fuerza constante F_W ejerce el viento sobre el velero? La masa total del velero más el tripulante es de 200 kg.

SOLUCIÓN

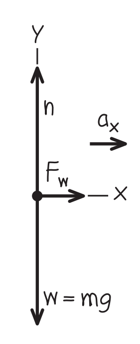
IDENTIFICAR y PLANTEAR: Nuestra incógnita es una de las fuerzas (F_W) que actúan sobre el velero con aceleración, así que necesitaremos usar la segunda ley de Newton. Las fuerzas que actúan sobre este objeto y el tripulante (considerados como un solo objeto) son el peso w, la fuerza normal n ejercida por la superficie y la fuerza horizontal F_W. La figura 5.7*b* muestra el diagrama de cuerpo libre. La fuerza neta y, por lo tanto, la aceleración están dirigidas a la derecha, así que elegimos el eje $+x$ en esa dirección. La aceleración es desconocida, así que habrá que calcularla. Como el viento es constante, se supone que ejerce una fuerza constante y la aceleración producida es constante, de modo que podremos usar una de las fórmulas de aceleración constante de la sección 2.4.

5.7 *a*) La situación. *b*) Diagrama de cuerpo libre.

a) Velero y tripulante sobre hielo sin fricción



b) Diagrama de cuerpo libre del velero y su tripulante



El velero parte del reposo (su velocidad inicial es $v_{0x} = 0$) y alcanza una velocidad $v_x = 6.0$ m/s después del tiempo transcurrido $t = 4.0$ s. Una ecuación que relaciona la aceleración a_x con esas cantidades es la ecuación (2.8), $v_x = v_{0x} + a_x t$. No hay aceleración vertical, así que la fuerza normal sobre el velero tiene una magnitud igual a su peso w.

EJECUTAR: Las cantidades *conocidas* son la masa $m =$ 200 kg, las velocidades inicial y final $v_{0x} = 0$ y $v_x = 6.0$ m/s, y el tiempo transcurrido $t = 4.0$ s. Las tres *incógnitas* son la aceleración a_x, la fuerza normal n y la fuerza horizontal F_W. Por lo tanto, necesitamos tres ecuaciones.

Las primeras dos son las ecuaciones x y y para la segunda ley de Newton. La fuerza F_W tiene la dirección $+x$; en tanto que las fuerzas n y $w = mg$ tienen las direcciones $+y$ y $-y$, respectivamente. Por lo tanto, tenemos

$$\sum F_x = F_W = ma_x$$
$$\sum F_y = n + (-mg) = 0 \quad \text{así que} \quad n = mg$$

La tercera ecuación que necesitamos es la relación de aceleración constante, la ecuación (2.8):

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

Para obtener F_W, primero despejamos a_x de esta ecuación y la sustituimos en la ecuación de $\sum F_x$:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{6.0\text{ m/s} - 0\text{ m/s}}{4.0\text{ s}} = 1.5\text{ m/s}^2$$
$$F_W = ma_x = (200\text{ kg})(1.5\text{ m/s}^2) = 300\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$$

Como $1\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2 = 1\text{ N}$, la respuesta final es

$$F_W = 300\text{ N (aproximadamente 67 lb)}$$

EVALUAR: Los valores que obtuvimos para F_W y n tienen unidades correctas de fuerza, y (como se esperaba) la magnitud n de la fuerza normal es igual a mg. ¿Es razonable que la fuerza F_W sea mucho *menor* que mg?



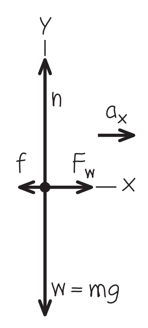
Ejemplo 5.7 Movimiento rectilíneo con fricción

Suponga que hay una fuerza de fricción horizontal constante con magnitud de 100 N que se opone al movimiento del velero del ejemplo 5.6. En este caso, ¿qué fuerza F_W constante debe ejercer el viento sobre el velero para producir la misma aceleración constante $a_x = 1.5$ m/s^2?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Una vez más, la incógnita es F_W. Nos dan la aceleración, así que solo necesitamos la segunda ley de Newton para obtener F_W. La figura 5.8 muestra el nuevo diagrama de cuerpo libre. La única diferencia con respecto a la figura 5.7*b* es la adición de la fuerza de fricción $\vec{f}$, que apunta en dirección opuesta al movimiento. (Observe que su *magnitud*, $f = 100$ N, es positiva, pero su *componente* en la dirección x es negativa e igual a $-f$, es decir, -100 N). Como el viento debe ahora superar la fuerza de fricción para mantener la misma aceleración del ejemplo 5.6, se espera que el valor de F_W sea mayor que los 300 N obtenidos anteriormente.

5.8 Diagrama de cuerpo libre del velero y su tripulante con una fuerza de fricción $\vec{f}$ opuesta al movimiento.



Continúa

EJECUTAR: Ahora hay dos fuerzas con componente x: la fuerza del viento y la fuerza de fricción. La componente x de la segunda ley de Newton nos da

$$\sum F_x = F_W + (-f) = ma_x$$
$$F_W = ma_x + f = (200\ \text{kg})(1.5\ \text{m/s}^2) + (100\ \text{N}) = 400\ \text{N}$$

EVALUAR: El valor de la fuerza requerida F_W es 100 N mayor que la del ejemplo 5.6 porque ahora el viento debe empujar 100 N adicionales en contra de la fuerza de fricción.



Ejemplo 5.8 Tensión en un cable de elevador

Un elevador y su carga tienen una masa total de 800 kg (figura 5.9*a*). Inicialmente, el elevador se mueve hacia abajo a 10.0 m/s; se frena hasta detenerse con aceleración constante en una distancia de 25.0 m. Calcule la tensión T en el cable de soporte mientras el elevador se está deteniendo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La incógnita es la tensión T, que obtendremos con la segunda ley de Newton. Al igual que en el ejemplo 5.6, tendremos que determinar la aceleración usando las fórmulas de aceleración constante. El diagrama de cuerpo libre (figura 5.9*b*) muestra las dos fuerzas que actúan sobre el elevador: su peso w y la fuerza de tensión T del cable. El elevador baja disminuyendo su rapidez, así que su aceleración es hacia arriba; elegimos el eje $+y$ en esa dirección.

El elevador se mueve en la dirección $-y$, así, su velocidad inicial v_{0y} y su desplazamiento $y - y_0$ son negativos: $v_{0y} = -10.0$ m/s y $y - y_0 = -25.0$ m. La velocidad final es $v_y = 0$. Para obtener la aceleración a_y a partir de esta información, usaremos la ecuación (2.13) en la forma $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0)$. Una vez que tengamos a_y, la sustituiremos en la componente y de la segunda ley de Newton (ecuaciones 5.4) y despejaremos T. La fuerza neta debe apuntar hacia arriba para producir una aceleración hacia arriba, de modo que se espera que T sea mayor que el peso $w = mg = (800\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 7840$ N.

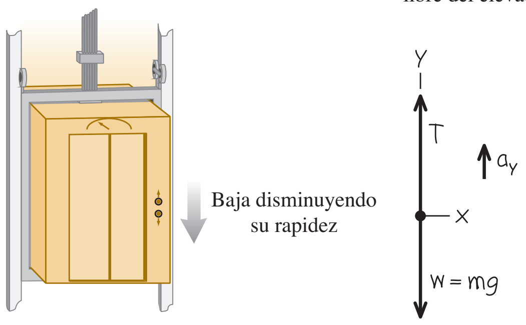
EJECUTAR: Escribamos primero la segunda ley de Newton. La fuerza de tensión actúa hacia arriba y el peso lo hace hacia abajo, así que

$$\sum F_y = T + (-w) = ma_y$$

Despejamos la incógnita T:

$$T = w + ma_y = mg + ma_y = m(g + a_y)$$

5.9 *a*) La situación. *b*) Diagrama de cuerpo libre.



Para determinar a_y, reacomodamos la ecuación de aceleración constante $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0)$:

$$a_y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2(y - y_0)} = \frac{(0)^2 - (-10.0\ \text{m/s})^2}{2(-25.0\ \text{m})} = +2.00\ \text{m/s}^2$$

La aceleración es hacia arriba (positiva), como debe ser.

Ahora se sustituye la aceleración en la ecuación de la tensión:

$$T = m(g + a_y) = (800\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2 + 2.00\ \text{m/s}^2)$$
$$= 9440\ \text{N}$$

EVALUAR: La tensión es mayor que el peso, tal como se esperaba. ¿Nota usted que obtendríamos el mismo valor de T y a_y si el elevador estuviera *ascendiendo* y *aumentando* su rapidez a razón de 2.00 m/s²?



Ejemplo 5.9 Peso aparente en un elevador con aceleración

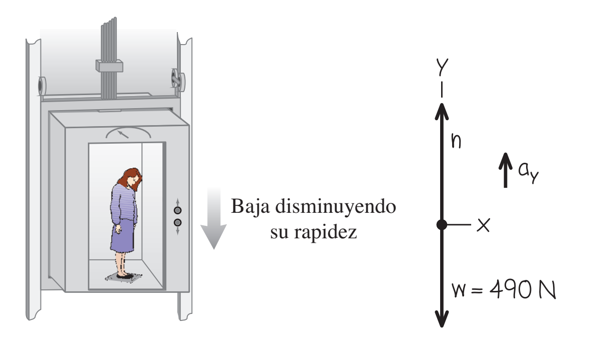
Una mujer de 50.0 kg se pone de pie sobre una báscula de baño dentro del elevador del ejemplo 5.8. ¿Qué valor marca la báscula?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La báscula (figura 5.10*a*) marca la magnitud de la fuerza hacia abajo ejercida *por* la mujer *sobre* la báscula; de acuerdo con la tercera ley de Newton, esto es igual a la magnitud de la fuerza normal hacia arriba ejercida *por* la báscula *sobre* la mujer. Por lo tanto, nuestra incógnita es la magnitud n de la fuerza normal. Obtendremos n aplicando la segunda ley de Newton a la mujer. Conocemos la aceleración de la mujer: es la misma que la del elevador, que se calculó en el ejemplo 5.8.

La figura 5.10*b* es un diagrama de cuerpo libre para la mujer. Las fuerzas que actúan sobre ella son la fuerza normal n ejercida por la báscula y su peso $w = mg = (50.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 490$ N. (La fuerza

5.10 *a*) La situación. *b*) Diagrama de cuerpo libre.



de tensión, que desempeñó un papel protagónico en el ejemplo 5.8, no aparece aquí porque no actúa sobre la mujer). Por el ejemplo 5.8, se sabe que la aceleración del elevador y de la mujer es $a_y = +2.00\ \text{m/s}^2$. Como en el ejemplo 5.8, la fuerza hacia arriba que acelera el cuerpo (en este caso, la fuerza normal sobre la mujer) tiene que ser mayor que el peso del cuerpo para que se produzca la aceleración hacia arriba.

EJECUTAR: La segunda ley de Newton da

$$\sum F_y = n + (-mg) = ma_y$$
$$n = mg + ma_y = m(g + a_y)$$
$$= (50.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2 + 2.00\ \text{m/s}^2) = 590\ \text{N}$$

EVALUAR: El valor obtenido para n implica que, mientras el elevador se está deteniendo, la báscula empuja a la mujer hacia arriba con una fuerza de 590 N. Por la tercera ley de Newton, la mujer empuja la báscula hacia abajo con la misma fuerza, así que la báscula marca 590 N, lo cual son 100 N más que su peso real. La lectura de la báscula es el **peso aparente** de la mujer; esta *siente* que el piso empuja con mayor fuerza sus pies hacia arriba que cuando el elevador está detenido o se mueve a velocidad constante.

¿Qué sentiría la mujer si el elevador estuviera acelerando *hacia abajo*, de modo que $a_y = -2.00\ \text{m/s}^2$? Esto sucedería si el elevador estuviera subiendo con rapidez decreciente o bajando con rapidez creciente. Para obtener la respuesta a esta situación, simplemente insertamos el nuevo valor de a_y en la ecuación de n:

$$n = m(g + a_y) = (50.0\ \text{kg})[9.80\ \text{m/s}^2 + (-2.00\ \text{m/s}^2)]$$
$$= 390\ \text{N}$$

Ahora la mujer siente que pesa solo 390 N, 100 N *menos* que su peso w real.

El lector puede sentir estos efectos dando unos pasos en un elevador que frena al descender (cuando su peso aparente es mayor que su peso w), o que se frena al ascender (cuando su peso aparente es menor que w).

Peso e ingravidez aparentes

Generalicemos el resultado del ejemplo 5.9. Cuando un pasajero de masa m viaja en un elevador con aceleración a_y, una báscula da como peso aparente del pasajero

$$n = m(g + a_y)$$

Cuando el elevador está acelerando hacia arriba, a_y es positiva y n es mayor que el peso del pasajero $w = mg$. Si el elevador acelera hacia abajo, a_y es negativa y n es menor que el peso del pasajero. Si el pasajero no sabe que el elevador está acelerando, sentirá que su peso cambia y, de hecho, la báscula así lo indica.

El caso extremo sucede cuando el elevador tiene una aceleración hacia abajo $a_y = -g$, es decir, cuando está en caída libre. En este caso, $n = 0$ y el pasajero *siente* que no tiene peso. Asimismo, un astronauta en órbita alrededor de la Tierra en su nave espacial experimenta *ingravidez aparente* (figura 5.11). En ambos casos, la persona no está verdaderamente en ingravidez, porque sobre ella actúa una fuerza gravitacional; pero las sensaciones de las personas en caída libre son las mismas que experimentan los individuos cuando se encuentran en el espacio exterior sin experimentar gravedad. En ambos casos, la persona y su vehículo (elevador o nave) están cayendo juntos con la misma aceleración g, así que nada empuja a la persona contra el piso o las paredes del vehículo.

5.11 Los astronautas en órbita sienten "ingravidez" porque tienen la misma aceleración que su nave, *no* porque estén "fuera del alcance de la gravedad terrestre". (Si la fuerza de gravedad no actuara sobre ellos, los astronautas y su nave no permanecerían en órbita, sino que se internarían en el espacio exterior).



Ejemplo 5.10 Aceleración cuesta abajo

Un trineo cargado de estudiantes (peso total w) se desliza hacia abajo por una pendiente nevada. La pendiente tiene un ángulo constante α, y el trineo está tan bien encerado que la fricción es despreciable. ¿Qué aceleración tiene el trineo?

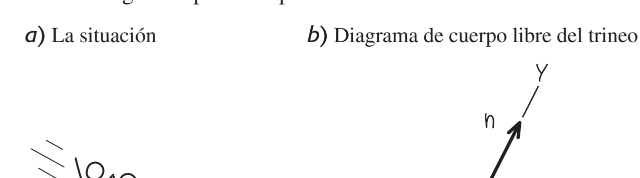
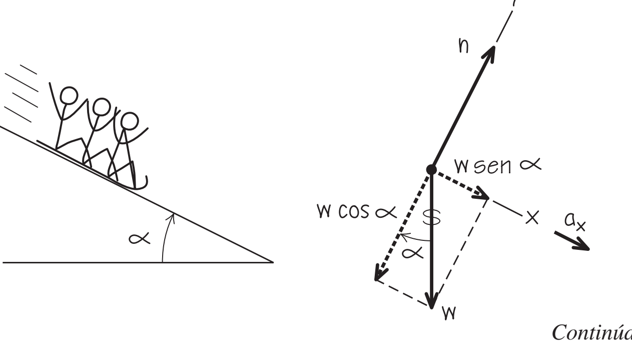
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Nuestra incógnita es la aceleración, que obtendremos aplicando la segunda ley de Newton. No hay fricción, así que solo dos fuerzas actúan sobre el trineo: su peso w y la fuerza normal n ejercida por la colina.

La figura 5.12 muestra el diagrama de cuerpo libre. Al igual que en el ejemplo 5.4, la superficie está inclinada, de manera que la fuerza normal no es vertical ni de igual magnitud que el peso. Por lo tanto, deberemos usar ambas componentes de $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ en las ecuaciones (5.4). Tomamos un eje paralelo y otro perpendicular a la superficie de la co-



5.12 Diagramas para este problema.

Continúa

lina, de modo que la aceleración (que es paralela a la colina) tenga la dirección $+x$.

EJECUTAR: La fuerza normal solo tiene componente y, pero el peso tiene tanto componente x como y: $w_x = w$ sen α y $w_y = -w \cos\alpha$. (En el ejemplo 5.4, teníamos $w_x = -w$ sen α. La diferencia es que en el ejemplo 5.4 el eje $+x$ era cuesta arriba y en la figura 5.12*b* es cuesta abajo). La línea ondulada de la figura 5.12*b* nos recuerda que descompusimos el peso en sus componentes. La aceleración es exclusivamente en la dirección $+x$, así que $a_y = 0$. La segunda ley de Newton en forma de componentes nos dice entonces que

$$\sum F_x = w \text{ sen } \alpha = ma_x$$
$$\sum F_y = n - w\cos\alpha = ma_y = 0$$

Puesto que $w = mg$, la ecuación para la componente x nos indica que mg sen $\alpha = ma_x$, es decir,

$$a_x = g \text{ sen } \alpha$$

Observe que no necesitamos la ecuación de la componente y para obtener la aceleración. ¡Esa es la ventaja de elegir el eje x en la dirección de la aceleración! Lo que nos da la ecuación de la componente y es la magnitud de la fuerza normal que la colina ejerce sobre el trineo:

$$n = w\cos\alpha = mg\cos\alpha$$

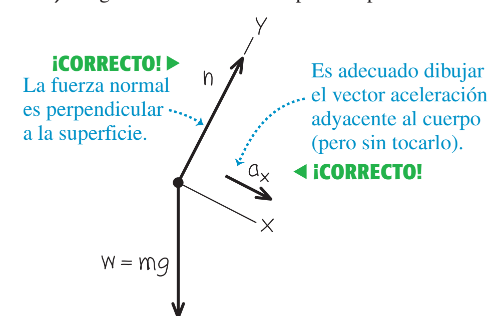
EVALUAR: Observe que la fuerza normal n no es igual al peso del trineo (compare con el ejemplo 5.4). Observe también que la masa m no aparece en el resultado de la aceleración. Eso es porque la fuerza cuesta abajo sobre el trineo (una componente del peso) es proporcional a m, de modo que la masa se cancela cuando usamos $\sum F_x = ma_x$ para calcular a_x. Por lo tanto, *cualquier* trineo, sin importar su masa, se desliza hacia abajo por una colina sin fricción con una aceleración g sen α.

Si el plano es horizontal, $\alpha = 0$ y $a_x = 0$ (el trineo no se acelera); si el plano es vertical, $\alpha = 90°$ y $a_x = g$ (el trineo está en caída libre).

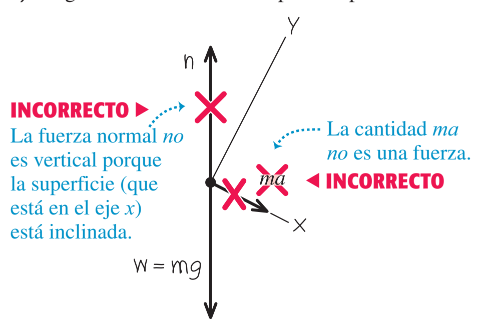
CUIDADO **Errores comunes en un diagrama de cuerpo libre** La figura 5.13 muestra tanto una forma correcta (figura 5.13*a*) como una *incorrecta* (figura 5.13*b*) de dibujar el diagrama de cuerpo libre del trineo. El diagrama de la figura 5.13*b* es incorrecto por dos razones: la fuerza normal debe ser perpendicular a la superficie, y nunca debe incluirse la "fuerza $m\vec{a}$". Si usted recuerda que "normal" significa "perpendicular" y que $m\vec{a}$ no es una fuerza, tendrá siempre buenas posibilidades de dibujar diagramas de cuerpo libre correctos.

5.13 Diagramas correcto e incorrecto de cuerpo libre para un trineo sobre una colina sin fricción.

a) Diagrama correcto de cuerpo libre para el trineo



b) Diagrama incorrecto de cuerpo libre para el trineo





Ejemplo 5.11 Dos cuerpos con la misma aceleración

Usted empuja una bandeja de comida de 1.00 kg, sobre el mostrador del comedor, con una fuerza constante de 9.0 N. Al moverse, la bandeja empuja un envase de leche de 0.50 kg (figura 5.14*a*). La bandeja y el envase se deslizan sobre una superficie horizontal tan grasosa que puede despreciarse la fricción. Obtenga la aceleración de la bandeja y el envase, y la fuerza horizontal que la bandeja ejerce sobre el envase de leche.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Las *dos* incógnitas son la aceleración del sistema bandeja-envase y la fuerza de la bandeja sobre el envase. Usaremos la segunda ley de Newton para obtener dos ecuaciones, una para cada incógnita. Plantearemos y resolveremos el problema de dos formas.

Método 1: Trataremos al envase (masa m_C) y a la bandeja (masa m_T) como cuerpos individuales, cada uno con su propio diagrama de cuerpo libre (figuras 5.14*b* y 5.14*c*). La fuerza F que usted ejerce sobre la bandeja no aparece en el diagrama de cuerpo libre del envase, el cual es acelerado por la fuerza (de magnitud $F_{\text{T sobre C}}$) que la bandeja ejerce sobre él. Por la tercera ley de Newton, el envase ejerce una fuerza de igual magnitud sobre la bandeja: $F_{\text{C sobre T}} = F_{\text{T sobre C}}$. Elegimos que la aceleración tenga la dirección $+x$; la bandeja y el envase se mueven con la misma aceleración a_x.

Método 2: Podemos tratar a la bandeja y al envase como un cuerpo compuesto con masa $m = m_T + m_C = 1.50$ kg (figura 5.14*d*). La única fuerza horizontal que actúa sobre este cuerpo compuesto es la fuerza F que usted ejerce. Las fuerzas $F_{\text{T sobre C}}$ y $F_{\text{C sobre T}}$ no intervienen porque son *internas* con respecto a este cuerpo compuesto, y la segunda ley de Newton nos dice que solo las fuerzas *externas* afectan la aceleración de un cuerpo (véase la sección 4.3). Para determinar la magnitud $F_{\text{T sobre C}}$ nuevamente aplicaremos la segunda ley de Newton al envase, como en el método 1.

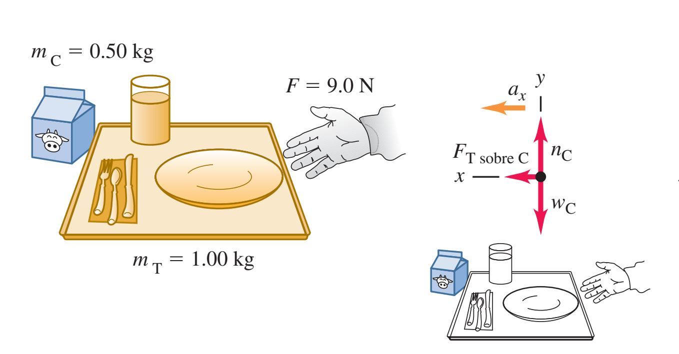
EJECUTAR: *Método 1:* Las ecuaciones de la componente x de la segunda ley de Newton son

$$\text{Bandeja:} \quad \sum F_x = F - F_{\text{C sobre T}} = F - F_{\text{T sobre C}} = m_T a_x$$
$$\text{Envase:} \quad \sum F_x = F_{\text{T sobre C}} = m_C a_x$$

Estas son dos ecuaciones simultáneas con las dos incógnitas a_x y $F_{\text{T sobre C}}$. (Solo necesitamos dos ecuaciones, lo cual significa que las

5.14 Se empujan una bandeja con comida y un envase de leche sobre el mostrador de un comedor.

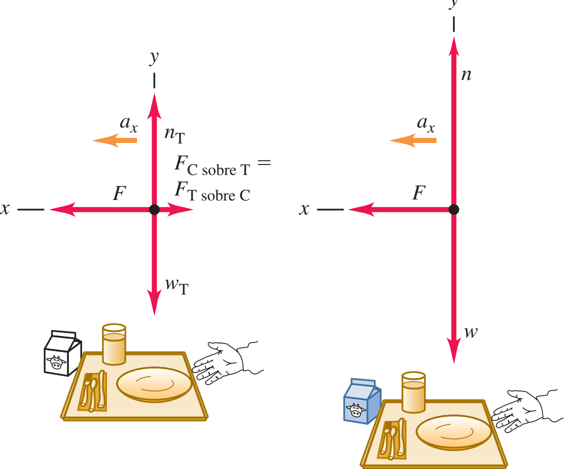
a) Un envase de leche y una bandeja con comida



b) Diagrama de cuerpo libre para el envase de leche

c) Diagrama de cuerpo libre para la bandeja

d) Diagrama de cuerpo libre para el envase y la bandeja como cuerpo compuesto



componentes y no desempeñan ningún papel en este ejemplo). Una forma fácil de despejar a_x de las dos ecuaciones es sumarlas; esto elimina $F_{T\ sobre\ C}$ y nos da

$$F = m_T a_x + m_C a_x = (m_T + m_C)a_x$$

y

$$a_x = \frac{F}{m_T + m_C} = \frac{9.0\ \text{N}}{1.00\ \text{kg} + 0.50\ \text{kg}} = 6.0\ \text{m/s}^2 = 0.61g$$

Sustituimos este valor en la ecuación del envase y obtenemos

$$F_{T\ sobre\ C} = m_C a_x = (0.50\ \text{kg})(6.0\ \text{m/s}^2) = 3.0\ \text{N}$$

Método 2: La componente x de la segunda ley de Newton para el cuerpo compuesto con masa m es

$$\sum F_x = F = ma_x$$

La aceleración de este cuerpo compuesto es

$$a_x = \frac{F}{m} = \frac{9.0\ \text{N}}{1.50\ \text{kg}} = 6.0\ \text{m/s}^2$$

Ahora examinamos el envase de leche solo y observamos que, si queremos impartirle una aceleración de 6.0 m/s^2, la bandeja deberá ejercer sobre él una fuerza de

$$F_{T\ sobre\ C} = m_C a_x = (0.50\ \text{kg})(6.0\ \text{m/s}^2) = 3.0\ \text{N}$$

EVALUAR: Las respuestas son las mismas con los dos métodos. Para verificar las respuestas, observe que hay fuerzas diferentes a cada lado de la bandeja: $F = 9.0$ N a la derecha y $F_{C\ sobre\ T} = 3.0$ N a la izquierda. Entonces, la fuerza neta horizontal sobre la bandeja es $F - F_{C\ sobre\ T} = 6.0$ N, que es exactamente la que se necesita para acelerar una bandeja de 1.00 kg a 6.0 m/s^2.

El método de tratar los dos cuerpos como un solo cuerpo compuesto funciona *únicamente* si los dos cuerpos tienen la misma magnitud *y* dirección de aceleración. Si las aceleraciones son distintas, deberemos tratar los dos cuerpos individualmente, como en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 5.12 Dos cuerpos con la misma magnitud de aceleración



En la figura. 5.15*a*, un deslizador de masa m_1 se mueve sobre un riel, con un colchón de aire, horizontal, sin fricción, en el laboratorio de física. El deslizador está conectado a una pesa de masa m_2 mediante una cuerda ligera, flexible e inextensible que pasa por una pequeña polea fija sin fricción. Calcule la aceleración de cada cuerpo y la tensión en la cuerda.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El deslizador y la pesa se están acelerando, así que deberemos usar la segunda ley de Newton. Hay tres incógnitas: la tensión T en la cuerda y las aceleraciones de los dos cuerpos.

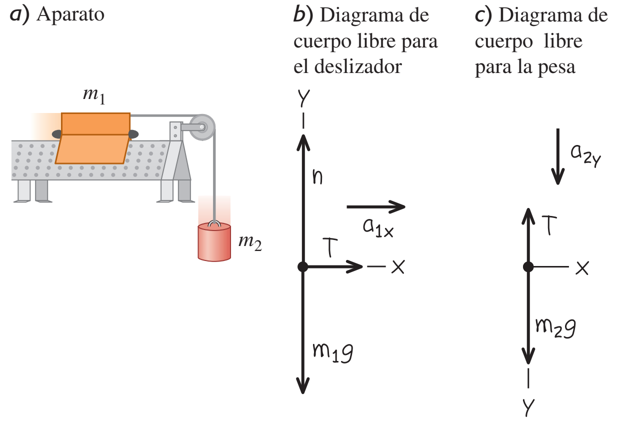
Ambos cuerpos se mueven en diferentes direcciones, una horizontal y otra vertical, así que no podemos considerarlos juntos como hicimos en el ejemplo 5.11. Las figuras 5.15*b* y 5.15*c* muestran los diagramas de cuerpo libre y los sistemas de coordenadas. Conviene hacer

5.15 *a*) La situación. *b*), *c*) Diagramas de cuerpo libre.

a) Aparato

b) Diagrama de cuerpo libre para el deslizador

c) Diagrama de cuerpo libre para la pesa



Continúa

que ambos cuerpos aceleren en la dirección positiva de un eje, por lo que elegimos la dirección $+y$ para la pesa hacia abajo.

Consideramos que no hay fricción en la polea y que la cuerda no tiene masa, así que la tensión T en ella es homogénea: aplica una fuerza de magnitud T a cada cuerpo. (Quizá sea conveniente repasar el ejemplo conceptual 4.10, donde vimos la fuerza de tensión ejercida por una cuerda sin masa). Los pesos son m_1g y m_2g.

Si bien las *direcciones* de las dos aceleraciones son distintas, sus *magnitudes* son iguales. (Ello se debe a que la cuerda no se estira; por lo tanto, los dos cuerpos deberán avanzar distancias iguales en tiempos iguales, y sus rapideces en cualquier instante deben ser iguales. Cuando las rapideces cambian, lo hacen en la misma cantidad en un tiempo dado, de manera que las aceleraciones de los dos cuerpos deben tener la misma magnitud a). Podemos expresar esta relación como $a_{1x} = a_{2y} = a$, lo cual significa que solo tenemos *dos* incógnitas: a y la tensión T.

¿Qué resultados se esperan? Si $m_1 = 0$ (o, aproximadamente 0, cuando m_1 es mucho menor que m_2), la pesa caerá libremente con una aceleración g, y la tensión en la cuerda será igual a cero. Para $m_2 = 0$ (o, aproximadamente 0, cuando m_2 es mucho menor que m_1), se espera una aceleración y una tensión igual a cero.

EJECUTAR: La segunda ley de Newton da

$$\text{Deslizador:} \quad \sum F_x = T = m_1a_{1x} = m_1a$$

$$\text{Deslizador:} \quad \sum F_y = n + (-m_1g) = m_1a_{1y} = 0$$

$$\text{Peso:} \quad \sum F_y = m_2g + (-T) = m_2a_{2y} = m_2a$$

(No hay fuerzas sobre la pesa en la dirección x). En estas ecuaciones, hemos usado $a_{1y} = 0$ (el deslizador no se acelera verticalmente) y $a_{1x} = a_{2y} = a$.

La ecuación x para el deslizador y la ecuación para la pesa nos dan dos ecuaciones simultáneas para las incógnitas T y a:

$$\text{Deslizador:} \quad T = m_1a$$

$$\text{Peso:} \quad m_2g - T = m_2a$$

Sumamos estas ecuaciones para eliminar T y obtenemos:

$$m_2g = m_1a + m_2a = (m_1 + m_2)a$$

así, la magnitud de la aceleración de cada cuerpo es

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2}g$$

Sustituyendo esto en la ecuación del deslizador $T = m_1a$, obtenemos

$$T = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}g$$

EVALUAR: La aceleración es, en general, menor que g, como se esperaba; la tensión en la cuerda evita que la pesa caiga libremente. La tensión T *no* es igual al peso m_2g de la pesa, sino que es *menor* según el factor $m_1/(m_1 + m_2)$. Si T *fuera* igual a m_2g, la pesa estaría en equilibrio, lo cual no sucede.

Como se predijo, la aceleración es igual a g para $m_1 = 0$, e igual a cero para $m_2 = 0$, y $T = 0$ para $m_1 = 0$ o $m_2 = 0$.

CUIDADO **Quizá tensión y peso no sean lo mismo** Es un error común suponer que, si un objeto está unido a una cuerda vertical, la tensión en la cuerda debe ser igual al peso del objeto. Así sucedía en el ejemplo 5.5, donde la aceleración era cero; ¡pero la situación es distinta en este ejemplo! La única estrategia segura consiste en tratar *siempre* la tensión como una variable, como lo hicimos aquí.

MasteringPHYSICS®

PhET: Lunar Lander

ActivPhysics 2.1.5: Car Race
ActivPhysics 2.2: Lifting a Crate
ActivPhysics 2.3: Lowering a Crate
ActivPhysics 2.4: Rocket Blasts Off
ActivPhysics 2.5: Modified Atwood Machine

Evalúe su comprensión de la sección 5.2 Imagine que usted detiene el deslizador del ejemplo 5.12, de modo que este y la pesa están inicialmente en reposo. Da al deslizador un empujón hacia la izquierda en la figura 5.15*a* y luego lo suelta. La cuerda permanece tensa conforme el deslizador se mueve hacia la izquierda, queda instantáneamente en reposo y luego se mueve hacia la derecha. En el instante en que el deslizador tiene velocidad cero, ¿cuál es la tensión en la cuerda? **i.** Mayor que en el ejemplo 5.12; **ii.** la misma que en el ejemplo 5.12; **iii.** menor que en el ejemplo 5.12, pero mayor que cero; **iv.** cero.

5.3 Fuerzas de fricción

Hemos visto varios problemas en que un cuerpo descansa o se desliza sobre una superficie que ejerce fuerzas sobre el cuerpo. Siempre que dos cuerpos interactúan por contacto directo de sus superficies (se tocan), describimos la interacción en términos de *fuerzas de contacto*. La fuerza normal es un ejemplo de una fuerza de contacto; en esta sección, veremos con detalle otra fuerza de contacto: la fuerza de fricción.

La fricción es importante en muchos aspectos de la vida cotidiana. El aceite del motor de un automóvil reduce la fricción entre piezas móviles; no obstante, sin fricción entre los neumáticos y el asfalto, el automóvil no podría avanzar ni dar vuelta. El arrastre del aire, esto es, la fuerza de fricción ejercida por el aire sobre un cuerpo que se mueve a través de él, reduce el rendimiento del combustible en los automóviles, pero hace que funcionen los paracaídas. Sin fricción, los clavos se desclavarían, las bombillas se desatornillarían sin esfuerzo y el hockey sobre hielo sería imposible (figura 5.16).

5.16 Para jugar el hockey sobre hielo es necesario tener la cantidad correcta de fricción entre los patines de los jugadores y el hielo. Si hubiera demasiada fricción, los jugadores se moverían lentamente; de lo contrario, se caerían.



Fricción cinética y estática

Si se intenta deslizar una caja pesada con libros por el piso, la caja no se moverá si no se aplica cierta fuerza mínima. Luego, la caja comienza a moverse y casi siempre podemos mantenerla en movimiento con menos fuerza de la que necesitamos inicial-

mente. Si se sacan algunos libros, se necesitará menos fuerza que antes para poner o mantener en movimiento la caja. ¿Qué enunciados generales se pueden hacer acerca de este comportamiento?

Primero, cuando un cuerpo descansa o se desliza sobre una superficie, podemos considerar que esta última ejerce una sola fuerza de contacto sobre el cuerpo, con componentes de fuerza perpendiculares y paralelas a la superficie (figura 5.17). La componente vectorial perpendicular es la fuerza normal, denotada con $\vec{n}$. La componente vectorial paralela a la superficie (y perpendicualr a $\vec{n}$) es la **fuerza de fricción**, denotada con $\vec{f}$. Si la superficie no tiene fricción, entonces $\vec{f}$ será cero, pero habrá todavía una fuerza normal. (Las superficies sin fricción son una idealización inalcanzable, como la cuerda sin masa, aunque podemos aproximarla si los efectos de la fricción son insignificantes). La dirección de la fuerza de fricción siempre es opuesta al movimiento relativo de las dos superficies.

El tipo de fricción que actúa cuando un cuerpo se desliza sobre una superficie es la **fuerza de fricción cinética** $\vec{f}_k$. El adjetivo "cinética" y el subíndice "k" (por la inicial de *kinetic*) nos recuerdan que las dos superficies se mueven una con respecto a la otra. La *magnitud* de la fuerza de fricción suele aumentar al aumentar la fuerza normal. Esto es porque se requiere más fuerza para deslizar por el piso una caja llena de libros que cuando la misma caja está vacía. Este principio también se usa en los sistemas de frenos de automóviles; si las zapatas se aprietan con más fuerza contra los discos giratorios, mayor será el efecto de frenado. En muchos casos, la magnitud de la fuerza de fricción cinética f_k que se determina en forma experimental es aproximadamente *proporcional* a la magnitud n de la fuerza normal. En tales casos, representamos la relación con la ecuación

$$f_k = \mu_k n \qquad \text{(magnitud de la fuerza de fricción cinética)} \qquad (5.5)$$

donde μ_k (la letra griega "mu", subíndice k) es una constante llamada **coeficiente de fricción cinética**. Cuanto más resbalosa sea una superficie, menor será este coeficiente. Al ser un cociente de dos magnitudes de fuerza, μ_k es un número puro sin unidades.

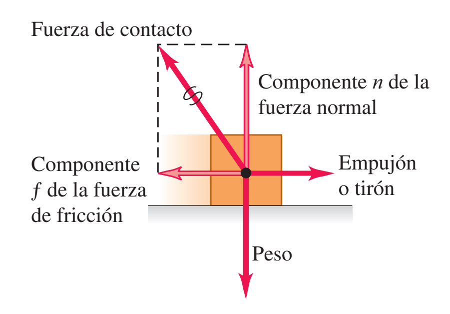
CUIDADO **Las fuerzas de fricción y normal siempre son perpendiculares** Recuerde que la ecuación (5.5) *no* es una ecuación vectorial porque $\vec{f}_k$ y $\vec{n}$ siempre son perpendiculares. Más bien, es una relación escalar entre las magnitudes de dos fuerzas.

La ecuación (5.5) solo es una representación aproximada de un fenómeno complejo. A nivel microscópico, las fuerzas de fricción y la normal se deben a las fuerzas intermoleculares (fundamentalmente eléctricas) entre dos superficies ásperas en los puntos donde entran en contacto (figura 5.18). Al deslizarse una caja sobre el piso, se forman y rompen enlaces entre ambas superficies, y el número total de enlaces varía; por lo tanto, la fuerza de fricción cinética no es perfectamente constante. Si pulimos las superficies, realmente aumentaríamos la fricción, pues más moléculas podrían interactuar y enlazarse; juntar dos superficies lisas del mismo metal produciría una "soldadura fría". Los aceites lubricantes funcionan porque una película de aceite entre dos superficies (como entre los pistones y las paredes de los cilindros de un motor) evita que entren en contacto realmente.

La tabla 5.1 presenta algunos valores representativos de μ_k. Aunque se dan dos cifras significativas, son valores aproximados, ya que las fuerzas de fricción también dependen de la rapidez del cuerpo relativa a la superficie. Por ahora, ignoraremos este efecto y supondremos que μ_k y f_k son independientes de la rapidez, para concentrarnos en los casos más sencillos. La tabla 5.1 también muestra coeficientes de fricción estática, que definiremos en seguida.

Las fuerzas de fricción también pueden actuar cuando *no* hay movimiento relativo. Si tratamos de deslizar por el piso la caja con libros, tal vez no se mueva porque el piso ejerce una fuerza de fricción igual y opuesta sobre la caja. Esta se llama **fuerza de fricción estática** $\vec{f}_s$. En la figura 5.19*a*, la caja está en reposo, en equilibrio, bajo la acción de su peso $\vec{w}$ y la fuerza normal hacia arriba $\vec{n}$. La fuerza normal es igual en magnitud al peso ($n = w$) y es ejercida por el piso sobre la caja. Ahora atamos una

5.17 Cuando se empuja el bloque o se tira de él sobre una superficie, esta última ejerce una fuerza de contacto sobre el bloque.



5.18 Las fuerzas normal y de fricción surgen de interacciones entre moléculas en los puntos elevados de las superficies del bloque y del piso.

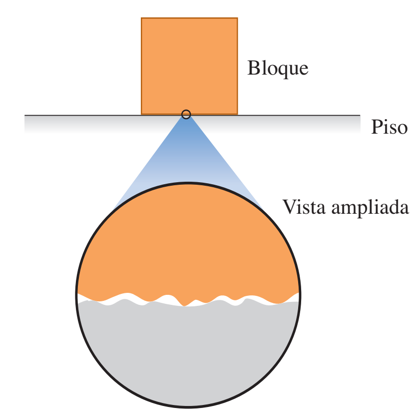
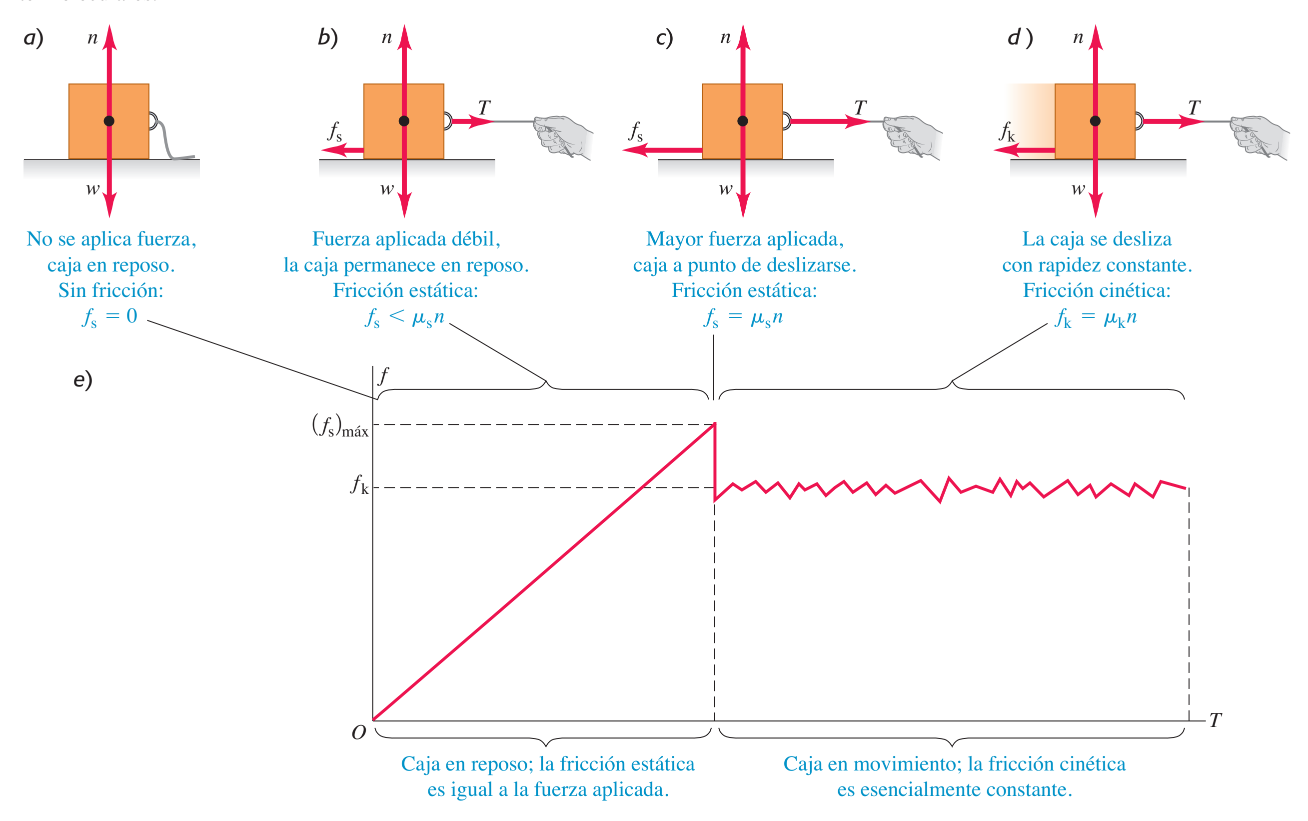


Tabla 5.1 Coeficientes de fricción aproximados

Materiales	Coeficiente de fricción estática, μ_s	Coeficiente de fricción cinética, μ_k
Acero sobre acero	0.74	0.57
Aluminio sobre acero	0.61	0.47
Cobre sobre acero	0.53	0.36
Latón sobre acero	0.51	0.44
Zinc sobre hierro colado	0.85	0.21
Cobre sobre hierro colado	1.05	0.29
Vidrio sobre vidrio	0.94	0.40
Cobre sobre vidrio	0.68	0.53
Teflón sobre teflón	0.04	0.04
Teflón sobre acero	0.04	0.04
Hule sobre concreto (seco)	1.0	0.8
Hule en concreto (húmedo)	0.30	0.25

5.19 *a*), *b*), *c*) Si no hay movimiento relativo, la magnitud de la fuerza de fricción estática f_s es igual o menor que $\mu_s n$. *d*) Si hay movimiento relativo, la magnitud de la fuerza de fricción cinética f_k es igual a $\mu_k n$. *e*) Gráfica de la magnitud de la fuerza de fricción f en función de la magnitud de T de la fuerza aplicada. La fuerza de fricción cinética varía un poco conforme se forman y se rompen los enlaces intermoleculares.





cuerda a la caja (figura 5.19*b*) y gradualmente aumentamos la tensión T en la cuerda. Al principio, la caja no se mueve porque, al aumentar T, la fuerza de fricción estática f_s también aumenta, pero su magnitud se mantiene igual a T.

En algún momento, T se vuelve mayor que la fuerza de fricción estática f_s máxima que la superficie puede ejercer; después, la caja "se suelta" (la tensión T puede romper las interacciones entre las moléculas de las superficies de la caja y el piso) y comienza a deslizarse. La figura 5.19*c* muestra las fuerzas cuando T tiene este valor crítico. Si T excede dicho valor, la caja ya no estará en equilibrio. Para un par de superficies dado, el valor máximo de f_s depende de la fuerza normal. Los experimentos revelan que, en muchos casos, ese valor máximo, llamado $(f_s)_{máx}$, es aproximadamente *proporcional* a n; llamamos **coeficiente de fricción estática** al factor de proporcionalidad μ_s. En la tabla 5.1 se dan valores representativos de μ_s. En una situación específica, la fuerza de fricción estática real puede tener cualquier magnitud entre cero (cuando no hay otra fuerza paralela a la superficie) y un valor máximo dado por $\mu_s n$. En símbolos,

$$f_s \leq \mu_s n \qquad \text{(magnitud de la fuerza de fricción estática)} \qquad (5.6)$$

Al igual que la ecuación (5.5), esta es una relación entre magnitudes, *no* de vectores. La igualdad solo se cumple cuando la fuerza aplicada T alcanza el valor crítico en que el movimiento está a punto de iniciar (figura 5.19*c*). Si T es menor que este valor (figura 5.19*b*), se cumple la desigualdad y debemos usar las condiciones de equilibrio $\left(\sum \vec{F} = \mathbf{0}\right)$ para obtener f_s. Si no se aplica fuerza ($T = 0$), como en la figura 5.19*a*, tampoco hay fuerza de fricción estática ($f_s = 0$).

Tan pronto como inicia el deslizamiento de la caja (figura 5.19*d*), la fuerza de fricción suele *disminuir* (figura 5.19*e*); es más fácil mantener la caja en movimiento que ponerla en movimiento. Por lo tanto, el coeficiente de fricción cinética suele ser *menor* que el de fricción estática para un par de superficies dado, como se muestra en la tabla 5.1.

Aplicación Fricción estática y limpiadores de un parabrisas
El chirrido de los limpiadores de un parabrisas sobre el vidrio seco es un fenómeno de movimiento con tirón. La hoja móvil del limpiador se atasca momentáneamente sobre el vidrio, luego se desliza cuando la fuerza aplicada a la hoja por el motor del limpiador rebasa la fuerza máxima de fricción estática. Cuando el vidrio está mojado, ya sea por el agua de lluvia o la solución que se usa para limpiar el parabrisas, la fricción se reduce y la hoja del limpiador ya no se atasca.



En algunas situaciones, las superficies se atoran (fricción estática) y se deslizan (fricción cinética) de forma alterna. Esto es lo que causa el molesto rechinido del gis aplicado con un ángulo inadecuado a un pizarrón, o de los neumáticos que se derrapan en el asfalto. Un ejemplo más concluyente es el movimiento de un arco de violín contra una cuerda.

Cuando un cuerpo se desliza sobre una capa de gas, la fricción puede reducirse mucho. En el riel con aire que se usa en los laboratorios de física, los deslizadores se apoyan en una capa de aire. La fuerza de fricción depende de la velocidad; sin embargo, a rapideces comunes, el coeficiente de fricción efectivo es del orden de 0.001.

MasteringPHYSICS

PhET: Forces in 1 Dimension
PhET: Friction
PhET: The Ramp
ActivPhysics 2.5: Truck Pulls Crate
ActivPhysics 2.6: Pushing a Crate Up a Wall
ActivPhysics 2.7: Skier Goes Down a Slope
ActivPhysics 2.8: Skier and Rope Tow
ActivPhysics 2.10: Truck Pulls Two Crates



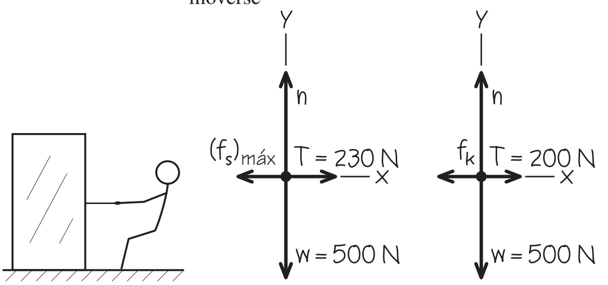
Ejemplo 5.13 Fricción en movimiento horizontal

Usted desea mover una caja de 500 N por un piso horizontal. Para comenzar a moverla, debe tirar con una fuerza horizontal de 230 N. Una vez que la caja "se suelta" y comienza a moverse, puede mantenerse a velocidad constante con solo 200 N. ¿Cuáles son los coeficientes de fricción estática y cinética?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La caja se encuentra en equilibrio si está en reposo o se mueve con velocidad constante, así que usamos la primera ley de Newton expresada por las ecuaciones (5.2). Usaremos las ecuaciones (5.5) y (5.6) para calcular las incógnitas μ_s y μ_k.

Las figuras 5.20*a* y 5.20*b* muestran el diagrama de cuerpo libre un instante antes de que la caja comience a moverse, cuando la fuerza de fricción estática tiene su máximo valor posible, $(f_s)_{máx} = \mu_s n$. Una vez que la caja se mueve, la fuerza de fricción cambia a su forma cinética (figura 5.20*c*). En ambas situaciones, actúan cuatro fuerzas sobre la caja: la fuerza hacia abajo del peso (magnitud $w = 500$ N), la fuerza normal hacia arriba (magnitud n) ejercida por el suelo, una fuerza de tensión (magnitud T) a la derecha ejercida por la cuerda, y una fuerza de fricción a la izquierda ejercida por el suelo. Puesto que la cuerda de la figura 5.20*a* está en equilibrio, la tensión es la misma en ambos extremos. Por lo tanto, la fuerza de tensión que la cuerda ejerce sobre la caja tiene la misma magnitud que la fuerza que usted ejerce sobre la cuerda. Como es más fácil mantener la caja en movimiento que iniciarlo, se espera que $\mu_k < \mu_s$.



5.20 Diagramas para este problema.

EJECUTAR: Justo antes de que la caja comience a moverse (figura 5.20*b*), de acuerdo con las ecuaciones (5.2), tenemos

$$\sum F_x = T + (-(f_s)_{máx}) = 0 \text{ así que } (f_s)_{máx} = T = 230 \text{ N}$$
$$\sum F_y = n + (-w) = 0 \quad \text{por lo tanto, } n = w = 500 \text{ N}$$

Para obtener el valor de μ_s, usamos la ecuación (5.6), $(f_s)_{máx} = \mu_s n$:

$$\mu_s = \frac{(f_s)_{máx}}{n} = \frac{230 \text{ N}}{500 \text{ N}} = 0.46$$

Una vez que la caja está en movimiento (figura 5.20*c*), tenemos

$$\sum F_x = T + (-f_k) = 0 \quad \text{así que} \quad f_k = T = 200 \text{ N}$$
$$\sum F_y = n + (-w) = 0 \quad \text{por lo tanto,} \quad n = w = 500 \text{ N}$$

Usando $f_k = \mu_k n$ de la ecuación (5.5), se obtiene:

$$\mu_k = \frac{f_k}{n} = \frac{200 \text{ N}}{500 \text{ N}} = 0.40$$

EVALUAR: Como se esperaba, el coeficiente de fricción cinética es menor que el coeficiente de fricción estática.



Ejemplo 5.14 La fricción estática puede tener un valor menor que su máximo

En el ejemplo 5.13, ¿qué fuerza de fricción existe si la caja está en reposo sobre la superficie y se le aplica una fuerza horizontal de 50 N?

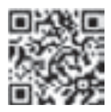
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La fuerza aplicada es menor que la fuerza máxima de fricción estática, $(f_s)_{máx} = 230$ N. Por lo tanto, la caja permanece en reposo y la fuerza neta que actúa sobre ella es cero. La incógnita es la magnitud f_s de la fuerza de fricción. El diagrama de cuerpo libre es el mismo de la figura 5.20*b*, pero sustituyendo $(f_s)_{máx}$ por f_s y $T = 230$ N por $T = 50$ N.

EJECUTAR: Por las condiciones de equilibrio, ecuaciones (5.2), tenemos

$$\sum F_x = T + (-f_s) = 0 \quad \text{así que} \quad f_s = T = 50 \text{ N}$$

EVALUAR: La fuerza de fricción puede evitar el movimiento con cualquier fuerza horizontal aplicada de hasta $(f_s)_{máx} = \mu_s n = 230$ N. Por debajo de ese valor, f_s tiene la misma magnitud que la fuerza aplicada.



Ejemplo 5.15 Reducción al mínimo de la fricción cinética

En el ejemplo 5.13, suponga que usted intenta mover la caja tirando de una cuerda hacia arriba con un ángulo de 30° sobre la horizontal. ¿Qué fuerza debe aplicar al tirar para mantener la caja en movimiento con velocidad constante? Suponga que $\mu_k = 0.40$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La caja está en equilibrio porque su velocidad es constante, así que aplicamos de nuevo la primera ley de Newton. Puesto que la caja está en movimiento, el suelo ejerce una fuerza de fricción *cinética.* La incógnita es la magnitud T de la fuerza de tensión.

La figura 5.21 es un diagrama de cuerpo libre. La fuerza de fricción cinética f_k sigue siendo igual *a* $\mu_k n$; pero ahora la fuerza normal n *no* es igual en magnitud al peso de la caja. La fuerza ejercida por la cuerda tiene una componente vertical adicional que tiende a levantar la caja del piso. Esto *reduce* n y, por lo tanto, reduce f_k.

5.21 Diagramas para este problema.

a) Se tira de una caja con cierto ángulo

b) Diagrama de cuerpo libre de la caja en movimiento

EJECUTAR: Por las condiciones de equilibrio y la ecuación $f_k = \mu_k n$, tenemos

$$\sum F_x = T\cos 30° + (-f_k) = 0 \quad \text{así que} \quad T\cos 30° = \mu_k n$$
$$\sum F_y = T\,\text{sen}\,30° + n + (-w) = 0 \quad \text{por lo tanto,} \quad n = w - T\,\text{sen}\,30°$$

Tenemos dos ecuaciones para las dos incógnitas, T y n. Una manera de obtener T es sustituir la expresión de n de la segunda ecuación en la primera y luego despejar T de la ecuación resultante:

$$T\cos 30° = \mu_k(w - T\,\text{sen}\,30°)$$
$$T = \frac{\mu_k w}{\cos 30° + \mu_k\,\text{sen}\,30°} = 188\text{ N}$$

Podemos sustituir este resultado en cualquiera de las ecuaciones originales para calcular n. Si usamos la segunda ecuación, obtendremos

$$n = w - T\,\text{sen}\,30° = (500\text{ N}) - (188\text{ N})\,\text{sen}\,30° = 406\text{ N}$$

EVALUAR: Como se esperaba, la fuerza normal es menor que el peso de 500 N de la caja. Resulta que la tensión requerida para mantener la caja en movimiento con velocidad constante es un poco menor que los 200 N de fuerza que se necesitan cuando se tira horizontalmente en el ejemplo 5.13. ¿Puede obtener el ángulo donde el tirón requerido sea *mínimo*? (Véase el problema de desafío 5.121).



Ejemplo 5.16 Trineo con fricción I

Volvamos al trineo que analizamos en el ejemplo 5.10. La cera se desgastó y ahora hay un coeficiente de fricción cinética μ_k diferente de cero. La pendiente tiene justo el ángulo necesario para que el trineo baje con velocidad constante. Obtenga el ángulo en términos de w y μ_k.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La incógnita es el ángulo α de la pendiente. El trineo está en equilibrio porque su velocidad es constante, así que usamos la primera ley de Newton en la forma de las ecuaciones (5.2).

Tres fuerzas actúan sobre el trineo: su peso, la fuerza normal y la fuerza de fricción cinética. Puesto que el movimiento es cuesta abajo, la fuerza de fricción cinética (que se opone al movimiento) está dirigida cuesta arriba. La figura 5.22 muestra el dibujo y el diagrama de cuerpo libre (compare con la figura 5.12*b* del ejemplo 5.10). La magnitud de la fuerza de fricción cinética es $f_k = \mu_k n$. Se espera que cuanto mayor sea el valor de μ_k, más pronunciada será la pendiente requerida.

EJECUTAR: Las condiciones de equilibrio son

$$\sum F_x = w\,\text{sen}\,\alpha + (-f_k) = w\,\text{sen}\,\alpha - \mu_k n = 0$$
$$\sum F_y = n + (-w\cos\alpha) = 0$$

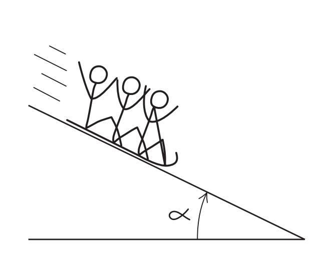
Al reordenar las dos ecuaciones, obtenemos

$$\mu_k n = w\,\text{sen}\,\alpha \quad \text{y} \quad n = w\cos\alpha$$

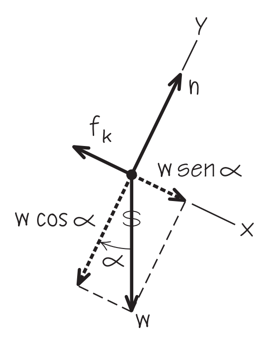
Al igual que en el ejemplo 5.10, la fuerza normal *no* es igual al peso. Se elimina n dividiendo la primera ecuación entre la segunda, para obtener

5.22 Diagramas para este problema.

a) La situación



b) Diagrama de cuerpo libre para el trineo



$$\mu_k = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \quad \text{así que} \quad \alpha = \arctan\mu_k$$

EVALUAR: El peso w no aparece en esta expresión. *Cualquier* trineo, sin importar su peso, bajará una pendiente con rapidez constante si el coeficiente de fricción cinética es igual a la tangente del ángulo de inclinación de la pendiente. La función arcotangente se incrementa conforme su argumento aumenta, de modo que es verdad que el ángulo α de inclinación se incrementa conforme μ_k aumenta.



Ejemplo 5.17 Trineo con fricción II

El mismo trineo con el mismo coeficiente de fricción del ejemplo 5.16 *se acelera* hacia abajo por una pendiente más pronunciada. Deduzca una expresión para la aceleración en términos de g, α, μ_k y w.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El trineo está acelerando, por lo tanto, es preciso usar la segunda ley de Newton en su forma de las ecuaciones (5.4). La incógnita es la aceleración cuesta abajo.

El dibujo y el diagrama de cuerpo libre (figura 5.23) son casi los mismos que para el ejemplo 5.16. La componente y de la aceleración del trineo, a_y, sigue siendo cero, pero la componente x, a_x, no lo es, por lo que hemos dibujado la componente cuesta abajo del peso como un vector más largo que el de la fuerza de fricción (cuesta arriba).

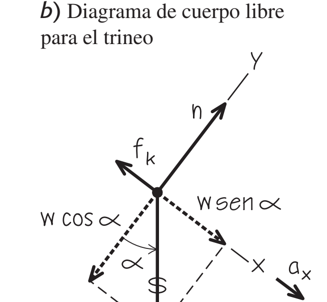
EJECUTAR: Nos conviene expresar el peso como $w = mg$. Entonces, utilizando la segunda ley de Newton en componentes,

$$\sum F_x = mg \operatorname{sen} \alpha + (-f_k) = ma_x$$
$$\sum F_y = n + (-mg \cos \alpha) = 0$$

5.23 Diagramas para este problema.

a) La situación

b) Diagrama de cuerpo libre para el trineo



De la segunda ecuación y la ecuación (5.5), obtenemos una expresión para f_k:

$$n = mg \cos \alpha$$
$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg \cos \alpha$$

Sustituimos esto en la ecuación de la componente x y despejamos a_x:

$$mg \operatorname{sen} \alpha + (-\mu_k mg \cos \alpha) = ma_x$$
$$a_x = g(\operatorname{sen} \alpha - \mu_k \cos \alpha)$$

EVALUAR: Al igual que en el caso del trineo sin fricción del ejemplo 5.10, la aceleración no depende de la masa m del trineo. Esto es porque todas las fuerzas que actúan sobre el trineo (peso, fuerza normal y fuerza de fricción cinética) son proporcionales a m.

Analicemos algunos casos especiales. Si la ladera es vertical ($\alpha = 90°$) entonces, $\operatorname{sen} \alpha = 1$, $\cos \alpha = 0$ y $a_x = g$ (el trineo está en caída libre). Para cierto valor de α, la aceleración es cero; esto pasa si

$$\operatorname{sen} \alpha = \mu_k \cos \alpha \qquad \text{y} \qquad \mu_k = \tan \alpha$$

Lo anterior concuerda con el resultado de velocidad constante del trineo en el ejemplo 5.16. Si el ángulo es incluso más pequeño, $\mu_k \cos \alpha$ es mayor que $\operatorname{sen} \alpha$ y a_x es *negativa*; si damos al trineo un empujón cuesta abajo para ponerlo en movimiento, se frenará y finalmente se detendrá. Por último, si la ladera no tiene fricción de modo que $\mu_k = 0$, llegamos al resultado del ejemplo 5.10: $a_x = g \operatorname{sen} \alpha$.

Observe que partimos de un problema sencillo (ejemplo 5.10) y lo extendimos a situaciones cada vez más generales. El resultado más general, el de este ejemplo, incluye *todos* los anteriores como casos especiales. No memorice este resultado, pero trate de entender cómo se obtuvo y qué significa.

Suponga ahora que se da al trineo un empujón inicial colina *arriba*. Ahora se invierte la dirección de la fuerza de fricción cinética, así que la aceleración es distinta del valor cuesta abajo. Resulta que la expresión para a_x es la misma que para la bajada, solo que el signo menos cambia a signo más. ¿Puede demostrarlo?

Fricción de rodamiento

Es mucho más fácil mover un archivero lleno de documentos sobre un piso horizontal usando un carrito con ruedas que deslizándolo. ¿Qué tanto más fácil es? Podemos definir un **coeficiente de fricción de rodamiento** μ_r, que es la fuerza horizontal necesaria para lograr rapidez constante en una superficie plana, dividida entre la fuerza normal hacia arriba ejercida por la superficie. Los ingenieros de transporte llaman a μ_r *resistencia a la tracción*, cuyos valores suelen estar entre 0.002 y 0.003 para ruedas de acero sobre rieles de acero, y de 0.01 a 0.02 para ruedas de caucho sobre concreto. Estos valores explican en parte por qué en general el combustible rinde más en los ferrocarriles que en los camiones.

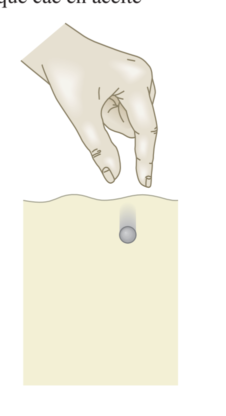
Resistencia de fluidos y rapidez terminal

Si usted saca la mano por la ventanilla de un automóvil que viaja con gran rapidez, comprobará la existencia de la **resistencia de un fluido**, que es la fuerza que un fluido (ya sea gas o líquido) ejerce sobre un cuerpo que se mueve a través de él. El cuerpo en movimiento ejerce una fuerza sobre el fluido para hacerlo a un lado. Por la tercera ley de Newton, el fluido responde sobre el cuerpo con una fuerza igual y opuesta.

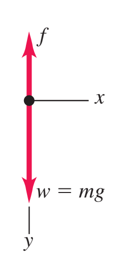
La *dirección* de la fuerza de resistencia de un fluido que actúa sobre un cuerpo siempre es opuesta a la dirección de la velocidad del cuerpo relativa al fluido. La *magnitud* de la fuerza de resistencia de un fluido suele aumentar al incrementarse la rapidez del cuerpo en el fluido. Esto es muy diferente de la fuerza de fricción ciné-

5.24 Una esfera metálica cae a través de un fluido (aceite).

a) Una esfera de metal que cae en aceite



b) Diagrama de cuerpo libre de la esfera en aceite



tica entre dos superficies en contacto, que casi siempre podemos considerar independiente de la rapidez. Para objetos pequeños que se mueven a rapideces muy bajas, la magnitud f de la fuerza de resistencia del fluido es aproximadamente proporcional a la rapidez v del cuerpo:

$$f = kv \qquad \text{(resistencia del fluido a baja rapidez)} \tag{5.7}$$

donde k es una constante de proporcionalidad que depende de la forma y el tamaño del cuerpo, y de las propiedades del fluido. La ecuación (5.7) es adecuada para partículas de polvo que caen a través del aire o para una esfera que se deja caer en aceite. Para objetos más grandes que se mueven a través del aire con la rapidez de una pelota de tenis o más rápido, la fuerza de resistencia es aproximadamente proporcional a v^2, en lugar de v, y se denomina **arrastre del aire** o solo *arrastre*. Los aviones, las gotas de lluvia y los ciclistas experimentan el arrastre del aire. En este caso, sustituimos la ecuación (5.7) por

$$f = Dv^2 \qquad \text{(resistencia de fluidos a alta rapidez)} \tag{5.8}$$

Por la dependencia de v^2, el arrastre aumenta rápidamente conforme se incrementa la rapidez. El arrastre sobre un automóvil común es insignificante a bajas rapideces, pero comparable con la resistencia a la tracción, o mayor que esta, a velocidades de autopista. El valor de D depende de la forma y el tamaño del cuerpo, y de la densidad del aire. Verifique que las unidades de la constante k en la ecuación (5.7) sean N·s/m o kg/s, y que las unidades de la constante D en la ecuación (5.8) sean $\text{N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^2$ o kg/m.

Por los efectos de la resistencia de fluidos, un objeto que cae en un fluido *no* tiene aceleración constante. Para describir su movimiento, no podemos usar las relaciones de aceleración constante del capítulo 2; en vez de ello, debemos partir de la segunda ley de Newton. Como un ejemplo, suponga que usted suelta una esfera de metal en la superficie de un cubo de aceite, y la esfera cae hasta el fondo (figura 5.24*a*). En este caso, la fuerza de resistencia del fluido está dada por la ecuación (5.7). ¿Cuáles son la aceleración, la velocidad y la posición de la esfera de metal en función del tiempo?

El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 5.24*b*. Tomamos la dirección y positiva hacia abajo e ignoramos cualquier fuerza asociada con la flotación en el aceite. Puesto que la esfera se mueve hacia abajo, la rapidez v es igual a la componente y de la velocidad v_y y la fuerza de resistencia del fluido tiene la dirección $-y$. No hay componentes x, así que la segunda ley de Newton da

$$\sum F_y = mg + (-kv_y) = ma_y$$

Al principio, cuando la esfera empieza a moverse, $v_y = 0$, la fuerza de resistencia es cero y la aceleración inicial es $a_y = g$. Al aumentar la rapidez, también se incrementa la fuerza de resistencia hasta ser igual en magnitud al peso. Ahora, $mg - kv_y = 0$, la aceleración se vuelve cero y ya no aumenta la rapidez. La rapidez final v_t, llamada **rapidez terminal**, está dada por $mg - kv_t = 0$, es decir,

$$v_t = \frac{mg}{k} \qquad \text{(rapidez terminal, resistencia del fluido } f = kv\text{)} \tag{5.9}$$

La figura 5.25 muestra cómo varían la aceleración, la velocidad y la posición con el tiempo. Conforme transcurre el tiempo, la aceleración se acerca a cero y la velocidad

Aplicación Polen y resistencia del fluido

Estas esferas con puntas son granos de polen de la flor de ambrosía (*Ambrosia psilostachya*), que causa la fiebre del heno. Debido a su radio pequeño (aproximadamente 10 μm = 0.01 mm), cuando se liberan en el aire, la fuerza de resistencia del fluido sobre ellas es proporcional a su rapidez. La rapidez terminal dada por la ecuación (5.9) es de solo 1 cm/s, aproximadamente. Por lo tanto, incluso un viento moderado puede mantener los granos de polen en el aire y transportarlos a grandes distancias desde su origen.



5.25 Gráficas de movimiento para un cuerpo que cae sin resistencia del fluido y con resistencia del fluido proporcional a la rapidez.

Aceleración contra tiempo

a_y

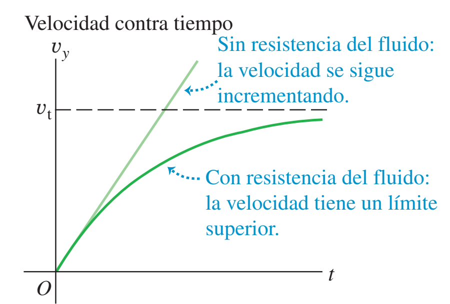
g

Sin resistencia del fluido: aceleración constante.

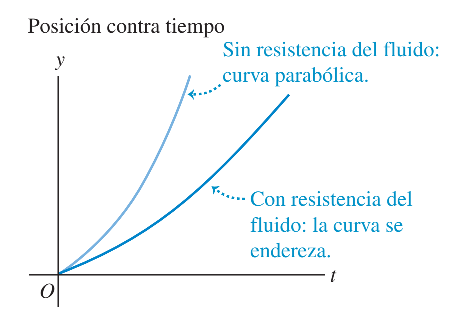
Con resistencia del fluido: disminuye la aceleración.

O t

Velocidad contra tiempo



Posición contra tiempo



se aproxima a v_t (recuerde que elegimos la dirección $+y$ hacia abajo). La pendiente de la gráfica de y contra t se hace constante al hacerse constante la velocidad.

Para saber de dónde salen las gráficas de la figura 5.25, debemos obtener la relación entre rapidez y tiempo en el intervalo antes de alcanzar la rapidez terminal. Volvemos a la segunda ley de Newton, que rescribimos usando $a_y = dv_y/dt$:

$$m\frac{dv_y}{dt} = mg - kv_y$$

Después de reordenar términos y sustituir mg/k por v_t, integramos ambos miembros, recordando que $v_y = 0$ cuando $t = 0$:

$$\int_0^v \frac{dv_y}{v_y - v_t} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$$

que ya integrada da

$$\ln\frac{v_t - v_y}{v_t} = -\frac{k}{m}t \qquad \text{o bien,} \qquad 1 - \frac{v_y}{v_t} = e^{-(k/m)t}$$

y, por último,

$$v_y = v_t[1 - e^{-(k/m)t}] \tag{5.10}$$

Observe que v_y se hace igual a la rapidez terminal v_t solo en el límite donde $t \rightarrow \infty$; la esfera no puede alcanzar la rapidez terminal en un intervalo de tiempo finito.

La derivada de v_y con respecto al tiempo es a_y, y la integral de v_y en el tiempo es y. Dejamos la derivación al lector; los resultados son

$$a_y = ge^{-(k/m)t} \tag{5.11}$$

$$y = v_t\left[t - \frac{m}{k}(1 - e^{-(k/m)t})\right] \tag{5.12}$$

Examine otra vez la figura 5.25, que muestra las gráficas de estas tres relaciones.

Al deducir la rapidez terminal en la ecuación (5.9), supusimos que la fuerza de resistencia del fluido era proporcional a la rapidez. En el caso de un objeto que cae con gran rapidez en el aire, de modo que la resistencia del fluido sea igual a Dv^2 como en la ecuación (5.8), la rapidez terminal se alcanza cuando Dv^2 es igual al peso mg (figura 5.26*a*). Usted puede demostrar que la rapidez terminal v_t está dada por

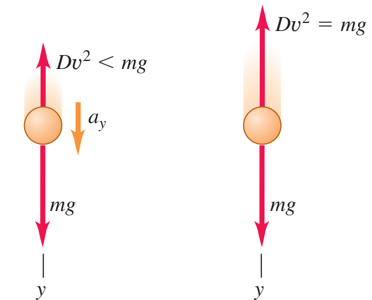
$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{D}} \qquad \text{(rapidez terminal, resistencia del fluido } f = Dv^2\text{)} \tag{5.13}$$

Esta expresión para la rapidez terminal explica por qué los objetos pesados tienden a caer en el aire con mayor rapidez que los ligeros. Dos objetos con el mismo tamaño pero con diferente masa (digamos, una pelota de ping-pong y una esfera de plomo del mismo radio) tienen la misma D pero diferente valor de m. El objeto con mayor masa tiene mayor rapidez terminal y cae más rápidamente. La misma idea explica por qué una hoja de papel cae más rápidamente si primero la arrugamos para formar una esfera: la masa m es la misma, pero el tamaño más pequeño reduce D (menos arrastre para una rapidez dada) y aumenta v_t. Los paracaidistas usan el mismo principio para controlar su descenso (figura 5.26*b*).

La figura 5.27 muestra la trayectoria de una pelota de béisbol con y sin arrastre del aire, suponiendo un coeficiente $D = 1.3 \times 10^{-3}$ kg/m (adecuado para una pelota bateada al nivel del mar). Puede verse que tanto el alcance de la pelota como la altura máxima alcanzada son considerablemente menores que los resultados obtenidos cuando se desprecia el arrastre. Así, la trayectoria que calculamos en el ejemplo 3.8 (sección 3.3), ignorando la resistencia del aire, no es real. ¡El arrastre del aire es un factor importante en el juego de béisbol!

5.26 *a*) Arrastre del aire y rapidez terminal. *b*) Los paracaidistas, al cambiar de posición sus brazos y piernas mientras caen, pueden alterar el valor de la constante D de la ecuación (5.8) y así ajustar la rapidez terminal de su caída [ecuación (5.13)].

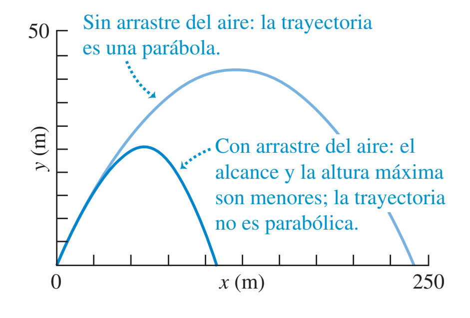
a) Diagramas de cuerpo libre para caída con arrastre del aire



b) Un paracaidista que cae con rapidez terminal



5.27 Trayectorias generadas por computadora de una pelota de béisbol lanzada con una rapidez de 50 m/s a un ángulo de 35° sobre la horizontal. Observe que las escalas de los ejes horizontal y vertical son distintas.





Ejemplo 5.18 Rapidez terminal de un paracaidista

Para un cuerpo humano que cae en el aire con brazos y piernas estirados (figura 5.26*b*), el valor numérico de la constante D de la ecuación (5.8) es aproximadamente 0.25 kg/m. Obtenga la rapidez terminal de un paracaidista ligero de 50 kg.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En este ejemplo se requiere la relación entre rapidez terminal, masa y coeficiente de arrastre. Usamos la ecuación (5.13) para obtener la incógnita v_t.

EJECUTAR: Para $m = 50$ kg, obtenemos:

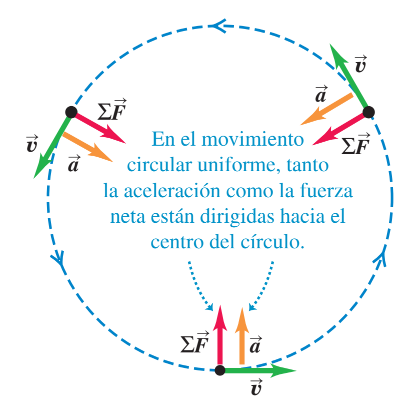
$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{D}} = \sqrt{\frac{(50\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)}{0.25\text{ kg/m}}}$$
$$= 44\text{ m/s (aproximadamente 160 km/h, o 99 mi/h)}$$

EVALUAR: La rapidez terminal es proporcional a la raíz cuadrada de la masa del paracaidista. De manera que un paracaidista con el mismo coeficiente de arrastre D, pero el doble de masa, tendría una rapidez terminal $\sqrt{2} = 1.41$ veces mayor, o bien, 63 m/s. (Un paracaidista con mayor masa también tendría mayor área frontal y, por lo tanto, un mayor coeficiente de arrastre, por lo que su rapidez terminal sería un poco menor que 63 m/s). Incluso la rapidez terminal de un paracaidista ligero es bastante alta y su fase de caída no dura mucho. Un lanzamiento desde 2800 m (9200 ft) hasta la superficie a rapidez terminal solo tarda (2800 m)/(44 m/s) = 64 s.

Cuando el paracaidista abre su paracaídas, el valor de D aumenta considerablemente y la rapidez terminal del hombre y el paracaídas se reduce drásticamente, a un valor mucho menor.

Evalúe su comprensión de la sección 5.3 Considere una caja que se coloca sobre superficies distintas. *a*) ¿En qué situación(es) *no* hay fuerza de fricción actuando sobre la caja? *b*) ¿En qué situación(es) hay una fuerza de fricción *estática* actuando sobre la caja? *c*) ¿En qué situación(es) hay una fuerza de fricción *cinética* sobre la caja? **i.** La caja está en reposo sobre una superficie horizontal áspera. **ii.** La caja está en reposo sobre una superficie inclinada áspera. **iii.** La caja está sobre la plataforma horizontal y áspera de un camión, el cual se mueve a velocidad constante en una carretera recta y horizontal, mientras la caja permanece en el mismo lugar a la mitad de la plataforma. **iv.** La caja está sobre la plataforma horizontal y áspera de un camión, el cual acelera en una carretera recta y horizontal, en tanto que la caja permanece en el mismo lugar a la mitad de la plataforma. **v.** La caja está sobre la plataforma horizontal y áspera de un camión, el cual sube una pendiente y la caja se desliza hacia la parte trasera del camión.

5.28 Fuerza neta, aceleración y velocidad en el movimiento circular uniforme.



5.4 Dinámica del movimiento circular

Estudiamos el movimiento circular uniforme en la sección 3.4, mostrando que, cuando una partícula se mueve en un círculo con rapidez constante, su aceleración siempre es hacia el centro del círculo (perpendicular a la velocidad instantánea). La magnitud a_{rad} de la aceleración es constante y está dada en términos de la rapidez v y el radio R del círculo por

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \quad \text{(movimiento circular uniforme)} \qquad (5.14)$$

El subíndice "rad" nos recuerda que en cada punto la aceleración siempre es radial hacia el centro del círculo, perpendicular a la velocidad instantánea. En la sección 3.4 explicamos por qué se le denomina *aceleración centrípeta.*

También podemos expresar la aceleración centrípeta a_{rad} en términos del *periodo* T, el tiempo que tarda una revolución:

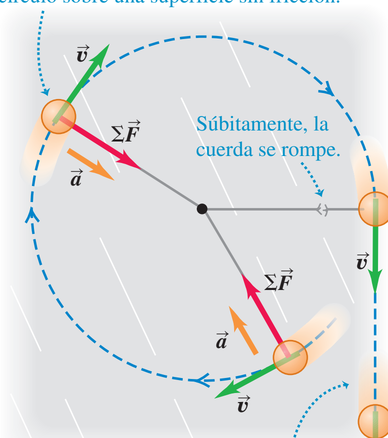
$$T = \frac{2\pi R}{v} \qquad (5.15)$$

En términos del periodo, a_{rad} es

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad \text{(movimiento circular uniforme)} \qquad (5.16)$$

El movimiento circular uniforme, como todos los movimientos de una partícula, se rige por la segunda ley de Newton. Para hacer que la partícula acelere hacia el centro del círculo, la fuerza neta $\sum\vec{F}$ sobre la partícula debe estar dirigida siempre hacia el centro (figura 5.28). La magnitud de la aceleración es constante, así que la magnitud F_{neta} de la fuerza neta también debe ser constante. Si la fuerza neta hacia adentro deja de actuar, la partícula saldrá disparada en una línea recta tangente al círculo (figura 5.29).

5.29 ¿Qué sucede si la fuerza radial hacia adentro repentinamente deja de actuar sobre un cuerpo en movimiento circular?



La magnitud de la aceleración radial está dada por $a_{rad} = v^2/R$, así que la magnitud F_{neta} de la fuerza neta sobre una partícula de masa m, en movimiento circular uniforme, debe ser

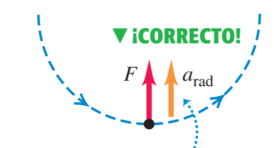
$$F_{neta} = ma_{rad} = m\frac{v^2}{R} \quad \text{(movimiento circular uniforme)} \tag{5.17}$$

El movimiento circular uniforme es resultado de *cualquier* combinación de fuerzas que produzca una fuerza neta $\sum\vec{F}$ de magnitud constante y dirigida siempre hacia el centro del círculo. Observe que el cuerpo no necesita moverse alrededor de un círculo completo: la ecuación (5.17) es válida para *cualquier* trayectoria que se considere parte de un arco circular.

CUIDADO **Evite usar "fuerza centrífuga"** La figura 5.30 muestra tanto un diagrama de cuerpo libre correcto para el movimiento circular uniforme (figura 5.30*a*) como un diagrama *incorrecto* que se realiza comúnmente (figura 5.30*b*). La figura 5.30*b* es incorrecta porque incluye una fuerza adicional hacia afuera de magnitud $m(v^2/R)$ para "mantener el cuerpo en equilibrio". Hay tres razones para no incluir tal fuerza hacia afuera, usualmente llamada *fuerza centrífuga* (el término "centrífugo" significa "que se aleja del centro"). En primer lugar, el cuerpo *no* "se dirige hacia afuera": se encuentra en movimiento constante con trayectoria circular. Puesto que su velocidad está cambiando constantemente de dirección, el cuerpo está acelerado y *no* se encuentra en equilibrio. En segundo lugar, si *hubiera* una fuerza adicional hacia afuera para equilibrar la fuerza hacia adentro, no habría fuerza neta y el cuerpo se movería en línea recta, no en un círculo (figura 5.29). Y, en tercer lugar, la cantidad $m(v^2/R)$ *no* es una fuerza; corresponde al lado $m\vec{a}$ de $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ y no aparece en $\sum\vec{F}$ (figura 5.30*a*). Es cierto que un pasajero en un automóvil que sigue una curva en un camino horizontal tiende a deslizarse hacia fuera de la curva, como si respondiera a una "fuerza centrífuga", pero, como vimos en la sección 4.2, lo que realmente sucede es que el pasajero tiende a seguir moviéndose en línea recta, y el costado del auto "choca" contra el pasajero cuando el auto da vuelta (figura 4.11*c*). *En un marco de referencia inercial no existe ninguna "fuerza centrífuga"*. No volveremos a mencionar este término, y le recomendamos mucho no usarlo nunca.

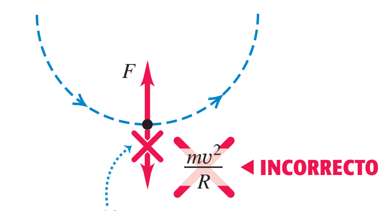
5.30 Diagramas de cuerpo libre *a*) correcto y *b*) incorrecto para un cuerpo con movimiento circular uniforme.

a) Diagrama de cuerpo libre correcto



Si incluye la aceleración, represéntela a un lado del cuerpo para indicar que no es una fuerza.

b) Diagrama de cuerpo libre incorrecto



La cantidad mv^2/R *no* es una fuerza; no debe incluirse en un diagrama de cuerpo libre.



Ejemplo 5.19 Fuerza en el movimiento circular uniforme

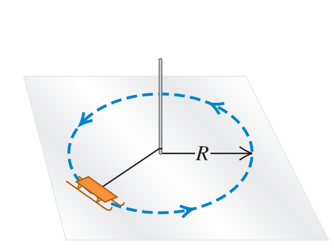
Un trineo con masa de 25.0 kg se encuentra en reposo sobre una plataforma horizontal de hielo prácticamente sin fricción. Está unido con una cuerda de 5.00 m a un poste clavado en el hielo. Una vez que se le da un empujón, el trineo da vueltas uniformemente alrededor del poste (figura 5.31*a*). Si el trineo efectúa cinco revoluciones completas cada minuto, calcule la fuerza F que la cuerda ejerce sobre él.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El trineo tiene movimiento circular uniforme, así que tiene una aceleración radial constante. Aplicaremos al trineo la segunda ley de Newton para determinar la magnitud F de la fuerza ejercida por la cuerda (nuestra incógnita).

5.31 *a*) La situación. *b*) Diagrama de cuerpo libre.

a) Trineo en movimiento circular uniforme



b) Diagrama de cuerpo libre del trineo

y
n
a_{rad}
F
x
w

La dirección $+x$ apunta hacia el centro del círculo.

La figura 5.31*b* muestra el diagrama de cuerpo libre del trineo. La aceleración solo tiene componente x: hacia el centro del círculo; por lo tanto, la denotamos con a_{rad}. No nos dan la aceleración, así que tendremos que determinar su valor con la ecuación (5.14) o con la (5.16).

EJECUTAR: Para la dirección x, la segunda ley de Newton da la fuerza F:

$$\sum F_x = F = ma_{rad}$$

Podemos obtener la aceleración centrípeta a_{rad} con la ecuación (5.16). El trineo se mueve en un círculo de radio $R = 5.00$ m, con un periodo $T = (60.0\text{ s})/(5\text{ rev}) = 12.0$ s, así que

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2(5.00\text{ m})}{(12.0\text{ s})^2} = 1.37\text{ m/s}^2$$

La magnitud F de la fuerza ejercida por la cuerda es

$$F = ma_{rad} = (25.0\text{ kg})(1.37\text{ m/s}^2)$$
$$= 34.3\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2 = 34.3\text{ N}$$

EVALUAR: Se puede verificar el valor de a_{rad} obteniendo primero la rapidez mediante la ecuación (5.15), $v = 2\pi R/T$, y usando luego $a_{rad} = v^2/R$ de la ecuación (5.14). ¿Obtuvo el mismo resultado?

Se necesitaría una fuerza mayor si el trineo diera vueltas al círculo con mayor rapidez v. De hecho, si v aumentara al doble mientras R se mantiene igual, F sería cuatro veces mayor. ¿Puede usted demostrarlo? ¿Cómo cambiaría F si v no cambiara, pero el radio R aumentara al doble?



Ejemplo 5.20 El péndulo cónico

Un inventor diseña un reloj de péndulo usando una lenteja de masa m en el extremo de un alambre delgado de longitud L. En lugar de oscilar, la lenteja se mueve en un círculo horizontal con rapidez constante v, con el alambre formando un ángulo constante β con la vertical (figura 5.32*a*). Esto se conoce como *péndulo cónico* porque el alambre traza un cono. Calcule la tensión F en el alambre y el periodo T (el tiempo que tarda la lenteja en completar una revolución).

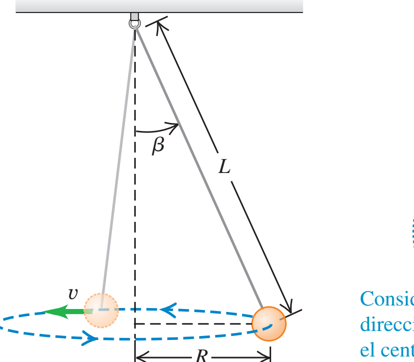
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Para obtener las incógnitas (la tensión F y el periodo T), necesitamos dos ecuaciones, que serán las componentes horizontal y vertical de la segunda ley de Newton aplicada a la lenteja. Obtendremos la aceleración radial de la lenteja utilizando una de las ecuaciones para movimiento circular.

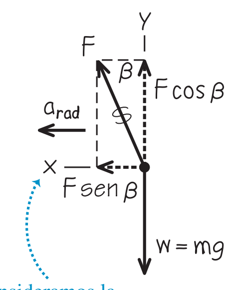
La figura 5.32*b* muestra el diagrama de cuerpo libre de la lenteja y el sistema de coordenadas en un instante determinado. Solo hay dos fuerzas sobre la lenteja: el peso mg y la tensión F en el alambre.

5.32 *a*) La situación. *b*) Diagrama de cuerpo libre.

a) La situación



b) Diagrama de cuerpo libre de la lenteja



Observe que el centro de la trayectoria circular está en el mismo plano horizontal que la lenteja, *no* en el extremo superior del alambre. La componente horizontal de la tensión es la fuerza que produce la aceleración radial a_{rad}.

EJECUTAR: La lenteja no tiene aceleración vertical; la aceleración horizontal está dirigida al centro del círculo, así que usamos el símbolo a_{rad}. La segunda ley de Newton dice que

$$\sum F_x = F \text{ sen } \beta = ma_{rad}$$
$$\sum F_y = F \cos \beta + (-mg) = 0$$

Estas son las dos ecuaciones para las incógnitas F y β. La ecuación para $\sum F_y$ da $F = mg/\cos \beta$; esta es la expresión para la incógnita F en términos de β. Sustituyendo esto en la ecuación de $\sum F_x$ y usando $\text{sen } \beta/\cos \beta = \tan \beta$, tenemos

$$a_{rad} = g \tan \beta$$

Para relacionar β con el periodo T, usamos la ecuación (5.16) para a_{rad}, se despeja T, y se inserta $a_{rad} = g \tan \beta$:

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad \text{o bien,} \quad T^2 = \frac{4\pi^2 R}{a_{rad}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g \tan \beta}}$$

La figura 5.32*a* muestra que $R = L \text{ sen } \beta$. Sustituyendo esto y usando $\text{sen } \beta/\tan \beta = \cos \beta$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L \cos \beta}{g}}$$

EVALUAR: Para una longitud L dada, al aumentar el ángulo β, $\cos \beta$ disminuye, el periodo T se reduce y la tensión $F = mg/\cos \beta$ aumenta. Sin embargo, el ángulo nunca puede ser de 90°, pues ello requeriría que $T = 0$, $F = \infty$ y $v = \infty$. Un péndulo cónico no sería muy buen reloj porque el periodo depende de forma directa de β.



Ejemplo 5.21 Recorrido en una curva plana

El automóvil deportivo del ejemplo 3.11 (sección 3.4) recorre una curva sin peralte de radio R (figura 5.33*a*). Si el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y la carretera es μ_s, ¿cuál es la rapidez máxima $v_{máx}$ con que el conductor puede tomar la curva sin derrapar?

SOLUCIÓN

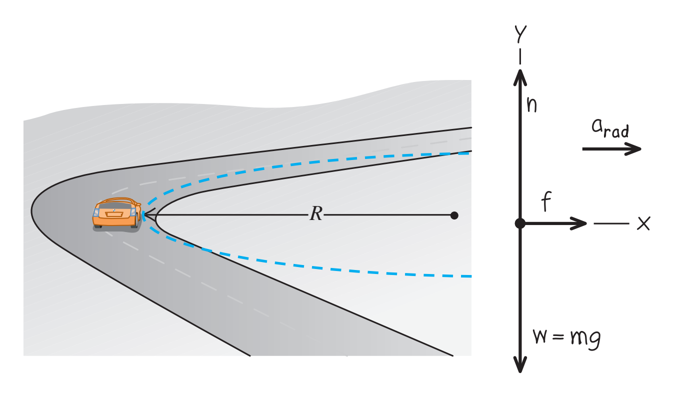
IDENTIFICAR y PLANTEAR: La aceleración del automóvil al tomar la curva tiene magnitud $a_{rad} = v^2/R$, así que la rapidez máxima $v_{máx}$ (nuestra incógnita) corresponde a la aceleración máxima a_{rad}, y a la fuerza horizontal máxima, sobre el automóvil, hacia el centro de la trayectoria circular. La única fuerza horizontal que actúa sobre el auto es la fuerza de fricción ejercida por la carretera. Por lo tanto, para resolver este problema tendremos que usar la segunda ley de Newton, las ecuaciones de movimiento circular uniforme, y lo que aprendimos acerca de la fuerza de fricción en la sección 5.3.

El diagrama de cuerpo libre de la figura 5.33*b* incluye el peso del automóvil $w = mg$ y las dos fuerzas ejercidas por la carretera: la fuerza normal n y la fuerza horizontal de fricción f. La fuerza de fricción debe apuntar hacia el centro de la trayectoria circular para causar la aceleración radial. El automóvil no se desliza hacia el centro del círculo ni en la dirección opuesta, de modo que la fuerza de fricción es *estática*, con una magnitud máxima $f_{máx} = \mu_s n$ [véase la ecuación (5.6)].

5.33 *a*) La situación. *b*) Diagrama de cuerpo libre.

a) El automóvil toma la curva en un camino plano

b) Diagrama de cuerpo libre del automóvil



EJECUTAR: La aceleración hacia el centro de la trayectoria circular es $a_{rad} = v^2/R$ y no hay aceleración vertical. Entonces tenemos

$$\sum F_x = f = ma_{rad} = m\frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_y = n + (-mg) = 0$$

La segunda ecuación muestra que $n = mg$. La primera ecuación indica que la fuerza de fricción *necesaria* para mantener el automóvil en su trayectoria circular aumenta con la rapidez del vehículo. No obstante, la fuerza de fricción máxima *disponible* es $f_{máx} = \mu_s n = \mu_s mg$, y esto determina la rapidez máxima del automóvil. Si sustituimos f por $\mu_s mg$ y v por $v_{máx}$ en la primera ecuación, tenemos

$$\mu_s mg = m\frac{v_{máx}^2}{R} \qquad \text{así que} \qquad v_{máx} = \sqrt{\mu_s gR}$$

Por ejemplo, si $\mu_s = 0.96$ y $R = 230$ m, tenemos

$$v_{máx} = \sqrt{(0.96)(9.8\ \text{m/s}^2)(230\ \text{m})} = 47\ \text{m/s}$$

lo que equivale a casi 170 km/h (100 mi/h). Esta es la rapidez máxima para dicho radio.

EVALUAR: Si la rapidez del automóvil es menor que $v_{máx} = \sqrt{\mu_s gR}$, la fuerza de fricción requerida es menor que el valor máximo $f_{máx} = \mu_s mg$ y el automóvil puede tomar la curva fácilmente. Si tratamos de tomar la curva con una rapidez *mayor* que la máxima, derraparemos. El automóvil aún podrá describir un círculo sin derrapar, pero el radio tendría que ser mayor.

La aceleración centrípeta máxima (llamada "aceleración lateral" en el ejemplo 3.11) es $\mu_s g$. Por ello, es mejor tomar las curvas a menor rapidez que la establecida como límite máximo si el camino está mojado o cubierto de hielo, pues ambas situaciones reducen el valor de μ_s y, por lo tanto, de $\mu_s g$.

Ejemplo 5.22 Recorrido en una curva peraltada



Para un automóvil que viaja con cierta rapidez, es posible peraltar una curva con un ángulo tal que el automóvil no necesite fricción para mantener el radio con que da vuelta. Entonces el automóvil podría tomar con seguridad la curva aun sobre hielo húmedo. (Las carreras de trineos se basan en la misma idea). Un ingeniero propone reconstruir la curva del ejemplo 5.21 de modo que un automóvil con rapidez v pueda dar la vuelta sin peligro aunque no haya fricción (figura 5.34*a*). ¿Qué ángulo de peralte β debería tener la curva?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Al no haber fricción, las únicas fuerzas que actúan sobre el automóvil son su peso y la fuerza normal. Como el camino tiene peralte, la fuerza normal (que actúa perpendicular a la superficie del camino) tiene una componente horizontal. Esta componente es la que produce la aceleración horizontal hacia el centro de la trayectoria circular del automóvil. Usaremos la segunda ley de Newton para obtener la incógnita β.

El diagrama de cuerpo libre (figura 5.34*b*) es muy similar al diagrama del péndulo cónico del ejemplo 5.20 (figura 5.32*b*). La fuerza normal que actúa sobre el automóvil desempeña el papel de la tensión ejercida por el alambre sobre la lenteja del péndulo.

EJECUTAR: La fuerza normal $\vec{n}$ es perpendicular a la carretera y forma un ángulo β con respecto a la vertical (figura 5.34*b*); por lo tanto, tiene una componente vertical $n \cos \beta$ y una componente horizontal $n \operatorname{sen} \beta$.

La aceleración en la dirección x es la aceleración centrípeta, $a_{rad} = v^2/R$; no hay aceleración en la dirección y. Entonces, las ecuaciones de la segunda ley de Newton son

$$\sum F_x = n \operatorname{sen} \beta = ma_{rad}$$
$$\sum F_y = n \cos \beta + (-mg) = 0$$

De la ecuación $\sum F_y$, $n = mg/\cos \beta$. Si sustituimos esto en la ecuación $\sum F_x$ y usando $a_{rad} = v^2/R$, obtenemos una expresión para el ángulo de peralte:

$$\tan \beta = \frac{a_{rad}}{g} = \frac{v^2}{gR} \qquad \text{así que} \qquad \beta = \arctan \frac{v^2}{gR}$$

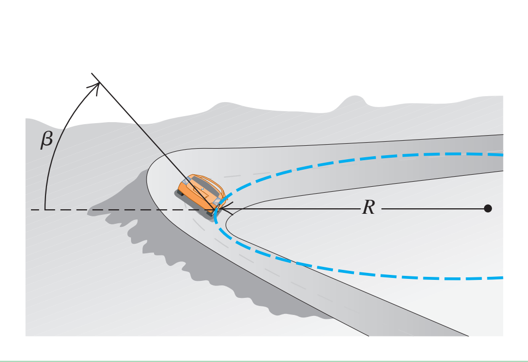
EVALUAR: El ángulo de peralte depende de la rapidez y el radio. Para un radio determinado, no hay un único ángulo para todas las rapideces. Al diseñar autopistas y vías de ferrocarril, lo usual es peraltar las curvas para la rapidez media del tráfico. Si $R = 230$ m y $v = 25$ m/s (correspondiente a una rapidez de autopista de 88 km/h o 55 mi/h), entonces,

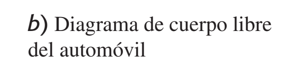
$$\beta = \arctan \frac{(25\ \text{m/s})^2}{(9.8\ \text{m/s}^2)(230\ \text{m})} = 15°$$

Este resultado está dentro del intervalo de ángulos de peralte reales usados en autopistas.

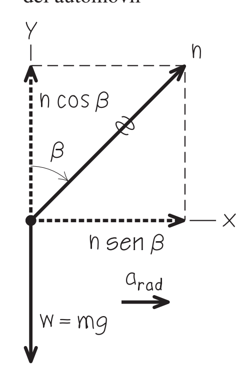
5.34 *a*) La situación. *b*) Diagrama de cuerpo libre.

a) Un automóvil toma una curva peraltada

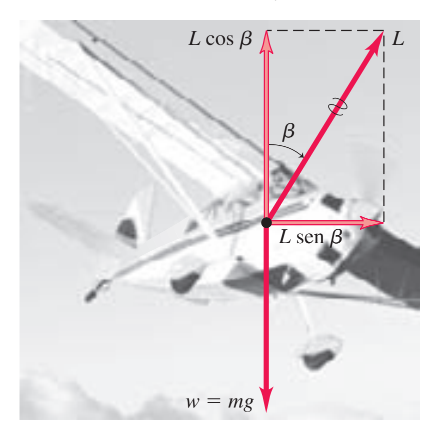




b) Diagrama de cuerpo libre del automóvil



5.35 Un avión se inclina hacia un lado para dar un giro en esa dirección. La componente vertical de la fuerza de sustentación $\vec{L}$ equilibra la fuerza de gravedad; la componente horizontal de $\vec{L}$ causa la aceleración v^2/R.



Curvas peraltadas y el vuelo de aviones

Los resultados del ejemplo 5.22 también son válidos para un avión cuando da vuelta mientras vuela horizontalmente (figura 5.35). Cuando un avión vuela en línea recta con rapidez constante y sin variar su altitud, su peso se equilibra exactamente con la fuerza de sustentación $\vec{L}$ ejercida por el aire. (La fuerza de sustentación hacia arriba que el aire ejerce sobre las alas es una reacción al empuje hacia abajo que las alas ejercen sobre el aire, al moverse a través de este). Para hacer que el avión dé vuelta, el piloto lo inclina hacia un lado para que la fuerza de sustentación tenga una componente horizontal, como en la figura 5.35. (El piloto también altera el ángulo con que las alas "muerden" el aire, de modo que la componente vertical de la sustentación siga equilibrando el peso). El ángulo de inclinación está relacionado con la rapidez v del avión y con el radio R de la vuelta por la misma expresión que vimos en el ejemplo 5.22: $\tan\beta = v^2/gR$. Si se desea que el avión dé una vuelta cerrada (R pequeño) con gran rapidez (v grande), $\tan\beta$ debe ser grande, y el ángulo de inclinación requerido β debe acercarse a 90°.

También podemos aplicar los resultados del ejemplo 5.22 al *piloto* de un avión. El diagrama de cuerpo libre del piloto es idéntico al de la figura 5.34*b*; el asiento ejerce la fuerza normal $n = mg/\cos\beta$ sobre el piloto. Al igual que en el ejemplo 5.9, n es igual al peso aparente del piloto, que es mayor que su peso real mg. En una vuelta cerrada con un ángulo de inclinación β grande, el peso aparente del piloto puede ser enorme: $n = 5.8mg$ con $\beta = 80°$ y $n = 9.6mg$ con $\beta = 84°$. Los pilotos llegan a desmayarse en tales vueltas porque el peso aparente de su sangre aumenta en la misma proporción, y el corazón no es lo bastante fuerte como para bombear al cerebro una sangre aparentemente tan "pesada".

MasteringPHYSICS®

ActivPhysics 4.2: Circular Motion Problem Solving
ActivPhysics 4.3: Cart Goes over Circular Path
ActivPhysics 4.4: Ball Swings on a String
ActivPhysics 4.5: Car Circles a Track

Movimiento en un círculo vertical

En los ejemplos 5.19, 5.20, 5.21 y 5.22, el cuerpo se movía en un círculo horizontal. El movimiento en un círculo *vertical* no es diferente en principio; no obstante, hay que tratar con cuidado el peso del cuerpo. El ejemplo que sigue ilustra esa necesidad.



Ejemplo 5.23 Movimiento circular uniforme en un círculo vertical

Un pasajero en una rueda de la fortuna se mueve en un círculo vertical de radio R con rapidez constante v. El asiento permanece vertical durante su movimiento. Deduzca expresiones para la fuerza que el asiento ejerce sobre el pasajero en la parte superior e inferior del círculo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Las incógnitas son n_T, la fuerza normal hacia arriba que el asiento ejerce sobre el pasajero en la parte superior del círculo, y n_B, la fuerza normal en la parte inferior. Obtendremos esto aplicando la segunda ley de Newton y las ecuaciones del movimiento circular uniforme.

La figura 5.36*a* muestra la velocidad y aceleración del pasajero en las dos posiciones. La aceleración siempre está dirigida hacia el centro del círculo: hacia abajo cuando se encuentra en la parte superior, y hacia arriba cuando está en la parte inferior. En ambas posiciones, las únicas fuerzas que actúan son verticales: la fuerza normal hacia arriba y la fuerza de gravedad hacia abajo. Por lo tanto, solo necesitamos la componente vertical de la segunda ley de Newton. Las figuras 5.36*b* y 5.36*c* son los diagramas de cuerpo libre para las dos posiciones. Tomamos la dirección $+y$ hacia arriba en ambos casos (es decir, en dirección *opuesta* de la aceleración en la parte superior del círculo).

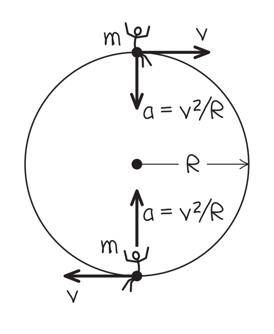
EJECUTAR: En la parte superior, la aceleración tiene magnitud v^2/R, pero su componente vertical es negativa porque su dirección es hacia abajo. Por lo tanto, $a_y = -v^2/R$ y la segunda ley de Newton nos indica que

$$\text{Parte superior:} \quad \sum F_y = n_T + (-mg) = -m\frac{v^2}{R} \quad \text{es decir,}$$

$$n_T = mg\left(1 - \frac{v^2}{gR}\right)$$

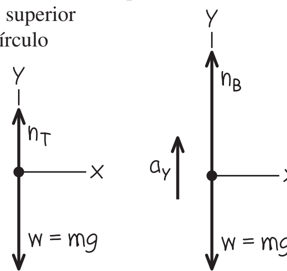
5.36 Diagramas para este problema.

a) Esquema de las dos posiciones



b) Diagrama de cuerpo libre del pasajero en la parte superior del círculo

c) Diagrama de cuerpo libre del pasajero en la parte inferior del círculo



En la parte inferior, la aceleración es hacia arriba, así que $a_y = +v^2/R$ y la segunda ley de Newton nos dice que

$$\text{Parte inferior:} \quad \sum F_y = n_B + (-mg) = +m\frac{v^2}{R} \quad \text{es decir,}$$

$$n_B = mg\left(1 + \frac{v^2}{gR}\right)$$

EVALUAR: El resultado obtenido para n_T nos dice que, en la parte superior de la rueda de la fortuna, la fuerza hacia arriba que el asiento aplica al pasajero es *menor* en magnitud que el peso de este, $w = mg$. Si la rueda gira con tal rapidez que $g - v^2/R = 0$, el asiento *no* aplica fuerza, y el pasajero está a punto de salir disparado. Si v aumenta aún más, n_T se hará negativa, y se requerirá una fuerza *hacia abajo* (como la de un cinturón de seguridad) para mantener al pasajero en el asiento. En cambio, en la parte inferior, la fuerza normal n_B siempre es *mayor que* el peso del pasajero. Se siente que el asiento empuja más firmemente que estando en reposo. Se observa que n_T y n_B son los valores del *peso aparente* del pasajero en las partes superior e inferior del círculo (véase la sección 5.2).

Si atamos una cuerda a un objeto y lo hacemos girar en un círculo vertical, no podremos aplicar directamente el análisis del ejemplo 5.23, porque en este caso v *no* es constante; excepto en las partes superior e inferior del círculo, la fuerza neta (y por ende, la aceleración) *no* apunta al centro del círculo (figura 5.37). Así, $\sum\vec{F}$ y $\vec{a}$ tienen una componente tangente al círculo, lo cual significa que la velocidad cambia. Por ello, tenemos un caso de movimiento circular *no uniforme* (véase la sección 3.4). Es más, no podemos usar las fórmulas de aceleración constante para relacionar las rapideces en distintos puntos porque *ni* la magnitud *ni* la dirección de la aceleración son constantes. La mejor forma de obtener las relaciones de rapidez que necesitamos consiste en usar el concepto de energía. Consideraremos esto en el capítulo 7.

5.37 Pelota que se mueve en un círculo vertical.

Evalúe su comprensión de la sección 5.4 La atracción gravitacional de nuestro planeta mantiene los satélites en órbita. Un satélite en una órbita de radio pequeño se mueve con mayor rapidez que uno en una órbita amplia. Con base en esta información, ¿qué puede usted concluir acerca de la atracción gravitacional de la Tierra sobre el satélite? **i.** Se incrementa al aumentar la distancia hacia la Tierra. **ii.** Es la misma en todas las distancias desde la Tierra. **iii.** Disminuye al aumentar la distancia con respecto a la Tierra. **iv.** Por sí misma, esta información es insuficiente para contestar la pregunta.

5.5 Fuerzas fundamentales de la naturaleza

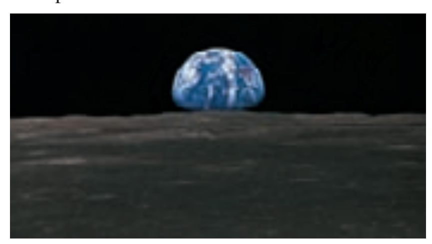
Hemos visto fuerzas de varios tipos: peso, tensión, fricción, resistencia de fluidos y la fuerza normal, y veremos más al seguir estudiando física. Pero, ¿exactamente cuántas clases distintas de fuerzas existen? Actualmente, se considera que todas las fuerzas son expresiones de tan solo cuatro clases de fuerzas *fundamentales* o interacciones entre las partículas (figura 5.38). Dos de ellas las conocemos por la experiencia cotidiana; las otras dos implican interacciones entre partículas subatómicas que no podemos percibir directamente con nuestros sentidos.

Las **interacciones gravitacionales** incluyen la fuerza conocida del *peso*, que se debe a la acción de la atracción gravitacional terrestre sobre un cuerpo. La mutua atracción gravitacional entre las diferentes partes de la Tierra mantiene a nuestro planeta unido (figura 5.38*a*). Newton reconoció que la atracción gravitacional del Sol mantiene a la Tierra en su órbita aproximadamente circular en torno al Sol. En el capítulo 13 estudiaremos las interacciones gravitacionales con mayor detalle y analizaremos su papel crucial en los movimientos de planetas y satélites.

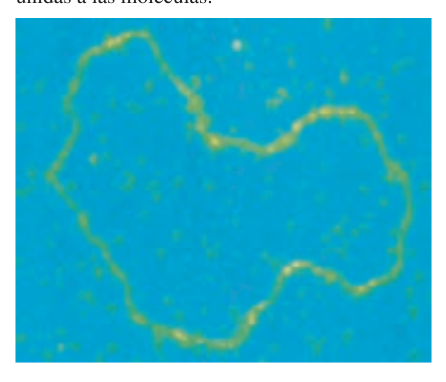
La segunda clase cotidiana de fuerzas, las **interacciones electromagnéticas**, incluye las fuerzas eléctricas y magnéticas. Si deslizamos un peine por el cabello, al final, el peine tendrá una carga eléctrica; es posible usar la fuerza eléctrica ejercida por esta carga para atraer trocitos de papel. Todos los átomos contienen cargas eléctricas positiva y negativa, así que átomos y moléculas pueden ejercer fuerzas eléctricas unos sobre otros (figura 5.38*b*). Las fuerzas de contacto, incluidas la normal, la de fricción y la de resistencia de fluidos, son producto de la combinación de todas estas fuerzas ejercidas sobre los átomos de un cuerpo por los átomos de su entorno. Las fuerzas *magnéticas*, como las que se generan entre imanes o entre un imán y un trozo de hierro, en realidad son el resultado de cargas eléctricas en movimiento. Por ejemplo, un electroimán causa interacciones magnéticas porque las cargas eléctricas se mueven

5.38 Ejemplos de las interacciones fundamentales en la naturaleza. *a*) La Luna y la Tierra se mantienen unidas y en órbita por las fuerzas gravitacionales. *b*) Esta molécula de ADN de plásmido bacterial se mantiene unida por las fuerzas electromagnéticas entre los átomos. *c*) El Sol brilla porque enormes fuerzas entre partículas en su núcleo hacen que se libere energía. *d*) Cuando una estrella masiva explota para convertirse en una supernova, una avalancha de energía se libera debido a las interacciones débiles entre las partículas nucleares de la estrella.

a) Las fuerzas gravitacionales mantienen unidos a los planetas.



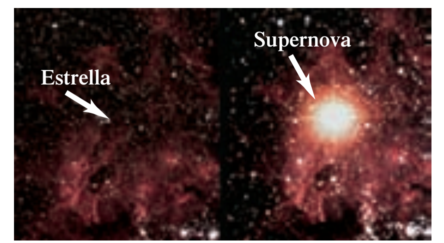
b) Las fuerzas electromagnéticas mantienen unidas a las moléculas.



c) Enormes fuerzas liberan energía del Sol.



d) Las fuerzas débiles desempeñan un papel preponderante en las estrellas que explotan.



a través de sus alambres. Estudiaremos las interacciones electromagnéticas con detalle en el segundo volumen del libro.

En el nivel atómico o molecular, las fuerzas gravitacionales no son importantes porque las fuerzas eléctricas son muchísimo más intensas: la repulsión eléctrica entre dos protones es 10^{35} veces más fuerte que su atracción gravitacional. Sin embargo, en cuerpos de tamaño astronómico, las cargas positivas y negativas suelen estar presentes en cantidades casi idénticas, y las interacciones eléctricas resultantes casi se anulan. Por ello, las interacciones gravitacionales son la influencia dominante en el movimiento de los planetas y en la estructura interna de las estrellas.

Las otras dos clases de interacciones son menos conocidas. La **interacción fuerte** mantiene unido el núcleo de un átomo. Los núcleos contienen neutrones eléctricamente neutros y protones con carga positiva. La fuerza eléctrica entre protones intenta separarlos; pero la enorme fuerza de atracción entre las partículas nucleares contrarresta esta repulsión y mantiene al núcleo estable. En este contexto, la interacción fuerte también se denomina *fuerza nuclear fuerte*; tiene un alcance mucho menor que las interacciones eléctricas, pero es mucho más fuerte dentro de ese alcance. La interacción fuerte desempeña un papel fundamental en las reacciones termonucleares que ocurren en el núcleo del Sol, y que generan el calor y su luz (figura 5.38*c*).

Por último, tenemos la **interacción débil** cuyo alcance es tan pequeño que es relevante solo a escala del núcleo o menor. La interacción débil causa una forma común de radiactividad, llamada desintegración beta, en la que un neutrón de un núcleo radiactivo se transforma en protón al tiempo que expulsa un electrón y una partícula casi sin masa llamada antineutrino. La interacción débil entre un antineutrino y la materia ordinaria es tan tenue que el antineutrino fácilmente podría atravesar una pared de plomo ¡de un millón de kilómetros de espesor! Incluso cuando una estrella gigante experimenta una explosión catastrófica para convertirse en una supernova, la mayor parte de la energía se libera por medio de la interacción débil (figura 5.38*d*).

En la década de 1960 los físicos formularon una teoría que describe las interacciones electromagnética y débil, como aspectos de una sola interacción *electrodébil*. Esta teoría ha superado todas las pruebas experimentales a las que se ha sometido, lo cual motivó a los físicos a realizar intentos similares que describan las interacciones fuerte, electromagnética y débil dentro de una sola *gran teoría unificada* (GTU), y se han dado ciertos pasos hacia una posible unificación de todas las interacciones en una *teoría del todo* (TOE, por las siglas de *theory of everything*). Tales teorías aún son especulativas, y hay muchas preguntas sin respuesta en este campo de investigación tan activo.

RESUMEN



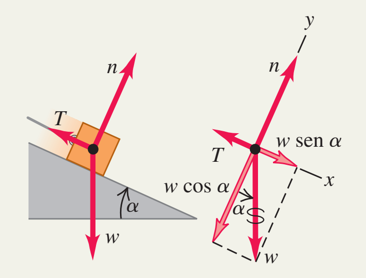
Aplicación de la primera ley de Newton: Cuando un cuerpo está en equilibrio en un marco de referencia inercial, es decir, en reposo o en movimiento con velocidad constante, la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre él debe ser cero (primera ley de Newton). Los diagramas de cuerpo libre son indispensables para identificar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en cuestión.

La tercera ley de Newton (acción y reacción) también suele necesitarse en problemas de equilibrio. Las dos fuerzas de un par acción-reacción *nunca* actúan sobre el mismo cuerpo. (Véase los ejemplos 5.1 a 5.5).

La fuerza normal ejercida por una superficie sobre un cuerpo *no* siempre es igual al peso del cuerpo. (Véase el ejemplo 5.3).

$$\sum \vec{F} = \mathbf{0} \quad \text{(forma vectorial)} \tag{5.1}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \quad \text{(en componentes)} \tag{5.2}$$



Aplicación de la segunda ley de Newton: Si la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo *no* es cero, el cuerpo tiene una aceleración, relacionada con la fuerza neta por la segunda ley de Newton.

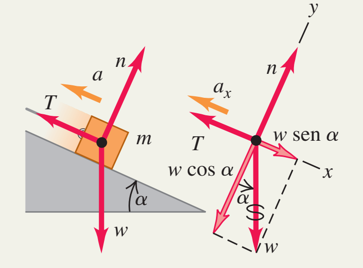
Al igual que en los problemas de equilibrio, los diagramas de cuerpo libre son indispensables para resolver problemas donde interviene la segunda ley de Newton, y la fuerza normal ejercida sobre un cuerpo no siempre es igual a su peso. (Véase los ejemplos 5.6 a 5.12).

Forma vectorial:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{5.3}$$

En componentes:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \tag{5.4}$$



Fricción y resistencia de fluidos: La fuerza de contacto entre dos cuerpos siempre puede representarse en términos de una fuerza normal $\vec{n}$ perpendicular a la superficie de contacto, y una fuerza de fricción $\vec{f}$ paralela a la superficie.

Cuando un cuerpo se desliza sobre una superficie, la fuerza de fricción se denomina fricción *cinética*. Su magnitud f_k es aproximadamente igual a la magnitud de la fuerza normal n multiplicada por μ_k, el coeficiente de fricción cinética. Si un cuerpo *no* se mueve con respecto a la superficie, la fuerza de fricción se denomina fricción *estática*. La *máxima* fuerza de fricción estática posible es aproximadamente igual a la magnitud n de la fuerza normal multiplicada por μ_s, el coeficiente de fricción estática. La fuerza de fricción estática *real* puede variar entre cero y ese valor máximo, según la situación. μ_s suele ser mayor que μ_k para un par determinado de superficies en contacto. (Véase los ejemplos 5.13 a 5.17).

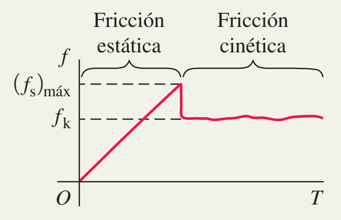
La fricción de rodamiento es similar a la fricción cinética; pero la fuerza de resistencia del fluido depende de la rapidez del objeto a través del fluido. (Véase el ejemplo 5.18).

Magnitud de la fuerza de fricción cinética:

$$f_k = \mu_k n \tag{5.5}$$

Magnitud de la fuerza de fricción estática:

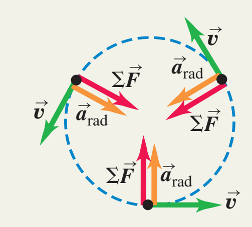
$$f_s \leq \mu_s n \tag{5.6}$$



Fuerzas en el movimiento circular: En el movimiento circular uniforme, el vector aceleración apunta al centro del círculo. El movimiento se rige por la segunda ley de Newton $\sum\vec{F} = m\vec{a}$. (Véase los ejemplos 5.19 a 5.23).

Aceleración en movimiento circular uniforme:

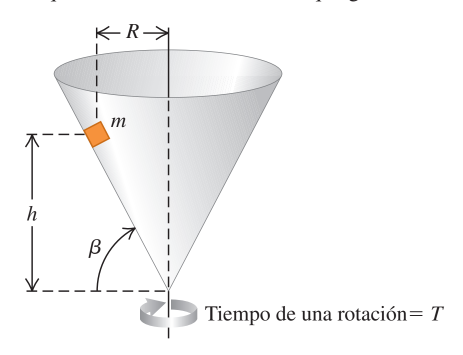
$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \tag{5.14), (5.16}$$





PROBLEMA PRÁCTICO Dentro de un cono giratorio

Un bloque pequeño de masa m se coloca dentro de un cono invertido que gira sobre un eje vertical, de modo que la duración de una revolución del cono es T (figura 5.39). La pared del cono forma un ángulo β con la horizontal. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y el cono es μ_s. Si el bloque debe mantenerse a una altura constante h sobre el vértice del cono, ¿cuáles son a) el valor máximo de T y b) el valor mínimo de T? (Es decir, obtenga las expresiones de $T_{máx}$ y $T_{mín}$ en términos de β y h).



5.39 Un bloque en el interior de un cono que gira.

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Aun cuando queremos que el bloque no se deslice hacia arriba o hacia abajo en el interior del cono, este *no* es un problema de equilibrio. El bloque gira con el cono y tiene movimiento circular uniforme, de modo que tiene una aceleración que apunta hacia el centro de su trayectoria circular.
2. Identifique las fuerzas sobre el bloque. ¿Cuál es la dirección de la fuerza de fricción cuando el cono gira lo más lento posible, de modo que T tiene su valor máximo $T_{máx}$? ¿Cuál es la dirección de la fuerza de fricción cuando el cono gira lo más rápido posible, de modo que T tiene su valor mínimo $T_{mín}$? En estas situaciones, ¿la fuerza de fricción estática tiene su *máxima* magnitud? ¿Por qué?
3. Elabore un diagrama de cuerpo libre para el bloque cuando el cono está girando con $T = T_{máx}$ y un diagrama de cuerpo libre cuando el cono está girando con $T = T_{mín}$. Seleccione los ejes de coordenadas y recuerde que normalmente es más fácil elegir uno de los ejes en dirección de la aceleración.
4. ¿Cuál es el radio de la trayectoria circular que sigue el bloque? Expresе esto en términos de β y h.
5. Elabore una lista de las cantidades desconocidas e identifique cuáles de estas son las incógnitas.

EJECUTAR

6. Escriba la segunda ley de Newton en componentes para el caso en el cual el cono está girando con $T = T_{máx}$. Exprese la aceleración en términos de $T_{máx}$, β y h, y la fuerza de fricción estática en términos de la fuerza normal n.
7. Resuelva estas ecuaciones despejando la incógnita $T_{máx}$.
8. Repita los pasos 6 y 7 para el caso en el cual el cono está girando con $T = T_{mín}$, y despeje la incógnita $T_{mín}$.

EVALUAR

9. Usted terminará con unas expresiones bastante complicadas para $T_{máx}$ y $T_{mín}$, de modo que verifíquelas con mucho cuidado. ¿Tienen las unidades correctas? ¿El tiempo mínimo $T_{mín}$ es menor que el tiempo máximo $T_{máx}$, como debe de ser?
10. ¿Cómo cambian las expresiones de $T_{máx}$ y $T_{mín}$ si $\mu_s = 0$? Verifique sus resultados comparándolos con los del ejemplo 5.22 de la sección 5.4.

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P5.1 Un hombre se sienta en una silla suspendida de una cuerda, la cual pasa por una polea suspendida del techo, y el hombre sujeta con sus manos el otro extremo de la cuerda. ¿Qué tensión hay en la cuerda y qué fuerza ejerce la silla sobre el hombre? Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el hombre.

P5.2 “En general, la fuerza normal no es igual al peso”. Dé un ejemplo en que ambas fuerzas tengan la misma magnitud y al menos dos ejemplos donde no sea así.

P5.3 Se tiende una cuerda entre dos postes. Por más que se estira la cuerda, siempre cuelga un poco en el centro. Explique por qué.

P5.4 Se conduce un automóvil cuesta arriba con rapidez constante. Analice las fuerzas que actúan sobre el automóvil. ¿Qué lo empuja cuesta arriba?

P5.5 Por razones médicas, es importante que los astronautas en el espacio exterior determinen su masa corporal a intervalos regulares. Conciba una forma de medir la masa corporal en un entorno de aparente ingravidez.

P5.6 Al empujar una caja hacia arriba de una rampa, ¿se requiere menos fuerza si se empuja horizontalmente o si se empuja en forma paralela a la rampa? ¿Por qué?

P5.7 Una mujer en un elevador suelta su portafolios, pero este no cae al piso. ¿Cómo se está moviendo el elevador?

P5.8 Las básculas pueden clasificarse en las que usan resortes y las que usan patrones de masas estándar para equilibrar masas desconocidas. ¿Cuál tipo sería más exacto en una nave espacial con aceleración? ¿Y en la Luna?

P5.9 Al apretar una tuerca en un tornillo, ¿cómo se aumenta la fuerza de fricción? ¿Cómo funciona una rondana (arandela) de presión?

P5.10 Un bloque descansa sobre un plano inclinado con suficiente fricción para que no se deslice hacia abajo. Para empezar a mover el bloque, ¿es más fácil empujarlo hacia arriba o hacia abajo del plano? ¿Por qué?

P5.11 Una caja con libros descansa en un piso horizontal. Para deslizarla sobre el piso con velocidad constante, ¿por qué se ejerce una fuerza menor si se tira de ella con un ángulo *ı* sobre la horizontal, que si se empuja con el mismo ángulo bajo la horizontal?

P5.12 En un mundo sin fricción, ¿cuál de las siguientes actividades podría usted realizar (o no realizar)? Explique su razonamiento. *a*) Manejar por una curva de autopista sin peralte; *b*) saltar en el aire; *c*) empezar a caminar en una acera horizontal; *d*) subir por una escalera vertical; *e*) cambiar de carril en una carretera.

P5.13 Caminar sobre una superficie resbalosa cubierta de hielo puede ser más cansado que caminar sobre pavimento común. ¿Por qué?

P5.14 Al pararnos descalzos en una tina húmeda, nos sentimos firmemente sostenidos, pero aún así es muy posible correr el peligro de resbalar. Explique esto en términos de los dos coeficientes de fricción.

P5.15 Imagine que empuja una caja grande desde la parte trasera de un elevador de carga hacia el frente, mientras el elevador viaja al siguiente piso. ¿En qué situación la fuerza que debe aplicar para mover la caja es mínima y en qué situación es máxima: cuando el elevador está acelerando hacia arriba, cuando está acelerando hacia abajo, o cuando viaja con rapidez constante? Explique su respuesta.

P5.16 La Luna acelera hacia la Tierra. ¿Por qué no se acerca más hacia nosotros?

P5.17 Una revista de automóviles llama a las curvas de radio decreciente "la maldición del conductor dominguero". Explique por qué.

P5.18 A menudo se escucha decir a la gente "la fricción siempre se opone al movimiento". Mencione al menos un ejemplo donde *a*) la fricción estática *provoque* movimiento y *b*) la fricción cinética *provoque* movimiento.

P5.19 Si hay una fuerza neta sobre una partícula en movimiento circular uniforme, ¿por qué no cambia la rapidez de la partícula?

P5.20 La curva de un camino tiene un peralte calculado para 80 km/h. Sin embargo, el camino está cubierto de hielo, y usted cuidadosamente planea conducir más despacio que ese límite. ¿Qué le puede suceder a su automóvil? ¿Por qué?

P5.21 Usted hace girar una pelota en el extremo de una cuerda ligera en un círculo horizontal con rapidez constante. ¿Puede la cuerda estar realmente horizontal? Si no, ¿La cuerda estaría arriba o abajo de la horizontal? ¿Por qué?

P5.22 No se incluyó la fuerza centrífuga en los diagramas de cuerpo libre de las figuras 5.34*b* y 5.35. Explique por qué no.

P5.23 Frente a su grupo, un profesor hace girar en un círculo horizontal un tapón de hule atado al extremo de una cuerda; el profesor dice a Carolina, quien está sentada en la primera fila, que soltará la cuerda cuando el tapón esté exactamente frente al rostro de ella. ¿Debería preocuparse Carolina?

P5.24 Para que las fuerzas sobre los pasajeros no sean excesivas, los juegos de feria que describen un circuito vertical se diseñan de manera que el circuito, en lugar de ser un círculo perfecto, tenga un radio de curvatura mayor abajo que arriba. Explique por qué.

P5.25 Se deja caer una pelota de tenis, desde el reposo, de la parte superior de un cilindro alto de vidrio, primero con el cilindro en vacío de modo que no haya resistencia del aire y, luego, con el cilindro lleno de aire. Se toman múltiples fotografías de ambas caídas. A partir de las fotos, ¿cómo puede usted saber cuál es cuál? ¿O no es posible saberlo?

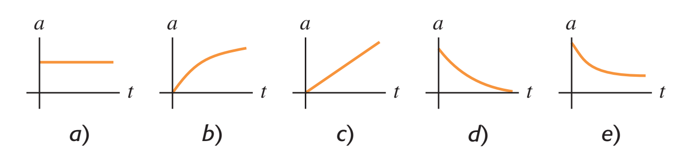
P5.26 Si usted lanza una pelota de béisbol verticalmente hacia arriba con rapidez v_0, ¿cómo será su rapidez, cuando regrese al punto de lanzamiento, en comparación con v_0 *a*) en ausencia de resistencia del aire? *b*) ¿Y en presencia de resistencia del aire? Explique su respuesta.

P5.27 Usted lanza una pelota de béisbol verticalmente hacia arriba. Si *no* se desprecia la resistencia del aire, compare el tiempo que tarda la pelota en alcanzar su altura máxima con el tiempo que tarda en volver al punto de lanzamiento. Explique su respuesta.

P5.28 Imagine que toma dos pelotas de tenis idénticas y llena una de agua. Deja caer las dos pelotas simultáneamente desde la azotea de un edificio alto. Si la resistencia del aire es insignificante, ¿cuál pelota llegará primero al piso? Explique. ¿Y si la resistencia del aire *no* es insignificante?

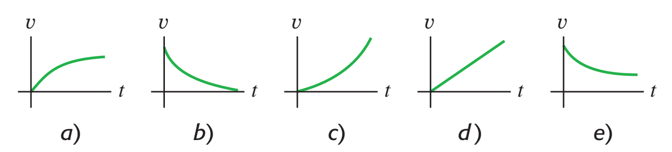
P5.29 Se suelta una pelota desde el reposo y experimenta la resistencia del aire mientras cae. ¿Cuál de las gráficas de la figura P5.29 representa mejor su aceleración en función del tiempo?

Figura **P5.29**



P5.30 Se suelta una pelota desde el reposo y experimenta la resistencia del aire mientras cae. ¿Cuál de las gráficas de la figura P5.30 representa mejor su componente de velocidad vertical en función del tiempo?

Figura **P5.30**



P5.31 ¿Cuándo puede una pelota de béisbol en vuelo tener una aceleración con una componente positiva hacia arriba? Explique en términos de las fuerzas sobre la pelota y también de las componentes de velocidad comparadas con la rapidez terminal. *No* desprecie la resistencia del aire.

P5.32 Cuando una pelota bateada se mueve con arrastre del aire, ¿recorre una distancia horizontal mayor mientras sube a su altura máxima o mientras baja al suelo? ¿O es igual la distancia horizontal en ambas partes de la trayectoria? Explique en términos de las fuerzas que actúan sobre la pelota.

P5.33 "Se lanza una pelota del borde de un risco alto. Sea cual fuere el ángulo con que se lance, la resistencia del aire hará que llegue un momento en que la pelota caiga verticalmente". Justifique esta afirmación.

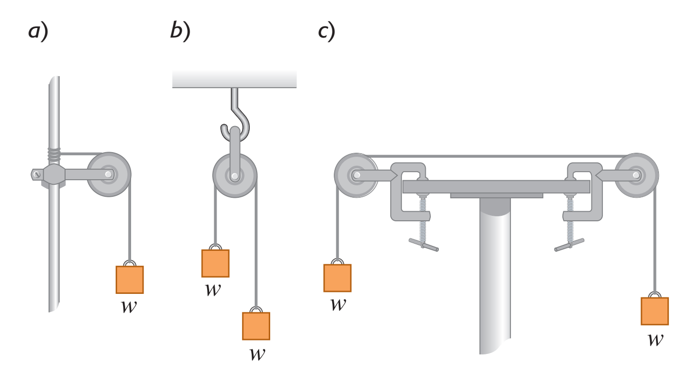
EJERCICIOS

Sección 5.1 Empleo de la primera ley de Newton: Partículas en equilibrio

5.1 • Dos pesas de 25.0 N cuelgan de los extremos opuestos de una cuerda que pasa por una polea ligera sin fricción. La polea está sujeta a una cadena que cuelga del techo. *a*) ¿Qué tensión hay en la cuerda? *b*) ¿Qué tensión hay en la cadena?

5.2 • En la figura E5.2, cada uno de los bloques suspendidos de la cuerda tiene un peso *w*. Las poleas no tienen fricción y el peso de las cuerdas es despreciable. En cada caso, calcule la tensión *T* en la cuerda en términos del peso *w*. En cada caso, incluya el (los) diagrama(s) de cuerpo libre que usó para obtener la respuesta.

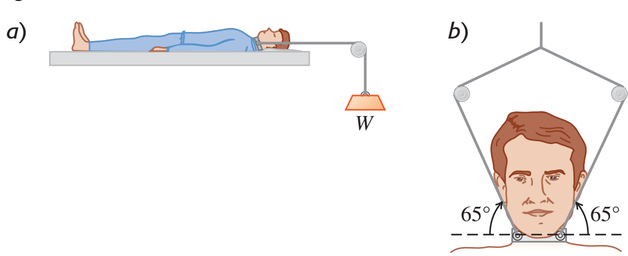
Figura **E5.2**



5.3 • Una bola para demolición de 75.0 kg cuelga de una cadena uniforme de uso pesado, cuya masa es de 26.0 kg. *a*) Calcule las tensiones máxima y mínima en la cadena. *b*) ¿Cuál es la tensión en un punto a tres cuartos de distancia hacia arriba desde la parte inferior de la cadena?

5.4 •• BIO **Lesiones en la columna vertebral.** En el tratamiento de lesiones en la columna vertebral, a menudo es necesario aplicar algo de tensión para estirarla. Un dispositivo para hacerlo es la estructura ilustrada en la figura E5.4*a*. Una pesa W está sujeta al paciente (algunas veces alrededor de un collarín, como se muestra en la figura E5.4*b*), y la fricción entre el cuerpo de la persona y la cama evita el deslizamiento. *a*) Si el coeficiente de fricción estática entre el cuerpo de un paciente de 78.5 kg y la cama es de 0.75, ¿cuál es la fuerza de tracción máxima a lo largo de la columna vertebral que puede generar la pesa *W* sin provocar que el paciente se deslice? *b*) En condiciones de máxima tracción, ¿cuál es la tensión en cada cable sujeto al collarín?

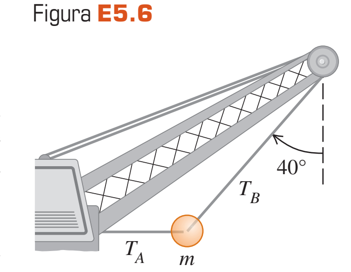

Figura **E5.4**



5.5 •• Un cuadro colgado en una pared está sostenido por dos alambres sujetos a sus esquinas superiores. Si los alambres forman el mismo ángulo con la vertical, ¿cuánto medirá el ángulo si la tensión en cada uno de los alambres es igual a 0.75 del peso del cuadro? (Ignore la fricción entre la pared y el cuadro).

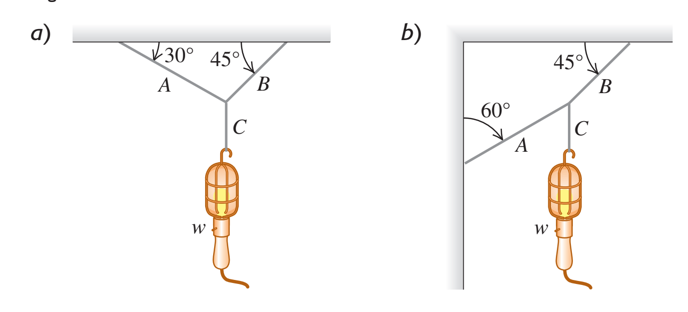
5.6 •• Una gran bola para demolición está sujeta por dos cables de acero ligeros (figura E5.6). Si su masa *m* es de 4090 kg, calcule *a*) la tensión T_B en el cable que forma un ángulo de 40° con la vertical y *b*) la tensión T_A en el cable horizontal.

Figura **E5.6**



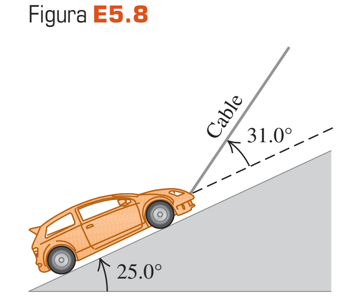
5.7 •• Calcule la tensión en cada cuerda de la figura E5.7 si el peso del objeto suspendido es *w*.

Figura **E5.7**



5.8 •• Sobre una rampa muy lisa (sin fricción), un automóvil de 1130 kg se mantiene en su lugar con un cable ligero, como se muestra en la figura E5.8. El cable forma un ángulo de 31.0° por arriba de la superficie de la rampa, y la rampa misma se eleva a 25.0° por arriba de la horizontal. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el automóvil. *b*) Obtenga la tensión en el cable. *c*) ¿Qué tan fuerte empuja la superficie de la rampa al automóvil?

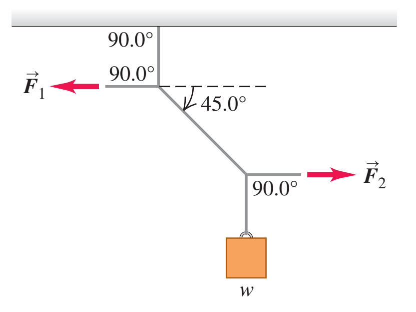
Figura **E5.8**



5.9 •• Un hombre empuja un piano de 180 kg de masa para que baje deslizándose con velocidad constante, por una rampa con una pendiente de 11.0° sobre la horizontal. Ignore la fricción que actúa sobre el piano. Calcule la magnitud de la fuerza aplicada por el hombre si empuja *a*) en forma paralela a la rampa y *b*) en forma paralela al piso.

5.10 •• En la figura E5.10 el peso *w* es de 60.0 N. *a*) Calcule la tensión en la cuerda inclinada. *b*) Calcule la magnitud de las fuerzas horizontales $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ que deben aplicarse para mantener el sistema en la posición indicada.

Figura **E5.10**



Sección 5.2 Empleo de la segunda ley de Newton: Dinámica de partículas

5.11 •• BIO **¡Permanezca despierto!** Un astronauta se encuentra en el interior de una nave, de 2.25×10^6 kg, que está despegando verticalmente de la plataforma de lanzamiento. Usted desea que esta nave alcance la velocidad del sonido (331 m/s) tan rápido como sea posible, sin que el astronauta pierda el conocimiento. Pruebas médicas han demostrado que los astronautas están cerca de perder el conocimiento a una aceleración que rebasa 4*g*. *a*) ¿Cuál es el empuje máximo que los motores de la nave pueden realizar para evitar la pérdida del conocimiento? Inicie con un diagrama de cuerpo libre de la nave. *b*) ¿Qué fuerza, en términos de su peso *w*, ejerce la nave sobre el astronauta? Inicie con un diagrama de cuerpo libre del astronauta. *c*) ¿Cuál es el tiempo mínimo que le puede tomar a la nave alcanzar la velocidad del sonido?

5.12 •• Un cohete de 125 kg (incluyendo todo su contenido) tiene un motor que produce una fuerza vertical constante (el *empuje*) de 1720 N. Dentro de este cohete, descansa sobre el piso una fuente de energía eléctrica de 15.5 N. *a*) Obtenga la aceleración del cohete. *b*) Cuando este ha alcanzado una altitud de 120 m, ¿con qué fuerza el piso empuja la fuente de energía? (*Sugerencia:* Inicie con un diagrama de cuerpo libre para la fuente de energía eléctrica).

5.13 •• PA **Choque del *Génesis*.** El 8 de septiembre de 2004, la nave espacial *Génesis* se estrelló en el desierto de Utah porque su paracaídas no se abrió. La cápsula de 210 kg golpeó el suelo a 311 km/h y penetró en él hasta una profundidad de 81.0 cm. *a*) Suponiendo que era constante, ¿cuál fue su aceleración (en unidades de m/s^2 y en *g*) durante el choque? *b*) ¿Qué fuerza ejerció el suelo sobre la cápsula durante el choque? Exprese la fuerza en newtons y como múltiplo del peso de la cápsula. *c*) ¿Cuánto tiempo duró esta fuerza?

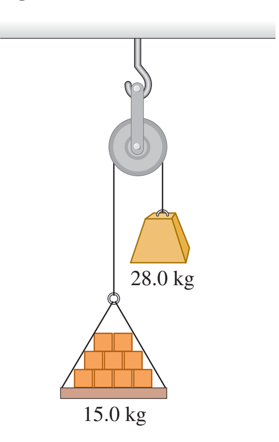
5.14 • Se tira de tres trineos sobre hielo horizontal sin fricción, usando cuerdas horizontales (figura E5.14). El tirón es de 125 N de magnitud. Obtenga *a*) la aceleración del sistema, y *b*) la tensión en las cuerdas *A* y *B*.

Figura **E5.14**



5.15 •• **Máquina de Atwood.** Una carga de 15.0 kg de ladrillos cuelga del extremo de una cuerda que pasa por una polea pequeña sin fricción y tiene un contrapeso de 28.0 kg en el otro extremo, como se muestra en la figura E5.15. El sistema se libera del reposo. *a*) Dibuje dos diagramas de cuerpo libre, uno para la carga de ladrillos y otro para el contrapeso. *b*) ¿Qué magnitud tiene la aceleración hacia arriba de la carga de ladrillos? *c*) ¿Qué tensión hay en la cuerda mientras la carga se mueve? Compare esa tensión con el peso de la carga de ladrillos y con el del contrapeso.

Figura **E5.15**



5.16 •• PA Un bloque de hielo de 8.00 kg, liberado del reposo en la parte superior de una rampa sin fricción de 1.50 m de longitud, se desliza hacia abajo y alcanza una rapidez de 2.50 m/s en la base de la rampa. *a*) ¿Qué ángulo forma la rampa con la horizontal? *b*) ¿Cuál sería la rapidez del hielo en la base de la rampa, si al movimiento se opusiera una fuerza de fricción constante de 10.0 N paralela a la superficie de la rampa?

5.17 •• Una cuerda ligera está atada a un bloque con masa de 4.00 kg que descansa en una superficie horizontal sin fricción. La cuerda horizontal pasa por una polea sin masa ni fricción, y un bloque de masa *m* cuelga del otro extremo. Al soltarse los bloques, la tensión en la cuerda es de 10.0 N. *a*) Dibuje dos diagramas de cuerpo libre, uno para el bloque de 4.00 kg y otro para el bloque de masa *m*. *b*) Calcule la aceleración de cada bloque. *c*) Calcule la masa *m* del bloque colgado. *d*) Compare la tensión con el peso del bloque colgado.

5.18 •• PA **Diseño de pistas de aterrizaje.** Un avión de carga despega de un campo horizontal remolcando, uno detrás de otro, dos planeadores de 700 kg cada uno; la resistencia total (arrastre del aire más fricción con la pista) que actúa sobre cada planeador es constante e igual a 2500 N. La tensión en la cuerda de remolque entre el avión y el primer planeador no debe exceder de 12,000 N. *a*) Si se requiere una rapidez de 40 m/s para despegar, ¿qué longitud mínima debe tener la pista? *b*) ¿Qué tensión hay en la cuerda de remolque entre los dos planeadores durante la aceleración para el despegue?

5.19 •• PA Una enorme roca de 750.0 kg se levanta desde una cantera de 125 m de profundidad usando una cadena larga y uniforme cuya masa es de 575 kg. Esta cadena tiene resistencia uniforme y en cualquier punto puede soportar una tensión máxima no mayor que 2.50 veces su peso sin romperse. *a*) ¿Cuál es la aceleración máxima que la roca puede tener para lograr salir de la cantera?, y *b*) ¿cuánto tiempo toma sacarla con aceleración máxima partiendo del reposo?

5.20 •• **Peso aparente.** Un estudiante de física cuyo peso es de 550 N se pone de pie sobre una báscula de baño dentro de un elevador de 850 kg (incluyendo al estudiante), el cual es soportado por un cable. Al comenzar a moverse el elevador, la báscula marca 450 N. *a*) Determine la aceleración del elevador (magnitud y dirección). *b*) ¿Cuál es la aceleración si la báscula marca 670 N? *c*) Si la lectura es 0, ¿debería preocuparse el joven? Explique. *d*) En los incisos *a*) y *c*), ¿cuál es la tensión en el cable?

5.21 •• PA BIO **Fuerza en un salto.** Una persona promedio puede alcanzar una altura máxima de 60 cm cuando salta verticalmente desde una posición flexionada. Durante el salto, el cuerpo de la persona a partir de las rodillas normalmente se eleva una distancia de 50 cm. Para hacer los cálculos sencillos y obtener aún resultados razonables, suponga que el *cuerpo completo* se eleva esta altura durante el salto. *a*) ¿Con qué rapidez inicial despega del suelo la persona para alcanzar una altura de 60 cm? *b*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre de la persona durante el salto. *c*) En términos del peso *w* de la persona, ¿qué fuerza ejerce el suelo sobre esta durante el salto?

5.22 •• PA CALC Un cohete de prueba de 2540 kg se lanza verticalmente desde la plataforma de lanzamiento. Su combustible (de masa despreciable) genera una fuerza de propulsión, de manera que su velocidad vertical en función del tiempo está dada por $v(t) = At + Bt^2$, donde *A* y *B* son constantes, y el tiempo se mide desde el principio de la ignición. Al iniciar la ignición, el cohete tiene una aceleración ascendente de 1.50 m/s^2, y 1.00 s después una velocidad ascendente de 2.00 m/s. *a*) Determine *A* y *B*, incluyendo sus unidades en el SI. *b*) A los 4.00 s después de la ignición del combustible, ¿cuál será la aceleración del cohete?, y *c*) ¿qué fuerza de propulsión ejerce el combustible consumido sobre el cohete, despreciando la resistencia del aire? Exprese la propulsión en newtons y como múltiplo del peso del cohete. *d*) ¿Cuál era la propulsión inicial debida al combustible?

5.23 •• PA CALC Una caja de 2.00 kg se mueve a la derecha con una rapidez de 9.00 m/s sobre una superficie horizontal sin fricción. En $t = 0$ se aplica una fuerza horizontal a la caja. La fuerza está dirigida a la izquierda y tiene una magnitud $F(t) = (6.00\ \text{N/s}^2)t^2$. *a*) ¿Qué distancia se mueve la caja a partir de su posición en $t = 0$ antes de que su rapidez se reduzca a cero? *b*) Si se continúa aplicando la fuerza, ¿cuál es la rapidez de la caja en $t = 3.00$ s?

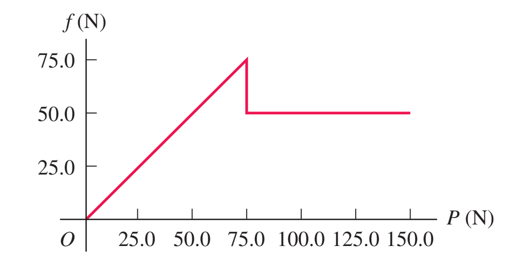
5.24 •• PA CALC Una caja de 5.00 kg está colgada de una cuerda corta y vertical de masa despreciable. Una fuerza ascendente $F(t)$ se aplica al extremo de la cuerda, y la altura de la caja arriba de su posición inicial está dada por $y(t) = (2.80\ \text{m/s})t + (0.610\ \text{m/s}^3)t^3$. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza *F* cuando $t = 4.00$ s?

Sección 5.3 Fuerzas de fricción

5.25 • BIO **Posición de Trendelenburg.** En emergencias con grandes pérdidas de sangre, el médico dará instrucciones de colocar al paciente en la posición de Trendelenburg, en la cual el pie de la cama se eleva para obtener el flujo máximo de sangre hacia el cerebro. Si el coeficiente de fricción estática entre un paciente normal y las sábanas es de 1.20, ¿cuál es el ángulo máximo que se puede inclinar la cama con respecto al piso antes de que el paciente comience a deslizarse?

5.26 • En un experimento de laboratorio acerca de la fricción, se tira de un bloque de 135 N que descansa sobre una mesa horizontal áspera con ayuda de un cable horizontal. El tirón aumenta gradualmente hasta que el bloque comienza a moverse y continúa aumentando a partir de entonces. La figura E5.26 muestra una gráfica de la fuerza de fricción sobre este bloque en función del tirón. *a*) Identifique las regiones de la

Figura **E5.26**



gráfica donde hay fricción estática y fricción cinética. *b*) Calcule los coeficientes de fricción estática y cinética entre el bloque y la mesa. *c*) ¿Por qué la gráfica se dirige hacia arriba en la primera parte, pero luego se nivela? *d*) ¿Cómo se vería la gráfica si se colocara un ladrillo de 135 N sobre el bloque, y cuáles serían los coeficientes de fricción en ese caso?

5.27 •• **PA** Un bodeguero empuja una caja de 11.2 kg de masa sobre una superficie horizontal con rapidez constante de 3.50 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y la superficie es de 0.20. *a*) ¿Qué fuerza horizontal debe aplicar el trabajador para mantener el movimiento? *b*) Si se elimina la fuerza calculada en el inciso *a*), ¿qué distancia se deslizaría la caja antes de detenerse?

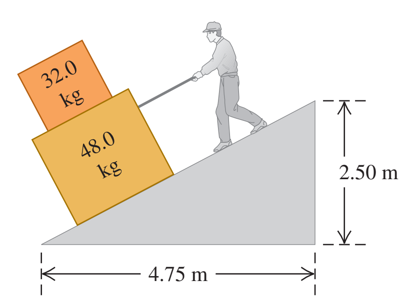
5.28 •• Una caja de bananas que pesa 40.0 N descansa en una superficie horizontal. El coeficiente de fricción estática entre la caja y la superficie es de 0.40, y el coeficiente de fricción cinética es de 0.20. *a*) Si no se aplica alguna fuerza horizontal a la caja en reposo, ¿qué tan grande es la fuerza de fricción ejercida sobre la caja? *b*) ¿Qué magnitud tiene la fuerza de fricción si un mono aplica una fuerza horizontal de 6.0 N a la caja inicialmente en reposo? *c*) ¿Qué fuerza horizontal mínima debe aplicar el mono para poner en movimiento la caja? *d*) ¿Qué fuerza horizontal mínima debe aplicar el mono para que la caja siga moviéndose con velocidad constante, una vez que haya comenzado a moverse? *e*) Si el mono aplica una fuerza horizontal de 18.0 N, ¿qué magnitud tiene la fuerza de fricción y qué aceleración tiene la caja?

5.29 •• Una caja de herramientas de 45.0 kg descansa sobre un piso horizontal. Usted ejerce sobre ella un empuje horizontal cada vez mayor, y observa que la caja empieza a moverse cuando su fuerza excede 313 N. Después, debe reducir el empuje a 208 N para mantener la caja en movimiento a 25.0 cm/s constantes. *a*) ¿Cuáles son los coeficientes de fricción estática y cinética entre la caja y el piso? *b*) ¿Qué empuje debe ejercer para darle una aceleración de 1.10 m/s^2? *c*) Suponga que usted está realizando el mismo experimento con esta caja, pero ahora lo hace en la Luna, donde la aceleración debida a la gravedad es de 1.62 m/s^2. **i.** ¿Cuál sería la magnitud del empuje para que la caja se moviera? **ii.** ¿Cuál sería su aceleración si mantuviera el empuje del inciso *b*)?

5.30 •• Algunas rocas que se deslizan se aproximan a la base de una colina con una velocidad de 12 m/s. La colina se eleva a 36° por arriba de la horizontal y tiene coeficientes de fricción cinética y estática de 0.45 y 0.65, respectivamente, con las rocas. *a*) Calcule la aceleración de las rocas conforme suben por la colina. *b*) Una vez que una roca alcanza su punto más alto, ¿permanecerá allí o se deslizará cuesta abajo? Si permanece allí, demuestre por qué. Si se desliza hacia abajo, calcule su aceleración cuesta abajo.

5.31 •• Usted está bajando dos cajas, una encima de la otra, por la rampa que se ilustra en la figura E5.31, tirando de una cuerda paralela a la superficie de la rampa. Ambas cajas se mueven juntas a rapidez constante de 15.0 cm/s. El coeficiente de fricción cinética entre la rampa y la caja inferior es de 0.444, en tanto que el coeficiente de fricción estática entre ambas cajas es de 0.800. *a*) ¿Qué fuerza deberá ejercer para lograr esto? *b*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción sobre la caja superior?

Figura **E5.31**

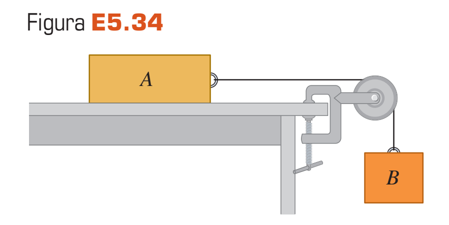


5.32 •• Una camioneta a la que le falta la puerta trasera transporta una caja de herramientas, por lo que la caja caerá si la camioneta se mueve sin detenerse. Los coeficientes de fricción cinética y estática entre la caja y la plataforma de la camioneta son 0.355 y 0.650, respectivamente. Partiendo del reposo, ¿cuál es el tiempo mínimo que la camioneta puede acelerar de manera uniforme, hasta llegar a 30.0 m/s, sin que la caja se deslice? Elabore un diagrama de cuerpo libre para la caja de herramientas como parte de la solución.

5.33 •• **PA** **Distancia de frenado.** *a*) Si el coeficiente de fricción cinética entre neumáticos y pavimento seco es de 0.80, ¿cuál es la distancia mínima para que se detenga un automóvil que viaja a 28.7 m/s (aproximadamente 65 mi/h) bloqueando los frenos? *b*) En pavimento húmedo, el coeficiente de fricción cinética podría bajar a 0.25. ¿Con qué rapidez debemos conducir en pavimento húmedo para poder detenernos en la misma distancia que en el inciso *a*)? (*Nota:* Bloquear los frenos *no* es la forma más segura de detenerse).

5.34 •• Considere el sistema de la figura E5.34. El bloque *A* pesa 45.0 N y el bloque *B* pesa 25.0 N. Una vez que el bloque *B* se pone en movimiento hacia abajo, desciende con rapidez constante.

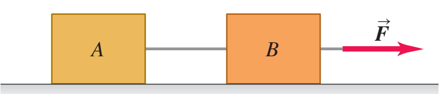
Figura **E5.34**



a) Calcule el coeficiente de fricción cinética entre el bloque *A* y la superficie de la mesa. *b*) Un gato, que también pesa 45.0 N, se queda dormido sobre el bloque *A*. Si ahora el bloque *B* se pone en movimiento hacia abajo, ¿qué aceleración (magnitud y dirección) tendrá?

5.35 • Dos cajas unidas por una cuerda están sobre una superficie horizontal (figura E5.35). La caja *A* tiene una masa m_A, y la *B* una masa m_B. El coeficiente de fricción cinética entre las cajas y la superficie es μ_k. Una fuerza horizontal $\vec{F}$. tira de las cajas hacia la derecha con velocidad constante. En términos de m_A, m_B y μ_k, calcule *a*) la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ y *b*) la tensión en la cuerda que une los bloques. Incluya el (los) diagrama(s) de cuerpo libre que usó para obtener cada respuesta.

Figura **E5.35**



5.36 •• **PA** Una caja de 25.0 kg con libros de texto se encuentra sobre una rampa de carga que forma un ángulo α con la horizontal. El coeficiente de fricción cinética es de 0.25; y el coeficiente de fricción estática, de 0.35. *a*) Al aumentar α, determine el ángulo mínimo con que la caja comienza a resbalar. *b*) Con este ángulo, calcule la aceleración una vez que la caja se ha empezado a mover, y *c*) con este ángulo, calcule la rapidez con que se moverá la caja una vez que se haya deslizado 5.0 m por la rampa.

5.37 •• **PA** Como se muestra en la figura E5.34, el bloque *A* (masa de 2.25 kg) descansa sobre una mesa y está conectado, mediante una cuerda horizontal que pasa por una polea ligera sin fricción, a un bloque colgado *B* (masa de 1.30 kg). El coeficiente de fricción cinética entre el bloque *A* y la superficie es de 0.450. Una vez que los bloques se sueltan del reposo, calcule *a*) la rapidez de cada bloque después de moverse 3.00 cm y *b*) la tensión en la cuerda. Incluya el (los) diagrama(s) de cuerpo libre que usó para obtener las respuestas.

5.38 •• Una caja de masa *m* se arrastra por un piso horizontal, cuyo coeficiente de fricción cinética es μ_k, mediante una cuerda de la cual se tira con una fuerza de magnitud *F* y ángulo θ sobre la horizontal. *a*) Obtenga una expresión en términos de *m*, μ_k, θ y *g* para la magnitud de la fuerza necesaria para mover la caja con rapidez constante. *b*) Un

instructor de primeros auxilios, que sabe que usted estudia física, le pide averiguar qué fuerza necesitaría para deslizar con rapidez constante a un paciente de 90 kg por el piso, tirando de él con un ángulo de 25° sobre la horizontal. Arrastrando algunas pesas envueltas en unos pantalones viejos y con la ayuda de una balanza de resorte, usted determina que $\mu_k = 0.35$. Utilice el resultado del inciso *a*) para contestar la pregunta del instructor.

5.39 •• Una caja grande de masa m descansa sobre un piso horizontal. Los coeficientes de fricción entre la caja y el piso son μ_s y μ_k. Una mujer empuja la caja con fuerza y un ángulo θ bajo la horizontal. $\vec{F}$. *a*) ¿Qué magnitud debe tener $\vec{F}$ para que la caja se mueva con velocidad constante? *b*) Si μ_s es mayor que cierto valor crítico, la mujer no podrá poner en movimiento la caja por más fuerte que empuje. Calcule dicho valor crítico de μ_s.

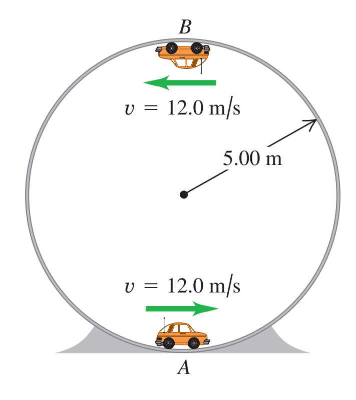
5.40 •• Usted lanza una pelota de béisbol verticalmentre hacia arriba. La fuerza de arrastre es proporcional a v^2. En términos de g, ¿cuál es la componente y de la aceleración que tiene la pelota cuando su rapidez es la mitad de la rapidez terminal *a*) mientras sube? *b*) ¿Y al bajar?

5.41 • *a*) En el ejemplo 5.18 (sección 5.3), ¿qué valor de D se requiere para que $v_t = 42$ m/s para el paracaidista? *b*) Si la hija del paracaidista, con masa de 45 kg, cae en el aire y tiene la misma D (0.25 kg/m) que su padre, ¿cuál será la rapidez terminal de la hija?

Sección 5.4 Dinámica del movimiento circular

5.42 •• Un carrito con masa de 0.800 kg viaja con rapidez constante en el interior de una pista circular vertical de radio igual a 5.00 m (figura E5.42). Si la fuerza normal ejercida por la pista sobre el carrito cuando está en la parte superior de la pista (punto B) es de 6.00 N, ¿cuál es la fuerza normal sobre el carrito cuando se encuentra en la parte inferior de la pista (punto A)?

Figura **E5.42**



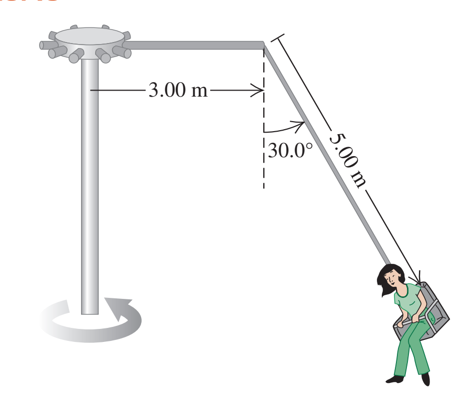
5.43 •• La pieza de una máquina es una barra delgada de 40.0 cm de longitud, con masas pequeñas de 1.15 kg sujetas por tornillos en sus extremos. Los tornillos pueden soportar una fuerza máxima de 75.0 N sin desprenderse. Esta barra gira en torno a un eje perpendicular a su centro. *a*) Cuando la barra gira a velocidad constante sobre una superficie horizontal sin fricción, ¿cuál es la rapidez máxima que las masas pueden tener sin que se desprendan los tornillos? *b*) Suponga que la máquina se rediseña de manera que la barra gira a velocidad constante en un círculo vertical. ¿Será más probable que uno de los tornillos se desprenda cuando la masa esté en la parte superior del círculo o en la parte inferior? Utilice un diagrama de cuerpo libre para saber por qué. *c*) Usando el resultado del inciso *b*), ¿cuál es la rapidez máxima que las masas pueden tener sin que se desprenda un tornillo?

5.44 • Una curva plana (sin peralte) en una carretera tiene un radio de 220.0 m. Un automóvil toma la curva a una rapidez de 25.0 m/s. *a*) ¿Cuál es el coeficiente de fricción mínimo que evitaría que derrape? *b*) Suponga que la carretera está cubierta de hielo y el coeficiente de fricción entre los neumáticos y el pavimento es de solo un tercio del resultado del inciso *a*). ¿Cuál debería ser la rapidez máxima del automóvil, de manera que pueda tomar la curva con seguridad?

5.45 •• Un automóvil de 1125 kg y un camión de 2250 kg se acercan a una curva de la autopista que tiene un radio de 225 m. *a*) ¿Con qué ángulo debería peraltar esta curva el ingeniero responsable, de modo que los vehículos que viajan a 65.0 mi/h puedan tomarla con seguridad, sin que importe la condición de sus neumáticos? ¿El camión pesado debería ir más lento que el automóvil más ligero? *b*) Obtenga la fuerza normal sobre cada vehículo debida a la superficie de la autopista conforme toman la curva.

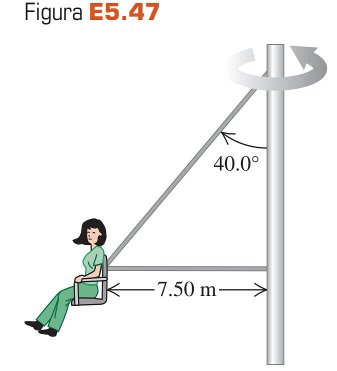
5.46 •• El "columpio gigante" de una feria local consiste en un eje vertical central con varios brazos horizontales unidos a su extremo superior (figura E5.46). Cada brazo sostiene un asiento suspendido de un cable de 5.00 m, sujeto al brazo en un punto a 3.00 m del eje central. *a*) Calcule el tiempo de una revolución del columpio, si el cable forma un ángulo de 30.0° con la vertical. *b*) ¿El ángulo depende del peso del pasajero para una velocidad de giro determinada?

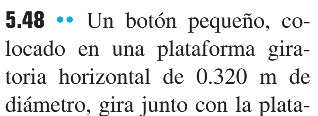
Figura **E5.46**



5.47 •• En otra versión del "columpio gigante" (véase el ejercicio 5.46), el asiento está conectado a dos cables, como se indica en la figura E5.47, uno de los cuales es horizontal. El asiento gira en un círculo horizontal a una velocidad de 32.0 rpm (rev/min). Calcule la tensión en cada cable, si el asiento pesa 255 N y una persona de 825 N está sentada en él.

Figura **E5.47**





5.48 •• Un botón pequeño, colocado en una plataforma giratoria horizontal de 0.320 m de diámetro, gira junto con la plataforma a 40.0 rev/min, siempre que el botón no esté a más de 0.150 m del eje. *a*) ¿Qué coeficiente de fricción estática hay entre el botón y la plataforma? *b*) ¿A qué distancia del eje puede estar el botón, sin resbalar, si la plataforma gira a 60.0 rev/min?

5.49 •• **Estaciones espaciales giratorias.** Para los seres humanos, uno de los problemas de vivir en el espacio exterior es la aparente falta de peso. Una solución es diseñar estaciones espaciales que giren sobre su centro con rapidez constante, creando "gravedad artificial" en el borde exterior de la estación. *a*) Si el diámetro de la estación es de 800 m, ¿cuántas revoluciones por minuto se necesitarán para que la aceleración de la "gravedad artificial" sea de 9.80 m/s^2? *b*) Si la estación es un área de espera para pasajeros que van a Marte, sería deseable simular la aceleración debida a la gravedad en la superficie marciana (3.70 m/s^2). ¿Cuántas revoluciones por minuto se necesitan en este caso?

5.50 • La rueda de la fortuna Cosmoclock 21 de la ciudad de Yokohama, Japón, tiene 100 m de diámetro. Su nombre proviene de sus 60 brazos, cada uno de los cuales puede funcionar como un segundero (dando una vuelta cada 60.0 s). *a*) Determine la rapidez de los

pasajeros con esta rotación. *b*) Un pasajero que normalmente pesa 882 N en una caseta de "adivine el peso" a nivel de suelo, ¿qué peso aparente tendrá en el punto más alto y el más bajo de la rueda? *c*) ¿Cuánto tardaría una revolución, si el peso aparente del pasajero en el punto más alto fuera cero? *d*) ¿Cuál sería entonces su peso aparente en el punto más bajo?

5.51 •• Un avión describe un rizo (una trayectoria circular en un plano vertical) de 150 m de radio. La cabeza del piloto apunta siempre al centro del rizo. La rapidez del avión no es constante; es mínima en el punto más alto del rizo y máxima en el punto más bajo. *a*) En la parte superior, el piloto experimenta ingravidez. ¿Qué rapidez tiene el avión en este punto? *b*) En la parte inferior, la rapidez del avión es de 280 km/h. ¿Qué peso aparente tiene el piloto aquí? Su peso real es de 700 N.

5.52 •• Un piloto de acrobacias de 50.0 kg va en picada y sale de ella cambiando su curso en una trayectoria circular en un plano vertical. *a*) Si la rapidez del avión en el punto más bajo del círculo es de 95.0 m/s, ¿qué radio mínimo debe tener el círculo para que la aceleración en ese punto no exceda 4.00*g*? *b*) ¿Qué peso aparente tiene el piloto en ese punto más bajo?

5.53 • **¡No se moje!** Se ata una cuerda a una cubeta con agua, la cual se hace girar en un círculo vertical de radio 0.600 m. ¿Qué rapidez mínima debe tener la cubeta en el punto más alto del círculo para no derramar agua?

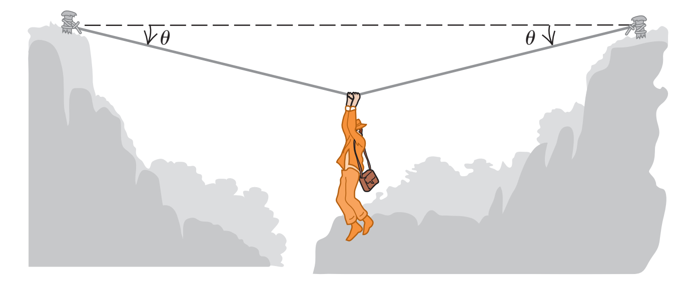
5.54 •• Una bola para jugar a los bolos que pesa 71.2 N (16.0 lb) cuelga del techo atada a una cuerda de 3.80 m. Se tira de la bola hacia un lado y luego se suelta; la bola oscila como péndulo. Al pasar la cuerda por la vertical, la rapidez de la bola es de 4.20 m/s. *a*) ¿Qué dirección y magnitud tiene la aceleración de la bola en ese instante? *b*) ¿Qué tensión hay en la cuerda en ese instante?

5.55 •• **BIO** **Efecto de una caminata sobre la sangre.** Cuando una persona camina, sus brazos se balancean a través de un ángulo de 45° aproximadamente en $\frac{1}{2}$ s. Como aproximación razonable, podemos suponer que el brazo se mueve con rapidez constante durante cada giro. Un brazo normal tiene 70.0 cm de largo, medido desde la articulación del hombro. *a*) ¿Cuál es la aceleración de una gota de sangre de 1.0 g en las puntas de los dedos en la parte inferior del giro? *b*) Elabore un diagrama de cuerpo libre de la gota de sangre del inciso *a*). *c*) Calcule la fuerza que el vaso sanguíneo debe ejercer sobre la gota de sangre del inciso *a*). ¿Hacia dónde apunta esta fuerza? *d*) ¿Qué fuerza ejercería el vaso sanguíneo si el brazo no se balanceara?

PROBLEMAS

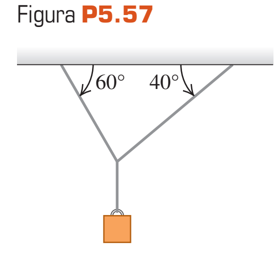
5.56 •• Un arqueólogo explorador cruza, mano sobre mano, de un risco a otro colgado de una cuerda estirada entre los riscos. Se detiene a la mitad para descansar (figura P5.56). La cuerda se romperá si su tensión excede 2.50×10^4 N, y la masa de nuestro héroe es de 90.0 kg. *a*) Si el ángulo θ es de 10.0°, calcule la tensión en la cuerda. *b*) ¿Qué valor mínimo puede tener θ sin que se rompa la cuerda?

Figura **P5.56**



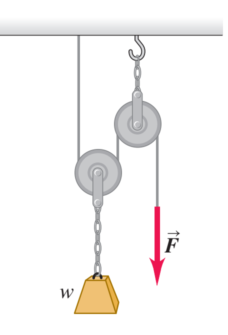
5.57 ••• Dos cuerdas están unidas a un cable de acero que sostiene una pesa que cuelga, como se ilustra en la figura P5.57. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre que muestre todas las fuerzas que actúan sobre el nudo que une las dos cuerdas al cable de acero. Con base en su diagrama de fuerzas, ¿cuál cuerda estará sometida a mayor tensión? *b*) Si la tensión máxima que una cuerda resiste sin romperse es de 5000 N, determine el valor máximo de la pesa que las cuerdas pueden sostener sin riesgo. Puede despreciarse el peso de las cuerdas y del cable de acero.

Figura **P5.57**



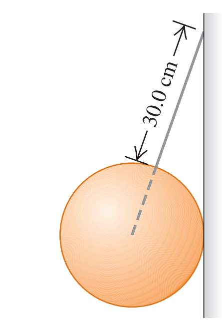
5.58 •• En la figura P5.58 un obrero levanta un peso *w* tirando hacia abajo de una cuerda con una fuerza $\vec{F}$. La polea superior está unida al techo con una cadena; en tanto que la polea inferior está unida al peso con otra cadena. En términos de *w*, determine la tensión en cada cadena y la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ si el peso sube con rapidez constante. Incluya el (los) diagrama(s) de cuerpo libre que usó para obtener sus respuestas. Suponga que los pesos de la cuerda, las poleas y las cadenas son insignificantes.

Figura **P5.58**



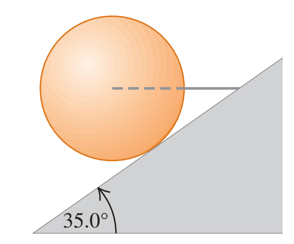
5.59 ••• Una esfera uniforme sólida de 45.0 kg, cuyo diámetro es de 32.0 cm, se apoya contra una pared vertical sin fricción, usando un alambre delgado de 30.0 cm con masa despreciable, como se indica en la figura P5.59. *a*) Elabore el diagrama de cuerpo libre para la esfera y úselo para determinar la tensión en el alambre. *b*) ¿Qué tan fuerte empuja la esfera a la pared?

Figura **P5.59**



5.60 ••• Un alambre horizontal sostiene una esfera uniforme sólida de masa *m*, sobre una rampa que se eleva 35.0° por arriba de la horizontal. La superficie de la rampa está perfectamente lisa, y el alambre se coloca alejándose del centro de la esfera (figura P5.60). *a*) Elabore el diagrama de cuerpo libre para la esfera. *b*) ¿Qué tan fuerte la superficie de la rampa empuja a la esfera? ¿Cuál es la tensión en el alambre?

Figura **P5.60**



5.61 •• **PA** **BIO** **Fuerzas durante las flexiones de brazos en una barra.** Las personas que practican flexiones de brazos en barra elevan su mentón justo sobre una barra, sosteniéndose solo con sus brazos. Por lo regular, el cuerpo debajo de los brazos se eleva 30 cm aproximadamente en 1.0 s, partiendo del reposo. Suponga que el cuerpo de una persona de 680 N que practica tal ejercicio se eleva esta distancia y que la mitad de 1.0 s se emplea en acelerar hacia arriba y la otra mitad en acelerar hacia abajo, en ambos casos, de manera uniforme. Elabore un diagrama de cuerpo libre del cuerpo del individuo, y luego úselo para determinar la fuerza que sus brazos deben ejercer sobre él durante la aceleración de subida.

5.62 •• PA BIO Prevención de lesiones de cadera. Las personas con riesgo de caerse (especialmente los adultos mayores) deben usar cojines en la cadera para amortiguar el impacto en una caída. Los experimentos han demostrado que si la velocidad de impacto se puede reducir a 1.3 m/s o menos, la cadera normalmente no se fractura. Analicemos el peor escenario en el que una persona de 55 kg pierde completamente el equilibrio (como si estuviera en pavimento con hielo) y cae una distancia de 1.0 m, la distancia de su cadera al suelo. Supondremos que todo el cuerpo de la persona tiene la misma aceleración, lo que en realidad no es muy cierto. *a*) ¿Con qué rapidez llega su cadera al suelo? *b*) Un cojín típico para cadera puede reducir la rapidez de la persona a 1.3 m/s en una distancia de 2.0 cm. Calcule la aceleración (suponiéndola constante) de la cadera de esta persona mientras está cayendo y la fuerza que el cojín ejerce sobre ella. *c*) La fuerza del inciso *b*) es muy grande. Para saber si es probable que cause una lesión, calcule cuánto tiempo dura.

5.63 ••• CALC Una caja de 3.00 kg que se encuentra varios cientos de metros arriba de la superficie terrestre está suspendida del extremo de una cuerda vertical de masa despreciable. Al extremo de la parte superior de la cuerda se aplica una fuerza hacia arriba que depende del tiempo, y esto provoca una tensión en la cuerda de $T(t) = (36.0 \text{ N/s})t$. La caja está en reposo en $t = 0$. Las únicas fuerzas sobre la caja son la tensión en la cuerda y la gravedad. *a*) ¿Cuál es la velocidad de la caja en **i.** $t = 1.00$ s y **ii.** $t = 3.00$ s? *b*) ¿Cuál es la distancia máxima que desciende la caja por debajo de su posición inicial? *c*) ¿Cuál es el valor de t cuando la caja regresa a su posición inicial?

5.64 •• PA Una caja de 5.00 kg se encuentra en reposo en la parte inferior de una rampa de 8.00 m de longitud que está inclinada 30.0° arriba de la horizontal. El coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.40$, y el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.50$. ¿Qué fuerza constante F, aplicada paralela a la superficie de la rampa, se requiere para empujar la caja a la parte superior en un tiempo de 4.00 s?

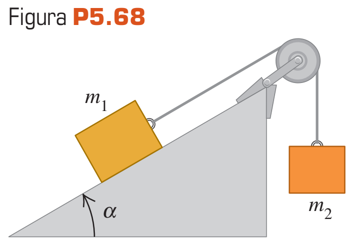
5.65 •• Dos cajas unidas por una cuerda horizontal ligera se encuentran en una superficie horizontal, como se muestra en la figura P5.35. El coeficiente de fricción cinética entre las cajas y la superficie es de $\mu_k = 0.30$. Una caja (la B) tiene una masa de 5.00 kg, y la otra (la caja A) tiene una masa m. Se aplica una fuerza F con magnitud de 40.0 N y dirección de 53.1° por arriba de la horizontal a la caja de 5.00 kg, y ambas cajas se mueven a la derecha con $a = 1.50 \text{ m/s}^2$. *a*) ¿Cuál es la tensión T en la cuerda que une las cajas? *b*) ¿Cuál es la masa m de la segunda caja?

5.66 ••• Una caja de 6.00 kg se encuentra en reposo sobre una rampa con una pendiente de 37.0° arriba de la horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y la rampa es $\mu_k = 0.30$. ¿Cuál es la fuerza *horizontal* que se requiere para mover la caja hacia arriba de la rampa con una aceleración constante de 4.20 m/s^2?

5.67 •• PA El bloque A de la figura P5.34 tiene una masa m y el bloque B tiene una masa de 6.00 kg. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque A y la mesa es $\mu_k = 0.40$. La masa de la cuerda que une los bloques se puede despreciar. La polea es ligera y sin fricción. Cuando el sistema se libera partiendo del reposo, el bloque que cuelga desciende 5.00 m en 3.00 s. ¿Cuál es la masa m del bloque A?

5.68 •• PA En la figura P5.68, $m_1 = 20.0$ kg y $\alpha = 53.1°$. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la rampa es $\mu_k = 0.40$. ¿Cuál debe ser la masa m_2 del bloque que cuelga si debe descender 12.0 m en los primeros 3.00 s después de que el sistema se libera a partir del reposo?

Figura **P5.68**



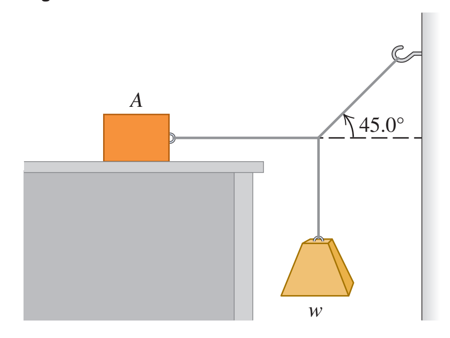
5.69 ••• PA Fricción de rodamiento. Dos neumáticos de bicicleta ruedan con la misma rapidez inicial de 3.50 m/s en un camino largo y recto, y se mide la distancia que viaja cada uno antes de que su rapidez se reduzca a la mitad. Un neumático se infló a una presión de 40 psi (libras por pulgada cuadrada, por las siglas de *pounds per square inch*) y avanzó 18.1 m; el otro tiene 105 psi y avanzó 92.9 m. ¿Cuánto vale el coeficiente de fricción de rodamiento μ_r para cada uno? Suponga que la fuerza horizontal neta solo se debe a la fricción de rodamiento.

5.70 •• Una cuerda con masa. Un bloque con masa M está unido al extremo inferior de una cuerda vertical uniforme con masa m y longitud L. Se aplica una fuerza constante $\vec{F}$ hacia arriba al extremo superior de la cuerda; esto hace que la cuerda y el bloque se aceleren hacia arriba. Calcule la tensión en la cuerda a una distancia x del extremo superior de la cuerda, donde x puede tener cualquier valor entre 0 y L.

5.71 •• Un bloque con masa m_1 está colocado sobre un plano inclinado con ángulo α y está unido a un segundo bloque, con masa m_2, colgado de una cuerda que pasa sobre una pequeña polea sin fricción (figura P5.68). El coeficiente de fricción estática es μ_s y el coeficiente de fricción cinética es μ_k. *a*) Calcule la masa m_2, para la cual el bloque m_1 se mueve hacia arriba con rapidez constante una vez que se inicia el movimiento. *b*) Calcule la masa m_2, para la cual el bloque m_1 se mueve hacia abajo del plano con rapidez constante una vez que se inicia el movimiento. *c*) ¿Para qué intervalo de valores de m_2 los bloques permanecerán en reposo?

5.72 •• El bloque A de la figura P5.72 pesa 60.0 N. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la superficie donde descansa es de 0.25. El peso w es de 12.0 N y el sistema está en equilibrio. *a*) Calcule la fuerza de fricción ejercida sobre el bloque A. *b*) Determine el peso máximo w con el cual el sistema permanecerá en equilibrio.

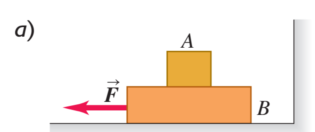
Figura **P5.72**



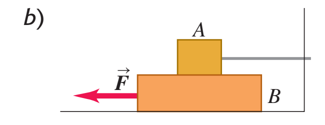
5.73 •• El bloque A de la figura P5.73 pesa 2.40 N, y el bloque B pesa 3.60 N. El coeficiente de fricción cinética entre todas las superficies es de 0.300. Determine la magnitud de la fuerza horizontal $\vec{F}$ necesaria para arrastrar el bloque B hacia la izquierda con rapidez constante *a*) si A descansa sobre B y se mueve con él (figura P5.73*a*); y *b*) si A permanece en reposo (figura P5.73*b*).

Figura **P5.73**

a)

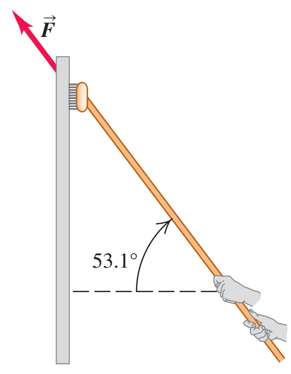


b)



5.74 ••• Un lavador de ventanas empuja hacia arriba su cepillo sobre una ventana vertical, con rapidez constante, aplicando una fuerza $\vec{F}$ como se muestra en la figura P5.74. El cepillo pesa 15.0 N y el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.150$. Calcule *a*) la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ y *b*) la fuerza normal ejercida por la ventana sobre el cepillo.

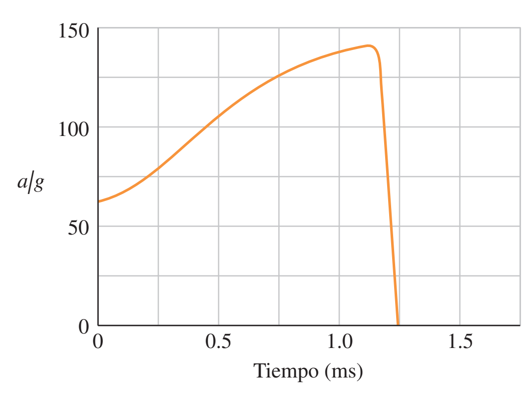
Figura **P5.74**



5.75 •• BIO El salto volador de una pulga. Una película de alta velocidad (3500 cuadros/segundo) produjo ciertos datos del salto

de una pulga de 210 μg, que permitieron trazar la gráfica de aceleración del insecto en función del tiempo como se muestra en la figura P5.75. (Véase "The Flying Leap of the Flea", de M. Rothschild *et al.*, *Scientific American*, noviembre de 1973). La pulga tenía unos 2 mm de longitud y saltó con un ángulo de despegue casi vertical. Efectúe mediciones en la gráfica que le permitan contestar las siguientes preguntas. *a*) ¿Qué fuerza externa neta *inicial* actúa sobre la pulga? Compárela con el peso de la pulga. *b*) ¿Qué fuerza externa neta *máxima* actúa sobre la pulga que salta? ¿Cuándo se presenta esa fuerza máxima? *c*) Use la gráfica para calcular la rapidez máxima de la pulga.

Figura **P5.75**



5.76 •• PA Un cohete de 25,000 kg despega verticalmente de la superficie terrestre con aceleración constante. Durante el movimiento considerado en este problema, suponga que g se mantiene constante (véase el capítulo 13). Dentro del cohete, un instrumento de 15.0 N cuelga de un alambre que resiste una tensión máxima de 45.0 N. *a*) Determine el tiempo mínimo en que el cohete puede alcanzar la barrera del sonido (330 m/s) sin romper el alambre, y el empuje vertical máximo de los motores del cohete en tales condiciones. *b*) ¿A qué altura sobre la superficie terrestre se encuentra el cohete cuando rompe la barrera del sonido?

5.77 ••• PA CALC Una persona de 64 kg está de pie sobre una báscula de baño en el elevador de un rascacielos. El elevador parte del reposo y asciende con una rapidez que varía con el tiempo según $v(t) = (3.0\ \text{m/s}^2)t + (0.20\ \text{m/s}^3)t^2$. En $t = 4.0$ s, ¿qué valor marca la báscula?

5.78 ••• PA Diseño de elevadores. Imagine que usted está diseñando un elevador para un hospital. La fuerza que el piso del elevador ejercerá sobre un pasajero no debe exceder 1.60 veces su peso. El elevador acelera hacia arriba con aceleración constante una distancia de 3.0 m, y luego comienza a frenarse. ¿Qué rapidez máxima alcanza el elevador?

5.79 •• PA Imagine que usted trabaja para una empresa transportista. Su trabajo consiste en colocarse de pie junto a la base de una rampa de 8.0 m de longitud, inclinada 37° arriba de la horizontal, tomar paquetes de una banda transportadora y empujarlos hacia arriba por la rampa. El coeficiente de fricción cinética entre los paquetes y la rampa es $\mu_k = 0.30$. *a*) ¿Qué rapidez necesitará usted imprimir a los paquetes en la base de la rampa, para que tengan rapidez cero en la parte superior de esta? *b*) Se supone que un compañero de trabajo toma los paquetes cuando llegan a la parte superior de la rampa, pero no logra sujetar uno y ese paquete se desliza hacia abajo por la rampa. ¿Qué rapidez tiene el paquete cuando llega a donde está usted?

5.80 •• Un martillo cuelga del techo de un autobús atado con una cuerda ligera. El techo es paralelo a la carretera. El autobús viaja en línea recta por un camino horizontal. Se observa que el martillo cuelga en reposo con respecto al autobús cuando el ángulo entre la cuerda y el techo es de 67°. ¿Qué aceleración tiene el autobús?

5.81 ••• Una rondana de acero está suspendida dentro de una caja vacía por una cuerda ligera unida a la tapa de la caja. La caja baja resbalando por una rampa larga que tiene una inclinación de 37° sobre la horizontal. La masa de la caja es de 180 kg. Una persona de 55 kg está sentada dentro de la caja (con una linterna). Mientras la caja resbala por la rampa, la persona ve que la rondana está en reposo con respecto a la caja, cuando la cuerda forma un ángulo de 68° con la tapa de la caja. Determine el coeficiente de fricción cinética entre la rampa y la caja.

5.82 • PA ¡Hora de comer! Imagine que va bajando en motocicleta por una calle húmeda que tiene una pendiente de 20° bajo la horizontal. Al iniciar la bajada, se da cuenta de que una cuadrilla de obreros ha cavado un agujero profundo en la calle en la base de la pendiente. Un tigre siberiano, que escapó del zoológico, adoptó el agujero como cubil. *a*) Usted aplica los frenos y bloquea sus ruedas en la cima de la pendiente, donde tiene una rapidez de 20 m/s. La calle inclinada frente a usted tiene 40 m de longitud. *a*) ¿Caerá en el agujero y se convertirá en el almuerzo del tigre, o logrará detenerse antes? (Los coeficientes de fricción entre los neumáticos de la motocicleta y el pavimento mojado son $\mu_s = 0.90$ y $\mu_k = 0.70$). *b*) ¿Qué rapidez inicial deberá registrar para detenerse justo antes de llegar al agujero?

5.83 ••• En el sistema de la figura P5.34, el bloque A tiene masa m_A, el bloque B tiene masa m_B, y la cuerda que los une tiene una masa *distinta de cero* $m_{\text{cuerda.}}$ La longitud total de la cuerda es L y la polea tiene un radio muy pequeño. Considere que la cuerda no cuelga en su tramo horizontal. *a*) Si no hay fricción entre el bloque A y la mesa, ¿qué aceleración tienen los bloques en el instante en que un tramo d de cuerda cuelga verticalmente entre la polea y el bloque B? Al caer B, ¿la magnitud de la aceleración del sistema aumentará, disminuirá o se mantendrá constante? Explique. *b*) Sea $m_A = 2.00$ kg, $m_B = 0.400$ kg, $m_{\text{cuerda}} = 0.160$ kg y $L = 1.00$ m. Suponga que hay fricción entre el bloque A y la mesa con $\mu_k = 0.200$ y $\mu_s = 0.250$, calcule la distancia d mínima tal que los bloques comiencen a moverse si inicialmente estaban en reposo. *c*) Repita el inciso *b*) para el caso en que $m_{\text{cuerda}} = 0.040$ kg. ¿Se moverán los bloques en este caso?

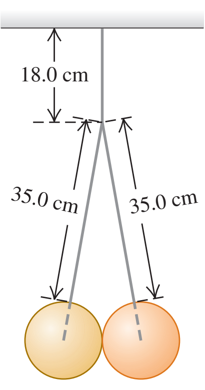
5.84 ••• Si el coeficiente de fricción estática entre una mesa y una cuerda gruesa uniforme es μ_s, ¿qué fracción de la cuerda puede colgar por el borde de la mesa sin que la cuerda resbale?

5.85 •• Una caja de 40.0 kg está inicialmente en reposo en la plataforma de una camioneta de 1500 kg. El coeficiente de fricción estática entre la caja y la plataforma es de 0.30; y el de fricción cinética, de 0.20. Antes de cada una de las aceleraciones que se indican en seguida, la camioneta viaja hacia el norte con rapidez constante. Obtenga la magnitud y dirección de la fuerza de fricción que actúa sobre la caja, *a*) cuando la camioneta adquiere una aceleración de 2.20 m/s^2 al norte, y *b*) cuando acelera a 3.40 m/s^2 al sur.

5.86 • PA Tribunal de tránsito. Imagine que a usted se le cita a comparecer como testigo experto, en el juicio sobre una infracción de tránsito. Los hechos son los siguientes: un conductor frenó violentamente y se detuvo con aceleración constante. Las mediciones de sus neumáticos y de las marcas del derrape sobre el pavimento indican que, cuando bloqueó las llantas, el automóvil recorrió 192 ft antes de detenerse y que el coeficiente de fricción cinética entre el camino y sus neumáticos era de 0.750. El cargo es que el conductor iba a exceso de velocidad en una zona de 45 mi/h. Él se declara inocente. ¿Cuál es su conclusión: es culpable o inocente? ¿Qué tan rápido iba en el momento de aplicar los frenos?

5.87 ••• Dos esferas idénticas de 15.0 kg y de 25.0 cm de diámetro están suspendidas de dos alambres de 35.0 cm, como se indica en la figura P5.87. El sistema completo está unido a un solo cable de 18.0 cm y las superficies de las esferas son perfectamente lisas. *a*) Obtenga la tensión en cada uno de los tres alambres. *b*) ¿Qué tanto empuja cada esfera a la otra?

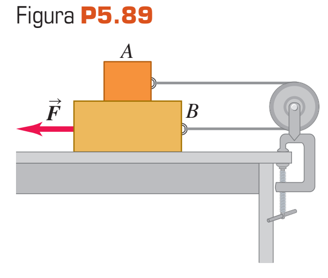
Figura **P5.87**



5.88 •• PA **Pérdida de carga.** Una caja de 12.0 kg descansa en el piso plano de un camión. Los coeficientes de fricción entre la caja y el piso son $\mu_s = 0.19$ y $\mu_k = 0.15$. El camión se detiene ante un letrero de alto y luego arranca con aceleración de 2.20 m/s^2. Si la caja está a 1.80 m del borde trasero del camión cuando este arranca, ¿cuánto tardará la caja en caerse del camión? ¿Qué distancia recorrerá el camión en ese tiempo?

5.89 ••• El bloque A de la figura P5.89 pesa 1.90 N, y el bloque B pesa 4.20 N. El coeficiente de fricción cinética entre todas las superficies es de 0.30. Calcule la magnitud de la fuerza horizontal $\vec{F}$ necesaria para arrastrar B a la izquierda con rapidez constante, si A y B están conectados por una cuerda ligera y flexible que pasa por una polea fija sin fricción.

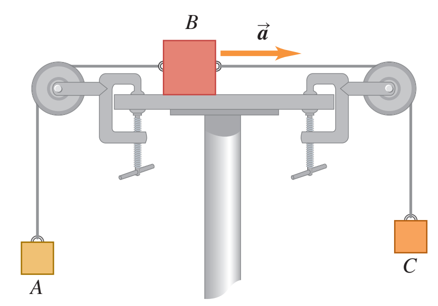
Figura **P5.89**



5.90 ••• PA Imagine que forma parte de un grupo de diseñadores para una exploración futura del planeta Marte, donde $g = 3.7$ m/s^2. Un explorador saldrá de un vehículo que viaja horizontalmente a 33 m/s, cuando esté a una altura de 1200 m sobre la superficie, y luego caerá libremente durante 20 s. En ese momento, un sistema portátil avanzado de propulsión (PAPS, por las siglas de *portable advanced propulsion system*) ejercerá una fuerza constante que reducirá la rapidez del explorador a cero en el instante en que toque la superficie. La masa total (explorador, traje, equipo y PAPS) es de 150 kg. Suponga que el cambio de masa del PAPS es insignificante. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que el PAPS deberá ejercer, y durante cuánto tiempo deberá ejercerla. Desprecie la resistencia del aire.

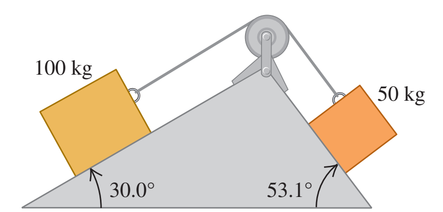
5.91 •• El bloque A de la figura P5.91 tiene una masa de 4.00 kg, y el bloque B, de 12.0 kg. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque B y la superficie horizontal es de 0.25. *a*) ¿Qué masa tiene el bloque C si B se mueve a la derecha con aceleración de 2.00 m/s^2? *b*) ¿Qué tensión hay en cada cuerda cuando el bloque B tiene esta aceleración?

Figura **P5.91**



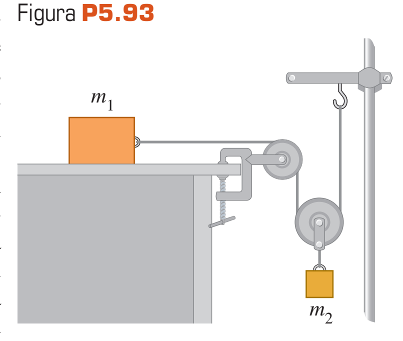
5.92 •• Dos bloques conectados por una cuerda que pasa por una polea pequeña sin fricción descansan en planos sin fricción (figura P5.92). *a*) ¿Hacia dónde se moverá el sistema cuando los bloques se suelten del reposo? *b*) ¿Qué aceleración tendrán los bloques? *c*) ¿Qué tensión hay en la cuerda?

Figura **P5.92**



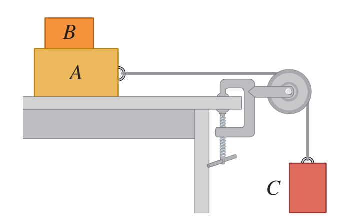
5.93 •• Determine la aceleración de cada bloque de la figura P5.93, en términos de m_1, m_2 y g. No hay fricción en ninguna parte del sistema.

Figura **P5.93**



5.94 ••• El bloque B con masa de 5.00 kg descansa sobre el bloque A, cuya masa es de 8.00 kg, y el cual a la vez, se encuentra sobre una mesa horizontal (figura P5.94). No hay fricción entre el bloque A y la mesa, pero el coeficiente de fricción estática entre el bloque A y el B es de 0.750. Una cuerda ligera atada al bloque A pasa por una polea sin masa ni fricción, con el bloque C colgando en el otro extremo. ¿Qué masa máxima puede tener el bloque C, de modo que A y B aún se deslicen juntos cuando el sistema se suelte del reposo?

Figura **P5.94**



5.95 ••• Dos objetos con masas de 5.00 kg y 2.00 kg cuelgan a 0.600 m sobre el piso, atados a los extremos de una cuerda de 6.00 m que pasa por una polea sin fricción. Los objetos parten del reposo. Calcule la altura máxima que alcanza el objeto de 2.00 kg.

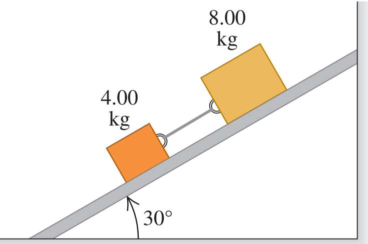
5.96 •• **Fricción en un elevador.** Imagine que viaja en un elevador hacia el piso 18 de su residencia universitaria. El elevador acelera hacia arriba con $a = 1.90$ m/s^2. Junto a usted está una caja que contiene su nueva computadora; la caja y su contenido tienen una masa total de 28.0 kg. Mientras el elevador está acelerando hacia arriba, usted empuja la caja horizontalmente para deslizarla con rapidez constante hacia la puerta del elevador. Si el coeficiente de fricción cinética entre la caja y el piso del elevador es $\mu_k = 0.32$, ¿qué magnitud de fuerza debe aplicar?

5.97 • Un bloque se coloca contra el frente vertical de un carrito, como se ilustra en la figura P5.97. ¿Qué aceleración debe tener el carrito para que el bloque A no caiga? El coeficiente de fricción estática entre el bloque y el carrito es μ_s. ¿Cómo describiría un observador en el carrito el comportamiento del bloque?

Figura **P5.97**

5.98 ••• Dos bloques con masas de 4.00 kg y 8.00 kg están conectados por una cuerda y bajan deslizándose por un plano inclinado a 30.0° (figura P5.98). El coeficiente de fricción cinética entre el

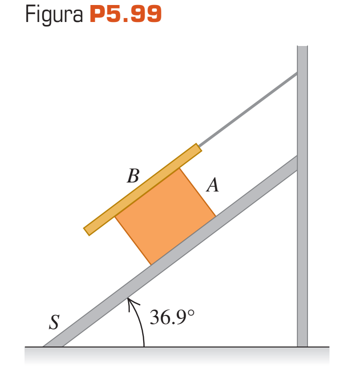
Figura **P5.98**



bloque de 4.00 kg y el plano es de 0.25; y entre el bloque de 8.00 kg y el plano es de 0.35. *a*) Calcule la aceleración de cada bloque. *b*) Calcule la tensión en la cuerda. *c*) ¿Qué sucede si se invierten las posiciones de los bloques, de manera que el bloque de 4.00 kg esté arriba del de 8.00 kg?

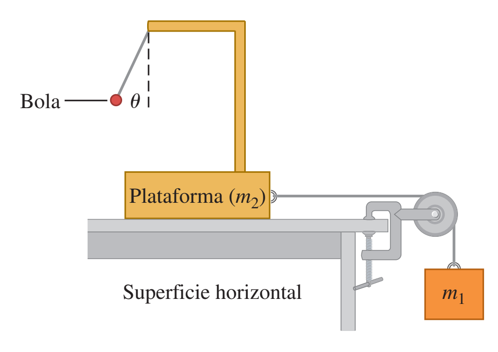
5.99 ••• El bloque A, de peso $3w$, se desliza con rapidez constante, bajando por un plano S inclinado 36.9°, mientras la tabla B, de peso w, descansa sobre A, estando sujeta con una cuerda a la pared (figura P5.99). *a*) Dibuje un diagrama de todas las fuerzas que actúan sobre el bloque A. *b*) Si el coeficiente de fricción cinética es igual entre A y B, y entre S y A, determine su valor.

Figura **P5.99**



5.100 •• Acelerómetro. El sistema que se ilustra en la figura P5.100 puede usarse para medir la aceleración del mismo. Un observador que va sobre la plataforma mide el ángulo θ que la cuerda que sostiene la bola ligera forma con la vertical. No hay fricción en ningún lado. *a*) ¿Cómo se relaciona θ con la aceleración del sistema? *b*) Si m_1 = 250 kg y m_2 = 1250 kg, ¿cuál es el valor de θ? *c*) Si usted puede modificar m_1 y m_2, ¿cuál es el ángulo θ máximo que podría alcanzar? Explique cómo necesita ajustar m_1 y m_2 para lograrlo.

Figura **P5.100**

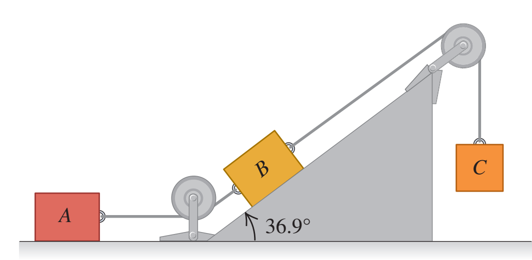


5.101 ••• Curva peraltada I. En un camino horizontal, una curva de 120 m de radio tiene el peralte adecuado para una rapidez de 20 m/s. Si un automóvil toma dicha curva a 30 m/s, ¿qué coeficiente mínimo de fricción estática debe haber entre los neumáticos y la carretera para no derrapar?

5.102 •• Curva peraltada II. Considere un camino húmedo peraltado como el del ejemplo 5.22 (sección 5.4), donde hay un coeficiente de fricción estática de 0.30 y un coeficiente de fricción cinética de 0.25 entre los neumáticos y la carretera. El radio de la curva es R = 50 m. *a*) Si el ángulo de peralte es β = 25°, ¿qué rapidez *máxima* puede tener el automóvil antes de derrapar *hacia arriba* por el peralte? *b*) ¿Qué rapidez *mínima* debe tener para no derrapar *hacia abajo* por el peralte?

5.103 ••• Los bloques A, B y C se colocan como en la figura P5.103 y se conectan con cuerdas de masa despreciable. Tanto A como B pesan 25.0 N cada uno, y el coeficiente de fricción cinética entre cada bloque y la superficie es de 0.35. El bloque C desciende con velocidad constante. *a*) Dibuje dos diagramas de cuerpo libre que muestren las fuerzas que actúan sobre A y sobre B. *b*) Calcule la tensión en la cuerda que une los bloques A y B. *c*) ¿Cuánto pesa el bloque C? *d*) Si se cortara la cuerda que une A y B, ¿qué aceleración tendría C?

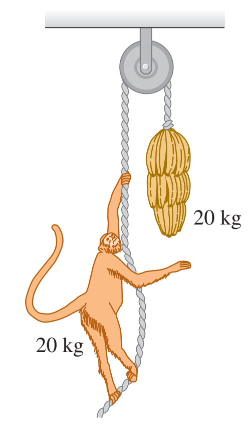
Figura **P5.103**



5.104 •• Imagine que va en un autobús escolar. Cuando este toma una curva plana con rapidez constante, una lonchera con 0.500 kg de masa, colgada del techo del autobús con una cuerda de 1.80 m, se encuentra en reposo relativo al vehículo, en tanto que la cuerda forma un ángulo de 30.0° con la vertical. En esta posición, la lonchera está a 50.0 m del centro de curvatura de la curva. ¿Qué rapidez v lleva el autobús?

5.105 • Problema del mono y las bananas. Un mono de 20 kg sujeta firmemente una cuerda ligera que pasa por una polea sin fricción y está atada a un racimo de bananas de 20 kg (figura P5.105). El mono ve las bananas y comienza a trepar por la cuerda para alcanzarlas. *a*) Al subir el mono, ¿las bananas suben, bajan o no se mueven? *b*) Al subir el mono, ¿la distancia entre él y las bananas disminuye, aumenta o no cambia? *c*) El mono suelta la cuerda. ¿Qué pasa con la distancia entre el mono y las bananas mientras él cae? *d*) Antes de tocar el suelo, el mono sujeta la cuerda para detener su caída. ¿Qué sucede con las bananas?

Figura **P5.105**



5.106 •• CALC Se lanza al agua una piedra hacia abajo con una rapidez de $3mg/k$, donde k es el coeficiente de la ecuación (5.7). Suponga que la relación entre resistencia del fluido y rapidez es la ecuación (5.7) y calcule la rapidez de la piedra en función del tiempo.

5.107 •• Una piedra de masa m = 3.00 kg cae desde el reposo en un medio viscoso. Sobre la piedra actúan una fuerza neta constante hacia abajo de 18.0 N (combinación de la gravedad y la fuerza de flotación ejercida por el medio) y una fuerza de resistencia del fluido $f = kv$, donde v es la rapidez en m/s y k = 2.20 N·s/m (véase la sección 5.3). *a*) Calcule la aceleración inicial a_0. *b*) Calcule la aceleración cuando la rapidez es de 3.00 m/s. *c*) Calcule la rapidez cuando la aceleración es $0.1a_0$. *d*) Calcule la rapidez terminal v_t. *e*) Obtenga la posición, rapidez y aceleración 2.00 s después de iniciado el movimiento. *f*) Calcule el tiempo necesario para alcanzar una rapidez de $0.9v_t$.

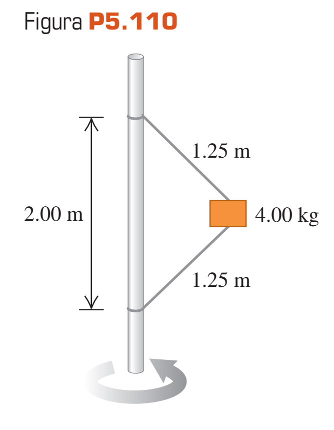
5.108 •• CALC Una piedra con masa m se desliza con velocidad inicial v_0 sobre una superficie horizontal. La fuerza opositora F_R que la superficie ejerce sobre la piedra es proporcional a la raíz cuadrada de la velocidad instantánea de la piedra ($F_R = -kv^{1/2}$). *a*) Obtenga expresiones para la velocidad y posición de la piedra en función del tiempo. *b*) En términos de m, k y v_0, ¿en qué tiempo se detendrá la piedra? *c*) En términos de m, k y v_0, ¿a qué distancia estará la piedra de su punto de partida cuando se detenga?

5.109 ••• Usted observa un automóvil deportivo de 1350 kg que rueda en línea recta por un pavimento horizontal. Las únicas fuerzas horizontales que actúan sobre él son una fricción constante de roda-

miento y la resistencia del aire (proporcional al cuadrado de la rapidez). Usted toma los siguientes datos durante un intervalo de 25 s: cuando la rapidez del automóvil es de 32 m/s, se frena a razón de $-0.42\ \text{m/s}^2$; cuando la rapidez disminuye a 24 m/s, se frena a razón de $-0.30\ \text{m/s}^2$. *a*) Calcule el coeficiente de fricción de rodamiento y la constante de arrastre del aire D. *b*) ¿Con qué rapidez constante bajará este automóvil por una pendiente de 2.2° con respecto a la horizontal? *c*) ¿Qué relación hay entre la rapidez constante en una pendiente de ángulo β y la rapidez terminal de este automóvil al caer desde un acantilado? Suponga que, en ambos casos, la fuerza de arrastre del aire es proporcional al cuadrado de la rapidez y la constante de arrastre del aire no cambia.

5.110 ••• El bloque de 4.00 kg de la figura P5.110 está sujeto a una varilla vertical con dos cuerdas. Cuando el sistema gira en torno al eje de la varilla, las cuerdas se extienden como se indica en el diagrama, y la tensión en la cuerda superior es de 80.0 N. *a*) ¿Qué tensión hay en la cuerda inferior? *b*) ¿Cuántas revoluciones por minuto realiza el sistema? *c*) Calcule las revoluciones por minuto con las que la cuerda inferior pierde su tensión. *d*) Explique qué sucede si el número de rpm es menor que en el inciso *c*).

Figura **P5.110**



5.111 ••• **CALC** La ecuación (5.10) es válida para el caso en que la velocidad inicial es cero. *a*) Deduzca la ecuación correspondiente para $v_y(t)$ cuando el objeto que cae tiene una velocidad inicial hacia abajo de magnitud v_0. *b*) Para el caso en que $v_0 < v_t$, dibuje una gráfica de v_y en función de t y marque v_t en la gráfica. *c*) Repita el inciso *b*) para el caso en que $v_0 > v_t$. *d*) Comente lo que su resultado le dice acerca de $v_y(t)$ cuando $v_0 = v_t$.

5.112 ••• **CALC** Una piedra pequeña se mueve en agua y la fuerza que el agua ejerce sobre ella está dada por la ecuación (5.7). Se mide la rapidez terminal de la piedra, y se encuentra que es de 2.0 m/s. La piedra se proyecta *hacia arriba* con una rapidez inicial de 6.0 m/s. Puede despreciarse la fuerza de flotación sobre la piedra. *a*) En ausencia de resistencia del fluido, ¿qué altura alcanzaría la piedra y cuánto tardaría en alcanzar esa altura máxima? *b*) ¿Cómo cambian las respuestas del inciso *a*), si se incluyen los efectos de la resistencia del fluido?

5.113 •• **Carrusel.** Cierto diciembre, dos gemelas idénticas, Jena y Jackie, juegan en un carrusel (o tiovivo, un disco grande montado paralelo al piso sobre un eje vertical central) en el patio de su escuela, en el norte de Minnesota. Las gemelas tienen masas idénticas de 30.0 kg. La superficie del carrusel está cubierta de hielo y, por lo tanto, no tiene fricción. El carrusel gira con rapidez constante con las gemelas encima. Jena, sentada a 1.80 m del centro del carrusel, debe sujetar uno de los postes metálicos del carrusel con una fuerza horizontal de 60.0 N para no salir despedida. Jackie está sentada en el borde, a 3.60 m del centro. *a*) ¿Con qué fuerza horizontal debe sujetarse Jackie para no salir despedida? *b*) Si Jackie sale despedida, ¿qué velocidad horizontal tendrá en ese momento?

5.114 •• Una persona de 70 kg viaja en un carrito de 30 kg que se mueve a 12 m/s en la cima de una colina, cuya forma es un arco de círculo con radio de 40 m. *a*) ¿Qué peso aparente tiene la persona cuando el carrito pasa por la cima? *b*) Determine la rapidez máxima con que el carrito podría llegar a la cima sin perder contacto con la superficie. ¿Su respuesta depende de la masa del carrito o de la masa de la persona? Explique su respuesta

5.115 •• En el juego "Rotor" del parque de diversiones Six Flags Over Texas, la gente se paraba contra la pared interior de un cilindro vertical hueco de 2.5 m de radio. El cilindro comenzaba a girar y, al alcanzar una velocidad de rotación constante de 0.60 rev/s, el piso en que estaba parada la gente bajaba 0.5 m. La gente quedaba pegada a la pared. *a*) Dibuje un diagrama de fuerzas para un pasajero, una vez que haya bajado el piso. *b*) ¿Qué coeficiente de fricción estática mínimo se requiere para que un pasajero no resbale hacia abajo a la nueva posición del piso? *c*) ¿La respuesta al inciso *b*) depende de la masa del pasajero? (*Nota:* Al final, el cilindro se detenía gradualmente y las personas resbalaban por las paredes hacia el piso).

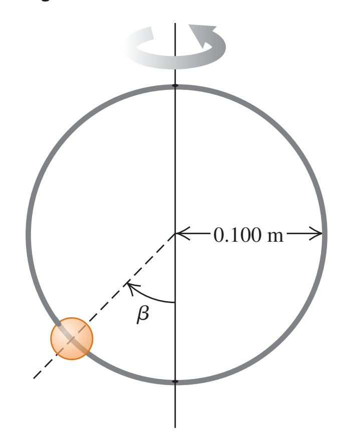
5.116 •• Un pasajero con masa de 85 kg se subió a una rueda de la fortuna, como la del ejemplo 5.23 (sección 5.4). Los asientos viajan en un círculo de 35 m de radio. La rueda gira con rapidez constante y efectúa una revolución cada 25 s. Calcule la magnitud y dirección de la fuerza neta ejercida sobre el pasajero por el asiento cuando él está *a*) un cuarto de revolución más allá de su punto más bajo y *b*) un cuarto de revolución más allá de su punto más alto.

5.117 • **Segunda intención.** Usted conduce un automóvil Nash Ambassador 1954 clásico con una amiga sentada a su derecha, en el asiento delantero, en el lugar del copiloto. El Ambassador tiene asientos corridos planos. A usted le gustaría estar más cerca de su amiga, y decide usar la física para lograr su objetivo romántico dando una vuelta rápida. *a*) ¿En qué dirección (a la derecha o a la izquierda) deberá dar vuelta al auto para que su amiga se deslice hacia usted? *b*) Si el coeficiente de fricción estática entre la amiga y el asiento es de 0.35 y el auto viaja a una rapidez constante de 20 m/s, ¿con qué radio máximo de la vuelta su amiga aún se desliza hacia usted?

5.118 •• Un estudiante universitario de física paga su colegiatura con lo que gana actuando en un carnaval. Él conduce una motocicleta dentro de una esfera de plástico hueca y transparente. Una vez que adquiere suficiente rapidez, describe un círculo vertical de radio igual a 13.0 m. El estudiante tiene una masa de 70.0 kg, y su motocicleta tiene una masa de 40.0 kg. *a*) ¿Qué rapidez mínima debe tener en el punto más alto del círculo para que los neumáticos no pierdan contacto con la esfera? *b*) En el punto más bajo del círculo, su rapidez es el doble de la calculada en el inciso *a*). ¿Qué magnitud tiene la fuerza normal ejercida por la esfera sobre la motocicleta en ese punto?

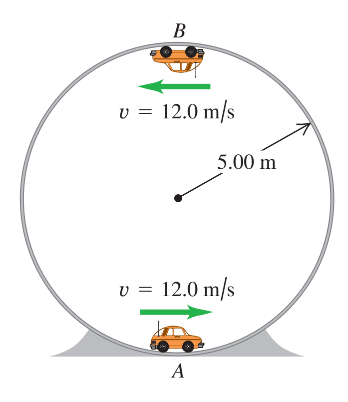
5.119 •• Una cuenta pequeña puede deslizarse sin fricción por un aro circular de 0.100 m de radio, que está en un plano vertical. El aro gira con velocidad constante de 4.00 rev/s en torno a un diámetro vertical (figura P5.119). *a*) Calcule el ángulo β en que la cuenta está en equilibrio vertical. (Desde luego, tiene aceleración radial hacia el eje). *b*) ¿La cuenta podría mantenerse a la misma altura que el centro del aro? *c*) ¿Qué sucede si el aro gira a 1.00 rev/s?

Figura **P5.119**



5.120 •• Un carrito de control remoto con masa de 1.60 kg se mueve a una rapidez constante de $v = 12.0$ m/s, en un círculo vertical dentro de un cilindro hueco metálico de 5.00 m de radio (figura P5.120). ¿Qué magnitud tiene la fuerza normal ejercida sobre el carrito por las paredes del cilindro *a*) en el punto A (parte inferior del círculo vertical)? *b*) ¿Y en el punto B (parte superior del círculo vertical)?

Figura **P5.120**

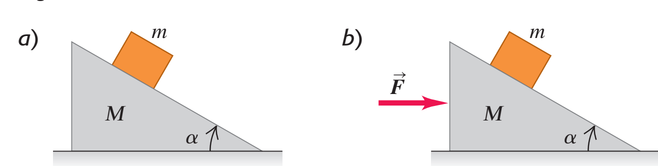


PROBLEMAS DE DESAFÍO

5.121 ••• CALC Ángulo de fuerza mínima. Se tira de una caja de peso w con rapidez constante sobre un piso horizontal aplicando una fuerza $\vec{F}$ con un ángulo θ sobre la horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el piso y la caja es μ_k. *a*) Calcule F en términos de θ, μ_k y w. *b*) Si $w = 400$ N y $\mu_k = 0.25$, calcule F para θ desde 0° a 90° en incrementos de 10°. Grafique F contra θ. *c*) Con la expresión general del inciso *a*), calcule el valor de θ para el que la F necesaria para mantener una rapidez constante es mínima. (*Sugerencia:* Considere lo siguiente. En un punto donde una función es mínima, ¿qué valor tienen la primera y segunda derivadas de la función? Aquí, F es función de θ). Para el caso especial de $w = 400$ N y $\mu_k = 0.25$, evalúe este θ óptimo y compare su resultado con la gráfica que elaboró en el inciso *b*).

5.122 ••• Cuña móvil. Una cuña de masa M descansa en una mesa horizontal sin fricción. Un bloque de masa m se coloca sobre la cuña (figura P5.122*a*). No hay fricción entre el bloque y la cuña. El sistema se suelta del reposo. *a*) Calcule la aceleración de la cuña, así como las componentes horizontal y vertical de la aceleración del bloque. *b*) ¿Sus respuestas en el inciso *a*) se reducen a los resultados correctos cuando M es muy grande? *c*) ¿Qué forma tiene la trayectoria del bloque, vista por un observador fijo en el piso?

Figura **P5.122**



5.123 ••• Una cuña de masa M descansa en una mesa horizontal sin fricción. Un bloque de masa m se coloca sobre la cuña y se aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$ a la cuña (figura P5.122*b*). ¿Qué magnitud debe tener $\vec{F}$ para que el bloque permanezca a una altura constante sobre la mesa?

5.124 ••• CALC Pelota de béisbol que cae. Se deja caer una pelota de béisbol desde la azotea de un edificio alto. Conforme la pelota cae, el aire ejerce una fuerza de arrastre proporcional al cuadrado de la rapidez de la pelota ($f = Dv^2$). *a*) Dibuje un diagrama que muestre la dirección del movimiento, e indique con vectores todas las fuerzas que actúan sobre la pelota. *b*) Aplique la segunda ley de Newton e infiera de la ecuación resultante las propiedades generales del movimiento. *c*) Demuestre que la bola adquiere una rapidez terminal dada por la ecuación (5.13). *d*) Deduzca la ecuación de la rapidez en cualquier instante. (*Nota:*

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

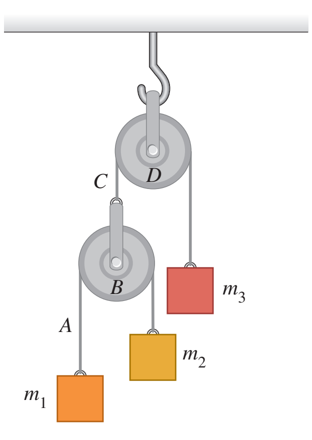
donde

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

define la tangente hiperbólica).

5.125 ••• Máquina de Atwood doble. En la figura P5.125, las masas m_1 y m_2 están conectadas por una cuerda ligera A que pasa por una polea ligera sin fricción B. El eje de la polea B está conectado por otra cuerda ligera C a una masa m_3 pasando por una segunda polea ligera sin fricción D. La polea D está suspendida del techo por un sujetador en su eje. El sistema se suelta del reposo. En términos de m_1, m_2, m_3 y g, *a*) ¿qué aceleración tiene el bloque m_3? *b*) ¿Y la polea B? *c*) ¿Y el bloque m_1? *d*) ¿Y el bloque m_2? *e*) ¿Qué tensión tiene la cuerda A? *f*) ¿Y la cuerda C? *g*) ¿Qué dan sus expresiones para el caso especial en que $m_1 = m_2$ y $m_3 = m_1 + m_2$? ¿Es lógico esto?

Figura **P5.125**

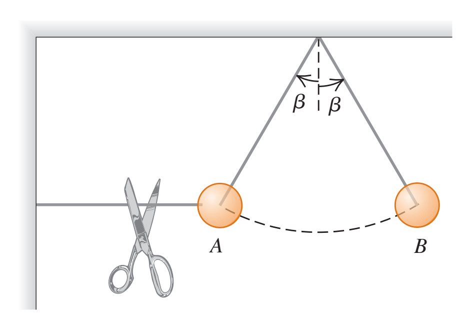


5.126 ••• Las masas de los bloques A y B de la figura P5.126 son de 20.0 kg y 10.0 kg, respectivamente. Al inicio, los bloques están en reposo sobre el piso y están conectados por una cuerda sin masa, que pasa por una polea sin masa ni fricción. Se aplica una fuerza $\vec{F}$ hacia arriba a la polea. Calcule las aceleraciones $\vec{a}_A$ del bloque A y $\vec{a}_B$ del bloque B cuando F es *a*) 124 N; *b*) 294 N; *c*) 424 N.

Figura **P5.126**

5.127 ••• Una esfera se sostiene en reposo en la posición A de la figura P5.127 con dos cuerdas ligeras. Se corta la cuerda horizontal y la esfera comienza a oscilar como péndulo. B es el punto más a la derecha que la esfera alcanza al oscilar. ¿Cuál es la razón entre la tensión de la cuerda de soporte en la posición B y su valor en A antes de que se corte la cuerda horizontal?

Figura **P5.127**



Respuestas

Pregunta inicial del capítulo ?

Ninguna, ya que la fuerza ascendente del aire tiene la *misma* magnitud que la fuerza de gravedad. Aunque el paracaidista y el paracaídas descienden, su velocidad vertical es constante, así que su aceleración vertical es cero. Por lo tanto, la fuerza neta vertical que actúa sobre el paracaidista y el paracaídas también debe ser cero, y las fuerzas verticales individuales deben equilibrarse.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

5.1 **Respuesta: ii.** Los dos cables están dispuestos de forma simétrica, así que la tensión en cada uno tiene la misma magnitud T. La componente vertical de la tensión de cada cable es T sen 45° (o, de manera equivalente, T cos 45°), así que la primera ley de Newton aplicada a las fuerzas verticales nos dice que $2T \text{ sen } 45° - w = 0$. Por lo tanto, $T = w/(2 \text{ sen } 45°) = w/\sqrt{2} = 0.71w$. Cada cable soporta la mitad del peso del semáforo, pero la tensión es mayor que $w/2$ porque solo la componente vertical de la tensión contrarresta el peso.

5.2 **Respuesta: ii.** Sin importar cuál sea la velocidad instantánea del deslizador, su aceleración es constante y tiene el valor que se calculó en el ejemplo 5.12. De la misma forma, la aceleración de un cuerpo en caída libre es la misma si asciende o desciende, o se encuentra en el punto máximo de su movimiento (véase la sección 2.5).

5.3 **Respuestas a *a*): i, iii; respuestas a *b*): ii, iv; respuesta a *c*): v.** En las situaciones **i** y **iii**, la caja no acelera (así que la fuerza neta sobre ella debe ser cero) y no hay otra fuerza que actúe paralela a la superficie horizontal; por lo tanto, no se requiere fuerza de fricción para evitar el deslizamiento. En las situaciones **ii** y **iv** la caja comenzaría a deslizarse sobre la superficie si no hubiera fricción, así que la fuerza de fricción estática debe actuar para evitarlo. En la situación **v**, la caja se desliza sobre una superficie áspera, por lo que la fuerza de fricción cinética actúa sobre ella.

5.4 **Respuesta: iii.** Un satélite con masa m que gira alrededor de la Tierra con rapidez v en una órbita de radio r tiene una aceleración de magnitud v^2/r, así que la fuerza neta de la gravedad terrestre que actúa sobre él tiene magnitud $F = mv^2/r$. Cuanto más lejos esté el satélite de la Tierra, mayor será el valor de r, menor será el valor de v y, por ende, menores serán los valores de v^2/r y de F. En otras palabras, la fuerza gravitacional de la Tierra disminuye al aumentar la distancia.

Problema práctico

Respuestas: ***a*)** $T_{\text{máx}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{h(\cos\beta + \mu_s \text{ sen } \beta)}{g \tan\beta(\text{sen } \beta - \mu_s \cos\beta)}}$

***b*)** $T_{\text{mín}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{h(\cos\beta - \mu_s \text{ sen } \beta)}{g \tan\beta(\text{sen } \beta + \mu_s \cos\beta)}}$

6 TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA



? Después de encontrar alimento para el desayuno, esta hormiga lo levanta y lo transporta. Cuando la hormiga levantó la manzana, ¿la *manzana* realizó trabajo sobre la *hormiga*?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué significa que una fuerza efectúe trabajo sobre un cuerpo, y cómo calcular la cantidad de trabajo realizada.
- La definición de energía cinética (energía de movimiento) de un cuerpo, y lo que significa físicamente.
- Cómo el trabajo total efectuado sobre un cuerpo cambia la energía cinética de este, y cómo utilizar dicho principio para resolver problemas de mecánica.
- Cómo usar la relación entre trabajo total y cambio de energía cinética cuando las fuerzas no son constantes o cuando el cuerpo sigue una trayectoria curva, o al presentarse ambas situaciones.
- Cómo resolver problemas que implican potencia (rapidez para efectuar trabajo).

Suponga que trata de calcular la rapidez de una flecha disparada con un arco. Usted aplica las leyes de Newton y todas las técnicas de resolución de problemas que hemos aprendido, pero se encuentra con un obstáculo importante: después de que el arquero dispara la flecha, la cuerda del arco ejerce una fuerza *variable* que depende de la posición de la flecha. Por ello, los métodos sencillos que hemos aprendido no bastan para calcular la rapidez. No se preocupe; nos falta mucho para terminar el estudio de la mecánica, y hay otros métodos para manejar esta clase de problemas.

El nuevo método que vamos a presentar incorpora las ideas de *trabajo* y *energía*. La importancia de este último concepto surge del *principio de conservación de la energía*, el cual establece que la energía es una entidad que se puede convertir de una forma a otra, pero no se crea ni destruye. En un motor de automóvil, la energía química almacenada en el combustible se convierte parcialmente en la energía de movimiento del automóvil, y parcialmente en energía térmica. En un horno de microondas, la energía electromagnética se convierte en energía térmica para cocinar los alimentos. En estos y todos los procesos en general, la energía *total*, es decir, la suma de toda la energía presente en diferentes formas, no cambia. Todavía no se ha encontrado alguna excepción.

Usaremos el concepto de energía en el resto del libro para estudiar una amplísima gama de fenómenos físicos. La energía nos ayudará a entender por qué un abrigo nos mantiene calientes, cómo el flash de una cámara produce un destello de luz, y el significado de la famosa ecuación de Einstein $E = mc^2$.

En este capítulo, no obstante, nos concentraremos en la mecánica. Conoceremos una forma importante de energía llamada *energía cinética* o energía de movimiento, y su relación con el concepto de *trabajo*. También consideraremos la *potencia*, que es la rapidez con que se realiza trabajo. En el capítulo 7 ampliaremos las ideas de trabajo y energía cinética, para comprender más a fondo los conceptos de energía y conservación de la energía.

6.1 Trabajo

Seguramente usted estará de acuerdo en que cuesta trabajo mover un sofá pesado, levantar una pila de libros del piso para colocarla en un estante alto, o empujar un automóvil averiado para retirarlo de la carretera. Desde luego, todos estos ejemplos coinciden con el significado cotidiano de *trabajo*: cualquier actividad que requiere un esfuerzo muscular o mental.

En física, el trabajo tiene una definición mucho más precisa. Al utilizar esa definición, descubriremos que, en cualquier movimiento, por complicado que sea, el trabajo total realizado sobre una partícula por todas las fuerzas que actúan sobre ella es igual al cambio en su *energía cinética*: una cantidad relacionada con la rapidez de la partícula. Esta relación se cumple aun cuando dichas fuerzas no sean constantes, una situación que puede ser difícil o imposible de manejar con las técnicas que estudiamos en los capítulos 4 y 5. Los conceptos de trabajo y energía cinética nos permitirán resolver problemas de mecánica que no podríamos haber resuelto antes.

En esta sección aprenderemos cómo se define el trabajo y cómo se calcula en diversas situaciones que implican fuerzas *constantes*. Aunque ya sabemos cómo resolver problemas donde las fuerzas son constantes, el concepto de trabajo también es útil en esos problemas. Más adelante en este capítulo deduciremos la relación entre trabajo y energía cinética, y la aplicaremos después en problemas donde las fuerzas *no* son constantes.

Los tres ejemplos de trabajo antes mencionados —mover un sofá, levantar una pila de libros y empujar un automóvil— tienen algo en común; en todos los casos se realiza trabajo ejerciendo una *fuerza* sobre un cuerpo mientras este se *mueve* de un lugar a otro, es decir, experimenta un *desplazamiento* (figura 6.1). Se efectúa más trabajo si la fuerza es mayor (se empuja más fuerte el auto) o si el desplazamiento es mayor (se empuja el auto una mayor distancia).

La definición física del trabajo se basa en estas observaciones. Considere un cuerpo que experimenta un desplazamiento de magnitud s en línea recta. (Por ahora, supondremos que todo cuerpo puede tratarse como una partícula y despreciaremos cualquier rotación o los cambios en la forma del cuerpo). Mientras el cuerpo se mueve, una fuerza constante $\vec{F}$ actúa sobre él en la dirección del desplazamiento $\vec{s}$ (figura 6.2). Definimos el **trabajo** W realizado por esta fuerza constante en dichas condiciones como el producto de la magnitud F de la fuerza por la magnitud s del desplazamiento:

$$W = Fs \quad \text{(fuerza constante en dirección del desplazamiento rectilíneo)} \qquad (6.1)$$

El trabajo efectuado sobre el cuerpo es mayor si la fuerza F o el desplazamiento s son mayores, de acuerdo con las observaciones anteriores.

CUIDADO **Trabajo = W, peso = w** No confunda la W mayúscula (trabajo) con la w minúscula (peso). Si bien los símbolos son similares, trabajo y peso son cantidades distintas.

La unidad de trabajo en el SI es el **joule** (que se abrevia J y se pronuncia “yul”, nombrado así en honor del físico inglés del siglo XIX James Prescott Joule). En la ecuación (6.1), vemos que, en cualquier sistema de unidades, la unidad de trabajo es la unidad de fuerza multiplicada por la unidad de distancia. En el SI la unidad de fuerza es el newton y la unidad de distancia es el metro, así que 1 joule equivale a un *newton-metro* (N·m):

$$1 \text{ joule} = (1 \text{ newton})(1 \text{ metro}) \qquad \text{o bien,} \qquad 1\text{ J} = 1\text{ N}\cdot\text{m}$$

En el sistema británico, la unidad de fuerza es la libra (lb), la unidad de distancia es el pie (ft), y la unidad de trabajo es el *pie-libra* (ft·lb). Las conversiones que siguen son útiles:

$$1\text{ J} = 0.7376\text{ ft}\cdot\text{lb} \qquad 1\text{ ft}\cdot\text{lb} = 1.356\text{ J}$$

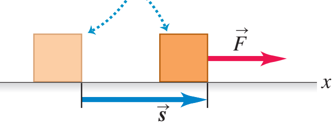
Como ilustración de la ecuación (6.1), pensemos en una persona que empuja un automóvil averiado. Si lo empuja y tiene un desplazamiento $\vec{s}$ con una fuerza cons-

6.1 Esta persona realiza trabajo cuando empuja el vehículo averiado, porque ejerce una fuerza sobre el auto al moverlo.



6.2 Trabajo realizado por una fuerza constante que actúa en la misma dirección del desplazamiento.

Si un cuerpo tiene un desplazamiento $\vec{s}$ mientras una fuerza constante $\vec{F}$ actúa sobre él en la misma dirección ...

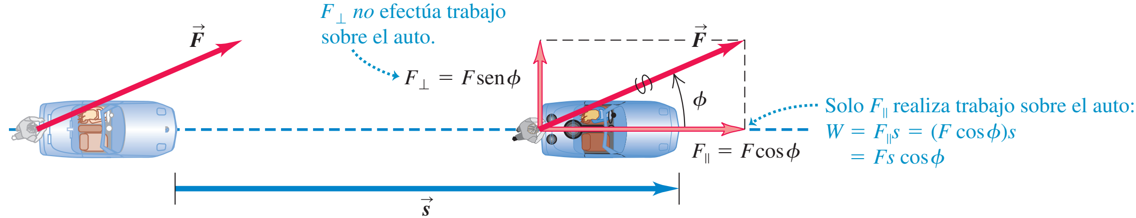


... el trabajo realizado por la fuerza sobre el cuerpo es $W = Fs$.

Aplicación Trabajo y fibras musculares
Nuestra habilidad para realizar trabajo sobre otros cuerpos proviene de nuestros músculos esqueléticos. Las células alargadas del músculo esquelético, mostradas en esta micrográfica, tienen la habilidad de acortarse, provocando que el músculo, como un todo, se contraiga y ejerza una fuerza sobre los tendones a los cuales está unido. El músculo puede ejercer una fuerza aproximada de 0.3 N por milímetro cuadrado de área transversal: cuanto mayor sea la sección transversal, más fibras tiene el músculo y mayor fuerza podrá ejercer al contraerse.



6.3 Trabajo realizado por una fuerza constante que actúa con un ángulo relativo al desplazamiento.





ActivPhysics 5.1: Work Calculations

tante $\vec{F}$ en la dirección del movimiento, la cantidad de trabajo que realiza sobre el auto está dada por la ecuación (6.1): $W = Fs$. Sin embargo, ¿qué ocurre si la persona empuja con un ángulo ϕ con respecto al desplazamiento del automóvil (figura 6.3)? Entonces $\vec{F}$ tiene una componente $F_\parallel = F \cos \phi$ en la dirección del desplazamiento y una componente $F_\perp = F \operatorname{sen} \phi$ que actúa perpendicular al desplazamiento. (Otras fuerzas actúan sobre el automóvil, no necesariamente en la dirección de $\vec{F}$ cuando se mueve en la dirección de $\vec{s}$, sin embargo, solo nos interesa el trabajo realizado por la persona, así que solo consideraremos la fuerza que esta ejerce). En tal caso, solo la componente paralela $F_\parallel$ contribuye a mover el automóvil, por lo que definimos el trabajo como el producto de esta componente de fuerza por la magnitud del desplazamiento. Por lo tanto, $W = F_\parallel s = (F \cos \phi)s$ o bien,

$$W = Fs \cos \phi \qquad \text{(fuerza constante, desplazamiento rectilíneo)} \qquad (6.2)$$

Estamos suponiendo que F y ϕ son constantes durante el desplazamiento. Si $\phi = 0$, de modo que $\vec{F}$ y $\vec{s}$ tienen la misma dirección, entonces $\cos \phi = 1$ y volvemos a la ecuación (6.1).

La ecuación (6.2) tiene la forma del *producto escalar* de dos vectores, presentado en la sección 1.10: $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi$. Quizás usted desee repasar esa definición. Por lo tanto, podemos escribir la ecuación (6.2) de forma más compacta:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \qquad \text{(fuerza constante, desplazamiento rectilíneo)} \qquad (6.3)$$

CUIDADO **El trabajo es un escalar** Veamos un aspecto fundamental: el trabajo es una cantidad *escalar*, aunque se calcule usando dos cantidades vectoriales (fuerza y desplazamiento). Una fuerza de 5 N hacia el este que actúa sobre un cuerpo que se mueve 6 m al este realiza exactamente la misma cantidad de trabajo que una fuerza de 5 N al norte que actúa sobre un cuerpo que se mueve 6 m al norte.

Ejemplo 6.1 Trabajo efectuado por una fuerza constante



a) Steve ejerce una fuerza constante de magnitud igual a 210 N (aproximadamente 47 lb) sobre el automóvil averiado de la figura 6.3, mientras lo empuja una distancia de 18 m. Además, un neumático se desinfló, así que, para lograr que el auto avance al frente, Steve debe empujarlo con un ángulo de 30° con respecto a la dirección del movimiento. ¿Cuánto trabajo efectúa Steve? *b*) Con ánimo de ayudar, Steve empuja un segundo automóvil averiado con una fuerza constante $\vec{F} = (160\text{ N})\hat{\imath} - (40\text{ N})\hat{\jmath}$. El desplazamiento del automóvil es $\vec{s} = (14\text{ m})\hat{\imath} + (11\text{ m})\hat{\jmath}$. ¿Cuánto trabajo efectúa Steve en este caso?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En ambos incisos, *a*) y *b*), la incógnita es el trabajo W efectuado por Steve. En los dos casos, la fuerza es constante y el desplazamiento es rectilíneo, así que podemos usar la ecuación (6.2) o la (6.3). El ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{s}$ se da explícitamente en el inciso *a*), de manera que podemos aplicar directamente la ecuación (6.2). En el inciso *b*), se proporcionan $\vec{F}$ y $\vec{s}$ en términos de las componentes, de modo que es mejor calcular el producto escalar usando la ecuación (1.21): $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$.

EJECUTAR: *a*) A partir de la ecuación (6.2),

$$W = Fs \cos \phi = (210\text{ N})(18\text{ m})\cos 30° = 3.3 \times 10^3\text{ J}$$

b) Las componentes de $\vec{F}$ son $F_x = 160$ N y $F_y = -40$ N, y las componentes de $\vec{s}$ son $x = 14$ m y $y = 11$ m. (No hay componentes z para ningún vector). Así, utilizando las ecuaciones (1.21) y (6.3), tenemos

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{s} = F_x x + F_y y \\ &= (160\text{ N})(14\text{ m}) + (-40\text{ N})(11\text{ m}) \\ &= 1.8 \times 10^3\text{ J} \end{aligned}$$

EVALUAR: En cada caso, el trabajo que efectúa Steve es mayor de 1000 J. Estos resultados indican que 1 joule es relativamente poco trabajo.

6.4 Una fuerza constante $\vec{F}$ puede hacer trabajo positivo, negativo o cero, dependiendo del ángulo entre $\vec{F}$ y el desplazamiento $\vec{s}$.



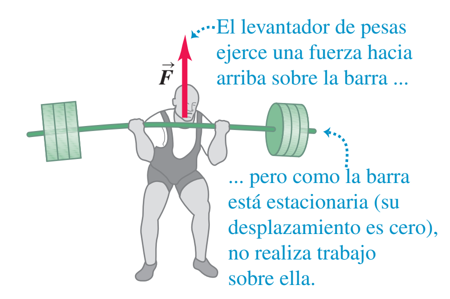
	Dirección de la fuerza (o de la componente de la fuerza)	Situación	Diagrama de fuerzas
a)	**La fuerza $\vec{F}$ tiene una componente en la dirección del desplazamiento:** $W = F_{\parallel}s = (F\cos\phi)s$ El trabajo es *positivo*.	$\vec{F}$ $\vec{F}$ ϕ $\vec{s}$	$F_{\perp}$ $\vec{F}$ ϕ $F_{\parallel} = F\cos\phi$
b)	**La fuerza $\vec{F}$ tiene una componente opuesta a la dirección del desplazamiento:** $W = F_{\parallel}s = (F\cos\phi)s$ El trabajo es *negativo* (porque $F\cos\phi$ es negativo para $90° < \phi < 180°$).	$\vec{F}$ $\vec{F}$ ϕ $\vec{s}$	$\vec{F}$ $F_{\perp}$ ϕ $F_{\parallel} = F\cos\phi$
c)	**La fuerza (o componente $F_{\perp}$ de la fuerza) es perpendicular a la dirección del desplazamiento:** La fuerza (o componente de la fuerza) *no* realiza trabajo sobre el objeto.	$\vec{F}$ $\vec{F}$ $\vec{s}$	$\vec{F}$ $\phi = 90°$

Trabajo: Positivo, negativo o cero

En el ejemplo 6.1, el trabajo efectuado al empujar los autos fue positivo. No obstante, es importante entender que el trabajo también puede ser negativo o cero. Esta es la diferencia esencial entre la definición de trabajo en física y la definición "cotidiana" del mismo. Si la fuerza tiene una componente en la *misma dirección* que el desplazamiento (ϕ entre 0° y 90°), cos ϕ en la ecuación (6.2) es positivo y el trabajo W es *positivo* (figura 6.4*a*). Si la fuerza tiene una componente *opuesta* al desplazamiento (ϕ entre 90° y 180°), cos ϕ es negativo y el trabajo es *negativo* (figura 6.4*b*). Si la fuerza es *perpendicular* al desplazamiento, $\phi = 90°$ y el trabajo realizado por la fuerza es *cero* (figura 6.4*c*). Los casos donde el trabajo es cero y negativo ameritan mayor estudio; veamos algunos ejemplos.

Hay muchas situaciones donde actúan fuerzas, pero sin realizar trabajo. Quizás usted piense que "cuesta trabajo" sostener una barra de halterofilia inmóvil en el aire durante 5 minutos (figura 6.5); pero en realidad no se está realizando trabajo sobre la barra porque no hay desplazamiento. Nos cansamos porque las componentes de las fibras musculares de los brazos realizan trabajo al contraerse y relajarse continuamente. Sin embargo, se trata de trabajo efectuado por una parte del brazo que ejerce fuerza sobre otra, *no* sobre la barra. (En la sección 6.2 hablaremos más del trabajo realizado por una parte de un cuerpo sobre otra). Aun si usted camina con velocidad constante por un piso horizontal llevando un libro, no realiza trabajo sobre este. El libro tiene un desplazamiento, pero la fuerza de soporte (vertical) que usted ejerce sobre el libro no tiene componente en la dirección (horizontal) del movimiento: $\phi = 90°$ en la ecuación (6.2) y cos $\phi = 0$. Si un cuerpo se desliza por una superficie, el trabajo realizado sobre él por la fuerza normal es cero; y cuando una pelota atada a una cuerda se mueve con movimiento circular uniforme, el trabajo realizado sobre ella por la tensión en la cuerda es cero. En ambos casos, el trabajo es cero porque la fuerza no tiene componente en la dirección del movimiento.

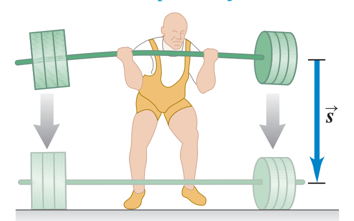
6.5 Un levantador de pesas no realiza trabajo sobre una barra si la mantiene estacionaria.



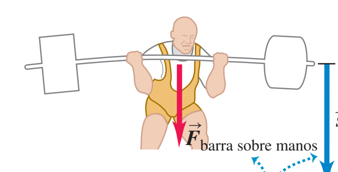
¿Qué significa realmente realizar trabajo *negativo*? La respuesta está en la tercera ley de Newton del movimiento. Cuando un levantador de pesas baja una barra como en la figura 6.6*a*, sus manos y la barra se mueven juntas con el mismo desplazamiento $\vec{s}$. La barra ejerce una fuerza $\vec{F}_{\text{barra sobre manos}}$ sobre sus manos en la misma dirección que el desplazamiento de estas, así que el trabajo realizado por la *barra* sobre sus *manos* es positivo (figura 6.6*b*). Sin embargo, por la tercera ley de Newton, las manos del levantador de pesas ejercen una fuerza igual y opuesta $\vec{F}_{\text{manos sobre barra}} = -\vec{F}_{\text{barra sobre manos}}$ sobre la barra (figura 6.6*c*). Esta fuerza, que evita que la barra se estrelle contra el piso, actúa opuesta al desplazamiento de la barra. Por lo tanto, el trabajo realizado por sus *manos* sobre la *barra* es negativo. Puesto que

6.6 Las manos de este levantador de pesas efectúan trabajo negativo sobre la barra, mientras que la barra realiza trabajo positivo sobre sus manos.

a) Un levantador de pesas baja una barra al piso.

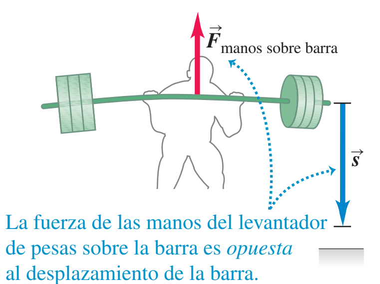


b) La barra efectúa trabajo *positivo* sobre las manos del levantador de pesas.



La fuerza de la barra sobre las manos del levantador de pesas tiene la *misma* dirección que el desplazamiento de las manos.

c) Las manos del levantador de pesas realizan trabajo *negativo* sobre la barra.



La fuerza de las manos del levantador de pesas sobre la barra es *opuesta* al desplazamiento de la barra.

las manos del levantador de pesas y la barra tienen el mismo desplazamiento, el trabajo realizado por sus manos sobre la barra es justo el negativo del realizado por la barra sobre sus manos. En general, cuando un cuerpo realiza trabajo negativo sobre otro cuerpo, este realiza una cantidad igual de trabajo *positivo* sobre el primero.

CUIDADO **Tenga presente quién efectúa el trabajo** Siempre hablamos de trabajo realizado *sobre* un cuerpo específico *por* una fuerza determinada. Nunca olvide especificar exactamente qué fuerza realiza el trabajo en cuestión. Si levantamos un libro, ejercemos una fuerza hacia arriba sobre el libro y el desplazamiento de este es hacia arriba, así que el trabajo realizado por la fuerza de levantamiento sobre el libro es positivo. En cambio, el trabajo realizado por la fuerza *gravitacional* (peso) sobre el libro que se levanta es *negativo*, porque tal fuerza es opuesta al desplazamiento hacia arriba.

Trabajo total

¿Cómo calculamos el trabajo cuando *varias* fuerzas actúan sobre un cuerpo? Podemos usar las ecuaciones (6.2) o (6.3) para calcular el trabajo realizado por cada fuerza individual. Puesto que el trabajo es una cantidad escalar, el trabajo *total* W_{tot} realizado por todas las fuerzas sobre el cuerpo es la suma algebraica de los trabajos realizados por las fuerzas individuales. Otra forma de obtener W_{tot} es calcular la suma vectorial de las fuerzas (es decir, la fuerza neta) y usarla en lugar de $\vec{F}$ en la ecuación (6.2) o (6.3). El siguiente ejemplo ilustra ambas técnicas.

Ejemplo 6.2 Trabajo realizado por varias fuerzas



Un granjero engancha un remolque cargado con leña a su tractor y lo arrastra 20 m sobre el suelo horizontal (figura 6.7*a*). El peso total del remolque y la carga es de 14,700 N. El tractor ejerce una fuerza constante de 5000 N a 36.9° sobre la horizontal. Una fuerza de fricción de 3500 N se opone al movimiento del remolque. Calcule el trabajo realizado por cada fuerza que actúa sobre el remolque y el trabajo total de todas las fuerzas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Todas las fuerzas son constantes y el desplazamiento del remolque es rectilíneo, de manera que podemos calcular el trabajo empleando los conceptos usados en esta sección. Obtendremos el trabajo total de dos maneras: **1.** sumando los trabajos efectuados por cada fuerza sobre el remolque, y **2.** calculando el trabajo efectuado por la fuerza neta que actúa sobre el remolque. Primero dibujaremos un diagrama de cuerpo libre que muestre todas las fuerzas que actúan sobre el remolque y elegiremos un sistema de coordenadas (figura 6.7*b*). Conocemos el ángulo entre el desplazamiento (en la dirección $+x$) y cada una de las cuatro fuerzas: peso, fuerza normal, fuerza del tractor y fuerza de fricción. Por lo tanto, con la ecuación (6.2) calculamos el trabajo realizado por cada fuerza.

Como vimos en el capítulo 5, para obtener la fuerza neta sumamos las componentes de las cuatro fuerzas. La segunda ley de Newton nos dice que, como el movimiento del remolque es exclusivamente horizontal, la fuerza neta solo tiene la componente horizontal.

EJECUTAR: **1.** El trabajo W_w realizado por el peso es cero, porque su dirección es perpendicular al desplazamiento (compare esto con la figura 6.4*c*). Por la misma razón, el trabajo W_n realizado por la fuerza normal es cero. (Observe que no necesitamos calcular la magnitud n para concluir esto). Entonces, $W_w = W_n = 0$.

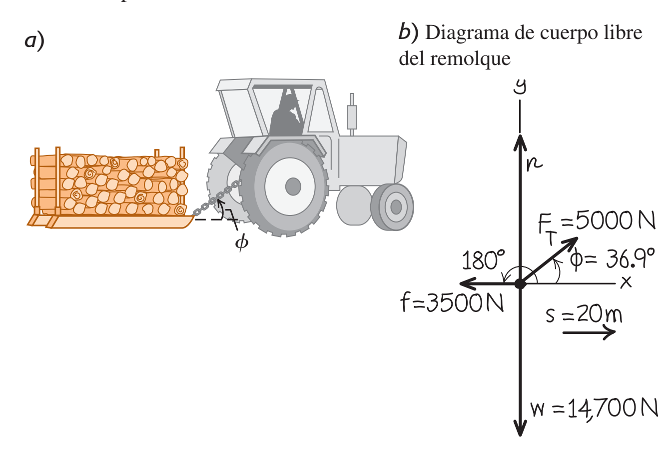
Nos queda el trabajo W_T efectuado por la fuerza F_T ejercida por el tractor y el trabajo W_f realizado por la fuerza de fricción f. De acuerdo con la ecuación (6.2),

$$W_T = F_T s\cos\phi = (5000\ \text{N})(20\ \text{m})(0.800) = 80{,}000\ \text{N}\cdot\text{m} \\ = 80\ \text{kJ}$$

La fuerza de fricción $\vec{f}$ es opuesta al desplazamiento, así que $\phi = 180°$ y $\cos\phi = -1$. Nuevamente, por la ecuación (6.2),

$$W_f = fs\cos 180° = (3500\ \text{N})(20\ \text{m})(-1) = -70{,}000\ \text{N}\cdot\text{m} \\ = -70\ \text{kJ}$$

6.7 Cálculo del trabajo realizado sobre un remolque con leña que es arrastrado por un tractor.



El trabajo total W_{tot} realizado por todas las fuerzas sobre el remolque es la suma *algebraica* del trabajo realizado por cada fuerza individual:

$$W_{tot} = W_w + W_n + W_T + W_f = 0 + 0 + 80\text{ kJ} + (-70\text{ kJ}) = 10\text{ kJ}$$

2. En el segundo enfoque, primero obtenemos la suma *vectorial* de todas las fuerzas (la fuerza neta) y la usamos para calcular el trabajo total. La mejor forma de hacerlo es usando componentes. De la figura 6.7*b*,

$$\sum F_x = F_T \cos\phi + (-f) = (5000\text{ N})\cos 36.9° - 3500\text{ N} = 500\text{ N}$$

$$\sum F_y = F_T \operatorname{sen}\phi + n + (-w) = (5000\text{ N})\operatorname{sen} 36.9° + n - 14{,}700\text{ N}$$

No necesitamos la segunda ecuación; sabemos que la componente y de fuerza es perpendicular al desplazamiento, así que no realiza trabajo. Además, no hay componente *y* de aceleración, así que de cualquier forma $\sum F_y$ debe ser cero. Por lo tanto, el trabajo total es el realizado por la componente *x* total:

$$W_{tot} = \left(\sum \vec{F}\right)\cdot\vec{s} = \left(\sum F_x\right)s = (500\text{ N})(20\text{ m}) = 10{,}000\text{ J} = 10\text{ kJ}$$

EVALUAR: Obtenemos el mismo valor de W_{tot} con los dos métodos, como debe ser. Observe también que la fuerza neta en la dirección *x no* es cero, así que el remolque se está acelerando. En la sección 6.2 volveremos a este ejemplo y veremos cómo usar el concepto de trabajo para analizar los cambios de rapidez del remolque.

Evalúe su comprensión de la sección 6.1 Un electrón se mueve en línea recta hacia el este con una rapidez constante de 8×10^7 m/s. Sobre él actúan tres fuerzas: eléctrica, magnética y gravitacional. Durante un desplazamiento de 1 metro, el trabajo total efectuado sobre el electrón es **i.** positivo, **ii.** negativo, **iii.** cero; **iv.** no hay suficiente información para determinarlo.



6.2 Energía cinética y el teorema trabajo-energía



PhET: The Ramp

El trabajo total realizado por fuerzas externas sobre un cuerpo se relaciona con el desplazamiento de este, es decir, con los cambios en su posición, pero también está relacionado con los cambios en la *rapidez* del cuerpo. Para comprobarlo, considere la figura 6.8, que muestra tres ejemplos de un bloque que se desliza sobre una mesa sin fricción. Las fuerzas que actúan sobre el bloque son su peso $\vec{w}$, la fuerza normal $\vec{n}$ y la fuerza $\vec{F}$ ejercida por la mano.

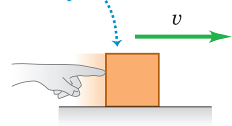
En la figura 6.8*a*, la fuerza neta sobre el bloque está en la dirección de su movimiento. Por la segunda ley de Newton, esto significa que el bloque se acelera; la ecuación (6.1) nos indica también que el trabajo total W_{tot} efectuado sobre el bloque es positivo. El trabajo total es *negativo* en la figura 6.8*b* porque la fuerza neta se opone al desplazamiento; aquí el bloque se frena. La fuerza neta es cero en la figura 6.8*c*, así que la rapidez del bloque no cambia y el trabajo total efectuado sobre él es cero. Podemos concluir que, *cuando una partícula se desplaza, se acelera si* $W_{tot} > 0$, *se frena si* $W_{tot} < 0$ *y mantiene su rapidez si* $W_{tot} = 0$.

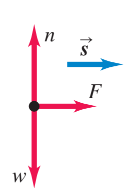
Hagamos más cuantitativas tales observaciones. Considere una partícula con masa *m* que se mueve en el eje *x* bajo la acción de una fuerza neta constante de magnitud *F* dirigida a lo largo del eje +*x* (figura 6.9). La aceleración de la partícula es constante y está dada por la segunda ley de Newton, $F = ma_x$. Suponga que la rapidez cambia de v_1 a v_2 mientras la partícula experimenta un desplazamiento $s = x_2 - x_1$ desde el

6.8 Relación entre el trabajo total efectuado sobre un cuerpo y el cambio en la rapidez del cuerpo.

a)

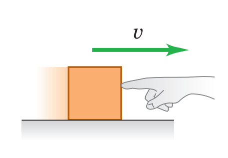
Un bloque que se desliza hacia la derecha sobre una superficie sin fricción.

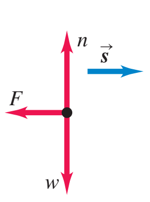




• El trabajo total efectuado sobre el bloque durante un desplazamiento $\vec{s}$ es positivo: $W_{tot} > 0$.
• El bloque aumenta de rapidez.

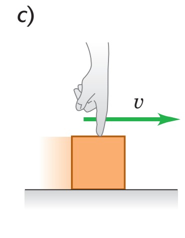
b)

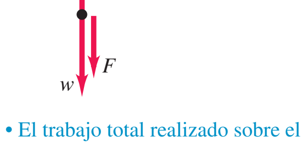




• El trabajo total efectuado sobre el bloque durante un desplazamiento $\vec{s}$ es negativo: $W_{tot} < 0$.
• El bloque se frena.

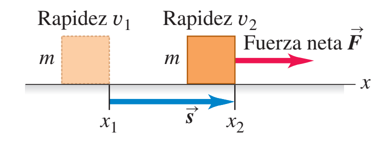
c)





• El trabajo total realizado sobre el bloque durante un desplazamiento $\vec{s}$ es cero: $W_{tot} = 0$.
• La rapidez del bloque permanece igual.

6.9 Una fuerza neta constante $\vec{F}$ realiza trabajo sobre un cuerpo en movimiento.



punto x_1 al x_2. Usando una ecuación de aceleración constante, la ecuación (2.13), y sustituyendo v_{0x} por v_1, v_x por v_2 y $(x - x_0)$ por s, tenemos

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a_x s$$

$$a_x = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s}$$

Al multiplicar esta ecuación por m e igualar ma_x a la fuerza neta F, obtenemos

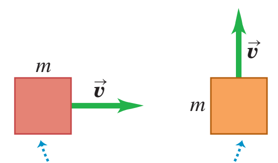
$$F = ma_x = m\frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} \quad \text{y}$$

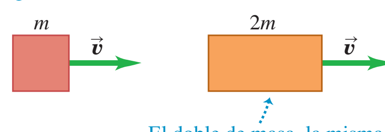
$$Fs = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \tag{6.4}$$

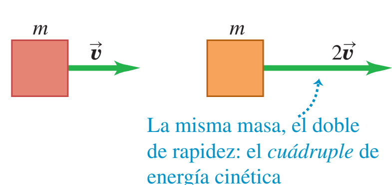
El producto Fs es el trabajo efectuado por la fuerza neta F y, por lo tanto, es igual al trabajo total W_{tot} realizado por todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. Llamamos a la cantidad $\frac{1}{2}mv^2$ la **energía cinética** K de la partícula:

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(definición de energía cinética)} \tag{6.5}$$

6.10 Comparación de la energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ de diferentes cuerpos.







Al igual que el trabajo, la energía cinética de una partícula es una cantidad escalar; solo depende de la masa y la rapidez de la partícula, no de la dirección del movimiento (figura 6.10). Un automóvil (visto como partícula) tiene la misma energía cinética cuando va hacia el norte a 10 m/s que cuando va hacia el este a 10 m/s. La energía cinética nunca puede ser negativa, y es cero solo si la partícula está en reposo.

Ahora podemos interpretar la ecuación (6.4) en términos de trabajo y energía cinética. El primer término del miembro derecho de la ecuación (6.4) es $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$, la energía cinética final de la partícula (es decir, después del desplazamiento). El segundo término es la energía cinética inicial, $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$, y la diferencia entre estos términos es el cambio de energía cinética. Entonces, la ecuación (6.4) nos dice que:

El trabajo efectuado por la fuerza neta sobre una partícula es igual al cambio de energía cinética de la partícula:

$$W_{tot} = K_2 - K_1 = \Delta K \qquad \text{(teorema trabajo-energía)} \tag{6.6}$$

Este resultado es el **teorema de trabajo-energía**.

El teorema trabajo-energía concuerda con nuestras observaciones acerca del bloque de la figura 6.8. Si W_{tot} es *positivo*, la energía cinética *aumenta* (la energía cinética final K_2 es mayor que la energía cinética inicial K_1) y la partícula tiene mayor rapidez al final del desplazamiento que al principio. Si W_{tot} es *negativo*, la energía cinética *disminuye* (K_2 es menor que K_1) y la rapidez es menor después del desplazamiento. Si $W_{tot} = 0$, la energía cinética permanece igual ($K_1 = K_2$) y la rapidez no cambia. Observe que el teorema trabajo-energía solo indica los cambios en la *rapidez*, no en la velocidad, pues la energía cinética no depende de la dirección del movimiento.

De acuerdo con la ecuación (6.4) o la (6.6), la energía cinética y el trabajo deben tener las mismas unidades. Por lo tanto, el joule es la unidad del SI tanto del trabajo como de la energía cinética (y, como veremos, de todos los tipos de energía). Para verificarlo, observe que en el SI la cantidad $K = \frac{1}{2}mv^2$ tiene unidades de $\text{kg}\cdot(\text{m/s})^2$ o $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$; recordemos que $1\text{ N} = 1\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$, así que

$$1\text{ J} = 1\text{ N}\cdot\text{m} = 1\ (\text{kg}\cdot\text{m/s}^2)\cdot\text{m} = 1\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$$

En el sistema británico, la unidad de energía cinética y trabajo es

$$1\text{ ft}\cdot\text{lb} = 1\text{ ft}\cdot\text{slug}\cdot\text{ft/s}^2 = 1\text{ slug}\cdot\text{ft}^2/\text{s}^2$$

Puesto que usamos las leyes de Newton para deducir el teorema trabajo-energía, solo podemos usarlo en un marco de referencia inercial. Observe también que el teorema es válido en *cualquier* marco inercial; sin embargo, los valores de W_{tot} y $K_2 - K_1$ podrían diferir de un marco inercial a otro (porque el desplazamiento y la rapidez de un cuerpo pueden ser distintos en marcos diferentes).

Dedujimos el teorema trabajo-energía para el caso especial de movimiento rectilíneo con fuerzas constantes, y en los siguientes ejemplos solo lo aplicaremos a ese caso especial. En la siguiente sección veremos que el teorema es válido en general, aun si las fuerzas no son constantes y la trayectoria de la partícula es curva.

Estrategia para resolver problemas 6.1 Trabajo y energía cinética



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* El teorema trabajo-energía, $W_{tot} = K_2 - K_1$, es extremadamente útil en situaciones donde se desea relacionar la rapidez v_1 de un cuerpo en un punto de su movimiento, con su rapidez v_2 en otro punto. (El enfoque es menos útil en problemas donde interviene el *tiempo* que tarda un cuerpo en ir del punto 1 al punto 2, porque en el teorema trabajo-energía no interviene el tiempo. En estos problemas suele ser mejor utilizar las relaciones entre tiempo, posición, velocidad y aceleración descritas en los capítulos 2 y 3).

PLANTEAR *el problema* aplicando los siguientes pasos:

1. Identifique las posiciones inicial y final del cuerpo, y dibuje un diagrama de cuerpo libre con todas las fuerzas que actúan sobre él.
2. Elija un sistema de coordenadas. (Si el movimiento es rectilíneo, lo más fácil suele ser que las posiciones tanto inicial como final estén sobre uno de los ejes).
3. Elabore una lista de las cantidades conocidas y desconocidas, e identifique las incógnitas. La incógnita puede ser la rapidez inicial o final; la magnitud de una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, o el desplazamiento de este.

EJECUTAR *la solución:* Calcule el trabajo W efectuado por cada fuerza. Si la fuerza es constante y el desplazamiento es en línea recta, se puede usar la ecuación (6.2) o la (6.3). (Más adelante, en este capítulo, veremos cómo manejar fuerzas variables y trayectorias curvas). Revise los signos; W debe ser positivo si la fuerza tiene una componente en la dirección del desplazamiento, negativo si la fuerza tiene una componente opuesta al desplazamiento, y cero si la fuerza y el desplazamiento son perpendiculares.

Sume los trabajos realizados por cada fuerza para obtener el trabajo total W_{tot}. Algunas veces es más fácil obtener la suma vectorial de las fuerzas (la fuerza neta) y luego calcular el trabajo efectuado por la fuerza neta; este valor también es W_{tot}.

Escriba expresiones para las energías cinética inicial y final, K_1 y K_2. Tenga presente que en la energía cinética interviene la *masa*, no el *peso*; si se conoce el peso del cuerpo se usa $w = mg$ para calcular la masa.

Por último, use la ecuación (6.6), $W_{tot} = K_2 - K_1$, y la ecuación (6.5), $K = \frac{1}{2}mv^2$ para despejar la incógnita. Recuerde que el miembro derecho de la ecuación (6.6) es el cambio de la energía cinética del cuerpo entre los puntos 1 y 2, es decir, la energía cinética *final* menos la energía cinética *inicial*, nunca al revés. (Si logra predecir el signo de W_{tot}, puede saber si el cuerpo acelera o desacelera).

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que su respuesta sea lógica. Recuerde que la energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ nunca puede ser negativa. Si obtiene una K negativa, quizás intercambió las energías inicial y final en $W_{tot} = K_2 - K_1$ o cometió un error de signo en uno de los cálculos del trabajo.



Ejemplo 6.3 Uso del trabajo y la energía para calcular la rapidez

Veamos otra vez el remolque de la figura 6.7 y los resultados del ejemplo 6.2. Suponga que la rapidez inicial v_1 del remolque es de 2.0 m/s. ¿Cuál es la rapidez del remolque después de avanzar 20 m?

SOLUCIÓN

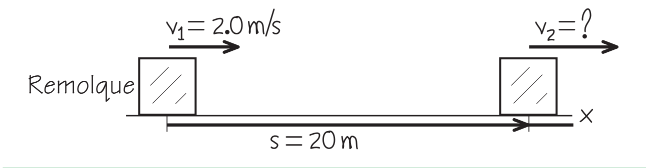
IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos el teorema trabajo-energía, ecuación (6.6), $W_{tot} = K_2 - K_1$, pues se conoce la rapidez inicial $v_1 = 2.0$ m/s y nos piden calcular la rapidez final v_2. La figura 6.11 muestra el esquema de la situación. El movimiento es en la dirección $+x$. Ya calculamos el trabajo total de todas las fuerzas en el ejemplo 6.2: $W_{tot} = 10$ kJ. Por lo tanto, la energía cinética del remolque y su carga debe aumentar en 10 kJ, y la rapidez del remolque también se debe incrementar.

EJECUTAR: Para escribir expresiones de las energías cinéticas inicial y final, necesitamos la masa del remolque y la carga. El *peso* combinado es de 14,700 N, así que la masa es

$$m = \frac{w}{g} = \frac{14{,}700 \text{ N}}{9.8 \text{ m/s}^2} = 1500 \text{ kg}$$

Entonces, la energía cinética inicial K_1 es

$$K_1 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \tfrac{1}{2}(1500 \text{ kg})(2.0 \text{ m/s})^2 = 3000 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 = 3000 \text{ J}$$



6.11 Esquema para este problema.

La energía cinética final K_2 es

$$K_2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 = \tfrac{1}{2}(1500 \text{ kg})v_2^2$$

El teorema trabajo-energía, ecuación (6.6), da

$$K_2 = K_1 + W_{tot} = 3000 \text{ J} + 10{,}000 \text{ J} = 13{,}000 \text{ J}$$

Igualando estas dos expresiones de K_2, sustituyendo $1 \text{ J} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$ y despejando v_2, tenemos

$$v_2 = 4.2 \text{ m/s}$$

EVALUAR: El trabajo total es positivo, de manera que la energía cinética aumenta ($K_2 > K_1$) y la rapidez aumenta ($v_2 > v_1$).

Este problema también se puede resolver sin el enfoque de trabajo-energía. Es posible obtener la aceleración a partir de $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ y luego usar las ecuaciones de movimiento con aceleración constante para calcular v_2. Como la aceleración está a lo largo del eje x,

$$a = a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{500 \text{ N}}{1500 \text{ kg}} = 0.333 \text{ m/s}^2$$

Entonces, usando la ecuación (2.13),

$$v_2^2 = v_1^2 + 2as = (2.0 \text{ m/s})^2 + 2(0.333 \text{ m/s}^2)(20 \text{ m}) = 17.3 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_2 = 4.2 \text{ m/s}$$

Este es el mismo resultado que se obtuvo con el enfoque trabajo-energía; no obstante, ahí evitamos el paso intermedio de calcular la aceleración. Veremos varios ejemplos más en este capítulo y en el siguiente que *pueden* resolverse sin tomar en cuenta la energía, aunque si la consideramos, resultan más fáciles. Cuando un problema puede resolverse con dos métodos distintos, utilizar ambos (como lo hicimos aquí) es una buena forma de comprobar los resultados.



Ejemplo 6.4 Fuerzas sobre un martillo

En un martinete, un martillo de acero de 200 kg se levanta 3.00 m sobre la parte superior de una viga vertical en forma de I que se va a clavar en el suelo (figura 6.12*a*). El martillo se suelta, introduciendo la viga 7.4 cm en el suelo. Los rieles verticales que guían el martillo ejercen una fuerza de fricción constante de 60 N sobre este. Use el teorema trabajo-energía para determinar *a*) la rapidez del martillo justo cuando golpea la viga en forma de I y *b*) la fuerza media que el martillo ejerce sobre la viga. Ignore los efectos del aire.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Usaremos el teorema trabajo-energía para relacionar la rapidez del martillo en distintas ubicaciones con las fuerzas que actúan sobre él. Aquí nos interesan *tres* posiciones: el punto 1, donde el martillo parte del reposo; el punto 2, donde hace contacto por primera vez con la viga, y el punto 3, donde el martillo y la viga se detienen (véase la figura 6.12*a*). Las dos incógnitas son la rapidez del martillo en el punto 2 y la fuerza media que el martillo ejerce entre los puntos 2 y 3. Entonces, aplicaremos el teorema trabajo-energía dos veces: una para el movimiento de 1 a 2, y otra para el movimiento de 2 a 3.

PLANTEAR: La figura 6.12*b* muestra las fuerzas verticales sobre el martillo conforme cae del punto 1 al punto 2. (Podemos ignorar las fuerzas horizontales cualesquiera que pudieran estar presentes, pues no efectúan trabajo cuando el martillo se desplaza verticalmente). En esta parte del movimiento, la incógnita es la rapidez final del martillo, v_2.

La figura 6.12*c* muestra las fuerzas verticales que actúan sobre el martillo durante el movimiento del punto 2 al punto 3. Además de las fuerzas representadas en la figura 6.12*b*, la viga en forma de I ejerce una fuerza normal hacia arriba de magnitud n sobre el martillo. En realidad, esta fuerza varía conforme el martillo se va deteniendo; pero, por sencillez, consideraremos n constante. Así, n representa el valor *medio* de esta fuerza hacia arriba durante el movimiento. La incógnita en esta parte del movimiento es la fuerza que el *martillo* ejerce sobre la viga; es la fuerza de reacción a la fuerza normal ejercida por la viga, así que por la tercera ley de Newton su magnitud también es n.

EJECUTAR: *a*) Del punto 1 al punto 2, las fuerzas verticales son el peso $w = mg = (200\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) = 1960\text{ N}$ hacia abajo, y la fuerza de fricción $f = 60\text{ N}$ hacia arriba. La fuerza neta hacia abajo es entonces $w - f = 1900\text{ N}$. El desplazamiento del martillo del punto 1 al punto 2 es $s_{12} = 3.00\text{ m}$ hacia abajo. El trabajo total realizado sobre el martillo del punto 1 al 2 es entonces,

$$W_{tot} = (w - f)s_{12} = (1900\text{ N})(3.00\text{ m}) = 5700\text{ J}$$

En el punto 1 el martillo está en reposo, así que su energía cinética K_1 es cero. De manera que la energía cinética K_2 en el punto 2 es igual al trabajo total realizado sobre el martillo entre los puntos 1 y 2:

$$W_{tot} = K_2 - K_1 = K_2 - 0 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - 0$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2W_{tot}}{m}} = \sqrt{\frac{2(5700\text{ J})}{200\text{ kg}}} = 7.55\text{ m/s}$$

Esta es la rapidez del martillo en el punto 2, justo antes de golpear la viga en forma de I.

b) Mientras el martillo se mueve hacia abajo del punto 2 al 3, su desplazamiento es $s_{23} = 7.4\text{ cm} = 0.074\text{ m}$, y la fuerza neta hacia abajo que actúa sobre él es $w - f - n$ (véase la figura 6.12*c*). El trabajo total realizado sobre el martillo durante el desplazamiento es

$$W_{tot} = (w - f - n)s_{23}$$

La energía cinética inicial en esta parte del movimiento es K_2 que, de acuerdo con el inciso *a*), es igual a 5700 J. La energía cinética final es $K_3 = 0$ (el martillo se detiene). Entonces, por el teorema trabajo-energía,

$$W_{tot} = (w - f - n)s_{23} = K_3 - K_2$$

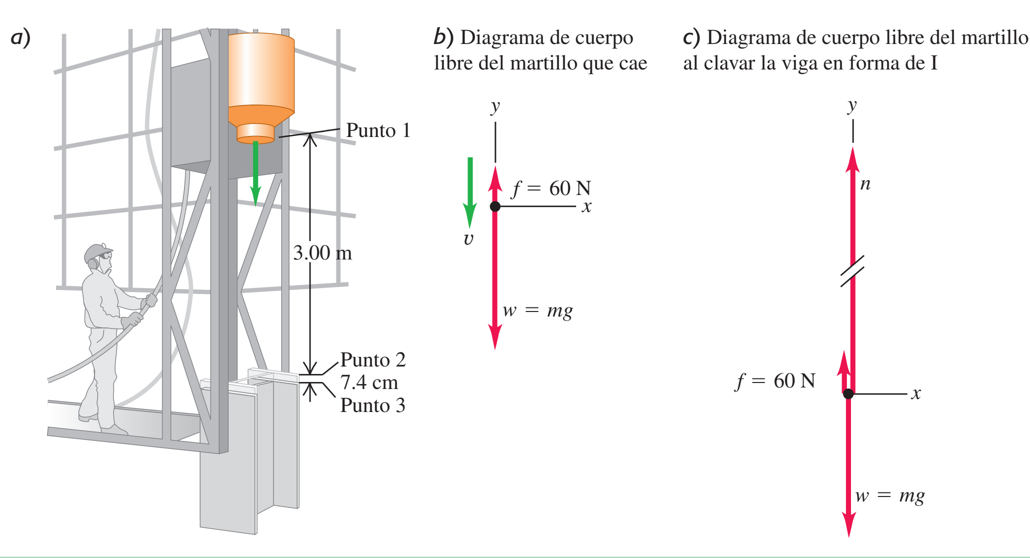
$$n = w - f - \frac{K_3 - K_2}{s_{23}}$$

$$= 1960\text{ N} - 60\text{ N} - \frac{0\text{ J} - 5700\text{ J}}{0.074\text{ m}} = 79{,}000\text{ N}$$

La fuerza hacia abajo que el martillo ejerce sobre la viga en forma de I tiene esta misma magnitud, 79,000 N (unas 9 toneladas): más de 40 veces el peso del martillo.

EVALUAR: El cambio neto en la energía cinética del martillo del punto 1 al punto 3 es cero; una fuerza neta relativamente pequeña efectúa trabajo positivo a lo largo de una distancia grande, y luego una fuerza neta mucho mayor realiza trabajo negativo en una distancia mucho más corta. Lo mismo sucede si usted acelera un automóvil gradualmente y choca contra una pared. La fuerza tan grande necesaria para reducir la energía cinética a cero en una distancia corta es lo que daña el automóvil (y quizás al conductor).

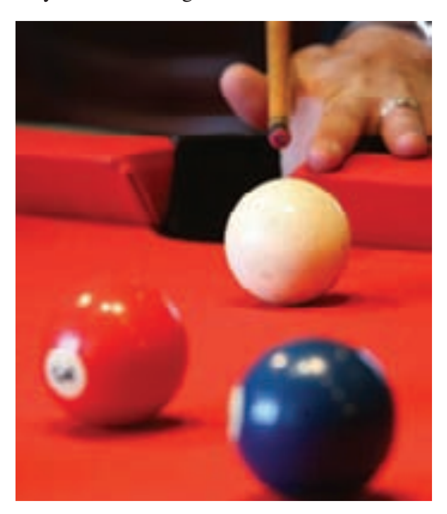
6.12 *a*) Un martinete clava una viga en forma de I en el suelo. *b*), *c*) Diagramas de cuerpo libre. Las longitudes de los vectores no están a escala.



Significado de la energía cinética

El ejemplo 6.4 ilustra el significado físico de la energía cinética. El martillo se deja caer a partir del reposo y, al golpear la viga en forma de I, su energía cinética es igual al trabajo total realizado sobre él hasta ese punto por la fuerza neta. Esto se cumple en general: para acelerar una partícula de masa m desde el reposo (energía cinética igual

6.13 Cuando un jugador de billar golpea una bola blanca en reposo, la energía cinética de la bola después de ser golpeada es igual al trabajo que el taco efectuó sobre ella. Cuanto mayor sea la fuerza ejercida por el taco y mayor sea la distancia que la bola se mueve mientras está en contacto con el taco, mayor será la energía cinética de la bola.



a cero) hasta cierta rapidez, el trabajo total efectuado sobre ella debe ser igual al cambio de energía cinética desde 0 hasta $K = \frac{1}{2}mv^2$:

$$W_{tot} = K - 0 = K$$

Así, *la energía cinética de una partícula es igual al trabajo total que se efectuó para acelerarla desde el reposo hasta su rapidez actual* (figura 6.13). La definición $K = \frac{1}{2}mv^2$ (ecuación 6.5) no se eligió al azar: es la *única* definición que coincide con esta interpretación de la energía cinética.

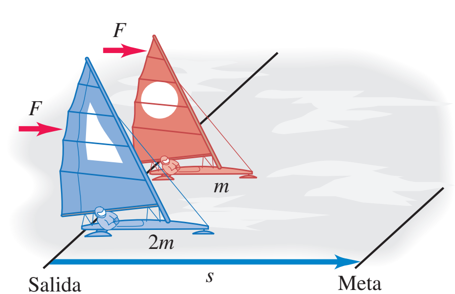
En la segunda parte del ejemplo 6.4, se usó la energía cinética del martillo para efectuar trabajo sobre la viga en forma de I y clavarla en el suelo. Esto nos brinda otra interpretación de la energía cinética: *la energía cinética de una partícula es igual al trabajo total que puede efectuar una partícula mientras se detiene*. Por esa razón, movemos hacia atrás la mano y el brazo cuando atrapamos una pelota. Al detenerse la pelota, realiza una cantidad de trabajo (fuerza por distancia) sobre la mano igual a la energía cinética inicial de la pelota. Al hacer la mano hacia atrás, aumentamos la distancia donde actúa la fuerza y así reducimos la fuerza ejercida sobre nuestra mano.



Ejemplo conceptual 6.5 Comparación de energías cinéticas

Dos veleros para hielo como el del ejemplo 5.6 (sección 5.2) compiten en un lago horizontal sin fricción (figura 6.14). Los veleros tienen masas m y $2m$, respectivamente; pero sus velas son idénticas, así que el viento ejerce la misma fuerza constante $\vec{F}$ sobre cada velero. Los dos veleros parten del reposo y la meta está a una distancia s. ¿Cuál velero cruza la meta con mayor energía cinética?

6.14 Carrera entre veleros en el hielo.



SOLUCIÓN

Si usamos la definición matemática de energía cinética, $K = \frac{1}{2}mv^2$, ecuación (6.5), la respuesta a este problema no es tan evidente. El velero con masa $2m$ tiene mayor masa, y podríamos suponer que alcanza mayor energía cinética en la línea de meta; no obstante, el velero más ligero de masa m tiene mayor aceleración y cruza la meta con mayor rapidez, por lo que podríamos suponer que *este* velero tiene mayor energía cinética. ¿Cómo decidimos?

La clave es recordar que *la energía cinética de una partícula es igual al trabajo total realizado para acelerarla desde el reposo*. Ambos veleros recorren la misma distancia s desde el reposo, y solo la fuerza horizontal F en la dirección del movimiento realiza trabajo sobre ellos. Por lo tanto, el trabajo total efectuado entre la salida y la meta es el *mismo* para los dos veleros, $W_{tot} = Fs$. En la meta, cada velero tiene una energía cinética igual al trabajo W_{tot} efectuado sobre él, ya que cada velero partió del reposo. Así, ¡ambos veleros tienen la *misma* energía cinética en la meta!

Quizás el lector piense que se trata de una pregunta "capciosa", pero no es así. Si usted entiende realmente el significado físico de cantidades como la energía cinética, será capaz de resolver problemas más fácilmente y con mayor comprensión.

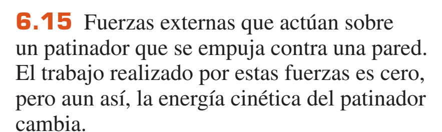
Observe que no tuvimos necesidad de conocer el tiempo que cada velero tardó en llegar a la meta. La razón es que el teorema trabajo-energía no hace referencia directa al tiempo, solo al desplazamiento. De hecho, el velero de masa m tiene una mayor aceleración, por lo que tarda menos tiempo que el velero más grande de masa $2m$ en llegar a la meta.

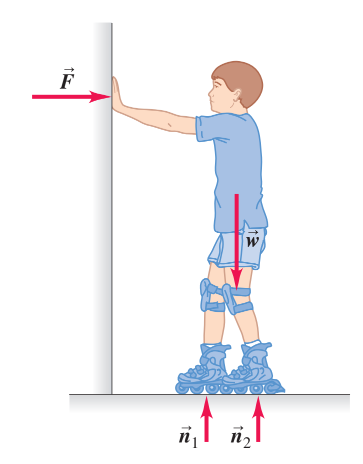
Trabajo y energía cinética en sistemas compuestos

En esta sección nos hemos cuidado de aplicar el teorema trabajo-energía solo a cuerpos que podemos representar como *partículas*, esto es, como masas puntuales en movimiento. En los sistemas complejos que deben representarse en términos de muchas partículas con diferentes movimientos, surgen aspectos más sutiles que no podemos ver con detalle en este capítulo; solo veremos un ejemplo.

Considere a un niño parado en patines, sin fricción, sobre una superficie horizontal viendo hacia una pared rígida (figura 6.15). Él empuja la pared, poniéndose en movimiento hacia la derecha. Las fuerzas que actúan sobre él son su peso $\vec{w}$, las fuerzas normales, $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ hacia arriba ejercidas por el suelo sobre sus patines, y la fuerza horizontal $\vec{F}$ ejercida sobre el niño por la pared. No hay desplazamiento vertical, así que $\vec{w}$, $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ no efectúan trabajo. $\vec{F}$ es la fuerza que lo acelera a la derecha, pero las partes de su cuerpo donde se aplica esa fuerza (las manos del niño) no se mueven mientras actúa la fuerza, así que $\vec{F}$ tampoco realiza trabajo. ¿De dónde proviene entonces la energía cinética del niño?

La explicación es que no es correcto representar al niño como una masa puntual. Diferentes partes del cuerpo tienen distintos movimientos; las manos están estacionarias contra la pared mientras el torso se aleja de esta. Las diversas partes del cuerpo interactúan y una puede ejercer fuerzas y realizar trabajo sobre otra. Por lo tanto, la energía cinética *total* de este sistema de partes corporales *compuesto* puede cambiar, aunque las fuerzas aplicadas por cuerpos externos al sistema (como la pared) no realicen trabajo. En el capítulo 8 veremos más a fondo el movimiento de un conjunto de partículas que interactúan. Descubriremos que, al igual que sucede con el niño del ejemplo, la energía cinética total del sistema puede cambiar aun cuando el exterior no realice trabajo sobre alguna parte del sistema.


6.15 Fuerzas externas que actúan sobre un patinador que se empuja contra una pared. El trabajo realizado por estas fuerzas es cero, pero aun así, la energía cinética del patinador cambia.



Evalúe su comprensión de la sección 6.2 Clasifique los siguientes cuerpos de acuerdo con su energía cinética, de menor a mayor. **i.** Un cuerpo de 2.0 kg que se mueve a 5.0 m/s; **ii.** un cuerpo de 1.0 kg que inicialmente estaba en reposo y que luego tiene 30 J de trabajo realizado sobre él; **iii.** un cuerpo de 1.0 kg que inicialmente estaba moviéndose a 4.0 m/s y luego tiene 20 J de trabajo efectuado sobre él; **iv.** un cuerpo de 2.0 kg que inicialmente estaba moviéndose a 10 m/s y luego realizó 80 J de trabajo sobre otro cuerpo. ❙

6.3 Trabajo y energía con fuerza variable

Hasta ahora hemos considerado solo trabajo efectuado por *fuerzas constantes*. Pero, ¿qué sucede cuando estiramos un resorte? Cuanto más lo estiramos, con más fuerza debemos tirar, así que la fuerza ejercida *no* es constante al estirarlo. También hemos analizado únicamente movimiento *rectilíneo*. Existen muchas situaciones en las que una fuerza, que varía en magnitud, dirección o en ambas, actúa sobre un cuerpo que sigue una trayectoria curva. Necesitamos aprender a calcular el trabajo realizado por la fuerza en estos casos más generales. Por fortuna, veremos que el teorema trabajo-energía se cumple aun cuando las fuerzas varíen y la trayectoria del cuerpo no sea recta.

Trabajo efectuado por una fuerza variable, movimiento rectilíneo

Para agregar solo una complicación a la vez, consideremos un movimiento rectilíneo en el eje x con una fuerza cuya componente F_x varía conforme el cuerpo se mueve. (Un ejemplo de la vida cotidiana es conducir un automóvil en una carretera recta, con señales de alto, de modo que el conductor pisa el acelerador y frena de manera alternada). Suponga que una partícula se mueve sobre el eje x de x_1 a x_2 (figura 6.16*a*). La figura 6.16*b* es una gráfica de la componente x de la fuerza en función de la coordenada x de la partícula. Para determinar el trabajo realizado por esta fuerza, se divide el desplazamiento total en segmentos pequeños, Δx_a, Δx_b, etcétera (figura 6.16*c*). Aproximamos el trabajo realizado por la fuerza en el segmento Δx_a como la componente x media de fuerza F_{ax} en ese segmento multiplicada por el desplazamiento Δx_a. Hacemos esto para cada segmento y después sumamos los resultados de todos los segmentos. El trabajo realizado por la fuerza en el desplazamiento total de x_1 a x_2 es aproximadamente

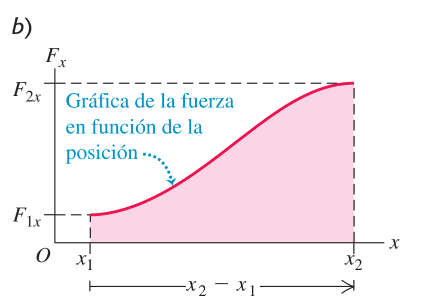
$$W = F_{ax}\Delta x_a + F_{bx}\Delta x_b + \cdots$$

6.16 Cálculo del trabajo efectuado por una fuerza variable F_x en la dirección x cuando una partícula se mueve de x_1 a x_2.

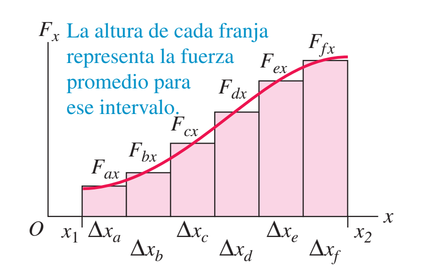
a) La partícula se mueve de x_1 a x_2 en respuesta a una fuerza variable en la dirección x



b)



c)



MasteringPHYSICS®

PhET: Molecular Motors
PhET: Stretching DNA

En el límite donde el número de segmentos se vuelve muy grande y el ancho de los segmentos muy pequeño, la suma se convierte en la *integral* de F_x de x_1 a x_2:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx \qquad \text{(componente } x \text{ de fuerza variable, desplazamiento rectilíneo)} \tag{6.7}$$

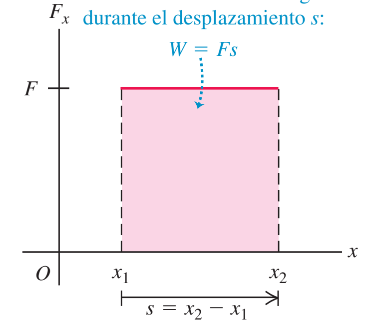
Observe que $F_{ax}\Delta_{xa}$ es el *área* de la primera franja vertical de la figura 6.16*c*, y que la integral de la ecuación (6.7) representa el área bajo la curva de la figura 6.16*b* entre x_1 y x_2. *En una gráfica de fuerza como una función de la posición, el trabajo total realizado por la fuerza está representado por el área bajo la curva entre las posiciones inicial y final.* Otra interpretación de la ecuación (6.7) es que el trabajo W es igual a la fuerza media que actúa a lo largo de todo el desplazamiento, multiplicada por el desplazamiento.

En el caso especial en que F_x, la componente x de la fuerza, es constante, puede sacarse de la integral de la ecuación (6.7):

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = F_x \int_{x_1}^{x_2} dx = F_x(x_2 - x_1) \qquad \text{(fuerza constante)}$$

Pero $x_2 - x_1 = s$, el desplazamiento total de la partícula. Así, en el caso de una fuerza constante F, la ecuación (6.7) indica que $W = Fs$, lo cual coincide con la ecuación (6.1). La interpretación del trabajo como el área bajo la curva de F_x en función de x también es válida para una fuerza constante; $W = Fs$ es el área de un rectángulo de altura F y anchura s (figura 6.17).

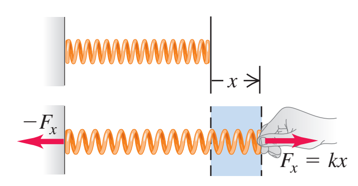
6.17 Trabajo realizado por una fuerza constante F en la dirección x conforme una partícula se mueve de x_1 a x_2.



Apliquemos ahora lo aprendido al resorte estirado. Para mantener un resorte estirado una distancia x más allá de su longitud sin estirar, debemos aplicar una fuerza de igual magnitud en cada extremo (figura 6.18). Si el alargamiento x no es excesivo, la fuerza aplicada al extremo derecho tiene una componente x directamente proporcional a x:

$$F_x = kx \qquad \text{(fuerza requerida para estirar un resorte)} \tag{6.8}$$

6.18 La fuerza necesaria para estirar un resorte ideal es proporcional a su alargamiento: $F_x = kx$.

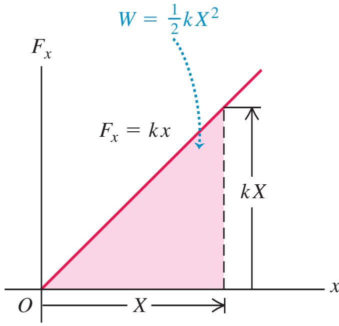


donde k es una constante llamada **constante de fuerza** (o constante de resorte). Las unidades de k son de fuerza dividida entre distancia: N/m en el SI y lb/ft en unidades británicas. Un resorte blando de juguete, como un Slinky™, tiene una constante de fuerza cercana a 1 N/m; para los resortes mucho más rígidos de la suspensión de un automóvil, k es del orden de 10^5 N/m. La observación de que la fuerza es directamente proporcional al alargamiento, cuando este no es demasiado grande, fue realizada por Robert Hooke en 1678 y se conoce como **ley de Hooke**; sin embargo, no debería llamarse "ley", pues es un enunciado acerca de un dispositivo específico, y no una ley fundamental de la naturaleza. Los resortes reales no siempre cumplen con precisión la ecuación (6.8), pero se trata de un modelo idealizado útil. Analizaremos la ley de Hooke más a fondo en el capítulo 11.

Para estirar un resorte, debemos efectuar trabajo. Aplicamos fuerzas iguales y opuestas a los extremos del resorte y las aumentamos gradualmente. Mantenemos fijo el extremo izquierdo, de modo que la fuerza aplicada en este punto no efectúa trabajo. La fuerza en el extremo móvil sí *efectúa* trabajo. La figura 6.19 es una gráfica de F_x como función de x, el alargamiento del resorte. El trabajo realizado por esta fuerza cuando el alargamiento va de cero a un valor máximo X es

$$W = \int_0^X F_x\,dx = \int_0^X kx\,dx = \tfrac{1}{2}kX^2 \tag{6.9}$$

6.19 Cálculo del trabajo efectuado para estirar un resorte una longitud X.



También podemos obtener este resultado gráficamente. El área del triángulo sombreado de la figura 6.19, que representa el trabajo total realizado por la fuerza, es igual a la mitad del producto de la base y la altura:

$$W = \tfrac{1}{2}(X)(kX) = \tfrac{1}{2}kX^2$$

Esta ecuación también indica que el trabajo es la fuerza *media* $kX/2$ multiplicada por el desplazamiento total X. Vemos que el trabajo total es proporcional al *cuadrado* del alargamiento final X. Para estirar un resorte ideal 2 cm, necesitamos efectuar cuatro veces más trabajo que para estirarlo 1 cm.

La ecuación (6.9) supone que el resorte no estaba estirado originalmente. Si el resorte ya está estirado una distancia x_1, el trabajo necesario para estirarlo a una distancia mayor x_2 (figura 6.20*a*) es

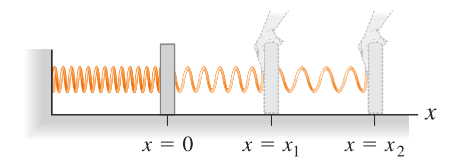
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx = \int_{x_1}^{x_2} kx\, dx = \tfrac{1}{2}kx_2^2 - \tfrac{1}{2}kx_1^2 \qquad (6.10)$$

El lector debería utilizar lo que sabe de geometría para convencerse de que el área trapezoidal bajo la línea en la figura 6.20*b* está dada por la expresión de la ecuación (6.10).

Si el resorte tiene espacios entre las espiras cuando no está estirado, puede comprimirse, y la ley de Hooke se cumple también para la compresión. En este caso, la fuerza y el desplazamiento tienen direcciones opuestas a las de la figura 6.18, así que F_x y x en la ecuación (6.8) son negativas. Como F_x y x se invierten, de nuevo la fuerza tiene la misma dirección del desplazamiento y el trabajo realizado por F_x otra vez es positivo. Entonces, el trabajo total sigue siendo el que se encuentra mediante la ecuación (6.9) o la (6.10), aun si X es negativo o x_1 o x_2, o ambos, son negativos.

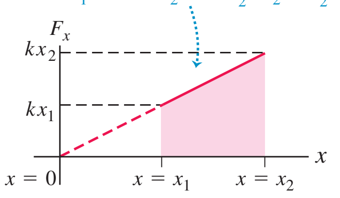
6.20 Cálculo del trabajo efectuado para estirar un resorte desde cierta extensión hasta una extensión mayor.

a) Estiramiento de un resorte de una elongación x_1 a una elongación x_2



b) Gráfica de fuerza contra distancia

El área trapezoidal bajo la línea representa el trabajo efectuado sobre el resorte para estirarlo de $x = x_1$ a $x = x_2$: $W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$



CUIDADO **Trabajo efectuado *sobre* un resorte contra trabajo efectuado *por* un resorte** Observe que el trabajo que se determina mediante la ecuación (6.10) es el que *usted* debe efectuar *sobre* un resorte para cambiar su longitud. Por ejemplo, si estira un resorte que originalmente está relajado, $x_1 = 0$, $x_2 > 0$ y $W > 0$: la fuerza aplicada por usted a un extremo del resorte tiene la misma dirección que el desplazamiento, y el trabajo efectuado es positivo. En cambio, el trabajo que el *resorte* efectúa sobre el objeto al que se une está dado por el *negativo* de la ecuación (6.10). Por lo tanto, cuando estiramos un resorte, este efectúa trabajo negativo sobre nosotros. ¡Fíjese bien en el signo del trabajo para evitar confusiones más adelante!



Ejemplo 6.6 Trabajo sobre una balanza de resorte

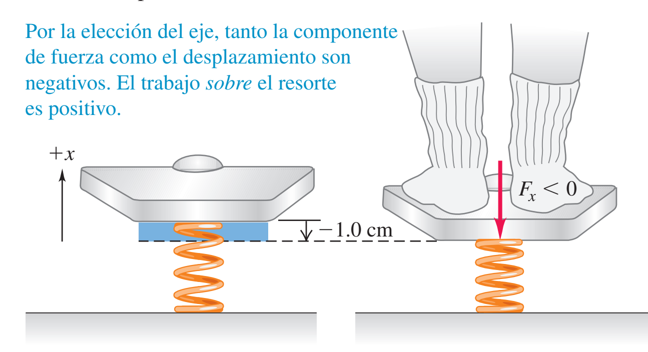
Una mujer que pesa 600 N se sube a una báscula que contiene un resorte rígido (figura 6.21). En equilibrio, el resorte se comprime 1.0 cm bajo su peso. Calcule la constante de fuerza del resorte y el trabajo total efectuado sobre él durante la compresión.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En equilibrio, la fuerza hacia arriba ejercida por el resorte equilibra la fuerza hacia abajo del peso de la mujer. Usaremos este principio y la ecuación (6.8) para determinar la constante de fuerza k, y emplearemos la ecuación (6.10) para calcular el trabajo W que la mujer efectúa sobre el resorte para comprimirlo. Hacemos que los valores positivos de x correspondan al alargamiento (hacia arriba en la figura 6.21), de modo que tanto el desplazamiento del extremo del resorte (x) como la componente x de la fuerza que la mujer ejerce sobre él (F_x) sean negativos. La fuerza aplicada y el desplazamiento tienen la misma dirección, de modo que el trabajo realizado sobre el resorte es positivo.

6.21 Compresión de un resorte en una báscula de baño.

Por la elección del eje, tanto la componente de fuerza como el desplazamiento son negativos. El trabajo *sobre* el resorte es positivo.



EJECUTAR: La parte superior del resorte se desplaza $x = -1.0$ cm $= -0.010$ m, y la fuerza que la mujer aplica al resorte es $F_x = -600$ N. De acuerdo con la ecuación (6.8), la constante de fuerza es

$$k = \frac{F_x}{x} = \frac{-600\ \text{N}}{-0.010\ \text{m}} = 6.0 \times 10^4\ \text{N/m}$$

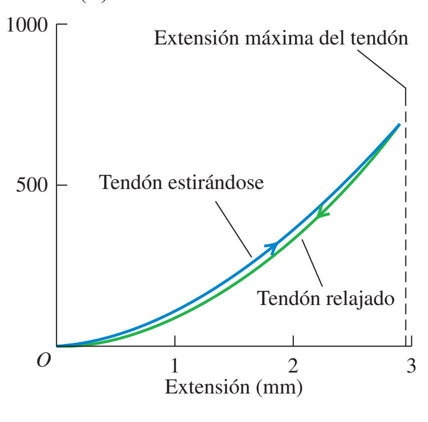
Entonces, usando $x_1 = 0$ y $x_2 = -0.010$ m en la ecuación (6.10), tenemos

$$W = \tfrac{1}{2}kx_2^2 - \tfrac{1}{2}kx_1^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(6.0 \times 10^4\ \text{N/m})(-0.010\ \text{m})^2 - 0 = 3.0\ \text{J}$$

EVALUAR: El trabajo efectuado es positivo, como se esperaba. Nuestra selección arbitraria de la dirección positiva no afecta el valor de W. Compruébelo haciendo que la dirección $+x$ sea hacia abajo, correspondiente a la compresión. ¿Obtendrá los mismos valores de k y W?

Aplicación Los tendones son resortes no ideales
Los músculos ejercen fuerzas a través de los tendones que los sujetan a los huesos. Un tendón está formado por fibras largas, rígidas y elásticas de colágeno. La figura muestra cómo los tendones de las patas traseras de un ualabí (un canguro pequeño) se estiran como respuesta a la fuerza aplicada. El tendón no presenta el sencillo comportamiento rectilíneo de un resorte ideal, de modo que el trabajo realizado se tiene que calcular por integración [ecuación (6.7)]. Observe que el tendón ejerce menos fuerza mientras se relaja que cuando se alarga. Como resultado, el tendón relajado solo efectúa aproximadamente el 93% del trabajo realizado para estirarlo.





Teorema trabajo-energía para movimiento rectilíneo, con fuerzas variables

En la sección 6.2 dedujimos el teorema trabajo-energía, $W_{tot} = K_2 - K_1$, para el caso especial de movimiento rectilíneo con fuerza neta constante. Ahora podemos demostrar que dicho teorema se cumple aun si la fuerza varía con la posición. Al igual que en la sección 6.2, consideremos una partícula que experimenta un desplazamiento x bajo la acción de una fuerza neta F con una componente x, a la que ahora se le permite variar. Como en la figura 6.16, dividimos el desplazamiento total x en muchos segmentos pequeños Δx. Podemos aplicar el teorema trabajo-energía, ecuación (6.6), a cada segmento porque el valor de F_x es aproximadamente constante en cada uno. El cambio de energía cinética en el segmento Δx_a es igual al trabajo $F_{ax}\Delta x_a$, y así sucesivamente. El cambio total de la energía cinética es la suma de los cambios en los segmentos individuales y, por lo tanto, igual al trabajo total efectuado sobre la partícula en todo el desplazamiento. Así, $W_{tot} = \Delta K$ se cumple para fuerzas variables y también para fuerzas constantes.

Veamos una deducción alternativa del teorema trabajo-energía para una fuerza que varía con la posición, lo cual implica hacer un cambio de variable usando v_x en lugar de x en la integral del trabajo. Como preámbulo, recordemos que la aceleración a de una partícula puede expresarse de varias formas, usando $a_x = dv_x/dt$, $v_x = dx/dt$ y la regla de la cadena para derivadas:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} = v_x\frac{dv_x}{dx} \tag{6.11}$$

Con este resultado, la ecuación (6.7) nos dice que el trabajo total efectuado por la fuerza *neta* F_x es

$$W_{tot} = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} ma_x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} mv_x\frac{dv_x}{dx}\,dx \tag{6.12}$$

Ahora, $(dv_x/dx)dx$ es el cambio de velocidad dv_x durante el desplazamiento dx, así que podemos sustituir $(dv_x/dx)dx$ por dv_x en la ecuación (6.12). Esto cambia la variable de integración de x a v_x, así que cambiamos los límites de x_1 y x_2 a las velocidades correspondientes v_1 y v_2 en esos puntos. Esto nos da

$$W_{tot} = \int_{v_1}^{v_2} mv_x\,dv_x$$

La integral de $v_x\,dv_x$ es $v_x{}^2/2$. Sustituyendo los límites superior e inferior, tenemos finalmente

$$W_{tot} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \tag{6.13}$$

Esto es lo mismo que la ecuación (6.6); por lo tanto, el teorema trabajo-energía es válido aun sin el supuesto de que la fuerza neta es constante.

Ejemplo 6.7 Movimiento con fuerza variable

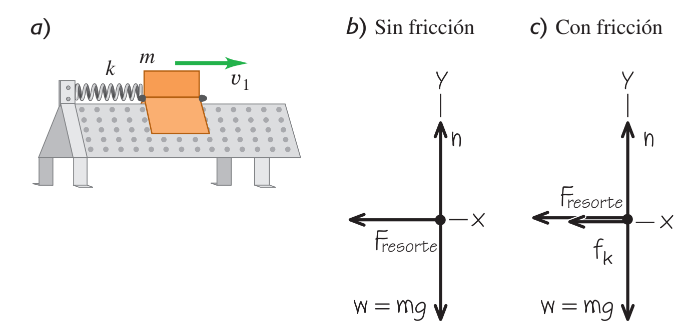


Un deslizador de riel, con aire, de masa igual a 0.100 kg se conecta al extremo del riel horizontal con un resorte cuya constante de fuerza es 20.0 N/m (figura 6.22*a*). Inicialmente, el resorte no está estirado y el deslizador se mueve con rapidez de 1.50 m/s a la derecha. Calcule la distancia máxima d que el deslizador se mueve a la derecha, *a*) si el aire del riel está activado, de modo que no hay fricción; y *b*) si se corta el suministro de aire al riel, de modo que hay fricción cinética con coeficiente $\mu_k = 0.47$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La fuerza ejercida por el resorte no es constante, así que *no podemos* usar las fórmulas de aceleración constante del capítulo 2 para resolver este problema. En cambio, emplearemos el teorema trabajo-energía, ya que en el trabajo total realizado interviene la distancia recorrida (nuestra incógnita). En las figuras 6.22*b* y 6.22*c*, elegimos la dirección $+x$ a la derecha (la dirección del movimiento del deslizador). Consideramos $x = 0$ en la posición inicial del deslizador (donde el resorte está relajado) y $x = d$ (la incógnita) en la posición donde se detiene el deslizador. El movimiento es exclusivamente horizontal, así que solo las fuerzas horizontales realizan trabajo. Observe que la ecuación (6.10) da el trabajo efectuado por el *deslizador* sobre el *resorte* al estirarse; no obstante, para usar el teorema trabajo-energía necesitaremos el trabajo efectuado por el *resorte* sobre el *deslizador*, es decir, el negativo de la ecuación (6.10). Se espera que el deslizador se mueva más rápido sin fricción que con fricción.

6.22 *a*) Deslizador sujeto a un riel, con aire, mediante un resorte. *b*) y *c*) Diagramas de cuerpo libre.



EJECUTAR: *a*) La ecuación (6.10) dice que conforme el deslizador se mueve de $x_1 = 0$ a $x_2 = d$, efectúa una cantidad de trabajo $W = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}k(0)^2 = \frac{1}{2}kd^2$ sobre el resorte. La cantidad de trabajo que el *resorte* efectúa sobre el *deslizador* es el negativo de este: $-\frac{1}{2}kd^2$. El resorte se estira hasta que el deslizador llega instantáneamente al reposo, así que la energía cinética final es $K_2 = 0$. La energía cinética inicial es $\frac{1}{2}mv_1^2$, donde $v_1 = 1.50$ m/s es la rapidez inicial del deslizador. Usando el teorema trabajo-energía, tenemos,

$$-\tfrac{1}{2}kd^2 = 0 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

Despejamos la distancia d que recorre el deslizador:

$$d = v_1\sqrt{\frac{m}{k}} = (1.50\text{ m/s})\sqrt{\frac{0.100\text{ kg}}{20.0\text{ N/m}}} = 0.106\text{ m} = 10.6\text{ cm}$$

Después, el resorte estirado tira del deslizador hacia la izquierda, así que este solo se encuentra en reposo instantáneamente.

b) Si se desactiva el aire, debemos incluir el trabajo efectuado por la fuerza de fricción cinética. La fuerza normal n es igual en magnitud al peso del deslizador, ya que el riel es horizontal y no hay otras fuerzas verticales. La magnitud constante de la fuerza de fricción cinética es, entonces, $f_k = \mu_k n = \mu_k mg$, en dirección opuesta al desplazamiento, y el trabajo que efectúa es

$$W_{fric} = f_k d \cos 180° = -f_k d = -\mu_k mgd$$

El trabajo total es la suma de W_{fric} y el trabajo efectuado por el resorte, $-\frac{1}{2}kd^2$. El teorema trabajo-energía indica que

$$-\mu_k mgd - \tfrac{1}{2}kd^2 = 0 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \qquad \text{o bien,}$$

$$\tfrac{1}{2}kd^2 + \mu_k mgd - \tfrac{1}{2}mv_1^2 = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática para d. Las soluciones son

$$d = -\frac{\mu_k mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu_k mg}{k}\right)^2 + \frac{mv_1^2}{k}}$$

Tenemos

$$\frac{\mu_k mg}{k} = \frac{(0.47)(0.100\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)}{20.0\text{ N/m}} = 0.02303\text{ m}$$

$$\frac{mv_1^2}{k} = \frac{(0.100\text{ kg})(1.50\text{ m/s})^2}{20.0\text{ N/m}} = 0.01125\text{ m}^2$$

de manera que

$$d = -(0.02303\text{ m}) \pm \sqrt{(0.02303\text{ m})^2 + 0.01125\text{ m}^2}$$
$$= 0.086\text{ m} \quad \text{o bien,} \quad -0.132\text{ m}$$

La cantidad d es un desplazamiento positivo, de manera que solo tiene sentido el valor positivo de d. Así, con fricción, el deslizador se mueve una distancia $d = 0.086$ m $= 8.6$ cm.

EVALUAR: Observe que si establecemos que $\mu_k = 0$, la solución algebraica para d en el inciso *b*) se reduce a $d = v_1\sqrt{m/k}$, el resultado con fricción igual a cero del inciso *a*). Con fricción, el deslizador se mueve una distancia más corta. Una vez más, el deslizador se detiene instantáneamente y de nuevo la fuerza del resorte tira de él hacia la izquierda; el hecho de que se mueva o no dependerá de la magnitud de la fuerza de fricción *estática*. ¿Qué valor debería tener el coeficiente de fricción estática μ_s para evitar que el deslizador regrese a la izquierda?

Teorema trabajo-energía para movimiento

Podemos generalizar más nuestra definición de trabajo para incluir una fuerza que varía de dirección y magnitud, con un desplazamiento a lo largo de una trayectoria curva. La figura 6.23*a* muestra una partícula que se mueve de P_1 a P_2 siguiendo una curva. Dividimos la curva entre esos puntos en muchos desplazamientos vectoriales infinitesimales, llamando a cada uno de estos $d\vec{l}$. Cada $d\vec{l}$ es tangente a la trayectoria en su ubicación. Sea $\vec{F}$ la fuerza en este punto cualquiera de la trayectoria, y sea ϕ el ángulo entre $\vec{F}$ y $d\vec{l}$ en ese punto. De manera que el pequeño elemento de trabajo dW realizado sobre la partícula durante el desplazamiento $d\vec{l}$ puede escribirse como

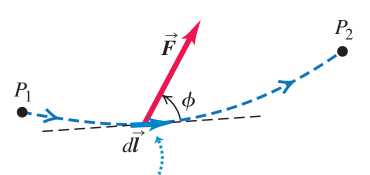
$$dW = F\cos\phi\, dl = F_{\parallel}\, dl = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

donde $F_{\parallel} = F \cos \phi$ es la componente de $\vec{F}$ en la dirección paralela a $d\vec{l}$ (figura 6.23*b*). El trabajo total realizado por $\vec{F}$ sobre la partícula al moverse de P_1 a P_2 es, entonces,

$$W = \int_{P_1}^{P_2} F\cos\phi\, dl = \int_{P_1}^{P_2} F_{\parallel}\, dl = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad \text{(trabajo efectuado en una trayectoria curva)} \quad (6.14)$$

6.23 Una partícula sigue una trayectoria curva de P_1 a P_2 bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$ que varía en magnitud y dirección.

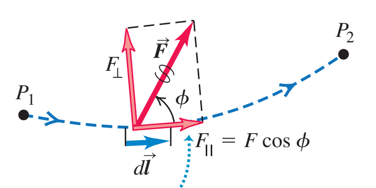
a)



En un desplazamiento infinitesimal $d\vec{l}$, la fuerza $\vec{F}$ realiza un trabajo dW sobre la partícula:

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F \cos \phi \, dl$

b)



Tan solo la componente de $\vec{F}$ paralela al desplazamiento, $F_{\|} = F \cos \phi$, contribuye al trabajo efectuado por $\vec{F}$.

Ahora podemos demostrar que el teorema trabajo-energía, ecuación (6.6), se cumple aun con fuerzas variables y desplazamiento a lo largo de una trayectoria curva. La fuerza $\vec{F}$ es prácticamente constante en cualquier segmento infinitesimal $d\vec{l}$ de la trayectoria, así que podemos aplicar el teorema trabajo-energía para movimiento rectilíneo a ese segmento. Entonces, el cambio de energía cinética, K, de la partícula en ese segmento es igual al trabajo $dW = F_{\|}\, dl = \vec{F} \cdot d\vec{l}$ realizado sobre la partícula. La suma de estos trabajos infinitesimales de todos los segmentos de la trayectoria nos da el trabajo total realizado, ecuación (6.14), que es igual al cambio total de energía cinética en toda la trayectoria. Por lo tanto, $W_{tot} = \Delta K = K_2 - K_1$ se cumple *en general*, sean cuales fueren la trayectoria y las características de las fuerzas. Esto puede demostrarse con mayor rigor siguiendo pasos como los de las ecuaciones (6.11) a (6.13).

Observe que solo la componente de la fuerza neta paralela a la trayectoria, $F_{\|}$, realiza trabajo sobre la partícula, así que solo dicha componente puede cambiar la rapidez y la energía cinética de la partícula. La componente perpendicular a la trayectoria, $F_\perp = F \operatorname{sen} \phi$, no afecta la rapidez de la partícula; solo cambia su dirección.

La integral de la ecuación (6.14) se conoce como *integral de línea*. Para evaluar la integral en un problema específico, necesitamos una descripción detallada de la trayectoria y de cómo varía $\vec{F}$ a lo largo de esta. Normalmente expresamos la integral de línea en términos de alguna variable escalar, como en el ejemplo que sigue.



Ejemplo 6.8 Movimiento en una trayectoria curva

En un día de campo familiar, le piden empujar a su odioso primo Morton en un columpio (figura 6.24*a*). El peso de Morton es w, la longitud de las cadenas es R, y usted lo empuja hasta que las cadenas forman un ángulo θ_0 con la vertical. Para ello, usted ejerce una fuerza horizontal variable $\vec{F}$ que comienza en cero y aumenta en forma gradual apenas lo suficiente para que Morton y el columpio se muevan lentamente y permanezcan casi en equilibrio. ¿Qué trabajo total realizan todas las fuerzas sobre Morton? ¿Qué trabajo realiza la tensión T en las cadenas? ¿Qué trabajo efectúa usted aplicando la fuerza $\vec{F}$? (Ignore el peso de las cadenas y el asiento).

SOLUCIÓN

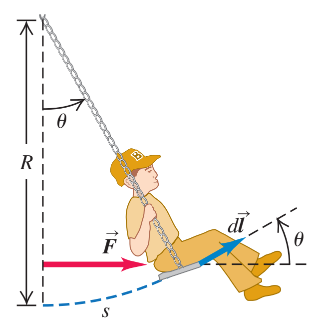
IDENTIFICAR y PLANTEAR: El movimiento sigue una curva, así que usaremos la ecuación (6.14) para calcular el trabajo efectuado por la fuerza neta, por la fuerza de tensión y por la fuerza $\vec{F}$. La figura 6.24*b* muestra el diagrama de cuerpo libre y el sistema de coordenadas para algún punto arbitrario en el movimiento de Morton. Se han sustituido las dos tensiones de las cadenas por una sola tensión, T.

EJECUTAR: Hay dos formas de determinar el trabajo total efectuado durante el movimiento: **1.** calculando el trabajo efectuado por cada fuerza y sumando después esas cantidades, y **2.** calculando el trabajo efectuado por la fuerza neta. La segunda estrategia es mucho más fácil porque Morton está en equilibrio en todos los puntos, así que la fuerza neta sobre él es cero, la integral de la fuerza neta de la ecuación (6.14) es cero y el trabajo total realizado sobre él es cero.

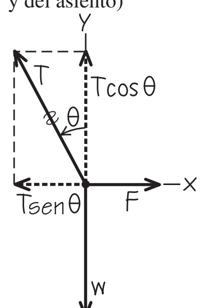
También es fácil calcular el trabajo efectuado por la tensión T de la cadena, porque esta fuerza es perpendicular a la dirección del movimiento en todos los puntos de la trayectoria. Por lo tanto, en todos los puntos, el ángulo entre la tensión de la cadena y el vector desplazamiento $d\vec{l}$ es de 90°, y el producto escalar de la ecuación (6.14) es cero. De esta manera, el trabajo realizado por la tensión de la cadena es cero.

6.24 *a*) Se empuja al primo Morton en un columpio. *b*) Diagrama de cuerpo libre.

a)



b) Diagrama de cuerpo libre de Morton (se desprecia el peso de las cadenas y del asiento)



Para calcular el trabajo realizado por $\vec{F}$, debemos averiguar cómo varía esta fuerza con el ángulo θ. La fuerza neta sobre Morton es cero, así que $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$. A partir de la figura 6.24*b* obtenemos,

$$\sum F_x = F + (-T \operatorname{sen} \theta) = 0$$
$$\sum F_y = T \cos \theta + (-w) = 0$$

Eliminando T de estas dos ecuaciones, obtenemos la magnitud $F = w \tan \theta$.

El punto donde se aplica $\vec{F}$ se mueve a través del arco s (figura 6.24*a*). La longitud del arco s es igual al radio R de la trayectoria circular multiplicado por su longitud θ (en radianes): $s = R\theta$. Por lo tanto, el

desplazamiento $d\vec{l}$ que corresponde al pequeño cambio del ángulo $d\theta$ tiene magnitud $dl = ds = R\,d\theta$. El trabajo efectuado por $\vec{F}$ es

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int F\cos\theta \; ds$$

Expresando ahora F y ds en términos del ángulo θ, cuyo valor se incrementa de 0 a θ_0:

$$W = \int_0^{\theta_0} (w\tan\theta)\cos\theta\,(R\,d\theta) = wR\int_0^{\theta_0} \operatorname{sen}\theta\,d\theta$$
$$= wR(1 - \cos\theta_0)$$

EVALUAR: Si $\theta_0 = 0$, no hay desplazamiento; en tal caso, $\cos\theta_0 = 1$ y $W = 0$, como se esperaba. Si $\theta_0 = 90°$, entonces, $\cos\theta_0 = 0$ y $W = wR$. Aquí el trabajo que usted realiza es el mismo que efectuaría si levantara a Morton verticalmente una distancia R con una fuerza igual a su peso w. De hecho (como tal vez quiera confirmar), la cantidad $R(1 - \cos\theta_0)$ es el aumento en su altura sobre el suelo durante el desplazamiento, por lo que, para cualquier valor de θ_0, el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$ es el cambio de altura multiplicado por el peso. Este es un ejemplo de un resultado más general que demostraremos en la sección 7.1.

Se pueden comprobar los resultados expresando las fuerzas y el desplazamiento infinitesimal $d\vec{l}$ en términos de sus componentes x y y. La figura 6.24*a* indica que $d\vec{l}$ tiene una magnitud ds, una componente x igual a $ds\cos\theta$, y una componente y igual a $ds\operatorname{sen}\theta$. Por lo tanto, $d\vec{l} = \hat{\imath}\,ds\cos\theta + \hat{\jmath}\,ds\operatorname{sen}\theta$. De forma análoga, podemos representar las tres fuerzas como

$$\vec{T} = \hat{\imath}(-T\operatorname{sen}\theta) + \hat{\jmath}T\cos\theta$$
$$\vec{w} = \hat{\jmath}(-w)$$
$$\vec{F} = \hat{\imath}F$$

Se usa la ecuación (1.21) para calcular el producto escalar de cada una de estas fuerzas con $d\vec{l}$:

$$\vec{T} \cdot d\vec{l} = (-T\operatorname{sen}\theta)(ds\cos\theta) + (T\cos\theta)(ds\operatorname{sen}\theta) = 0$$
$$\vec{w} \cdot d\vec{l} = (-w)(ds\operatorname{sen}\theta) = -w\operatorname{sen}\theta\,ds$$
$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = F(ds\cos\theta) = F\cos\theta\,ds$$

Puesto que $\vec{T} \cdot d\vec{l} = 0$, la integral de esta cantidad es cero y el trabajo efectuado por la tensión de la cadena es cero, lo mismo que obtuvimos anteriormente. Utilizando $ds = R\,d\theta$, el trabajo efectuado por la fuerza de gravedad es

$$\int \vec{w} \cdot d\vec{l} = \int (-w\operatorname{sen}\theta)R\,d\theta = -wR\int_0^{\theta_0} \operatorname{sen}\theta\,d\theta$$
$$= -wR(1 - \cos\theta_0)$$

El trabajo efectuado por la gravedad es negativo porque la gravedad tira hacia abajo mientras Morton se mueve hacia arriba. Por último, el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$ es la misma integral $\int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int F\cos\theta\,ds$ que calculamos antes. El método de componentes suele ser la forma más cómoda de calcular productos escalares, ¡Úselo cuando facilite las cosas!

Evalúe su comprensión de la sección 6.3 En el ejemplo 5.20 (sección 5.4), analizamos un péndulo cónico. La rapidez de la lenteja del péndulo permanece constante mientras viaja por el círculo que se muestra en la figura 5.32*a*. *a*) En un círculo completo, ¿cuánto trabajo ejerce la fuerza de tensión F sobre la lenteja? **i.** Una cantidad positiva; **ii.** una cantidad negativa; **iii.** cero. *b*) En un círculo completo, ¿cuánto trabajo realiza el peso sobre la lenteja? **i.** Una cantidad positiva; **ii.** una cantidad negativa; **iii.** cero.

6.4 Potencia

La definición de trabajo no hace referencia al tiempo utilizado para realizarlo. Si usted levanta una barra que pesa 100 N una distancia vertical de 1.0 m con velocidad constante, realiza (100 N)(1.0 m) = 100 J de trabajo, ya sea que tarde 1 segundo, 1 hora o 1 año para hacerlo. No obstante, muchas veces necesitamos saber con qué rapidez se efectúa el trabajo. Describimos esto en términos de *potencia*. En el habla cotidiana, "potencia" suele emplearse como sinónimo de "energía" o "fuerza". En física usamos una definición mucho más precisa: **potencia** es la *rapidez* con que se efectúa trabajo; al igual que el trabajo y la energía, la potencia es una cantidad escalar.

Si se realiza un trabajo ΔW en un intervalo Δt, el trabajo medio efectuado por unidad de tiempo o **potencia media** P_{med} se define como

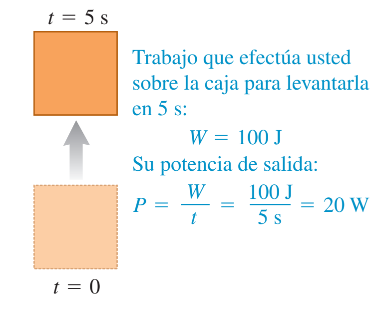
$$P_{med} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \text{(potencia media)} \tag{6.15}$$

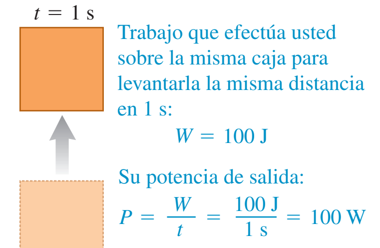
La rapidez con que se efectúa trabajo quizá no sea constante. Podemos definir la **potencia instantánea** P como el cociente de la ecuación (6.15) cuando Δt se aproxima a cero:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \quad \text{(potencia instantánea)} \tag{6.16}$$

En el SI la unidad de potencia es el **watt** (W), llamado así en honor del inventor inglés James Watt. Un watt es igual a un joule por segundo: 1 W = 1 J/s (figura 6.25).

6.25 En ambas situaciones se efectúa la misma cantidad de trabajo, pero la potencia (la rapidez a la que se realiza el trabajo) es diferente.





6.26 El valor del caballo de potencia se dedujo de los experimentos de James Watt, quien midió que un caballo podría realizar 33,000 pie-libras de trabajo por minuto, al levantar carbón en una mina abierta.



También son de uso común el kilowatt ($1\text{ kW} = 10^3\text{ W}$) y el megawatt ($1\text{ MW} = 10^6\text{ W}$). En el sistema británico, el trabajo se expresa en pie-libras, y la unidad de potencia es el pie-libra por segundo. También se usa una unidad mayor llamada *caballo de potencia* (hp) (figura 6.26):

$$1\text{ hp} = 550\text{ ft}\cdot\text{lb/s} = 33{,}000\text{ ft}\cdot\text{lb/min}$$

Es decir, un motor de 1 hp que trabaja con carga completa realiza 33,000 ft·lb de trabajo cada minuto. Un factor de conversión útil es

$$1\text{ hp} = 746\text{ W} = 0.746\text{ kW}$$

El watt es una unidad común de potencia *eléctrica*; una bombilla eléctrica de 100 W convierte 100 J de energía eléctrica en luz y calor cada segundo. Sin embargo, los watts no son inherentemente eléctricos. Una bombilla podría especificarse en términos de caballos de potencia; y un motor de automóvil en términos de kilowatts.

El *kilowatt-hora* (kW·h) es la unidad comercial usual de energía eléctrica. Un kilowatt-hora es el trabajo total realizado en 1 hora (3600 s) cuando la potencia es 1 kilowatt (10^3 J/s), así que

$$1\text{ kW}\cdot\text{h} = (10^3\text{ J/s})(3600\text{ s}) = 3.6\times10^6\text{ J} = 3.6\text{ MJ}$$

El kilowatt-hora es una unidad de *trabajo* o *energía*, no de potencia.

En mecánica, también podemos expresar la potencia en términos de fuerza y velocidad. Suponga que una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre un cuerpo que tiene un desplazamiento vectorial $\Delta\vec{s}$. Si $F_\parallel$ es la componente de $\vec{F}$ tangente a la trayectoria (paralela a $\Delta\vec{s}$), entonces el trabajo realizado por la fuerza es $\Delta W = F_\parallel \Delta s$, y la potencia media es

$$P_{\text{med}} = \frac{F_\parallel \Delta s}{\Delta t} = F_\parallel \frac{\Delta s}{\Delta t} = F_\parallel v_{\text{med}} \qquad (6.17)$$

La potencia instantánea P es el límite de esta expresión cuando $\Delta t \to 0$:

$$P = F_\parallel v \qquad (6.18)$$

donde v es la magnitud de la velocidad instantánea. También podemos expresar la ecuación (6.18) en términos del producto escalar:

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} \qquad (6.19)$$

(rapidez instantánea con que la fuerza $\vec{F}$ realiza trabajo sobre una partícula)

Ejemplo 6.9 Fuerza y potencia



Cada uno de los cuatro motores a reacción de un avión Airbus A380 desarrolla un empuje (fuerza hacia adelante sobre el avión) de 322,000 N (72,000 lb). Cuando el avión está volando a 250 m/s (900 km/h o aproximadamente 560 mi/h), ¿cuántos caballos de potencia desarrolla cada motor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: La incógnita es la potencia instantánea P, que es la rapidez con que el empuje efectúa trabajo. Se usa la ecuación (6.18). El empuje tiene la dirección del movimiento, así que $F_\parallel$ es simplemente igual al empuje. Con $v = 250$ m/s, cada motor desarrolla una potencia de:

$$P = F_\parallel v = (3.22\times10^5\text{ N})(250\text{ m/s}) = 8.05\times10^7\text{ W}$$
$$= (8.05\times10^7\text{ W})\frac{1\text{ hp}}{746\text{ W}} = 108{,}000\text{ hp}$$

EVALUAR: La rapidez de los aviones comerciales modernos se relaciona directamente con la potencia de los motores (figura 6.27). Los motores más grandes de los aviones de hélice de la década de 1950 desarrollaban aproximadamente 3400 hp (2.5×10^6 W) y tenían rapideces máximas del orden de 600 km/h (370 mi/h), aproximadamente. La potencia de cada motor de un Airbus A380 es más de 30 veces mayor, y permite al avión volar a cerca de 900 km/h (560 mi/h) y llevar una carga mucho más pesada.

Si los motores producen el empuje máximo mientras el avión está en reposo en tierra, de manera que $v = 0$, la potencia desarrollada por los motores es *cero*. ¡Fuerza y potencia no son lo mismo!

6.27 *a*) Avión impulsado por hélice y *b*) avión con motor a reacción.



a)



b)





Ejemplo 6.10 Un "ascenso potente"

Una maratonista de 50.0 kg sube corriendo las escaleras de la Torre Willis de Chicago de 443 m de altura, el edificio más alto de Estados Unidos (figura 6.28). ¿Qué potencia media desarrolla si llega a la azotea en 15.0 minutos? Exprese su respuesta en watts, en kilowatts y en caballos de potencia.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Trataremos a la corredora como una partícula de masa m. La potencia media que desarrolla P_{med} debe ser suficiente para subirla a una rapidez constante contra la gravedad.

Podemos calcular P_{med} de dos maneras: **1.** determinando primero cuánto trabajo debe efectuar y luego dividiendo ese trabajo entre el tiempo transcurrido, como en la ecuación (6.15); o bien, **2.** calculando la fuerza media hacia arriba que la corredora debe ejercer (en dirección del ascenso) y después multiplicándola por su velocidad hacia arriba, como en la ecuación (6.17).

EJECUTAR: **1.** Como en el ejemplo 6.8, para levantar una masa m contra la gravedad se requiere una cantidad de trabajo igual al peso mg multiplicado por la altura h que se levanta. Por lo tanto, el trabajo que la corredora debe efectuar es

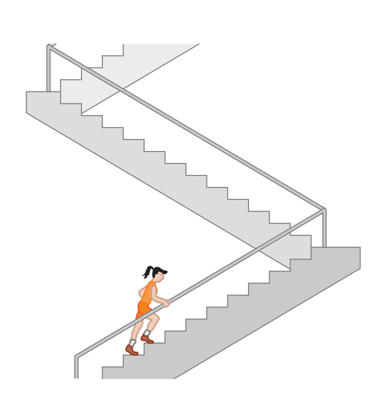
$$W = mgh = (50.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(443\ \text{m})$$
$$= 2.17 \times 10^5\ \text{J}$$

Ella realiza el trabajo en 15.0 min = 900 s, así que, de acuerdo con la ecuación (6.15), la potencia media es

$$P_{med} = \frac{2.17 \times 10^5 \text{J}}{900\ \text{s}} = 241\ \text{W} = 0.241\ \text{kW} = 0.323\ \text{hp}$$

2. La fuerza ejercida es vertical, y la componente vertical media de la velocidad es (443 m)/(900 s) = 0.492 m/s; así, de acuerdo con la ecuación (6.17), la potencia media es

6.28 ¿Cuánta potencia se necesita para subir corriendo las escaleras de la Torre Willis de Chicago en 15 minutos?





$$P_{med} = F_{\|}v_{med} = (mg)v_{med}$$
$$= (50.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(0.492\ \text{m/s}) = 241\ \text{W}$$

que es el mismo resultado de antes.

EVALUAR: La potencia *total* desarrollada por la corredora será muchas veces mayor que 241 W, porque ella no es una partícula, sino un conjunto de partes que ejercen fuerzas unas sobre otras y realizan trabajo, como el necesario para inhalar, exhalar y mover piernas y brazos. Lo que calculamos es solo la parte de su gasto de potencia que se invierte en subirla a la azotea del edificio.

Evalúe su comprensión de la sección 6.4 El aire que circunda un avión en vuelo ejerce una fuerza de arrastre que actúa de manera opuesta al movimiento del avión. Cuando el Airbus A380 del ejemplo 6.9 vuela en línea recta a una altura constante a 250 m/s constantes, ¿cuál es la tasa con que la fuerza de arrastre efectúa trabajo sobre él? **i.** 432,000 hp; **ii.** 108,000 hp; **iii.** 0; **iv.** −108,000 hp; **v.** −432,000 hp.



RESUMEN



Trabajo efectuado por una fuerza: Cuando una fuerza constante $\vec{F}$ actúa sobre una partícula que experimenta un desplazamiento rectilíneo $\vec{s}$, el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula se define como el producto escalar de $\vec{F}$ y $\vec{s}$. La unidad de trabajo en el SI es 1 joule = 1 newton-metro (1 J = 1 N·m). El trabajo es una cantidad escalar, ya que puede ser positivo o negativo, pero no tiene dirección en el espacio. (Véase los ejemplos 6.1 y 6.2).

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\phi \quad (6.2), (6.3)$$

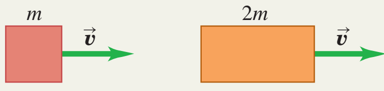
ϕ = ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{s}$

$W = F_{\parallel}s = (F\cos\phi)s$

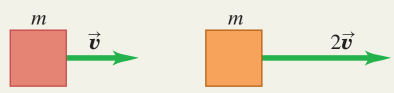
$F_{\perp}$, $\vec{F}$, ϕ, $F_{\parallel} = F\cos\phi$

Energía cinética: La energía cinética K de una partícula es igual a la cantidad de trabajo necesario para acelerarla desde el reposo hasta la rapidez v. También es igual al trabajo que la partícula puede efectuar en el proceso de detenerse. La energía cinética es una cantidad escalar sin dirección en el espacio; siempre es positiva o cero, y sus unidades son las mismas que las de trabajo: 1 J = 1 N·m = 1 kg·m^2/s^2.

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \quad (6.5)$$



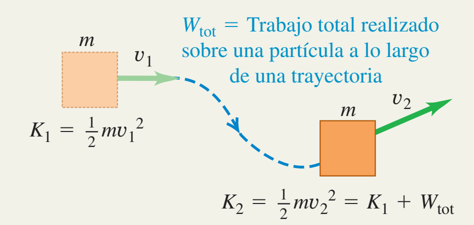
Al duplicar m, K se duplica.



Al duplicar v, K se cuadruplica.

Teorema trabajo-energía: Cuando actúan fuerzas sobre una partícula mientras esta experimenta un desplazamiento, la energía cinética de la partícula cambia en una cantidad igual al trabajo total realizado sobre ella por todas las fuerzas. Esta relación, llamada teorema trabajo-energía, es válida para fuerzas tanto constantes como variables, y para trayectorias de la partícula tanto rectas como curvas; sin embargo, solo es aplicable a cuerpos que pueden tratarse como partículas. (Véase los ejemplos 6.3 a 6.5).

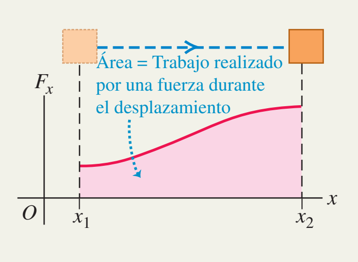
$$W_{tot} = K_2 - K_1 = \Delta K \quad (6.6)$$



Trabajo efectuado por una fuerza variable o en una trayectoria curva: Si la fuerza varía durante un desplazamiento rectilíneo, el trabajo que realiza está dado por una integral, ecuación (6.7). (Véase los ejemplos 6.6 y 6.7). Si la partícula tiene una trayectoria curva, el trabajo efectuado sobre ella por una fuerza $\vec{F}$ está dado por una integral en la que interviene el ángulo ϕ entre la fuerza y el desplazamiento. Esta expresión es válida aun cuando la magnitud de la fuerza y el ángulo ϕ varían durante el desplazamiento. (Véase el ejemplo 6.8).

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx \quad (6.7)$$

$$W = \int_{P_1}^{P_2} F\cos\phi\,dl = \int_{P_1}^{P_2} F_{\parallel}\,dl = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (6.14)$$



Potencia: La potencia es la rapidez con que se efectúa trabajo. La potencia media P_{med} es la cantidad de trabajo ΔW realizada en un tiempo Δt dividida entre ese tiempo. La potencia instantánea es el límite de la potencia media cuando Δt se acerca a cero. Cuando una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre una partícula que se mueve con velocidad $\vec{v}$, la potencia instantánea (rapidez con que la fuerza efectúa trabajo) es el producto escalar de $\vec{F}$ y $\vec{v}$. Al igual que el trabajo y la energía cinética, la potencia es una cantidad escalar. Su unidad en el SI es 1 watt = 1 joule/segundo (1 W = 1 J/s). (Véase los ejemplos 6.9 y 6.10).

$$P_{med} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (6.15)$$

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \quad (6.16)$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (6.19)$$

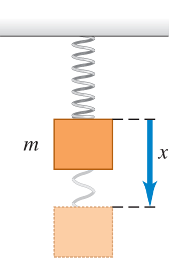


PROBLEMA PRÁCTICO Resorte que no cumple la ley de Hooke



Considere un resorte colgado, de masa despreciable, que *no* cumple la ley de Hooke. Cuando el resorte se estira una distancia x, la fuerza ejercida por el resorte tiene una magnitud αx^2, donde α es una constante positiva. El resorte no está estirado cuando un bloque de masa m se sujeta a él. Luego el bloque se libera, estirando el resorte conforme cae (figura 6.29). *a*) ¿Con qué rapidez se mueve el bloque cuando cae una distancia x_1? *b*) ¿A qué tasa realiza trabajo el resorte sobre el bloque en este punto? *c*) Calcule la distancia máxima x_2 que se estira el resorte. *d*) ¿El bloque *permanecerá* en el punto determinado en el inciso *c*)?

6.29 El bloque está sujeto a un resorte que no cumple la ley de Hooke.



GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. La fuerza del resorte en este problema no es constante, de modo que se tiene que usar el teorema de trabajo-energía. También se necesita la ecuación (6.7) para calcular el trabajo realizado por el resorte a lo largo de un desplazamiento determinado.
2. Elabore un diagrama de cuerpo libre para el bloque, incluyendo la elección de los ejes de coordenadas. Observe que x representa la distancia que se *estira* el resorte, así que seleccione la $+x$ de manera adecuada. Sobre su eje de coordenadas, identifique los puntos $x = x_1$ y $x = x_2$.
3. Elabore una lista de las cantidades desconocidas e identifique cuáles son las incógnitas.

EJECUTAR

4. Calcule el trabajo realizado por el resorte sobre el bloque conforme este cae una distancia x arbitraria. (La integral no es difícil. Consulte el apéndice B si necesita un recordatorio). ¿El trabajo realizado por el resorte es positivo, negativo o cero?
5. Calcule el trabajo realizado sobre el bloque por cualesquiera otras fuerzas conforme el bloque cae una distancia arbitraria x. ¿El trabajo es positivo, negativo o cero?
6. Use el teorema trabajo-energía para calcular las incógnitas. (También necesita usar una ecuación para la potencia). *Sugerencia:* Pregúntese lo siguiente: cuando el resorte tiene su máxima elongación, ¿cuál es la rapidez del bloque?
7. Para contestar el inciso *d*) considere la fuerza *neta* que actúa sobre el bloque cuando se encuentra en el punto calculado en el inciso *c*).

EVALUAR

8. En el capítulo 2 vimos que después de que un objeto cae partiendo del reposo y ha caído libremente una distancia x_1, su rapidez es $\sqrt{2gx_1}$. Use esto para determinar si su respuesta del inciso *a*) es lógica. Además, pregúntese si el signo algebraico de su respuesta en el inciso *b*) es lógico.
9. Calcule el valor de x donde la fuerza neta sobre el bloque sería cero. ¿Cómo se compara esto con su resultado de x_2? ¿Es congruente con su respuesta del inciso *d*)?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P6.1 El signo de muchas cantidades físicas depende de la elección de las coordenadas. Por ejemplo, el valor de a_y para el movimiento en caída libre puede ser negativo o positivo, dependiendo de si elegimos como positiva la dirección hacia arriba o hacia abajo. ¿Lo mismo es válido para el trabajo? En otras palabras, ¿podemos hacer negativo el trabajo positivo con una elección diferente de las coordenadas? Explique su respuesta.

P6.2 Un elevador es levantado por sus cables con rapidez constante. ¿El trabajo realizado sobre él es positivo, negativo o cero? Explique.

P6.3 Se tira de una cuerda atada a un cuerpo y este se acelera. Según la tercera ley de Newton, el cuerpo tira de la cuerda con una fuerza igual y opuesta. Entonces, ¿el trabajo total realizado es cero? Si así es, ¿cómo puede cambiar la energía cinética del cuerpo? Explique su respuesta.

P6.4 Si se requiere un trabajo total W para dar a un objeto una rapidez v y una energía cinética K, partiendo del reposo, ¿cuáles serán la rapidez (en términos de v) y la energía cinética (en términos de K) del objeto, si efectuamos el doble de trabajo sobre él partiendo nuevamente del reposo?

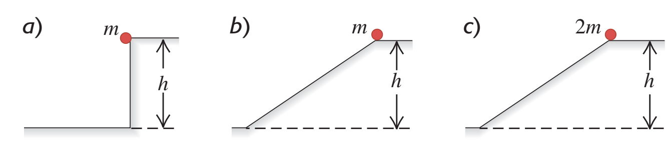
P6.5 Si hubiera una fuerza neta distinta de cero sobre un objeto en movimiento, ¿el trabajo total realizado sobre él podría ser cero? Explique ilustrando su respuesta con un ejemplo.

P6.6 En el ejemplo 5.5 (sección 5.1), compare el trabajo realizado sobre la cubeta por la tensión del cable y el trabajo realizado sobre el carro por dicha tensión?

P6.7 En el péndulo cónico del ejemplo 5.20 (sección 5.4), ¿qué fuerza realiza trabajo sobre la lenteja conforme esta gira?

P6.8 En los casos que se ilustran en la figura P6.8, el objeto se suelta desde el reposo en la parte superior y no experimenta fricción ni resis-

Figura **P6.8**



tencia del aire. ¿En cuál situación, si acaso, la masa tendrá **i.** la mayor rapidez en la parte inferior y **ii.** el mayor trabajo efectuado sobre ella en el tiempo que tarda en llegar a la parte inferior?

P6.9 Una fuerza $\vec{F}$ sobre el eje x tiene magnitud que depende de x. Dibuje una posible gráfica de F contra x tal que la fuerza no realice trabajo sobre un objeto que se mueve de x_1 a x_2, aunque la magnitud de la fuerza nunca sea cero en este intervalo.

P6.10 ¿La energía cinética de un automóvil cambia más al acelerar de 10 a 15 m/s o de 15 a 20 m/s? Explique su respuesta.

P6.11 Un ladrillo con masa de 1.5 kg cae verticalmente con una rapidez de 5.0 m/s. Un libro de física de 1.5 kg se desliza sobre el piso a 5.0 m/s. Un melón de 1.5 kg viaja con una componente de velocidad horizontal de 3.0 m/s a la derecha y una componente vertical de 4.0 m/s hacia arriba. ¿Todos estos objetos tienen la misma velocidad? ¿Tienen la misma energía cinética? Para cada pregunta, describa su razonamiento.

P6.12 ¿El trabajo *total* efectuado sobre un objeto durante un desplazamiento puede ser negativo? Explique su respuesta. Si el trabajo total es negativo, ¿su magnitud puede ser mayor que la energía cinética inicial del objeto? Explique su respuesta.

P6.13 Una fuerza neta actúa sobre un objeto y lo acelera desde el reposo hasta una rapidez v_1, efectuando un trabajo W_1. ¿En qué factor debe aumentarse ese trabajo para lograr una rapidez final tres veces mayor, si el objeto parte del reposo?

P6.14 Un camión que va frenando por una autopista tiene mucha energía cinética relativa a un auto de la policía que se encuentra detenido, pero ninguna relativa al conductor del camión. En estos dos marcos de referencia, ¿se requiere el mismo trabajo para detener el camión? Explique su respuesta.

P6.15 Imagine que usted sostiene un portafolio por el asa, con el brazo recto a su costado. ¿La fuerza que ejerce la mano efectúa trabajo sobre el portafolio *a*) cuando usted camina con rapidez constante por un pasillo horizontal y *b*) cuando usa una escalera eléctrica para subir del primer piso al segundo de un edificio? Justifique su respuesta en cada caso.

P6.16 Si un libro se desliza sobre una mesa, la fuerza de fricción realiza trabajo negativo sobre él. ¿Existe algún caso en que la fricción realice trabajo *positivo*? Explique su respuesta. (*Sugerencia:* Piense en una caja que se encuentra en la parte de atrás de un camión que acelera).

P6.17 Tómese el tiempo al subir corriendo una escalera y calcule la tasa media con que efectúa trabajo contra la fuerza de gravedad. Exprese su respuesta en watts y en caballos de potencia.

P6.18 **Física fracturada.** Muchos términos de la física se utilizan de manera inadecuada en el lenguaje cotidiano. En cada caso, explique los errores que hay. *a*) A una persona *fuerte* se le llama *llena de potencia*. ¿Qué error implica este uso del término *potencia*? *b*) Cuando un trabajador carga una bolsa de cemento siguiendo una trayectoria horizontal en una obra en construcción, la gente dice que él realizó mucho *trabajo*. ¿Es verdad?

P6.19 Un anuncio de un generador eléctrico portátil asegura que el motor a diesel produce 28,000 hp para impulsar un generador eléctrico que produce 30 MW de potencia eléctrica. ¿Es esto posible? Explique su respuesta.

P6.20 Un automóvil aumenta su rapidez mientras el motor produce potencia constante. ¿La aceleración es mayor al inicio de este proceso o al final? Explique su respuesta.

P6.21 Considere una gráfica de potencia instantánea contra tiempo, cuyo eje P vertical comienza en $P = 0$. ¿Qué significado físico tiene el área bajo la curva P contra t entre dos líneas verticales en t_1 y t_2? ¿Cómo podría calcular la potencia media a partir de la gráfica? Dibuje una curva de P contra t que conste de dos secciones rectas y donde la potencia máxima sea igual al doble de la potencia media.

P6.22 Una fuerza neta distinta de cero actúa sobre un objeto. ¿Alguna de las siguientes cantidades puede ser constante? *a*) La rapidez del objeto; *b*) la velocidad del objeto; *c*) la energía cinética del objeto.

P6.23 Cuando se aplica cierta fuerza a un resorte ideal, este se estira una distancia x desde su longitud relajada (sin estirar) y efectúa un trabajo W. Si ahora se aplica el doble de fuerza, ¿qué distancia (en términos de x) se estira el resorte desde su longitud relajada y cuánto trabajo (en términos de W) se requiere para estirarlo esta distancia?

P6.24 Si se requiere un trabajo W para estirar un resorte una distancia x desde su longitud relajada, ¿qué trabajo (en términos de W) se requiere para estirar el resorte una distancia x *adicional*?

EJERCICIOS

Sección 6.1 Trabajo

6.1 • Usted empuja su libro de física 1.50 m a lo largo de una mesa horizontal con un empuje horizontal de 2.40 N mientras que la fuerza de fricción opuesta es de 0.600 N. ¿Cuánto trabajo realiza cada una de las siguientes fuerzas sobre el libro? *a*) El empuje de 2.40 N, *b*) la fuerza de fricción, *c*) la fuerza normal de la mesa y *d*) la gravedad. *e*) ¿Cuál es la fuerza neta sobre el libro?

6.2 • Un camión de remolque tira de un automóvil 5.00 km por una carretera horizontal usando un cable cuya tensión es de 850 N. *a*) ¿Cuánto trabajo realiza el cable sobre el automóvil si tira de él horizontalmente? ¿Y si tira a 35.0° sobre la horizontal? *b*) ¿Cuánto trabajo realiza el cable sobre el camión de remolque en ambos casos del inciso *a*)? *c*) ¿Cuánto trabajo efectúa la gravedad sobre el automóvil en el inciso *a*)?

6.3 • Un obrero empuja horizontalmente una caja de 30.0 kg una distancia de 4.5 m en un piso plano, con velocidad constante. El coeficiente de fricción cinética entre el piso y la caja es de 0.25. *a*) ¿Qué magnitud de fuerza debe aplicar el obrero? *b*) ¿Cuánto trabajo efectúa dicha fuerza sobre la caja? *c*) ¿Cuánto trabajo efectúa la fricción sobre la caja? *d*) ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza normal sobre la caja? ¿Y la gravedad? *e*) ¿Qué trabajo total se efectúa sobre la caja?

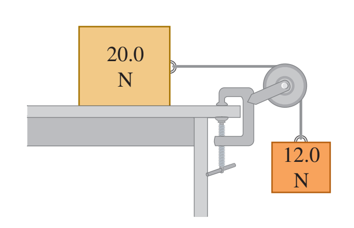
6.4 •• Suponga que el obrero del ejercicio 6.3 empuja hacia abajo con un ángulo de 30° bajo la horizontal. *a*) ¿Qué magnitud de fuerza debe aplicar el obrero para mover la caja con velocidad constante? *b*) ¿Qué trabajo realiza esta fuerza sobre la caja si se empuja por una distancia de 4.5 m? *c*) ¿Qué trabajo realiza la fricción sobre la caja en este desplazamiento? *d*) ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza normal sobre la caja? ¿Y la gravedad? *e*) ¿Qué trabajo total se efectúa sobre la caja?

6.5 •• Un pintor de 75.0 kg sube por una escalera de 2.75 m que está inclinada contra una pared vertical. La escalera forma un ángulo de 30.0° con la pared. *a*) ¿Cuánto trabajo realiza la gravedad sobre el pintor? *b*) ¿La respuesta del inciso *a*) depende de si el pintor sube a rapidez constante o de si acelera hacia arriba de la escalera?

6.6 •• Dos botes remolcadores tiran de un buque tanque averiado. Cada uno ejerce una fuerza constante de 1.80×10^6 N, uno 14° al oeste del norte y el otro 14° al este del norte, tirando del buque tanque 0.75 km al norte. ¿Qué trabajo total efectúan sobre el buque tanque?

6.7 • Dos bloques están unidos por una cuerda muy ligera que pasa por una polea sin masa y sin fricción (figura E6.7). Al viajar a rapidez constante, el bloque de 20.0 N se mueve 75.0 cm a la derecha y el bloque de 12.0 N se mueve 75.0 cm hacia abajo. Durante este proceso, ¿cuánto trabajo efectúan *a*) sobre el bloque de 12.0 N, **i.** la gravedad y **ii.** la tensión en la cuerda? *b*) ¿Cuánto trabajo efectúan sobre el bloque de 20.0 N, **i.** la gravedad, **ii.** la tensión en la cuerda, **iii.** la fricción y **iv.** la fuerza normal? *c*) Obtenga el trabajo total efectuado sobre cada bloque.

Figura **E6.7**



6.8 •• Un carrito de supermercado cargado rueda por un estacionamiento por el que sopla un viento fuerte. Usted aplica una fuerza constante $\vec{F} = (30\ \text{N})\hat{\imath} - (40\ \text{N})\hat{\jmath}$ al carrito mientras este experimenta un desplazamiento $\vec{s} = (-9.0\ \text{m})\hat{\imath} - (3.0\ \text{m})\hat{\jmath}$. ¿Cuánto trabajo efectúa la fuerza que usted aplica al carrito?

6.9 • Una pelota de 0.800 kg se ata al extremo de una cuerda de 1.60 m de longitud y se hace girar en un círculo vertical. *a*) Durante un círculo completo, iniciando en cualquier punto, calcule el trabajo total efectuado sobre la pelota por: **i.** la tensión en la cuerda; **ii.** la gravedad. *b*) Repita el inciso *a*) para el movimiento a lo largo del semicírculo que va de la parte más baja a la más alta de la trayectoria.

6.10 •• En el área de clasificación del correo, un paquete de 8.00 kg se desliza 2.00 m hacia abajo de una rampa con una pendiente de 53.0° por debajo de la horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el paquete y la superficie de la rampa es de 0.40. Calcule el trabajo realizado sobre el paquete por *a*) la fuerza de fricción, *b*) la gravedad y *c*) la fuerza normal. *d*) ¿Cuál es el trabajo neto realizado sobre el paquete?

6.11 •• Un monitor de computadora empacado, de 10.0 kg, es arrastrado hacia arriba, por la fricción, 5.50 m sobre una banda transportadora inclinada un ángulo de 36.9° por arriba de la horizontal. Si la rapidez del monitor es de 2.10 cm/s constantes, ¿cuánto trabajo se realiza sobre el monitor por *a*) la fricción, *b*) la gravedad y *c*) la fuerza normal de la banda transportadora?

6.12 •• Usted aplica una fuerza constante $\vec{F} = (-68.0\ \text{N})\hat{\imath} + (36.0\ \text{N})\hat{\jmath}$ a un automóvil de 380 kg conforme este avanza 48.0 m en una dirección a 240.0° en sentido antihorario a partir del eje $+x$. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza que usted aplica sobre el automóvil?

Sección 6.2 Energía cinética y el teorema trabajo-energía

6.13 •• **Energía animal.** BIO Los guepardos adultos, los felinos grandes más rápidos, tienen una masa de 70 kg aproximadamente, y se les ha cronometrado corriendo con una rapidez de hasta 72 mph (32 m/s). *a*) ¿Cuántos joules de energía cinética tienen estos guepardos tan veloces? *b*) ¿Por qué factor cambiaría su energía cinética si la rapidez se duplicara?

6.14 •• Un libro de 1.50 kg se desliza a lo largo de una superficie horizontal áspera. En el punto *A* se mueve a 3.21 m/s, y en el punto *B* ha disminuido a 1.25 m/s. *a*) ¿Cuánto trabajo se realiza sobre el libro entre *A* y *B*? *b*) Si se realizan −0.750 J de trabajo sobre el libro de *B* a *C*, ¿con qué rapidez se mueve en el punto *C*? *c*) ¿Con qué rapidez se movería en *C* si se realizaran +0.750 J de trabajo sobre él de *B* a *C*?

6.15 • **Cráter de meteorito.** Hace aproximadamente 50,000 años, un meteorito se estrelló contra la Tierra cerca de lo que actualmente es la ciudad de Flagstaff, en Arizona. Mediciones realizadas en 2005 estiman que dicho meteorito tenía una masa aproximada de 1.4×10^8 kg (unas 150,000 toneladas) y se impactó contra el suelo a 12 km/s. *a*) ¿Cuánta energía cinética transmitió este meteorito al suelo? *b*) ¿Cómo se compara esta energía con la energía liberada por una bomba nuclear de 1.0 megatón? (Una bomba de un megatón libera la misma cantidad de energía que un millón de toneladas de TNT, y 1.0 ton de TNT libera 4.184×10^9 J de energía).

6.16 • **Algunas energías cinéticas comunes.** *a*) ¿En el modelo atómico de Bohr, el electrón del hidrógeno en estado fundamental tiene una rapidez orbital de 2190 km/s. ¿Cuál es su energía cinética? (Consulte el apéndice F). *b*) Si usted deja caer un peso de 1.0 kg (aproximadamente 2 lb) desde una altura de 1.0 m, ¿cuántos joules de energía cinética tendrá cuando llegue al suelo? *c*) ¿Es razonable que un niño de 30 kg pueda correr lo suficientemente rápido para tener 100 J de energía cinética?

6.17 •• En la figura E6.7 suponga que no hay fuerza de fricción sobre el bloque de 20.0 N que descansa sobre la mesa. La polea es ligera y sin fricción. *a*) Calcule la tensión *T* en la cuerda ligera que une los bloques. *b*) Para un desplazamiento en el cual el bloque de 12.0 N desciende 1.20 m, calcule el trabajo total realizado sobre **i.** el bloque de 20.0 N y **ii.** el bloque de 12.0 N. *c*) Para el desplazamiento del inciso *b*), calcule el trabajo total realizado sobre el sistema de dos bloques. ¿Cómo se compara su respuesta con el trabajo realizado sobre el bloque de 12.0 N por la gravedad? *d*) Si el sistema se libera del reposo, ¿cuál es la rapidez del bloque de 12.0 N cuando ha descendido 1.20 m?

6.18 • Una sandía de 4.80 kg se deja caer del reposo desde la azotea de un edificio de 25.0 m y no experimenta una resistencia significativa del aire. *a*) Calcule el trabajo realizado por la gravedad sobre la sandía durante su desplazamiento desde la azotea hasta el suelo. *b*) Justo antes de estrellarse contra el suelo, ¿cuáles son **i.** la energía cinética y **ii.** la rapidez de la sandía? *c*) ¿Cuál de las respuestas en los incisos *a*) y *b*) sería *diferente* si hubiera una resistencia considerable del aire?

6.19 •• Use el teorema trabajo-energía para resolver los siguientes problemas. Utilice las leyes de Newton para comprobar sus respuestas. Ignore la resistencia del aire en todos los casos. *a*) Una rama cae desde la parte superior de una secuoya de 95.0 m de altura, partiendo del reposo. ¿Con qué rapidez se mueve cuando llega al suelo? *b*) Un volcán expulsa una roca directamente hacia arriba 525 m en el aire. ¿Con qué rapidez se movía la roca justo al salir del volcán? *c*) Una esquiadora que se desplaza a 5.00 m/s llega a una zona de nieve horizontal, áspera y larga, cuyo coeficiente de fricción cinética con los esquíes es de 0.220. ¿Qué tan lejos viaja ella sobre esta zona antes de detenerse? *d*) Suponga que la zona áspera del inciso *c*) solo tiene 2.90 m de longitud. ¿Con qué rapidez se movería la esquiadora al llegar al extremo de dicha zona? *e*) En la base de una colina congelada sin fricción que se eleva a 25.0° sobre la horizontal, un trineo tiene una rapidez de 12.0 m/s hacia la colina. ¿A qué altura vertical sobre la base llegará antes de detenerse?

6.20 •• Se lanza una piedra de 20 N verticalmente hacia arriba desde el suelo. Se observa que, cuando está 15.0 m sobre el suelo, viaja a 25.0 m/s hacia arriba. Use el teorema trabajo-energía para determinar *a*) su rapidez en el momento de ser lanzada y *b*) su altura máxima.

6.21 •• Imagine que pertenece a la Cuadrilla de Rescate Alpino y debe proyectar hacia arriba una caja de suministros por una pendiente de ángulo constante α, de modo que llegue a un esquiador varado que está a una distancia vertical h sobre la base de la pendiente. La pendiente es resbalosa, pero hay cierta fricción presente, con coeficiente de fricción cinética μ_k. Use el teorema trabajo-energía para calcular la rapidez mínima que debe impartir a la caja en la base de la pendiente para que llegue al esquiador. Exprese su respuesta en términos de g, h, μ_k y α.

6.22 •• Una masa m baja deslizándose por un plano inclinado liso que forma un ángulo α con la horizontal, desde una altura vertical inicial h. *a*) El trabajo efectuado por una fuerza es la suma del trabajo efectuado por las componentes de la fuerza. Considere las componentes de la gravedad paralela y perpendicular al plano. Calcule el trabajo efectuado sobre la masa por cada componente y use estos resultados para demostrar que el trabajo efectuado por la gravedad es exactamente el mismo que efectuaría si la masa cayera verticalmente por el aire desde una altura h. *b*) Use el teorema trabajo-energía para demostrar que la rapidez de la masa en la base del plano inclinado es la misma que tendría si se hubiera dejado caer desde la altura h, sea cual fuere el ángulo α del plano. Explique cómo esta rapidez puede ser independiente del ángulo del plano. *c*) Use los resultados del inciso *b*) para obtener la rapidez de una piedra que baja deslizándose por una colina congelada sin fricción, partiendo del reposo 15.0 m arriba del pie de la colina.

6.23 • Un trineo con masa de 8.00 kg se mueve en línea recta sobre una superficie horizontal sin fricción. En cierto punto, su rapidez es de 4.00 m/s; 2.50 m más adelante, su rapidez es de 6.00 m/s. Use el teorema trabajo-energía para determinar la fuerza que actúa sobre el trineo, suponiendo que tal fuerza es constante y actúa en la dirección del movimiento del trineo.

6.24 •• Un balón de fútbol soccer de 0.420 kg se mueve inicialmente con rapidez de 2.00 m/s. Un jugador lo patea, ejerciendo una fuerza constante de 40.0 N en la dirección del movimiento del balón. ¿A lo largo de qué distancia debe estar su pie en contacto con el balón para aumentar la rapidez de este a 6.00 m/s?

6.25 • Un "12-pack" de Omni-Cola (masa de 4.30 kg) está en reposo en un piso horizontal. Luego, un perro entrenado que ejerce una fuerza horizontal con magnitud de 36.0 N lo empuja 1.20 m en línea recta. Use el teorema trabajo-energía para determinar la rapidez final si *a*) no hay fricción entre el 12-pack y el piso; *b*) el coeficiente de fricción cinética entre el 12-pack y el piso es de 0.30.

6.26 • Un bateador golpea una pelota de béisbol con masa de 0.145 kg y la lanza hacia arriba con rapidez inicial de 25.0 m/s. *a*) ¿Cuánto trabajo habrá realizado la gravedad sobre la pelota cuando esta alcanza una altura de 20.0 m sobre el bate? *b*) Use el teorema trabajo-energía para calcular la rapidez de la pelota a una altura de 20.0 m sobre el bate. Ignore la resistencia del aire. *c*) ¿La respuesta al inciso *b*) depende de si la pelota se mueve hacia arriba o hacia abajo cuando está a la altura de 20.0 m? Explique su respuesta.

6.27 • Un vagón de juguete con masa de 7.00 kg se mueve en línea recta sobre una superficie horizontal sin fricción. Tiene una rapidez inicial de 4.00 m/s y luego es empujado 3.0 m, en la dirección de la velocidad inicial, por una fuerza cuya magnitud es de 10.0 N. *a*) Use el teorema trabajo-energía para calcular la rapidez final del vagón. *b*) Calcule la aceleración producida por la fuerza y úsela en las relaciones de cinemática del capítulo 2 para calcular la rapidez final del vagón. Compare este resultado con el calculado en el inciso *a*).

6.28 •• Un bloque de hielo con masa de 2.00 kg se desliza 0.750 m hacia abajo por un plano inclinado a un ángulo de 36.9° bajo la horizontal. Si el bloque parte del reposo, ¿cuál será su rapidez final? Puede despreciarse la fricción.

6.29 • **Distancia para detenerse.** Un automóvil viaja por un camino horizontal con rapidez v_0 en el instante en que los frenos se bloquean, de modo que las llantas se deslizan en vez de rodar. *a*) Use el teorema trabajo-energía para calcular la distancia mínima en que puede detenerse el auto en términos de v_0, g y el coeficiente de fricción cinética μ_k entre los neumáticos y el camino. *b*) ¿En qué factor cambiaría la distancia mínima de frenado, si **i.** se duplicara el coeficiente de fricción cinética, **ii.** se duplicara la rapidez inicial, o **iii.** se duplicaran tanto el coeficiente de fricción cinética como la rapidez inicial?

6.30 •• Una caja de 30.0 kg se mueve inicialmente con una velocidad de magnitud igual a 3.90 m/s en una dirección 37.0° al oeste del norte. ¿Cuánto trabajo se debe realizar sobre la caja para cambiar su velocidad a 5.62 m/s en una dirección 63.0° al sur del este?

Sección 6.3 Trabajo y energía con fuerza variable

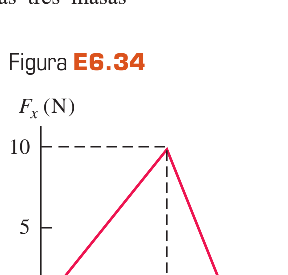
6.31 • BIO **Reparación del corazón.** Un cirujano usa material de un corazón donado para reparar la aorta dañada de un paciente y necesita conocer las características de elasticidad del material de la aorta. Pruebas realizadas sobre una tira de 16.0 cm de la aorta donada revelan que se estira 3.75 cm cuando se aplica un tirón de 1.50 N sobre ella. *a*) ¿Cuál es la fuerza constante de esta tira de material? *b*) Si la distancia máxima que debe estirarse cuando se sustituya la aorta del corazón dañado es de 1.14 cm, ¿cuál es la fuerza máxima que podrá ejercer allí?

6.32 •• Se requiere un trabajo de 12.0 J para estirar un resorte 3.00 cm con respecto a su longitud no estirada. *a*) ¿Cuál es la constante de fuerza de este resorte? *b*) ¿Qué fuerza se necesita para estirar 3.00 cm el resorte desde su longitud sin estirar? *c*) ¿Cuánto trabajo debe efectuarse para comprimir ese resorte 4.00 cm con respecto a su longitud no estirada, y qué fuerza se necesita para comprimirlo esta distancia?

Figura **E6.33**

6.33 • Tres masas idénticas de 6.40 kg cuelgan de tres resortes idénticos, como se muestra en la figura E6.33. Cada resorte tiene una constante de fuerza de 7.80 kN/m y tenía 12.0 cm de longitud antes de que se le sujetara una masa. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre de cada masa. *b*) ¿Qué longitud tiene cada resorte cuando cuelga como se muestra? (*Sugerencia:* Aísle primero la masa de la parte inferior. Luego maneje las dos masas inferiores como un sistema. Por último, considere las tres masas como un sistema).

Figura **E6.34**



6.34 • Una niña aplica una fuerza $\vec{F}$ paralela al eje x a un trineo de 10.0 kg que se mueve sobre la superficie congelada de un estanque pequeño. La niña controla la rapidez del trineo, y la componente x de la fuerza que aplica varía con la coordenada x del trineo, como se muestra en la figura E6.34. Calcule el trabajo efectuado por $\vec{F}$ cuando el trineo se mueve *a*) de $x = 0$ a $x = 8.0$ m; *b*) de $x = 8.0$ m a $x = 12.0$ m; *c*) de $x = 0$ a $x = 12.0$ m.

6.35 •• Suponga que el trineo del ejercicio 6.34 está inicialmente en reposo en $x = 0$. Use el teorema trabajo-energía para determinar la rapidez del trineo en *a*) $x = 8.0$ m, y *b*) $x = 12.0$ m. Puede despreciarse la fricción entre el trineo y la superficie del estanque.

6.36 • Una caja de 2.0 kg y otra de 3.0 kg que se encuentran sobre un piso horizontal perfectamente liso tienen un resorte comprimido entre ellas con una constante de fuerza de 250 N/m. Si la compresión inicial del resorte es de 6.0 cm, calcule la aceleración de cada caja un instante después de ser liberadas. Asegúrese de incluir los diagramas de cuerpo libre de cada caja como parte de la solución.

6.37 •• Una caja de 6.0 kg que se mueve a 3.0 m/s, sobre una superficie horizontal sin fricción, choca con un resorte ligero cuya constante de fuerza es de 75 N/cm. Use el teorema trabajo-energía para determinar la compresión máxima del resorte.

6.38 •• **Presión con las piernas.** Como parte de su rutina diaria de ejercicio, usted se acuesta boca arriba y empuja con los pies una plataforma conectada a dos resortes rígidos paralelos entre sí. Al empujar la plataforma, comprime los resortes. Realiza 80.0 J de trabajo al comprimir los resortes 0.200 m con respecto a su longitud no comprimida. *a*) ¿Qué fuerza debe aplicar para mantener la plataforma en esta posición? *b*) ¿Cuánto trabajo *adicional* debe realizar para mover la plataforma *otros* 0.200 m, y qué fuerza máxima debe aplicar?

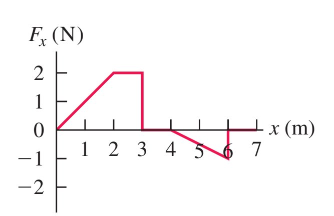
6.39 •• *a*) En el ejemplo 6.7 (sección 6.3), se calcula que, con el riel de aire desactivado, el deslizador viaja 8.6 cm antes de detenerse instantáneamente. ¿Qué tan grande debe ser el coeficiente de fricción estática μ_s para evitar que el deslizador regrese a la izquierda? *b*) Si el coeficiente de fricción estática entre el deslizador y el riel es $\mu_s = 0.60$, ¿qué rapidez inicial máxima v_1 puede imprimirse al deslizador y aun así permanecer en reposo luego de detenerse instantáneamente?

Con el riel de aire desactivado, el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.47$.

6.40 • Un bloque de hielo de 4.00 kg se coloca contra un resorte horizontal que tiene constante de fuerza $k = 200$ N/m, y está comprimido 0.025 m. El resorte se suelta y acelera al bloque sobre una superficie horizontal. Pueden despreciarse la fricción y la masa del resorte. *a*) Calcule el trabajo efectuado por el resorte sobre el bloque, durante el movimiento del bloque desde su posición inicial hasta que el resorte recupera su longitud no comprimida. *b*) ¿Qué rapidez tiene el bloque al perder contacto con el resorte?

6.41 • A un automóvil a escala, de 2.0 kg, controlado por radio, se le aplica una fuerza $\vec{F}$ paralela al eje x, mientras el automóvil se mueve por una pista recta. La componente x de la fuerza varía con la coordenada x del automóvil, como se indica en la figura E6.41. Calcule el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$ cuando el auto se mueve de *a*) $x = 0$ a $x = 3.0$ m; *b*) $x = 3.0$ m a $x = 4.0$ m; *c*) $x = 4.0$ m a $x = 7.0$ m; *d*) $x = 0$ m a $x = 7.0$ m; *e*) $x = 7.0$ m a $x = 2.0$ m.

Figura **E6.41**



6.42 • Suponga que el automóvil a escala de 2.0 kg del ejercicio 6.41 está inicialmente en reposo en $x = 0$ y que $\vec{F}$ es la fuerza neta que actúa sobre él. Use el teorema trabajo-energía para determinar la rapidez del auto en *a*) $x = 3.0$ m; *b*) $x = 4.0$ m; *c*) $x = 7.0$ m.

6.43 •• En un parque acuático, trineos con pasajeros se impulsan por una superficie horizontal resbaladiza liberando un resorte grande comprimido. El resorte, con una constante de fuerza $k = 40.0$ N/cm y masa despreciable, descansa sobre la superficie horizontal sin fricción. Un extremo está en contacto con una pared fija; un trineo con pasajero, cuya masa total es de 70.0 kg, se empuja contra el otro extremo, comprimiendo el resorte 0.375 m. Luego se libera el trineo con velocidad inicial cero. ¿Qué rapidez tiene el trineo cuando el resorte *a*) regresa a su longitud no comprimida, y *b*) cuando aún está comprimido 0.200 m?

6.44 • **La mitad de un resorte.** *a*) Suponga que usted corta a la mitad un resorte ideal sin masa. Si el resorte completo tiene una constante de fuerza k, ¿cuál es la constante de fuerza de cada mitad, en términos de k? (*Sugerencia:* Piense en el resorte original como dos mitades iguales, y que cada mitad produce la misma fuerza que el resorte completo. ¿Nota usted por qué las fuerzas deben ser iguales?) *b*) Si ahora corta el resorte en tres segmentos iguales, ¿cuál será la constante de fuerza de cada uno en términos de k?

6.45 •• Un deslizador pequeño con masa de 0.0900 kg se coloca contra un resorte comprimido en la base de un riel de aire que tiene una pendiente de 40.0° sobre la horizontal. El resorte tiene una constante de fuerza $k = 640$ N/m y masa despreciable. Al soltarse el resorte, el deslizador viaja una distancia máxima de 1.80 m sobre el riel antes de deslizarse hacia abajo. Antes de alcanzar esta distancia máxima, el deslizador pierde contacto con el resorte. *a*) ¿Qué distancia se comprimió originalmente el resorte? *b*) Cuando el deslizador haya recorrido 0.80 m por el riel de aire desde su posición inicial contra el resorte comprimido, ¿estará todavía en contacto con el resorte? ¿Qué energía cinética tiene el deslizador en ese punto?

6.46 •• Un albañil ingenioso construye un dispositivo para lanzar ladrillos hacia arriba de la pared donde está trabajando. Se coloca un ladrillo sobre un resorte vertical comprimido con constante de fuerza $k = 450$ N/m y masa despreciable. Al soltarse el resorte, el ladrillo es empujado hacia arriba. Si un ladrillo con masa de 1.80 kg debe alcanzar una altura máxima de 3.6 m sobre su posición inicial, ¿qué distancia deberá comprimirse el resorte? (El ladrillo pierde contacto con el resorte cuando este recupera su longitud no comprimida. ¿Por qué?)

6.47 •• **CALC** Se aplica una fuerza $F(x) = 18.0\text{ N} - (0.530\text{ N/m})x$ en la dirección $+x$ a una caja de 6.00 kg que descansa sobre la superficie horizontal, sin fricción, de un lago congelado. $F(x)$ es la única fuerza horizontal sobre la caja. Si esta última se encuentra inicialmente en reposo en $x = 0$, ¿cuál es la rapidez después de viajar 14.0 m?

Sección 6.4 Potencia

6.48 •• Una caja sobre una carreta motorizada parte del reposo y se mueve con una aceleración constante hacia el este, cuyo valor es $a = 2.80$ m/s^2. Un trabajador ayuda a la carreta empujándola con una fuerza hacia el este de una magnitud que depende del tiempo, de acuerdo con $F(t) = (5.40\text{ N/s})t$. ¿Cuál es la potencia instantánea suministrada por esta fuerza en $t = 5.00$ s?

6.49 • ¿Cuántos joules de energía consume una bombilla eléctrica de 100 watts cada hora? ¿Con qué rapidez tendría que correr una persona de 70 kg para tener esa cantidad de energía cinética?

6.50 •• **BIO** **¿Debe caminar o correr?** Hay 5.0 km de su casa al laboratorio de física. Como parte de su programa de acondicionamiento físico, usted podría correr esa distancia a 10 km/h (lo cual consume energía a una tasa de 700 W), o caminarla tranquilamente a 3.0 km/h (lo cual consume una energía de 290 W). ¿Con cuál opción quemaría más energía, y cuánta (en joules) se quemaría? ¿Por qué el ejercicio más intenso quema menos energía que el ejercicio menos intenso?

6.51 •• **Magnetoestrella.** El 27 de diciembre de 2004 los astrónomos observaron el destello de luz más grande jamás registrado, proveniente del exterior del Sistema Solar. Provenía de la estrella de neutrones altamente magnética SGR 1806-20 (una *magnetar* o *magnetoestrella*). Durante 0.20 s, dicha estrella liberó tanta energía como nuestro Sol liberó durante 250,000 años. Si P es la potencia de salida media de nuestro Sol, ¿cuál era la potencia de salida media (en términos de P) de esta magnetoestrella?

6.52 •• Una piedra de 20.0 kg se desliza por una superficie horizontal áspera a 8.00 m/s y finalmente se detiene debido a la fricción. El coeficiente de fricción cinética entre la piedra y la superficie es de 0.200. ¿Qué potencia media se produce por fricción hasta que la piedra se detiene?

6.53 • Un equipo de dos personas en una bicicleta tándem debe superar una fuerza de 165 N para mantener una rapidez de 9.00 m/s. Calcule la potencia requerida por ciclista, suponiendo contribuciones iguales. Exprese su respuesta en watts y en caballos de potencia.

6.54 •• Un pequeño avión monomotor con masa de 700 kg gana altitud a razón de 2.5 m/s (150 m/min, o 500 ft/min) cuando su motor de 75 kW (100 hp) está desarrollando su potencia máxima. ¿Qué fracción de la potencia del motor se está invirtiendo en hacer que el avión ascienda? (El resto se usa para vencer la resistencia del aire o se pierde por ineficiencias en la hélice y el motor).

6.55 •• **Trabajar como caballo.** Imagine que su trabajo es levantar cajas de 30 kg una distancia vertical de 0.90 m del suelo a un camión. *a*) ¿Cuántas cajas tendría que cargar en el camión en 1 min, para que su gasto medio de potencia invertido en levantar las cajas sea de 0.50 hp? *b*) ¿Y para que fuera de 100 W?

6.56 •• Un elevador sin pasajeros tiene masa de 600 kg y está diseñado para subir con rapidez constante una distancia vertical de 20.0 m

(5 pisos) en 16.0 s; es impulsado por un motor capaz de suministrar 40 hp al elevador. ¿Cuántos pasajeros como máximo pueden subir en el elevador? Suponga una masa de 65.0 kg por pasajero.

6.57 •• Un remolcador de esquiadores opera en una ladera a 15.0° con longitud de 300 m. La cuerda se mueve a 12.0 km/h y se suministra potencia para remolcar 50 pasajeros (de 70.0 kg en promedio) a la vez. Estime la potencia requerida para operar el remolcador.

6.58 •• El portaaviones *John F. Kennedy* tiene una masa de 7.4×10^7 kg. Cuando sus motores desarrollan su potencia máxima de 280,000 hp, la nave viaja con su rapidez máxima de 35 nudos (65 km/h). Si el 70% de esa potencia se dedica a impulsar la nave por el agua, ¿qué magnitud tiene la fuerza de resistencia del agua que se opone al movimiento del portaaviones con esta rapidez?

6.59 • **BIO** Un insecto volador común aplica una fuerza media igual al doble de su peso durante cada aleteo hacia abajo cuando está suspendido en el aire. Suponga que la masa del insecto es de 10 g y que las alas recorren una distancia media vertical hacia abajo de 1.0 cm en cada aleteo. Suponiendo 100 aleteos por segundo, estime el gasto medio de potencia del insecto.

PROBLEMAS

6.60 ••• **CALC** Una vaca terca intenta salirse del establo mientras usted la empuja cada vez con más fuerza para impedirlo. En coordenadas cuyo origen es la puerta del establo, la vaca se desplaza de $x = 0$ a $x = 6.9$ m, mientras usted aplica una fuerza con una componente $F_x = -[20.0 \text{ N} + (3.0 \text{ N/m})x]$. ¿Cuánto trabajo efectúa sobre la vaca la fuerza que usted aplica a lo largo de este desplazamiento?

6.61 •• **CALC** **Barra giratoria.** Una barra delgada y uniforme de 12.0 kg y longitud de 2.00 m gira uniformemente alrededor de un pivote en un extremo, describiendo 5.00 revoluciones completas cada 3.00 segundos. ¿Qué energía cinética tiene esta barra? (*Sugerencia:* Considere que los diferentes puntos de la barra tienen diferente rapidez. Divida la barra en segmentos infinitesimales de masa *dm* e integre para obtener la energía cinética total de todos estos segmentos).

6.62 •• **Un asteroide cercano a la Tierra.** El 13 de abril de 2029 (¡un viernes 13!), el asteroide 99942 Apophis pasará a 18,600 millas de la Tierra, ¡aproximadamente $\frac{1}{13}$ de la distancia a la Luna! Tiene una densidad de 2600 kg/m^3, puede modelarse como una esfera de 320 m de diámetro y viajará a 12.6 km/s. *a*) Si, debido a una pequeña perturbación en su órbita, el asteroide fuera a chocar contra la Tierra, ¿cuánta energía cinética produciría? *b*) El arma nuclear más grande probada por Estados Unidos fue la bomba "Castle-Bravo", que produjo 15 megatones de TNT. (Un megatón de TNT libera 4.184×10^{15} J de energía). ¿Cuántas bombas Castle-Bravo serían equivalentes a la energía del Apophis?

6.63 • Un transportador de equipaje tira de una maleta de 20.0 kg, para subirla por una rampa inclinada 25.0° sobre la horizontal, con una fuerza $\vec{F}$ de magnitud 140 N que actúa paralela a la rampa. El coeficiente de fricción cinética entre la rampa y la suitcase es $\mu_k = 0.300$. Si la maleta viaja 3.80 m en la rampa, calcule *a*) el trabajo realizado sobre la maleta por $\vec{F}$; *b*) la fuerza gravitacional, *c*) la fuerza normal, *d*) la fuerza de fricción. *e*) Calcule el trabajo total realizado sobre la maleta. *f*) Si la rapidez de la maleta es cero en la base de la rampa, ¿qué rapidez tiene después de haber subido 3.80 m por la rampa?

6.64 • **BIO** **Flexiones de brazos.** Al hacer una flexión de brazos en una barra, un hombre levanta su cuerpo 0.40 m. *a*) ¿Cuánto trabajo efectúa por kilogramo de masa corporal? *b*) Los músculos que intervienen en el movimiento pueden generar aproximadamente 70 J de trabajo por kilogramo de masa muscular. Si el hombre apenas logra levantarse 0.40 m, ¿qué porcentaje de la masa corporal corresponde a esos músculos? (Como comparación, el porcentaje *total* de músculo en un hombre común de 70 kg con el 14% de grasa corporal es cercano al 43%). *c*) Repita el inciso *b*) para el pequeño hijo de tal hombre, cuyos brazos tienen la mitad de la longitud que los de su padre, pero cuyos músculos también pueden generar 70 J de trabajo por kilogramo de masa muscular. *d*) Los adultos y niños tienen aproximadamente el mismo porcentaje de músculo en su cuerpo. Explique por qué para los niños suele ser más fácil que para sus padres hacer flexiones de brazos en una barra.

6.65 ••• **PA** Una caja de 20.0 kg descansa al pie de una rampa de 15.0 m de longitud e inclinada 34.0° por arriba de la horizontal. Se aplica a la caja una fuerza constante horizontal de 290 N, para empujarla hacia arriba de la rampa. Mientras la caja se mueve, la rampa ejerce sobre ella una fuerza de fricción constante de 65.0 N de magnitud. *a*) ¿Cuál es el trabajo total realizado sobre la caja durante el movimiento desde la parte inferior a la superior de la rampa? *b*) ¿Cuánto tiempo le toma a la caja llegar a la parte superior de la rampa?

6.66 ••• Considere los bloques del ejercicio 6.7 conforme se mueven 75.0 cm. Calcule el trabajo total realizado sobre cada uno *a*) si no hay fricción entre la mesa y el bloque de 20.0 N, y *b*) si $\mu_s = 0.500$ y $\mu_k = 0.325$ entre la mesa y el bloque de 20.0 N.

6.67 • El transbordador espacial, con masa de 86,400 kg, está en una órbita circular con radio de 6.66×10^6 m alrededor de la Tierra, y tarda 90.1 min en completar una órbita. En una misión de reparación, la nave se acerca cuidadosamente 1.00 m cada 3.00 s a un satélite averiado. Calcule la energía cinética del transbordador *a*) relativa a la Tierra, y *b*) relativa al satélite.

6.68 •• Un paquete de 5.00 kg baja 1.50 m deslizándose por una larga rampa con pendiente de 24.0° bajo la horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el paquete y la rampa es $\mu_k = 0.310$. Calcule el trabajo realizado sobre el paquete por *a*) la fricción, *b*) la gravedad, *c*) la fuerza normal. *d*) Calcule el trabajo total realizado sobre el paquete. *e*) Si el paquete tiene una rapidez de 2.20 m/s en la parte superior de la rampa, ¿qué rapidez tiene después de bajar deslizándose 1.50 m?

6.69 •• **PA** **BIO** **Latigazo cervical.** Cuando un automóvil es golpeado por detrás, los pasajeros experimentan una aceleración repentina hacia adelante, la cual puede provocar un daño severo al cuello, conocido como *latigazo cervical*. Durante una aceleración normal, los músculos del cuello desempeñan un papel importante en la aceleración de la cabeza, de modo que los huesos no se dañan. Pero durante una aceleración muy repentina, los músculos no reaccionan de inmediato porque son flexibles, de manera que la mayor parte de la aceleración es absorbida por los huesos del cuello. Pruebas experimentales han demostrado que estos huesos se fracturan si absorben más de 8.0 J de energía. *a*) Si un automóvil que espera en el semáforo es colisionado por atrás durante 10.0 ms, ¿cuál es la máxima rapidez que este automóvil y su conductor pueden alcanzar sin que se rompan los huesos del cuello, si la cabeza del conductor tiene una masa de 5.0 kg (la cual es la masa correcta para una persona de 70 kg)? Exprese su respuesta en m/s y en mph. *b*) ¿Cuál es la aceleración de los pasajeros durante la colisión del inciso *a*), y qué tan grande es la fuerza que actúa para acelerar sus cabezas? Exprese la aceleración en m/s^2 y en *g*.

6.70 •• **CALC** Una fuerza neta a lo largo del eje *x* que tiene una componente $F_x = -12.0 \text{ N} + (0.300 \text{ N/m}^2)x^2$ se aplica a un objeto de 5.00 kg que inicialmente se encuentra en el origen y se mueve en la dirección $-x$ con una rapidez de 6.00 m/s. ¿Cuál es la rapidez del objeto cuando alcanza el punto $x = 5.00$ m?

6.71 • **CALC** Un objeto es atraído hacia el origen con una fuerza dada por $F_x = -k/x^2$. (Las fuerzas gravitacional y eléctrica tienen esta dependencia de la distancia). *a*) Calcule el trabajo realizado por la fuerza F_x cuando el objeto se mueve en la dirección *x* de x_1 a x_2. Si $x_2 > x_1$, ¿el trabajo realizado por F_x es positivo o negativo? *b*) La otra fuerza que actúa sobre el objeto es la que usted ejerce con la mano para moverlo

lentamente de x_1 a x_2. ¿Qué tanto trabajo efectúa usted? Si $x_2 > x_1$, ¿el trabajo que usted realiza es positivo o negativo? *c*) Explique las similitudes y diferencias entre sus respuestas a los incisos *a*) y *b*).

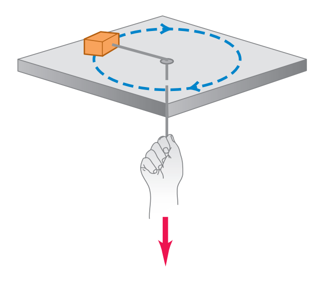
6.72 ••• CALC La atracción gravitacional de la Tierra sobre un objeto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el objeto y el centro de la Tierra. En la superficie terrestre, esa fuerza es igual al peso normal del objeto, *mg*, donde $g = 9.8 \text{ m/s}^2$; en tanto que a grandes distancias la fuerza es cero. Si un asteroide de 20,000 kg cae a la Tierra desde un punto muy lejano, ¿qué rapidez mínima tendrá al chocar contra la superficie terrestre y cuánta energía cinética impartirá a nuestro planeta? Puede ignorar los efectos de la atmósfera terrestre.

6.73 • CALC Coeficientes de fricción variables. Una caja resbala con una rapidez de 4.50 m/s por una superficie horizontal cuando, en el punto *P*, encuentra una sección áspera. Aquí, el coeficiente de fricción no es constante: inicia en 0.100 en *P* y aumenta linealmente con la distancia después de *P*, alcanzando un valor de 0.600 en 12.5 m más allá de *P*. *a*) Use el teorema trabajo-energía para obtener la distancia que la caja se desliza antes de detenerse. *b*) Determine el coeficiente de fricción en el punto donde se detuvo. *c*) ¿Qué distancia se habría deslizado la caja si el coeficiente de fricción, en vez de aumentar, se hubiera mantenido en 0.100?

6.74 •• CALC Considere un resorte que no obedece fielmente la ley de Hooke. Un extremo del resorte se encuentra fijo. Para mantenerlo estirado o comprimido una distancia *x*, se debe aplicar al extremo libre una fuerza con una componente $F_x = kx - bx^2 + cx^3$. Aquí, $k = 100 \text{ N/m}$, $b = 700 \text{ N/m}^2$ y $c = 12{,}000 \text{ N/m}^3$. Observe que $x > 0$ cuando se estira el resorte y $x < 0$ cuando se comprime. *a*) ¿Cuánto trabajo debe realizarse para estirar este resorte 0.050 m con respecto a su longitud no estirada? *b*) ¿Cuánto trabajo debe realizarse para *comprimirlo* 0.050 m con respecto a su longitud no estirada? *c*) ¿Es más fácil estirar o comprimir este resorte? Explique lo anterior en términos de la dependencia de F_x de *x*. (Muchos resortes reales tienen el mismo comportamiento cualitativo).

6.75 •• PA Un pequeño bloque con masa de 0.0900 kg se conecta a una cuerda que pasa por un agujero en una superficie horizontal sin fricción (figura P6.75). El bloque está girando a una distancia de 0.40 m del agujero con rapidez de 0.70 m/s. Luego, se tira de la cuerda por abajo, acortando el radio de la trayectoria del bloque a 0.10 m. Ahora la rapidez del bloque es de 2.80 m/s. *a*) ¿Qué tensión hay en la cuerda en la situación original cuando el bloque tiene una rapidez $v = 0.70$ m/s)? *b*) ¿Qué tensión hay en la cuerda en la situación final cuando el bloque tiene una rapidez $v = 2.80$ m/s? *c*) ¿Cuánto trabajo efectuó la persona que tiró de la cuerda?

Figura **P6.75**

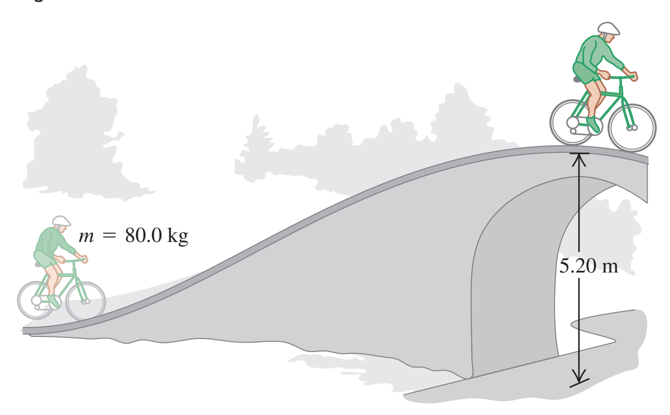


6.76 •• CALC Bombardeo con protones. Un protón con masa de 1.67×10^{-27} kg es impulsado con una rapidez inicial de 3.00×10^5 m/s directamente hacia un núcleo de uranio que está a 5.00 m. El protón es repelido por el núcleo de uranio con una fuerza de magnitud $F = \alpha/x^2$, donde *x* es la separación entre los dos objetos y $\alpha = 2.12 \times 10^{-26} \text{ N}\cdot\text{m}^2$. Suponga que el núcleo de uranio permanece en reposo. *a*) ¿Qué rapidez tiene el protón cuando está a 8.00×10^{-10} m del núcleo de uranio? *b*) Al acercarse el protón al núcleo de uranio, la fuerza de repulsión lo frena hasta detenerlo momentáneamente, después de lo cual el protón se aleja del núcleo de uranio. ¿Qué tanto se acerca el protón al núcleo? *c*) ¿Qué rapidez tiene el protón cuando está otra vez a 5.00 m del núcleo de uranio?

6.77 •• PA CALC Un bloque de hielo con masa de 4.00 kg está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. Un obrero le aplica entonces una fuerza horizontal $\vec{F}$ y el bloque se mueve sobre el eje *x*, de modo que su posición en función del tiempo está dada por $x(t) = \alpha t^2 + \beta t^3$, donde $\alpha = 0.200 \text{ m/s}^2$, $\beta = 0.0200 \text{ m/s}^3$. *a*) Calcule la velocidad del objeto en $t = 4.00$ s. *b*) Calcule la magnitud de $\vec{F}$ en $t = 4.00$ s. *c*) Calcule el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$ durante los primeros 4.00 s del movimiento.

6.78 •• Un hombre y su bicicleta tienen una masa combinada de 80.0 kg. Al llegar a la base de un puente, el hombre viaja a 5.00 m/s (figura P6.78). La altura vertical del puente que debe subir es de 5.20 m, y en la cima la rapidez del ciclista disminuyó a 1.50 m/s. Ignore la fricción y cualquier ineficiencia de la bicicleta o de las piernas del ciclista. *a*) ¿Qué trabajo total se efectúa sobre el hombre y su bicicleta al subir de la base a la cima del puente? *b*) ¿Cuánto trabajo realizó el hombre con la fuerza que aplicó a los pedales?

Figura **P6.78**



6.79 •• Imagine que le piden diseñar amortiguadores de resorte para las paredes de un estacionamiento. Un automóvil de 1200 kg que rueda libremente a 0.65 m/s no debe comprimir el resorte más de 0.090 m antes de detenerse. ¿Qué constante de fuerza debería tener el resorte? Suponga que la masa del resorte es despreciable.

6.80 •• El resorte de un rifle de resorte tiene masa despreciable y una constante de fuerza $k = 400$ N/m. El resorte se comprime 6.00 cm y una esfera con masa de 0.0300 kg se coloca en el cañón horizontal contra el resorte comprimido. El resorte se libera y la esfera sale por el cañón. Este mide 6.00 cm de largo, así que la esfera sale de él en el instante en que pierde contacto con el resorte. El rifle se sostiene con el cañón horizontal. *a*) Calcule la rapidez con que la esfera sale del cañón, ignorando la fricción. *b*) Calcule la rapidez con que la esfera sale del cañón, suponiendo que una fuerza de resistencia constante de 6.00 N actúa sobre la esfera mientras se mueve dentro del cañón. *c*) Para la situación del inciso *b*), ¿en qué posición dentro del cañón la esfera tiene mayor rapidez y cuál es esa rapidez? (En este caso, la rapidez máxima no se alcanza en el extremo del cañón).

6.81 ••• Un libro de 2.50 kg se empuja contra un resorte horizontal de masa despreciable con una fuerza constante de 250 N/m, comprimiéndolo 0.250 m. Al soltarse, el libro se desliza sobre una mesa horizontal que tiene coeficiente de fricción cinética $\mu_k = 0.30$. Use el

teorema trabajo-energía para averiguar qué distancia recorre el libro desde su posición inicial hasta detenerse.

6.82 ••• **Empujar un gato.** Su gato Micifuz (masa de 7.00 kg) está tratando de llegar a la parte más alta de una rampa sin fricción de 2.00 m de longitud, que tiene una inclinación de 30.0° sobre la horizontal. Puesto que el pobre felino no tiene tracción alguna sobre la rampa, usted lo empuja en todo momento ejerciendo una fuerza constante de 100 N paralela a la rampa. Si Micifuz empieza a correr desde más atrás, de modo que tenga una rapidez de 2.40 m/s en la base de la rampa, ¿qué rapidez tendrá al llegar a la parte más alta? Use el teorema trabajo-energía.

6.83 •• **Barrera protectora.** Un estudiante propone un diseño para una barrera contra choques de automóviles consistente en un resorte con masa despreciable capaz de detener una camioneta de 1700 kg que se desplaza a 20.0 m/s. Para no lastimar a los pasajeros, la aceleración del auto al frenarse no puede ser mayor que 5.00*g*. *a*) Calcule la constante del resorte *k* requerida, y la distancia que el resorte se comprimirá para detener el vehículo. No considere la deformación sufrida por el vehículo ni la fricción entre el vehículo y el piso. *b*) ¿Qué desventajas tiene este diseño?

6.84 ••• Un grupo de estudiantes empuja a un profesor de física sentado en una silla provista de ruedas sin fricción, para subirlo 2.50 m por una rampa con una pendiente de 30.0° sobre la horizontal. La masa combinada del profesor y la silla es de 85.0 kg. Los estudiantes aplican una fuerza horizontal constante de 600 N. La rapidez del profesor en la base de la rampa es de 2.00 m/s. Use el teorema trabajo-energía para calcular su rapidez en la parte superior de la rampa.

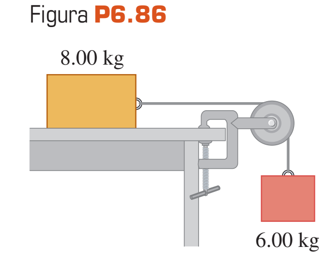
6.85 • Un bloque de 5.00 kg se mueve con $v_0 = 6.00$ m/s en una superficie horizontal sin fricción hacia un resorte, con una constante $k = 500$ N/m, que está unido a una pared (figura P6.85). El resorte tiene masa despreciable. *a*) Calcule la distancia máxima que se comprimirá el resorte. *b*) Si dicha distancia no debe ser mayor que 0.150 m, ¿qué valor máximo puede tener v_0?

Figura **P6.85**

$v_0 = 6.00$ m/s
$k = 500$ N/m
5.00 kg

6.86 •• Considere el sistema de la figura P6.86. La cuerda y la polea tienen masas despreciables, y la polea no tiene fricción. Entre el bloque de 8.00 kg y la mesa, el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.250$. Los bloques se sueltan del reposo. Use métodos de energía para calcular la rapidez del bloque de 6.00 kg después de descender 1.50 m.

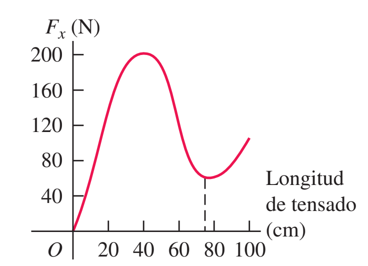
Figura **P6.86**



6.87 •• Considere el sistema de la figura P6.86. La cuerda y la polea tienen masas despreciables, y la polea no tiene fricción. El bloque de 6.00 kg se mueve inicialmente hacia abajo, y el bloque de 8.00 kg se mueve a la derecha, ambos con rapidez de 0.900 m/s. Los bloques se detienen después de moverse 2.00 m. Use el teorema trabajo-energía para calcular el coeficiente de fricción cinética entre el bloque de 8.00 kg y la mesa.

6.88 ••• **CALC** **Arco y flecha.** La figura P6.88 muestra cómo la fuerza ejercida por la cuerda de un arco compuesto sobre una flecha varía en función de qué tan atrás se tira de la flecha (la longitud de tensado). Suponga que la misma fuerza se ejerce sobre la flecha cuando esta se mueve hacia adelante después de soltarse. El tensado máximo de este arco es una longitud de 75.0 cm. Si el arco dispara una flecha de 0.0250 kg con tensado máximo, ¿qué rapidez tiene la flecha al salir del arco?

Figura **P6.88**



6.89 •• En una pista de hielo horizontal, prácticamente sin fricción, una patinadora que se mueve a 3.0 m/s encuentra una zona áspera que reduce su rapidez a 1.65 m/s debido a una fuerza de fricción que es del 25% del peso de la patinadora. Use el teorema trabajo-energía para determinar la longitud de la zona áspera.

6.90 • **Rescate.** Imagine que una amiga (con masa de 65.0 kg) está de pie en medio de un estanque congelado. Hay muy poca fricción entre sus pies y el hielo, de modo que no puede caminar. Por fortuna, tiene una cuerda ligera atada a la cintura y usted está en la orilla sosteniendo el otro extremo. Usted tira de la cuerda durante 3.00 s y acelera a su amiga desde el reposo hasta tener una rapidez de 6.00 m/s, mientras usted permanece en reposo. ¿Qué potencia media suministra la fuerza que aplicó?

6.91 •• Se requiere una bomba para elevar 800 kg de agua (aproximadamente 210 galones) por minuto desde un pozo de 14.0 m, expulsándola con una rapidez de 18.0 m/s. *a*) ¿Cuánto trabajo se efectuará por minuto para subir el agua? *b*) ¿Cuánto trabajo se efectuará para impartirle la energía cinética que tiene al salir? *c*) ¿Qué potencia desarrolla la bomba?

6.92 •• **BIO** Todas las aves, sea cual fuere su tamaño, deben desarrollar continuamente una potencia de entre 10 y 25 watts por kilogramo de masa corporal para volar batiendo las alas. *a*) El colibrí gigante de los Andes (*Patagona gigas*) tiene una masa de 70 g y aletea 10 veces por segundo al quedar suspendido. Estime el trabajo efectuado por ese colibrí en cada aleteo. *b*) Un atleta de 70 kg puede desarrollar una potencia de 1.4 kW durante unos cuantos segundos como máximo; la potencia de salida *constante* de un atleta común es del orden de solo 500 W. ¿Es posible para un vehículo aéreo de propulsión humana poder volar por periodos largos batiendo las alas? Explique su respuesta.

6.93 ••• Una estudiante de física pasa una parte del día caminando entre clases o por esparcimiento, y durante ese tiempo gasta energía a una tasa media de 280 W. El resto del día está sentada en clase, estudiando o descansando; durante estas actividades, gasta energía a una tasa media de 100 W. Si en un día ella gasta en total 1.1×10^7 J de energía, ¿cuánto tiempo dedicó a caminar?

6.94 ••• La presa Grand Coulee mide 1270 m de longitud y 170 m de altura. La potencia eléctrica producida por los generadores en su base es de aproximadamente 2000 MW. ¿Cuántos metros cúbicos de agua deben fluir cada segundo desde la parte superior de la presa, para producir esta potencia si el 92% del trabajo realizado sobre el agua por la gravedad se convierte en energía eléctrica? (Cada metro cúbico de agua tiene 1000 kg de masa).

6.95 • **BIO** **Potencia del corazón humano.** El corazón humano es una bomba potente y muy confiable; cada día admite y descarga unos 7500 L de sangre. Suponga que el trabajo que realiza el corazón es igual al requerido para levantar esa cantidad de sangre a la altura media de una mujer estadounidense (1.63 m). La densidad (masa por unidad de volumen) de la sangre es de 1.05×10^3 kg/m^3. *a*) ¿Cuánto trabajo realiza el corazón en un día? *b*) ¿Qué potencia desarrolla en watts?

6.96 ••• Seis unidades diesel en serie pueden suministrar 13.4 MW al primer vagón de un tren de carga. Las unidades diesel tienen una masa total de 1.10×10^6 kg. Los vagones tienen una masa media de 8.2×10^4 kg y cada uno requiere un tirón horizontal de 2.8 kN para moverse a 27 m/s constantes en vías horizontales. *a*) ¿Cuántos vagones puede tener el tren en estas condiciones? *b*) En tal caso, no sobraría potencia para acelerar ni para subir cuestas. Demuestre que la fuerza adicional requerida para acelerar el tren es aproximadamente la misma para lograr una aceleración de 0.10 m/s^2, que para subir una pendiente de 1.0% (ángulo de pendiente $\alpha = \arctan 0.010$). *c*) Con la pendiente de 1.0%, demuestre que se necesitan 2.9 MW más para mantener la rapidez de 27 m/s de las unidades diesel. *d*) Con 2.9 MW menos de potencia disponible, ¿cuántos vagones pueden arrastrar las seis unidades diesel subiendo una cuesta de 1.0% con rapidez constante de 27 m/s?

6.97 • Se necesita una fuerza de 53 kN aplicada al primer vagón de un tren de 16 vagones con masa de 9.1×10^5 kg, para tirar de él con rapidez constante de 45 m/s (101 mi/h) sobre rieles horizontales. *a*) ¿Qué potencia debe suministrar la locomotora al primer vagón? *b*) ¿Cuánta potencia adicional a la calculada en *a*) se necesitaría para impartir al tren una aceleración de 1.5 m/s^2 en el instante en que el tren va a 45 m/s sobre vías horizontales? *c*) ¿Cuánta potencia adicional a la calculada en *a*) se necesitaría para tirar del tren subiendo una cuesta de 1.5% (ángulo de pendiente $\alpha = \arctan 0.015$) con rapidez constante de 45 m/s?

6.98 • **CALC** Varias fuerzas actúan sobre un objeto. Una de ellas es $\vec{F} = \alpha xy\hat{\imath}$, una fuerza en la dirección x cuya magnitud depende de la posición del objeto, con $\alpha = 2.50$ N/m^2. Calcule el trabajo realizado por esta fuerza sobre el objeto para cada uno de los siguientes desplazamientos del objeto: *a*) El objeto parte del punto $x = 0$, $y = 3.00$ m y se mueve paralelo al eje x hasta el punto $x = 2.00$ m, $y = 3.00$ m. *b*) El objeto parte del punto $x = 2.00$ m, $y = 0$ y se mueve en la dirección y hasta el punto $x = 2.00$ m, $y = 3.00$ m. *c*) El objeto parte del origen y se mueve sobre la línea $y = 1.5x$ hasta el punto $x = 2.00$ m, $y = 3.00$ m.

6.99 •• **Ciclismo.** Para una ciclista de ruta, el coeficiente de arrastre $C(f_{\text{aire}} = \frac{1}{2}CA\rho v^2)$ es 1.00, el área frontal A es de 0.463 m^2 y el coeficiente de fricción por rodamiento es de 0.0045. Ella tiene una masa de 50.0 kg, y su bicicleta, 12.0 kg. *a*) Para mantener una rapidez de 12.0 m/s (unas 27 mi/h) en un camino plano, ¿qué potencia debe suministrar la ciclista a la rueda trasera? *b*) En carreras de velocidad, la misma ciclista usa otra bicicleta con coeficiente de fricción por rodamiento de 0.0030 y masa de 9.00 kg. Además, la ciclista se encorva para reducir su coeficiente de arrastre a 0.88 y su área frontal a 0.366 m^2. ¿Qué potencia debe suministrar ahora a la rueda trasera para mantener una rapidez de 12.0 m/s? *c*) En la situación del inciso *b*), ¿qué potencia se requiere para mantener una rapidez de 6.0 m/s? Considere la gran reducción en la potencia requerida cuando la rapidez solo se reduce a la mitad. (Si desea saber más acerca de las limitaciones aerodinámicas de la rapidez para una amplia variedad de vehículos de propulsión humana, véase "The Aerodynamics of Human-Powered Land Vehicles", *Scientific American*, diciembre de 1983).

6.100 •• **Potencia automotriz I.** El motor de un camión transmite 28.0 kW (37.5 hp) a las ruedas de tracción cuando el camión viaja con velocidad constante de magnitud 60.0 km/h (37.3 mi/h) sobre una carretera horizontal. *a*) Determine la fuerza de resistencia que actúa sobre el camión. *b*) Suponga que el 65% de tal fuerza se debe a la fricción por rodamiento, y el resto, a la resistencia del aire. Si la fuerza de fricción por rodamiento es independiente de la rapidez, y la fuerza de resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la rapidez, ¿qué potencia impulsará el camión a 30.0 km/h? ¿Y a 120.0 km/h? Dé sus respuestas en kilowatts y en caballos de potencia.

6.101 •• **Potencia automotriz II.** *a*) Si se requieren 8.00 hp para impulsar un automóvil de 1800 kg a 60.0 km/h en una carretera horizontal, calcule la fuerza retardadora total debida a la fricción, la resistencia del aire, etcétera. *b*) ¿Qué potencia se requiere para impulsar el auto a 60.0 km/h hacia arriba en una pendiente de 10.0% (que sube 10.0 m por cada 100.0 m de distancia horizontal)? *c*) ¿Qué potencia se requiere para impulsar el auto a 60.0 km/h en una *bajada* de 1.00%? *d*) ¿Qué inclinación debe tener una pendiente para que el auto avance a 60.0 km/h en neutral?

PROBLEMAS DE DESAFÍO

6.102 ••• **CALC** En un día invernal en Maine, un bodeguero está empujando cajas hacia arriba, por una tabla áspera inclinada un ángulo α sobre la horizontal. La tabla está cubierta en parte con hielo, y hay más hielo cerca de la base de la tabla que cerca del tope, de modo que el coeficiente de fricción aumenta con la distancia x a lo largo de la tabla: $\mu = Ax$, donde A es una constante positiva y la base de la tabla está en $x = 0$. (Para esta tabla, los coeficientes de fricción cinética y estática son iguales: $\mu_k = \mu_s = \mu$). El bodeguero empuja una caja tabla arriba, de modo que sale de la base de la tabla con rapidez v_0. Demuestre que cuando la caja se detiene, permanecerá en reposo si

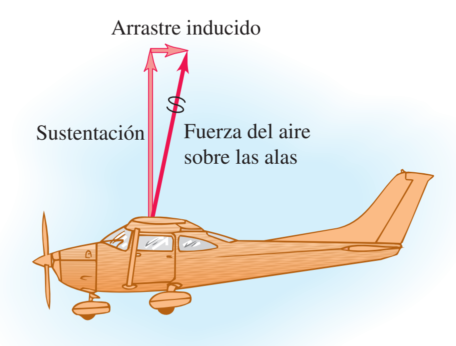
$$v_0^2 \geq \frac{3g\,\text{sen}^2\alpha}{A\cos\alpha}$$

6.103 ••• **CALC** **Un resorte con masa.** Normalmente ignoramos la energía cinética de las espiras en movimiento de un resorte; sin embargo, intentemos obtener una aproximación razonable de esta cantidad. Considere un resorte de masa M, longitud en equilibrio L_0 y constante de resorte k. El trabajo efectuado para estirar o comprimir el resorte en una distancia L es $\frac{1}{2}kX^2$, donde $X = L - L_0$. Considere que el resorte descrito tiene un extremo fijo y el otro moviéndose con rapidez v. Suponga que la rapidez de los puntos a lo largo del resorte varía linealmente con la distancia l medida desde el extremo fijo. Suponga también que la masa M del resorte se distribuye uniformemente a lo largo del mismo. *a*) Calcule la energía cinética del resorte en términos de M y v. (*Sugerencia:* Divida el resorte en segmentos de longitud dl; determine la rapidez de cada segmento en términos de l, v y L; calcule la masa de cada segmento en términos de dl, M y L, e integre desde 0 hasta L. El resultado *no* es $\frac{1}{2}Mv^2$, ya que no todo el resorte se mueve con la misma rapidez). En un rifle de resorte, un resorte de masa 0.243 kg y constante de 3200 N/m se comprime 2.50 cm con respecto a su longitud no estirada. Cuando se tira del gatillo, el resorte empuja horizontalmente una esfera de 0.053 kg. El trabajo efectuado por la fricción es despreciable. Calcule la rapidez de la esfera cuando el resorte recupera su longitud no comprimida *b*) despreciando la masa del resorte y *c*) incluyendo, con ayuda de los resultados del inciso *a*), la masa del resorte. *d*) En el inciso *c*), ¿qué energía cinética final tienen la esfera y el resorte?

6.104 ••• **CALC** Un avión en vuelo está sujeto a una fuerza de resistencia del aire proporcional al cuadrado de su rapidez v. Sin embargo, hay una fuerza de resistencia adicional porque el avión tiene alas. El aire que fluye sobre las alas es empujado hacia abajo y ligeramente hacia adelante de modo que, por la tercera ley de Newton, el aire ejerce una

fuerza sobre las alas y el avión que es hacia arriba y ligeramente hacia atrás (figura P6.104). La fuerza hacia arriba es la fuerza de sustentación que mantiene al avión en vuelo, en tanto que la fuerza hacia atrás se denomina *arrastre inducido*. A las rapideces de vuelo, el arrastre inducido es inversamente proporcional a v^2, así que la fuerza de resistencia total del aire se puede expresar como $F_{\text{aire}} = \alpha v^2 + \beta/v^2$, donde α y β son constantes positivas que dependen de la forma y el tamaño del avión y de la densidad del aire. Para un Cessna 150, un avión pequeño de un solo motor, $\alpha = 0.30\ \text{N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^2$ y $\beta = 3.5 \times 10^5\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$. En vuelo estable, el motor debe suministrar una fuerza hacia adelante que equilibre exactamente la fuerza de resistencia del aire. *a*) Calcule la rapidez (en km/h) a la que este avión tiene el *alcance* máximo (es decir, viaja mayor distancia) para una cantidad dada de combustible. *b*) Calcule la rapidez (en km/h) con la que el avión tendrá *permanencia* máxima en el aire.

Figura **P6.104**



Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

La respuesta es sí. Mientras la hormiga estuvo ejerciendo una fuerza hacia arriba sobre el trozo de cereal, este ejercía una fuerza hacia abajo, de la misma magnitud, sobre la hormiga (debido a la tercera ley de Newton). Sin embargo, como el cuerpo de la hormiga tuvo un desplazamiento hacia arriba, el trabajo que el cereal realizó sobre la hormiga fue *negativo* (véase la sección 6.1).

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

6.1 Respuesta: iii. El electrón tiene velocidad constante, por lo que su aceleración es cero y (por la segunda ley de Newton), la fuerza neta sobre el electrón también es cero. De esta manera, el trabajo total efectuado por todas las fuerzas (igual al trabajo realizado por la fuerza neta) también debe ser cero. Las fuerzas individuales pueden efectuar trabajo diferente de cero, pero eso no es lo que se pregunta.

6.2 Respueta: iv, i, iii, ii El cuerpo **i** tiene energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(2.0\ \text{kg})(5.0\ \text{m/s})^2 = 25\ \text{J}$. El cuerpo **ii** tiene inicialmente energía cinética cero y después tiene 30 J de trabajo realizado sobre él, de manera que su energía cinética final es $K_2 = K_1 + W = 0 + 30\ \text{J} = 30\ \text{J}$. El cuerpo **iii** tenía energía cinética inicial $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(1.0\ \text{kg})(4.0\ \text{m/s})^2 = 8.0\ \text{J}$ y luego tenía 20 J de trabajo realizado sobre él, por lo que su energía cinética final es $K_2 = K_1 + W = 8.0\ \text{J} + 20\ \text{J} = 28\ \text{J}$. El cuerpo **iv** tenía inicialmente energía cinética $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(2.0\ \text{kg})(10\ \text{m/s})^2 = 100\ \text{J}$; cuando efectuó 80 J de trabajo sobre otro cuerpo, este realizó −80 J de trabajo sobre el cuerpo **iv**, así que la energía cinética final del cuerpo **iv** es $K_2 = K_1 + W = 100\ \text{J} + (-80\ \text{J}) = 20\ \text{J}$.

6.3 Respuestas: *a*) iii, *b*) iii En cualquier punto del movimiento de la lenteja del péndulo, tanto la fuerza de tensión como el peso actúan de forma perpendicular al movimiento, es decir, perpendicular a un desplazamiento infinitesimal $d\vec{l}$ de la lenteja. (En la figura 5.32*b*, el desplazamiento $d\vec{l}$ estaría dirigido hacia afuera del plano del diagrama de cuerpo libre). Por lo tanto, para cualquier fuerza, el producto escalar dentro de la integral de la ecuación (6.14) es $\vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$, y el trabajo realizado en cualquier parte de la trayectoria circular (incluyendo un círculo completo) es $W = \int \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$.

6.4 Respuesta: v. El avión tiene una velocidad horizontal constante, así que la fuerza horizontal neta sobre él debe ser cero. Entonces, la fuerza de arrastre hacia atrás debe tener la misma magnitud que la fuerza hacia adelante debida al empuje combinado de los cuatro motores. Esto significa que la fuerza de arrastre debe efectuar trabajo *negativo* sobre el avión con la misma tasa con que la fuerza de empuje combinada realiza trabajo *positivo*. El empuje combinado efectúa trabajo a una tasa de 4(108,000 hp) = 432,000 hp, por lo que la fuerza de arrastre debe realizar trabajo a una tasa de −432,000 hp.

Problema práctico

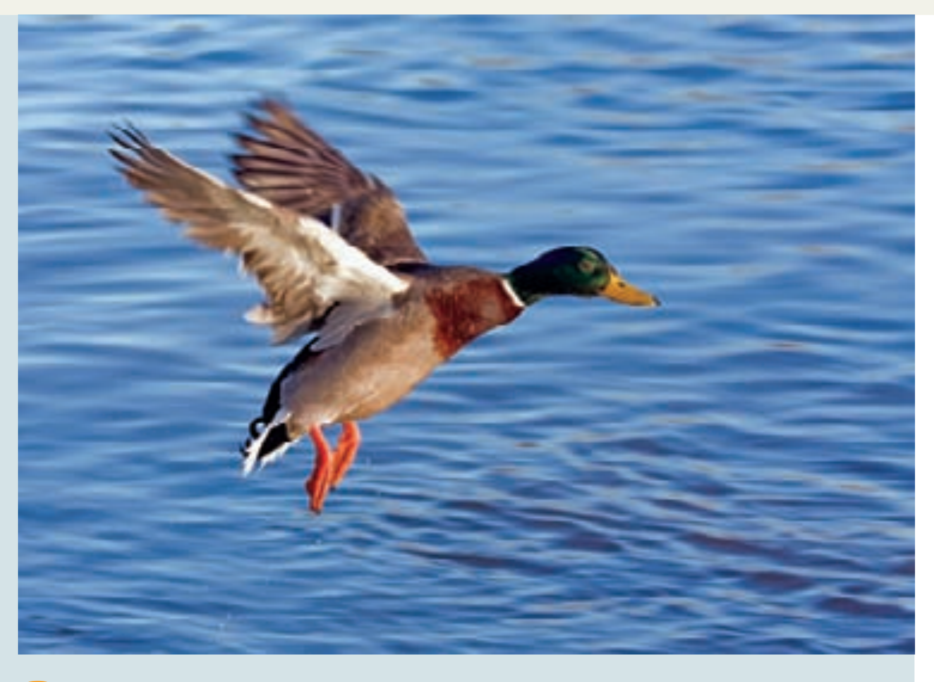
Respuestas: ***a*)** $v_1 = \sqrt{\dfrac{2}{m}\left(mgx_1 - \frac{1}{3}\alpha x_1^3\right)} = \sqrt{2gx_1 - \dfrac{2\alpha x_1^3}{3m}}$

***b*)** $P = -F_{\text{resorte}-1}v_1 = -\alpha x_1^2\sqrt{2gx_1 - \dfrac{2\alpha x_1^3}{3m}}$

***c*)** $x_2 = \sqrt{\dfrac{3mg}{\alpha}}$ ***d*)** No

ENERGÍA POTENCIAL Y CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

7



? Mientras este pato planea para descender, lo hace en línea recta con rapidez constante. ¿La energía mecánica del pato aumenta, disminuye o es constante durante el descenso? Si aumenta, ¿de dónde sale la energía adicional? Si disminuye, ¿a dónde va la energía perdida?

Cuando un clavadista se lanza desde un trampolín a la alberca, golpea el agua moviéndose bastante rápido, con mucha energía cinética. ¿De dónde proviene esa energía? La respuesta que dimos en el capítulo 6 fue que la fuerza gravitacional (su peso) realiza trabajo sobre el clavadista al caer. La energía cinética del clavadista, energía asociada con su *movimiento*, aumenta en una cantidad igual al trabajo realizado.

No obstante, hay otra forma muy útil de ver el trabajo y la energía cinética. Este nuevo enfoque se basa en el concepto de *energía potencial*, que es la energía asociada con la *posición* de un sistema, no con su movimiento. En este enfoque, hay una *energía potencial gravitacional* incluso cuando el clavadista está de pie en el trampolín. Al caer, no se agrega energía al sistema Tierra-clavadista, sino que una reserva de energía se *transforma* de energía potencial a energía cinética. En este capítulo veremos cómo el teorema trabajo-energía explica tal transformación.

Cuando el clavadista rebota en el extremo del trampolín antes de saltar, la tabla flexionada almacena otra clase de energía potencial llamada *energía potencial elástica*. Analizaremos la energía potencial elástica de sistemas sencillos como un resorte estirado o comprimido. (La tercera clase importante de energía potencial está asociada con las posiciones relativas de partículas con carga eléctrica. Veremos esto en el capítulo 23, volumen 2).

Demostraremos que, en algunos casos, la suma de las energías cinética y potencial de un sistema, llamada, *energía mecánica total*, es constante durante el movimiento del sistema. Esto nos llevará al enunciado general de la *ley de conservación de la energía*, que es uno de los principios más fundamentales y trascendentales de la ciencia.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo utilizar el concepto de energía potencial gravitacional en problemas que implican movimiento vertical.
- Cómo utilizar el concepto de energía potencial elástica en problemas que implican un cuerpo en movimiento sujeto a un resorte estirado o comprimido.
- La diferencia entre fuerzas conservativas y no conservativas, y cómo resolver problemas donde ambos tipos de fuerzas actúan sobre un cuerpo en movimiento.
- Cómo determinar las propiedades de una fuerza conservativa conociendo la función de energía potencial correspondiente.
- Cómo emplear diagramas de energía para entender el movimiento rectilíneo de un objeto, bajo la influencia de una fuerza conservativa.

7.1 Energía potencial gravitacional

7.1 Cuando un balón de basquetbol desciende, la energía potencial gravitacional se convierte en energía cinética y aumenta la rapidez del balón.



Como vimos en el capítulo 6, una partícula gana o pierde energía cinética porque interactúa con otros objetos que ejercen fuerzas sobre ella. En cualquier interacción, el cambio de energía cinética de una partícula es igual al trabajo total efectuado sobre la partícula por todas las fuerzas que actúan sobre ella.

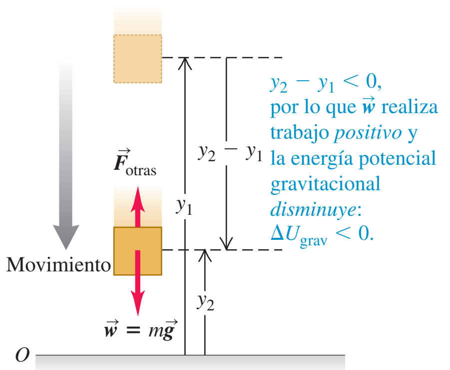
En muchas situaciones, parece que se almacena energía en un sistema para recuperarse después. Por ejemplo, hay que efectuar trabajo para levantar una roca pesada sobre la cabeza. Parece razonable que, al levantar la roca en el aire, se está almacenando energía en el sistema, la cual se convierte después en energía cinética al dejar caer la roca.

Este ejemplo sugiere la idea de una energía asociada con la *posición* de los cuerpos en un sistema. Este tipo de energía es una medida del *potencial* o *posibilidad* de efectuar trabajo. Al levantar una roca, existe la posibilidad de que la fuerza de gravitación realice trabajo sobre ella, pero solo si la roca se deja caer al suelo. Por esta razón, la energía asociada con la posición se llama **energía potencial**. Nuestro análisis sugiere que hay energía potencial asociada con el peso de un cuerpo y con su altura sobre el suelo: la *energía potencial gravitacional* (figura 7.1).

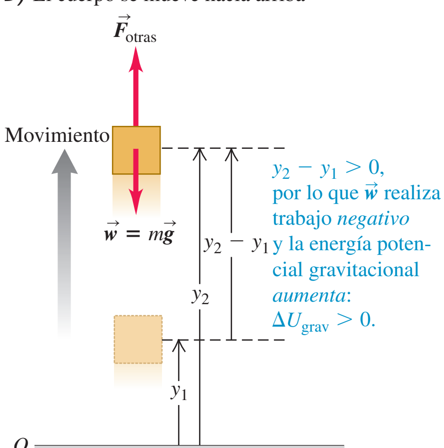
Ahora tenemos *dos* formas de describir lo que sucede cuando un cuerpo cae sin resistencia del aire. Una forma consiste en decir que disminuye la energía potencial gravitacional y aumenta la energía cinética del cuerpo que cae. La otra forma, que vimos en el capítulo 6, es que aumenta la energía cinética de un cuerpo que cae, porque la fuerza de gravedad terrestre (el peso del cuerpo) realiza trabajo sobre el cuerpo. Más adelante en esta sección utilizaremos el teorema trabajo-energía para demostrar que estas dos descripciones son equivalentes.

7.2 Cuando un cuerpo se mueve verticalmente de una altura inicial y_1 a una altura final y_2, la fuerza gravitacional $\vec{w}$ efectúa trabajo y cambia la energía potencial gravitacional.

a) El cuerpo se mueve hacia abajo



b) El cuerpo se mueve hacia arriba



Para empezar, deduzcamos la expresión de la energía potencial gravitacional. Consideremos un cuerpo de masa m que se mueve en el eje y (vertical), como en la figura 7.2. Las fuerzas que actúan sobre él son su peso, de magnitud $w = mg$, y tal vez algunas otras; llamamos a la suma vectorial (resultante) de todas las otras fuerzas $\vec{F}_{otras}$. Supondremos que el cuerpo permanece tan cerca de la superficie terrestre que el peso es constante. (En el capítulo 13 veremos que el peso disminuye con la altura). Queremos determinar el trabajo efectuado por el peso (que es una fuerza) cuando el cuerpo cae de una altura y_1 sobre el origen a una altura menor y_2 (figura 7.2*a*). El peso y el desplazamiento tienen la misma dirección, así que el trabajo W_{grav} efectuado sobre el cuerpo por su peso es positivo;

$$W_{grav} = Fs = w(y_1 - y_2) = mgy_1 - mgy_2 \qquad (7.1)$$

Esta expresión también da el trabajo correcto cuando el cuerpo *sube* y y_2 es mayor que y_1 (figura 7.2*b*). En ese caso, la cantidad $(y_1 - y_2)$ es negativa y W_{grav} es negativo porque el peso y el desplazamiento tienen direcciones opuestas.

La ecuación (7.1) muestra que podemos expresar W_{grav} en términos de los valores de la cantidad mgy al principio y al final del desplazamiento. Esta cantidad, el producto del peso mg y la altura y sobre el origen de las coordenadas, es la **energía potencial gravitacional**, U_{grav}:

$$U_{grav} = mgy \qquad \text{(energía potencial gravitacional)} \qquad (7.2)$$

Su valor inicial es $U_{grav,1} = mgy_1$ y su valor final es $U_{grav,2} = mgy_2$. El cambio en U_{grav} es su valor final menos su valor inicial: $\Delta U_{grav} = U_{grav,2} - U_{grav,1}$. Podemos expresar el trabajo W_{grav} realizado por la fuerza gravitacional durante el desplazamiento de y_1 a y_2 como

$$W_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2} = -(U_{grav,2} - U_{grav,1}) = -\Delta U_{grav} \qquad (7.3)$$

El signo negativo de ΔU_{grav} es *fundamental.* Cuando el cuerpo sube, aumenta y, el trabajo realizado por la fuerza de gravedad o fuerza gravitacional es negativo y la

energía potencial gravitacional aumenta ($\Delta U_{grav} > 0$). Si el cuerpo baja, disminuye y, la fuerza gravitacional realiza trabajo positivo y la energía potencial gravitacional se reduce ($\Delta U_{grav} < 0$). Es como retirar dinero del banco (reducir U_{grav}) y gastarlo (realizar trabajo positivo). La unidad de energía potencial es el joule (J), la misma del trabajo.

CUIDADO **¿A qué cuerpo "pertenece" la energía potencial gravitacional?** *No* es correcto llamar a $U_{grav} = mgy$ la "energía potencial gravitacional del cuerpo", ya que la energía potencial gravitacional U_{grav} es una propiedad *compartida* del cuerpo y la Tierra. El valor de U_{grav} aumenta si la Tierra permanece fija y la altura aumenta; también aumenta si el cuerpo está fijo en el espacio y la Tierra se aleja de él. Observe que en la fórmula $U_{grav} = mgy$ intervienen características tanto del cuerpo (su masa m) como de la Tierra (el valor de g).

Conservación de la energía mecánica (solo fuerzas gravitacionales)

Si quiere ver para qué sirve la energía potencial gravitacional, suponga que el peso del cuerpo es la *única* fuerza que actúa sobre él: $\vec{F}_{otras} = \mathbf{0}$. Entonces, el cuerpo cae libremente sin resistencia del aire, y podría estar subiendo o bajando. Sea v_1 su rapidez en y_1, y v_2 en y_2. El teorema trabajo-energía (ecuación 6.6) indica que el trabajo total efectuado sobre el cuerpo es igual al cambio en su energía cinética; $W_{tot} = \Delta K = K_2 - K_1$. Si la gravedad es la única fuerza que actúa, entonces, por la ecuación (7.3), $W_{tot} = W_{grav} = -\Delta U_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2}$. Juntando esto, tenemos

$$\Delta K = -\Delta U_{grav} \quad \text{o bien,} \quad K_2 - K_1 = U_{grav,1} - U_{grav,2}$$

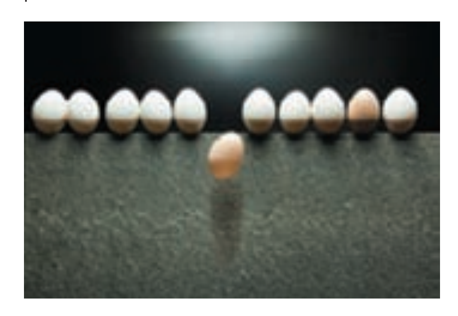
que podemos rescribir como

$$K_1 + U_{grav,1} = K_2 + U_{grav,2} \quad \text{(si solo la fuerza gravitacional realiza trabajo)} \quad (7.4)$$

o bien,

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 \quad \text{(si solo la fuerza gravitacional realiza trabajo)} \quad (7.5)$$

Aplicación ¿Cuál huevo tiene más energía mecánica? La energía mecánica de cada uno de estos huevos tiene el *mismo* valor. La energía mecánica de un huevo en reposo es exclusivamente energía potencial gravitacional. En un huevo que cae, la energía potencial gravitacional disminuye conforme el huevo desciende y aumenta la energía cinética. Si la resistencia del aire es insignificante, la energía mecánica del huevo que cae permanece constante.



La suma $K + U_{grav}$ de las energías cinética y potencial se llama E, la **energía mecánica total del sistema**. Por "sistema" nos referimos al cuerpo de masa m y la Tierra juntos, porque la energía potencial gravitacional U es una propiedad compartida de ambos cuerpos. Así, $E_1 = K_1 + U_{grav,1}$ es la energía mecánica total en y_1, en tanto que $E_2 = K_2 + U_{grav,2}$ es la energía mecánica total en y_2. La ecuación (7.4) dice que, cuando el peso del cuerpo es la única fuerza que realiza trabajo sobre él, $E_1 = E_2$. Es decir, E es constante; tiene el mismo valor en y_1 que en y_2. No obstante, puesto que las posiciones y_1 y y_2 son puntos arbitrarios en el movimiento del cuerpo, la energía mecánica total E tiene el mismo valor en *todos* los puntos durante el movimiento;



Video Tutor Demo

$$E = K + U_{grav} = \text{constante} \quad \text{(si solo la fuerza de gravedad efectúa trabajo)}$$

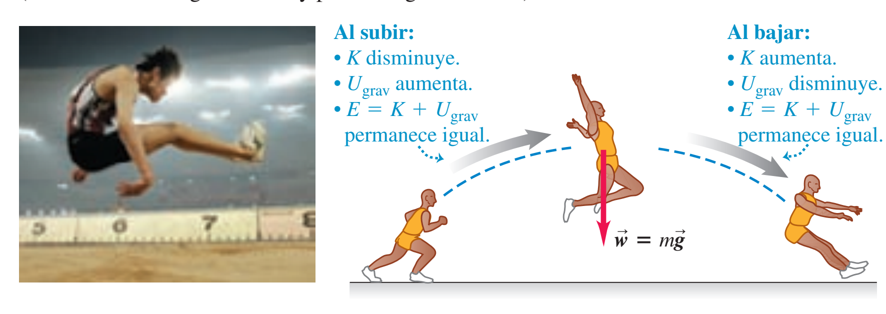
Una cantidad que siempre tiene el mismo valor es una cantidad que *se conserva. Si solo la fuerza de gravedad efectúa trabajo, la energía mecánica total es constante, es decir, se conserva* (figura 7.3). Este es nuestro primer ejemplo de la **conservación de la energía mecánica**.

Cuando lanzamos una pelota al aire, su rapidez disminuye al subir, a medida que la energía cinética se convierte en energía potencial; $\Delta K < 0$ y $\Delta U_{grav} > 0$. Al bajar, la energía potencial se convierte de nuevo en cinética y la rapidez de la pelota aumenta: $\Delta K > 0$ y $\Delta U_{grav} < 0$. No obstante, la energía mecánica *total* (cinética más potencial) es la misma en todos los puntos del movimiento siempre que ninguna otra fuerza realice trabajo sobre la pelota (es decir, la resistencia del aire debe ser insignificante). Sigue siendo verdad que la fuerza gravitacional efectúa trabajo sobre el cuerpo cuando

MasteringPHYSICS®

ActivPhysics 5.2: Upward-Moving Elevator Stops
ActivPhysics 5.3: Stopping a Downward-Moving Elevator
ActivPhysics 5.6: Skier Speed

7.3 Mientras este atleta se encuentra en el aire, solo la fuerza gravitacional efectúa trabajo sobre él (si despreciamos los efectos menores de la resistencia del aire). La energía mecánica E (la suma de la energía cinética y potencial gravitacional) se conserva.



este sube o baja, pero ya no tenemos que calcularlo de forma directa; basta ver cómo cambia el valor de U_{grav} para conocerlo completamente.

CUIDADO **Elija la "altura cero" en cualquier sitio** Cuando se trabaja con la energía potencial gravitacional, podemos elegir cualquier altura como $y = 0$. Si desplazamos el origen de y, los valores de y_1 y y_2 cambiarán, al igual que los valores de $U_{grav,1}$ y $U_{grav,2}$; sin embargo, tal cambio no tiene efecto en la *diferencia* de alturas $y_2 - y_1$ ni en la *diferencia* de la energía potencial gravitacional $U_{grav,2} - U_{grav,1} = mg(y_2 - y_1)$. Como veremos en el siguiente ejemplo, la cantidad que tiene importancia física no es el valor de U_{grav} en cierto punto, sino la *diferencia* de U_{grav} entre dos puntos. Así, podemos definir U_{grav} como cero en cualquier punto sin afectar la física de la situación.

Ejemplo 7.1 Altura de una pelota a partir de la conservación de la energía



Usted lanza una pelota de béisbol con masa de 0.145 kg hacia arriba, dándole una velocidad inicial de magnitud igual a 20.0 m/s. Determine qué altura alcanza, despreciando la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Después de abandonar su mano, solo la fuerza de gravedad realiza trabajo sobre la pelota. Por lo tanto, la energía mecánica se conserva y podemos usar las ecuaciones (7.4) y (7.5); el punto 1 será el punto en que la bola sale de la mano, y el punto 2 donde la pelota alcanza su altura máxima. Al igual que en la figura 7.2, elegimos la dirección $+y$ hacia arriba. La rapidez de la pelota en el punto 1 es $v_1 = 20.0$ m/s. En el punto más alto de su movimiento, la pelota está en reposo por un instante, así que $v_2 = 0$. Ubicamos el origen en el punto 1, de modo que $y_1 = 0$ (figura 7.4). La incógnita es la distancia que la pelota se recorre verticalmente entre los dos puntos, es decir, el desplazamiento $y_2 - y_1 = y_2 - 0 = y_2$.

EJECUTAR: Tenemos que $y_1 = 0$, $U_{grav,1} = mgy_1 = 0$, y $K_2 = mv_2^2 = 0$. Así que la ecuación (7.4), que dice que $K_1 + U_{grav,1} = K_2 + U_{grav,2}$, se convierte en

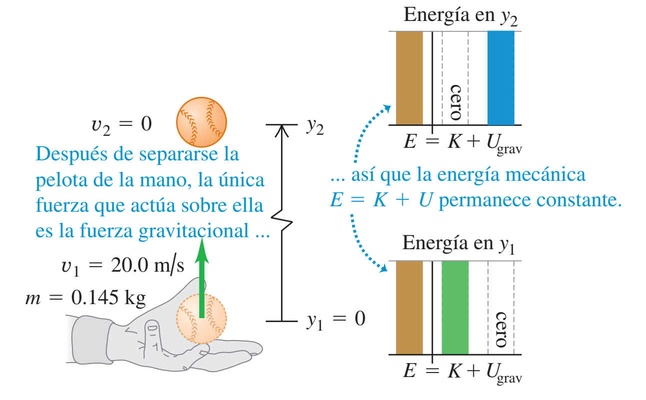
$$K_1 = U_{grav,2}$$

Como se ve en las gráficas de barras de energía de la figura 7.4, esta ecuación indica que la energía cinética de la pelota en el punto 1 se convierte totalmente en energía potencial gravitacional en el punto 2. Al sustituir $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$ y $U_{grav,2} = mgy_2$ y despejando y_2:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgy_2$$

$$y_2 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(20.0\ \text{m/s})^2}{2(9.80\ \text{m/s}^2)} = 20.4\ \text{m}$$

7.4 Después de que la pelota sale de la mano, se conserva la energía mecánica $E = K + U$.



EVALUAR: Como comprobación, utilice el valor de v_1 y el resultado de y_2 para calcular la energía cinética en el punto 1 y la energía potencial gravitacional en el punto 2. Los cálculos deben ser iguales: $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = 29.0$ J y $U_{grav,2} = mgy_2 = 29.0$ J. Observe que también podríamos haber obtenido el resultado de $y_2 = v_1^2/2g$ utilizando la ecuación (2.13).

¿Qué ocurre si elegimos otro origen? Por ejemplo, ¿qué pasa si lo colocamos 5.0 m debajo del punto 1, de modo que $y_1 = 5.0$ m? Entonces, la energía mecánica total en el punto 1 será en parte cinética y en parte potencial; en el punto 2 será puramente potencial porque $v_2 = 0$. Se determinará que la elección de este origen produce $y_2 = 25.4$ m, pero nuevamente, $y_2 - y_1 = 20.4$ m. En problemas como este, corresponde a usted elegir la altura donde $U_{grav} = 0$; no se rompa la cabeza, porque la física de la respuesta no depende de su decisión.

Cuando otras fuerzas distintas de la gravedad realizan trabajo

Si otras fuerzas actúan sobre el cuerpo además de su peso, entonces $\vec{F}_{otras}$ de la figura 7.2 *no* es cero. En el caso del mazo del ejemplo 6.4 (sección 6.2), la fuerza aplicada por el cable y la fricción de las guías verticales son ejemplos de fuerzas que podrían estar incluidas en $\vec{F}_{otras}$. El trabajo gravitacional W_{grav} aún está dado por la ecuación (7.3), pero el trabajo total W_{tot} es la suma de W_{grav} y el trabajo de $\vec{F}_{otras}$. Llamamos a este trabajo adicional W_{otras}, de modo que el trabajo total realizado por todas las fuerzas es $W_{tot} = W_{grav} + W_{otras}$. Igualando esto con el cambio de energía cinética, tenemos

$$W_{otras} + W_{grav} = K_2 - K_1 \qquad (7.6)$$

Además, por la ecuación (7.3), $W_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2}$, así que

$$W_{otras} + U_{grav,1} - U_{grav,2} = K_2 - K_1$$

que podemos reacomodar así:

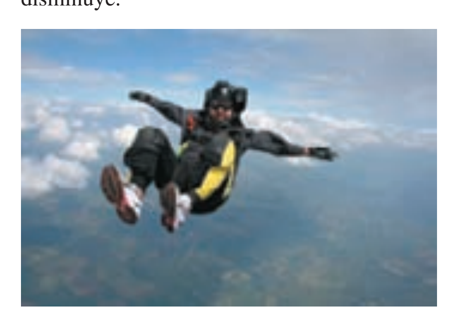
$$K_1 + U_{grav,1} + W_{otras} = K_2 + U_{grav,2} \quad \text{(si otras fuerzas, además de la fuerza de gravedad, efectúan trabajo)} \qquad (7.7)$$

Por último, usando las expresiones adecuadas para los distintos términos de energía, se obtiene:

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 + W_{otras} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 \quad \text{(si otras fuerzas, además de la fuerza de gravedad, efectúan trabajo)} \qquad (7.8)$$

El significado de las ecuaciones (7.7) y (7.8) es este: *el trabajo realizado por todas las fuerzas distintas de la fuerza gravitacional es igual al cambio en la energía mecánica total $E = K + U_{grav}$ del sistema, donde U_{grav} es la energía potencial gravitacional.* Si W_{otras} es positivo, E aumenta y $K_2 + U_{grav,2}$ es mayor que $K_1 + U_{grav,1}$. Si W_{otras} es negativo, E disminuye (figura 7.5). En el caso especial en que solo el peso del cuerpo realiza trabajo, $W_{otras} = 0$. Entonces, la energía mecánica total es constante, y volvemos a la ecuación (7.4) o (7.5).

7.5 Conforme este paracaidista va cayendo, la fuerza hacia arriba de la resistencia del aire realiza trabajo negativo W_{otras} sobre él. Por lo tanto, disminuye la energía mecánica total $E = K + U$: la rapidez y la energía cinética K del paracaidista permanecen iguales, mientras que la energía potencial gravitacional U disminuye.



Estrategia para resolver problemas 7.1 Problemas usando energía mecánica I



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Determine si conviene resolver el problema con métodos de energía, usando $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ directamente, o con una combinación de estrategias. El enfoque de energía es mejor si el problema implica movimiento con fuerzas variables, o movimiento a lo largo de una trayectoria curva (que veremos más adelante en esta sección). Si el problema implica el tiempo transcurrido, el enfoque de energía *no* suele ser el mejor porque en él no interviene el tiempo directamente.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Si usa el enfoque de energía, primero identifique cuáles son los estados inicial y final (posiciones y velocidades) de los cuerpos en cuestión. Use el subíndice 1 para el estado inicial y el subíndice 2 para el estado final. Elabore dibujos que muestren los estados inicial y final.
2. Defina un sistema de coordenadas y elija el nivel donde $y = 0$. Seleccione la dirección y positiva hacia arriba, como se supuso en la ecuación (7.1) y en las ecuaciones que le siguieron.
3. Identifique todas las fuerzas que efectúen trabajo sobre cada cuerpo y que *no puedan* describirse en términos de energía potencial. (Por ahora, esto significa fuerzas cualesquiera no gravitacionales. En la sección 7.2 veremos que el trabajo efectuado por un resorte ideal también puede expresarse como un cambio en la energía potencial). Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo.
4. Elabore una lista de las cantidades conocidas y desconocidas, incluyendo las coordenadas y las velocidades en cada punto. Identifique las incógnitas.

EJECUTAR *la solución:* Escriba expresiones para las energías cinéticas y potenciales iniciales y finales K_1, K_2, $U_{grav,1}$ y $U_{grav,2}$. Si ninguna otra fuerza realiza trabajo, use la ecuación (7.4). Si hay otras fuerzas que realicen trabajo, use la ecuación (7.7). Dibuje gráficas de barras que muestren los valores iniciales y finales de K, $U_{grav,1}$ y $E = K + U_{grav}$. Luego despeje las incógnitas requeridas.

EVALUAR *la respuesta:* Verifique si su respuesta tiene sentido físico. Tenga presente que el trabajo gravitacional está incluido en ΔU_{grav}, de modo que no lo incluya en W_{otras}.



Ejemplo 7.2 Trabajo y energía al lanzar una pelota de béisbol

En el ejemplo 7.1, suponga que la mano sube 0.50 m al lanzar la pelota, la cual, al salir de la mano, tiene una velocidad hacia arriba de 20.0 m/s. *a*) Calcule la magnitud de la fuerza (suponiendo que es constante) que la mano ejerce sobre la pelota. *b*) Calcule la rapidez de la pelota en un punto 15.0 m arriba del punto de donde salió de la mano. Ignore la resistencia del aire.

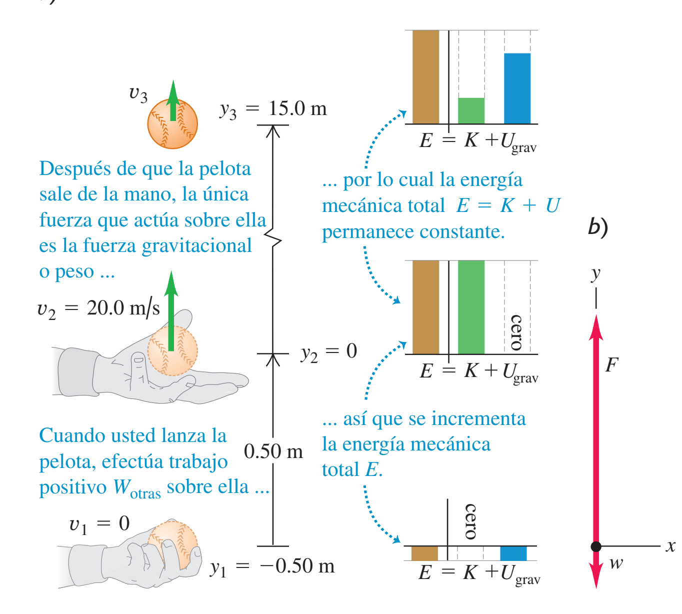
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En el ejemplo 7.1, solo la fuerza gravitacional efectuaba trabajo. En este ejemplo, debemos incluir el "otro" trabajo no gravitacional efectuado por la mano. La figura 7.6 muestra un diagrama de la situación, incluyendo un diagrama de cuerpo libre de la pelota al ser lanzada. Sea 1 el punto donde la mano inicia su movimiento, el punto 2 donde la pelota sale de la mano, y el punto 3 donde la pelota está 15.0 m arriba del punto 2. La fuerza no gravitacional de su mano solo actúa entre los puntos 1 y 2. Utilizando el mismo sistema de coordenadas del ejemplo 7.1, tenemos que $y_1 = -0.50$ m, $y_2 = 0$ y $y_3 = 15.0$ m. La pelota parte del reposo en el punto 1, así que $v_1 = 0$, y la rapidez con que la pelota sale de la mano es $v_2 = 20.0$ m/s. Las incógnitas son *a*) la magnitud F de la fuerza de la mano y *b*) la velocidad v_{3y} en el punto 3.

EJECUTAR: *a*) Para determinar F, primero usaremos la ecuación (7.7) con la finalidad de calcular el trabajo W_{otras} efectuado por esta fuerza. Tenemos

$$K_1 = 0$$
$$U_{grav,1} = mgy_1 = (0.145\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(-0.50\text{ m}) = -0.71\text{ J}$$

7.6 *a*) Aplicación de los conceptos de energía al lanzamiento vertical hacia arriba de una pelota. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la pelota al lanzarla.



$$K_2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 = \tfrac{1}{2}(0.145\text{ kg})(20.0\text{ m/s})^2 = 29.0\text{ J}$$
$$U_{grav,2} = mgy_2 = (0.145\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(0) = 0$$

(No se preocupe de que $U_{grav,1}$ sea menor que cero, lo importante es la *diferencia* en la energía potencial de un punto al otro). De acuerdo con la ecuación (7.7),

$$K_1 + U_{grav,1} + W_{otras} = K_2 + U_{grav,2}$$
$$W_{otras} = (K_2 - K_1) + (U_{grav,2} - U_{grav,1})$$
$$= (29.0\text{ J} - 0) + [0 - (-0.71\text{ J})] = 29.7\text{ J}$$

Pero como $\vec{F}$ es constante y hacia arriba, el trabajo efectuado por $\vec{F}$ es igual a la magnitud de la fuerza multiplicada por el desplazamiento: $W_{otras} = F(y_2 - y_1)$. De modo que

$$F = \frac{W_{otras}}{y_2 - y_1} = \frac{29.7\text{ J}}{0.50\text{ m}} = 59\text{ N}$$

Esto es más de 40 veces el peso de la pelota (1.42 N).

b) Para obtener v_{3y}, observe que, entre los puntos 2 y 3, solo actúa la fuerza de gravedad sobre la pelota. De modo que entre estos puntos la energía mecánica se conserva y $W_{otras} = 0$. De la ecuación (7.4) podemos despejar K_3 y a partir de eso despejar v_{3y}:

$$K_2 + U_{grav,2} = K_3 + U_{grav,3}$$
$$U_{grav,3} = mgy_3 = (0.145\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(15.0\text{ m}) = 21.3\text{ J}$$
$$K_3 = (K_2 + U_{grav,2}) - U_{grav,3}$$
$$= (29.0\text{ J} + 0\text{ J}) - 21.3\text{ J} = 7.7\text{ J}$$

Como $K_3 = \tfrac{1}{2}mv_{3y}^2$, tenemos

$$v_{3y} = \pm\sqrt{\frac{2K_3}{m}} = \pm\sqrt{\frac{2(7.7\text{ J})}{0.145\text{ kg}}} = \pm 10\text{ m/s}$$

El signo + o − nos recuerda que la pelota pasa por el punto 3, cuando sube y cuando baja. La energía mecánica total E es constante e igual a $K_2 + U_{grav,2} = 29.0$ J mientras la pelota está en caída libre, y la energía potencial en el punto 3 es $U_{grav,3} = mgy_3 = 21.3$ J, ya sea que la pelota esté subiendo o bajando. Así, en el punto 3 la energía cinética K_3 de la pelota (y por lo tanto, su rapidez) no depende de la dirección del movimiento de la pelota. La velocidad v_{3y} es positiva (+10 m/s) cuando la pelota sube, y negativa (−10 m/s) cuando baja; la rapidez v_3 es de 10 m/s en ambos casos.

EVALUAR: En el ejemplo 7.1, vimos que la pelota alcanza una altura máxima de $y = 20.4$ m. En ese punto, toda la energía cinética que la pelota tenía cuando salió de la mano en $y = 0$ ya se convirtió en energía potencial gravitacional. En $y = 15.0$ m, la pelota está a tres cuartas partes del camino hacia su altura máxima, así que unas tres cuartas partes de su energía mecánica deberían estar en forma de energía potencial. (Esto se muestra en la gráfica de barras de la energía en la figura 7.6*a*). ¿Puede demostrar que es así, con base en los valores obtenidos para K_3 y $U_{grav,3}$?

Energía potencial gravitacional en el movimiento con trayectoria curva

En nuestros primeros dos ejemplos, el cuerpo se movió a lo largo de una línea vertical recta. ¿Qué sucede si la trayectoria es inclinada o curva (figura 7.7*a*)? Sobre el cuerpo actúa la fuerza gravitacional $\vec{w} = m\vec{g}$ y tal vez otras fuerzas cuya resultante se deno-

mina $\vec{F}_{otras}$. Para calcular el trabajo efectuado por la fuerza gravitacional durante este desplazamiento, se divide la trayectoria en pequeños segmentos $\Delta\vec{s}$; la figura 7.7*b* muestra un segmento típico. El trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre este segmento es el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento. En términos de vectores unitarios, la fuerza es $\vec{w} = m\vec{g} = -mg\hat{j}$ y el desplazamento es $\Delta\vec{s} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}$, así que el trabajo efectuado por la fuerza gravitacional es

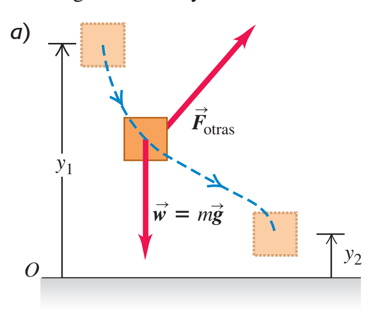
$$\vec{w}\cdot\Delta\vec{s} = -mg\hat{j}\cdot(\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}) = -mg\Delta y$$

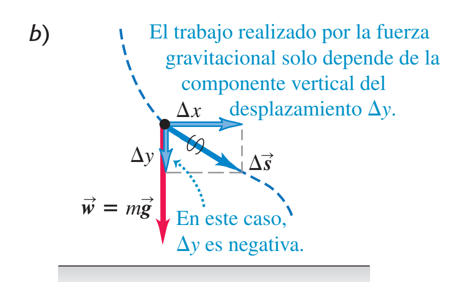
El trabajo efectuado por la fuerza gravitacional es el mismo que si el cuerpo se hubiera desplazado verticalmente una distancia Δy, sin considerar el desplazamiento horizontal. Esto se cumple para cada segmento, así que el trabajo *total* efectuado por la fuerza gravitacional es $-mg$ multiplicado por el desplazamiento vertical *total* $(y_2 - y_1)$:

$$W_{grav} = -mg(y_2 - y_1) = mgy_1 - mgy_2 = U_{grav,1} - U_{grav,2}$$

Esto es igual a la ecuación (7.1) o (7.3), donde se supuso una trayectoria completamente vertical. Así que, aun si la trayectoria de un cuerpo entre dos puntos es curva, el trabajo total efectuado por la fuerza de gravedad depende solo de la diferencia de altura entre esos dos puntos. Este trabajo no se ve afectado por ningún movimiento horizontal que pueda darse. Por lo tanto, *podemos usar la misma expresión para la energía potencial gravitacional, sea la trayectoria del cuerpo recta o curva.*

7.7 Cálculo del cambio de la energía potencial gravitacional en un desplazamiento a lo largo de una trayectoria curva.







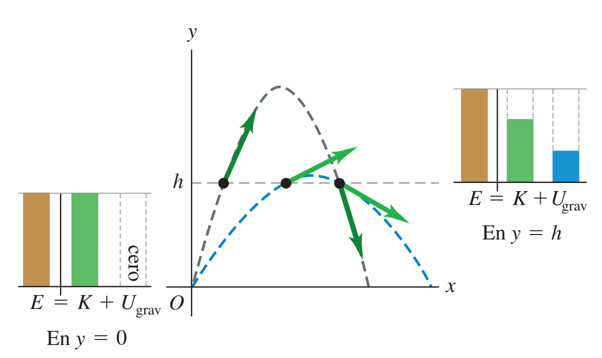
Ejemplo conceptual 7.3 Energía en el movimiento de proyectiles

Se batean dos pelotas de béisbol idénticas con la misma rapidez y altura inicial, pero con distintos ángulos de lanzamiento. Demuestre que, a cualquier altura h, ambas pelotas tienen la misma rapidez despreciando la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

La única fuerza que actúa sobre cada pelota después de ser bateada es su peso, así que la energía mecánica total de cada pelota es constante. La figura 7.8 muestra las trayectorias de las dos pelotas, bateadas a la misma altura con la misma rapidez inicial y, por lo tanto, la misma energía mecánica total, pero con diferentes ángulos iniciales. En todos los puntos con la misma altura, la energía potencial es la misma. Entonces, la energía cinética a esa altura debe ser igual para ambas pelotas y, por lo tanto, su rapidez es la misma.

7.8 Para la misma rapidez y altura iniciales, la rapidez de un proyectil a una altura dada h siempre es la misma, si se desprecia la resistencia del aire.





Ejemplo 7.4 Rapidez en la parte inferior de un círculo vertical

Imagine que su primo Morton baja en patineta, a partir del reposo, por una rampa curva sin fricción. Si consideramos a Morton y su patineta como una partícula, esta describe un cuarto de círculo de radio $R = 3.00$ m (figura 7.9). La masa total de Morton y su patineta es de 25.0 kg. *a*) Calcule su rapidez en la parte inferior de la rampa. *b*) Obtenga la fuerza normal que actúa sobre él en la base de la rampa.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: No podemos usar las ecuaciones de aceleración constante del capítulo 2, porque la aceleración de Morton no es constante; la pendiente disminuye a medida que él desciende. En vez de ello, usaremos el enfoque de energía. Puesto que Morton se mueve en un arco circular, también usaremos lo que aprendimos acerca del movimiento circular en la sección 5.4.

PLANTEAR: Las únicas fuerzas que actúan sobre Morton son su peso y la fuerza normal $\vec{n}$ ejercida por la rampa (figura 7.9*b*). Aunque esta fuerza $\vec{n}$ actúa en toda la trayectoria, no efectúa trabajo porque $\vec{n}$ siempre es perpendicular al desplazamiento de Morton. Así, $W_{otras} = 0$ y la energía mecánica se conserva. Llamemos 1 al punto de partida, y 2 a la base de la rampa, y sea $y = 0$ en la base de la rampa (figura 7.9*a*). Tomamos la dirección y positiva hacia arriba, así que $y_1 = R$ y $y_2 = 0$. Morton parte del reposo en la parte superior, de manera que $v_1 = 0$. La incógnita en el inciso *a*) es su rapidez v_2 en la parte inferior; en el inciso *b*), la incógnita es la magnitud n de la fuerza normal en el punto 2. Para calcular n, usaremos la segunda ley de Newton y la relación $a = v^2/R$, que representa a la aceleración radial o centrípeta.

Continúa

EJECUTAR: *a*) Las diferentes cantidades de energía son

$$K_1 = 0 \qquad U_{grav,1} = mgR$$
$$K_2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 \qquad U_{grav,2} = 0$$

Por la conservación de la energía mecánica, ecuación (7.4),

$$K_1 + U_{grav,1} = K_2 + U_{grav,2}$$
$$0 + mgR = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + 0$$
$$v_2 = \sqrt{2gR}$$
$$= \sqrt{2(9.80\ \text{m/s}^2)(3.00\ \text{m})} = 7.67\ \text{m/s}$$

Esta respuesta no depende de que la rampa sea circular; Morton tendrá la misma rapidez $v_2 = \sqrt{2gR}$ en la base de cualquier rampa de altura R, sin importar cuál sea su forma.

b) Para obtener n en el punto 2 empleando la segunda ley de Newton, necesitamos el diagrama de cuerpo libre en ese punto (figura 7.9*b*). En el punto 2, Morton se mueve con rapidez $v_2 = \sqrt{2gR}$ en un círculo de radio R; su aceleración es hacia el centro del círculo y tiene magnitud

$$a_{rad} = \frac{v_2^2}{R} = \frac{2gR}{R} = 2g$$

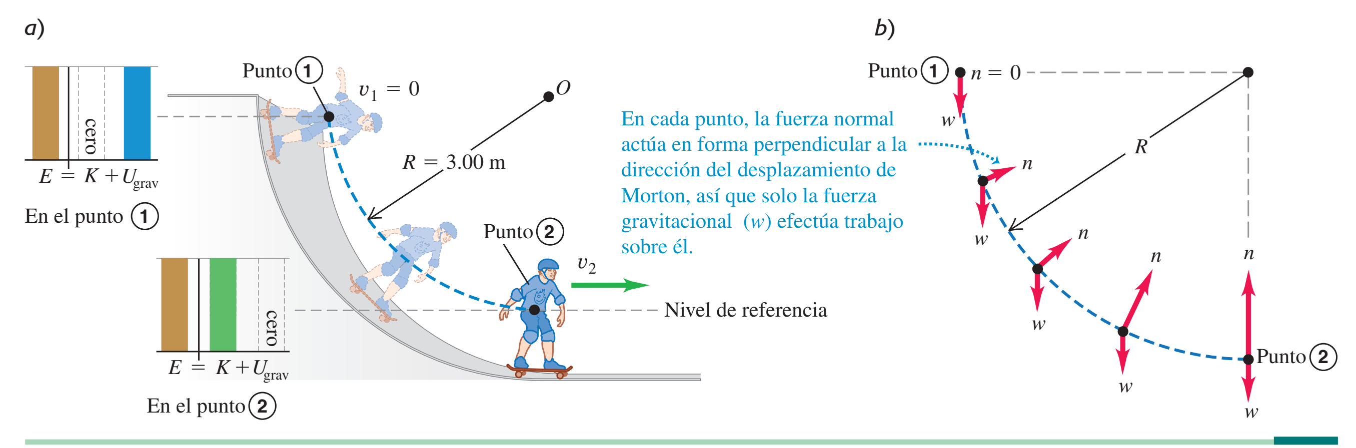
La componente y de la segunda ley de Newton es

$$\sum F_y = n + (-w) = ma_{rad} = 2mg$$
$$n = w + 2mg = 3mg$$
$$= 3(25.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 735\ \text{N}$$

En el punto 2, la fuerza normal es el triple del peso de Morton. Este resultado es independiente del radio R de la rampa. En los ejemplos 5.9 y 5.23 aprendimos que la magnitud de n es el *peso aparente*, así que en la base de la *parte curva* de la rampa, Morton sentirá como si tuviera tres veces su peso real mg. Sin embargo, cuando llegue a la parte *horizontal* de la rampa a la derecha del punto 2, la fuerza normal disminuirá a $w = mg$, y Morton sentirá su peso normal otra vez. ¿Entiende por qué?

EVALUAR: Este ejemplo ilustra una regla general acerca del papel de las fuerzas en problemas en que usamos técnicas de energía: lo que importa no es solo si *actúa* una fuerza, sino si *efectúa trabajo*. Si la fuerza no efectúa trabajo, como la fuerza normal $\vec{n}$ en este ejemplo, entonces no aparece en las ecuaciones (7.4) y (7.7).

7.9 *a*) Morton baja en patineta por una rampa circular sin fricción. La energía mecánica total es constante. *b*) Diagramas de cuerpo libre de Morton y su patineta en varios puntos de la rampa.



Ejemplo 7.5 Círculo vertical con fricción

En el ejemplo 7.4, suponga que la rampa tiene fricción y que la rapidez de Morton en la base es de solo 6.00 m/s, no la de 7.67 m/s que calculamos. ¿Qué trabajo efectuó la fuerza de fricción sobre él?

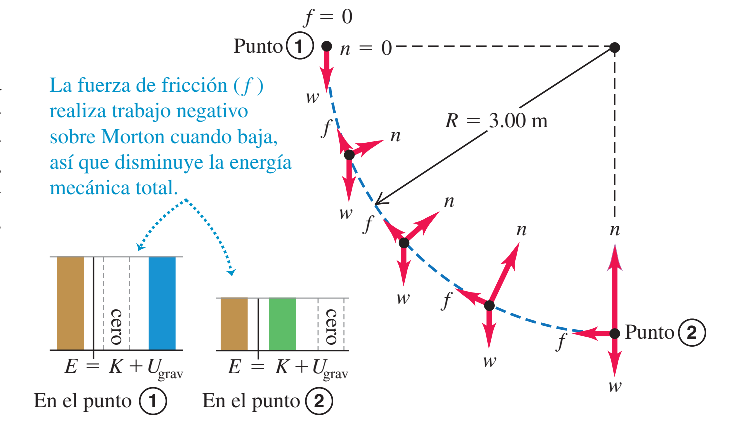
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 7.10 muestra que de nuevo la fuerza normal no efectúa trabajo, pero ahora hay una fuerza de fricción $\vec{f}$ que *sí* realiza el trabajo W_f. Entonces, el trabajo que no es gravitacional, W_{otras}, efectuado sobre Morton entre los puntos 1 y 2, es igual a W_f y no es cero. Usamos el mismo sistema de coordenadas y los mismos puntos inicial y final del ejemplo 7.4. La incógnita es $W_f = W_{otras}$, que obtendremos usando la ecuación (7.7).

EJECUTAR: Las cantidades de energía son

$$K_1 = 0$$
$$U_{grav,1} = mgR = (25.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(3.00\ \text{m}) = 735\ \text{J}$$
$$K_2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 = \tfrac{1}{2}(25.0\ \text{kg})(6.00\ \text{m/s})^2 = 450\ \text{J}$$
$$U_{grav,2} = 0$$

7.10 Diagramas de cuerpo libre y gráficas de barras de la energía, para el caso en que Morton baja en patineta por una rampa con fricción.



De acuerdo con la ecuación (7.7),

$$W_f = W_{otras} = K_2 + U_{grav,2} - K_1 - U_{grav,1}$$
$$= 450\text{ J} + 0 - 0 - 735\text{ J} = -285\text{ J}$$

El trabajo efectuado por la fuerza de fricción es −285 J, y la energía mecánica total *disminuye* en 285 J.

EVALUAR: El resultado de W_f es negativo. ¿Puede ver en los diagramas de cuerpo libre de la figura 7.10 por qué esto debe ser así?

Sería muy difícil aplicar la segunda ley de Newton $\sum\vec{F} = m\vec{a}$, directamente al problema, porque las fuerzas normal y de fricción, así como la aceleración, están cambiando continuamente de magnitud y dirección conforme Morton desciende. El enfoque de energía, en cambio, relaciona los movimientos en la parte superior y la base de la rampa, sin implicar los detalles del movimiento entre ellas.



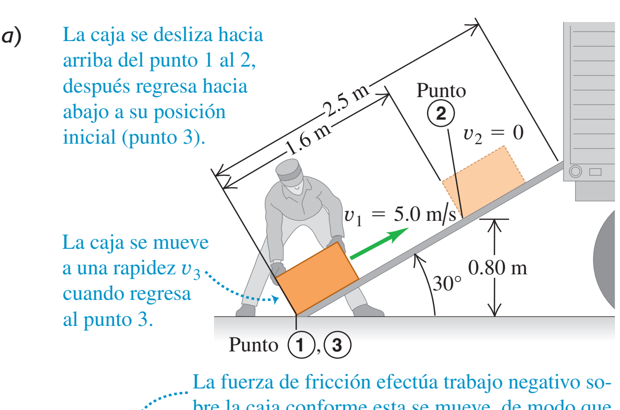
Ejemplo 7.6 Plano inclinado con fricción

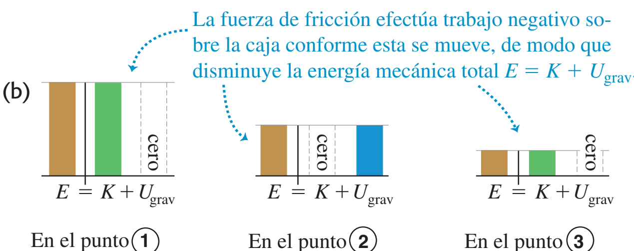
Deseamos subir una caja de 12 kg deslizándola por una rampa de 2.5 m inclinada 30°. Un obrero, sin considerar la fricción, calcula que puede subir la caja por la rampa dándole una rapidez inicial de 5.0 m/s en la base y soltándola. Sin embargo, la fricción *no* es despreciable; la caja sube 1.6 m por la rampa, se detiene y se desliza de regreso (figura 7.11*a*). *a*) Suponiendo que la fuerza de fricción que actúa sobre la caja es constante, calcule su magnitud. *b*) ¿Qué rapidez tiene la caja al volver a la base de la rampa?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La fuerza de fricción efectúa trabajo sobre la caja cuando se desliza. La primera parte del movimiento es del punto 1, en la base de la rampa, al punto 2, donde la caja se detiene por un instante ($v_2 = 0$). En la segunda parte del movimiento, la caja vuelve a la base de la rampa, que llamaremos punto 3 (figura 7.11*a*). Tomaremos la dirección *y* positiva hacia arriba y $y = 0$ (y, por lo tanto, $U_{grav} = 0$) en el piso (punto 1), de modo que $y_1 = 0$, $y_2 = (1.6\text{ m})$ sen 30° = 0.80 m, y $y_3 = 0$. Se sabe que $v_1 = 5.0$ m/s. La incógnita en el inciso *a*) es *f*, la magnitud de la fuerza de fricción, conforme la caja se desliza hacia arriba; como en el ejemplo 7.2, la calcularemos usando el enfoque de energía. En el inciso *b*), la incógnita es v_3, la rapidez de la caja en la base de la rampa. Calcularemos el trabajo realizado por la fricción cuando la caja se desliza hacia abajo, y luego usaremos el enfoque de energía para calcular v_3.

7.11 *a*) Una caja sube deslizándose por una rampa, se detiene y se desliza de regreso. *b*) Gráficas de barras de la energía para los puntos 1, 2 y 3.





EJECUTAR: *a*) Las energías son

$$K_1 = \tfrac{1}{2}(12\text{ kg})(5.0\text{ m/s})^2 = 150\text{ J}$$
$$U_{grav,1} = 0$$
$$K_2 = 0$$
$$U_{grav,2} = (12\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(0.80\text{ m}) = 94\text{ J}$$
$$W_{otras} = -fs$$

Aquí $s = 1.6$ m. Con la ecuación (7.7), obtenemos

$$K_1 + U_{grav,1} + W_{otras} = K_2 + U_{grav,2}$$
$$W_{otras} = -fs = (K_2 + U_{grav,2}) - (K_1 + U_{grav,1})$$
$$= (0 + 94\text{ J}) - (150\text{ J} + 0) = -56\text{ J} = -fs$$
$$f = \frac{W_{otras}}{s} = \frac{56\text{ J}}{1.6\text{ m}} = 35\text{ N}$$

La fuerza de fricción de 35 N, actuando a lo largo de 1.6 m, reduce la energía mecánica de la caja, de 150 a 94 J (figura 7.11*b*).

b) Conforme la caja se mueve del punto 2 al 3, el trabajo realizado por la fricción tiene el mismo valor negativo que cuando va del punto 1 al 2. (La fuerza de fricción y el desplazamiento tienen sentidos opuestos, pero igual magnitud). Por lo tanto, el trabajo total efectuado por la fricción entre los puntos 1 y 3 es

$$W_{otras} = W_{fric} = -2fs = -2(56\text{ J}) = -112\text{ J}$$

A partir del inciso *a*), $K_1 = 150$ J y $U_{grav,1} = 0$. La ecuación (7.7) da, entonces,

$$K_1 + U_{grav,1} + W_{otras} = K_3 + U_{grav,3}$$
$$K_3 = K_1 + U_{grav,1} - U_{grav,3} + W_{otras}$$
$$= 150\text{ J} + 0 - 0 + (-112\text{ J}) = 38\text{ J}$$

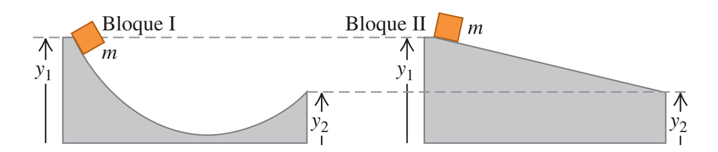
La caja vuelve a la base de la rampa con solo 38 J de los 150 J originales de energía mecánica (figura 7.11*b*). Como $K_3 = \tfrac{1}{2}mv_3^2$,

$$v_3 = \sqrt{\frac{2K_3}{m}} = \sqrt{\frac{2(38\text{ J})}{12\text{ kg}}} = 2.5\text{ m/s}$$

EVALUAR: Se perdió energía debido a la fricción, de modo que la rapidez $v_3 = 2.5$ m/s cuando la caja regresa a la base de la rampa es menor que $v_1 = 5.0$ m/s a la cual salió de ese punto. En el inciso *b*) aplicamos la ecuación (7.7) a los puntos 1 y 3, considerando el viaje redondo en conjunto. De forma alternativa, podríamos haber considerado la segunda parte del movimiento por sí mismo y aplicado la ecuación (7.7) a los puntos 2 y 3. Inténtelo. ¿Obtiene el mismo resultado para v_3?

Evalúe su comprensión de la sección 7.1 La figura muestra dos rampas distintas sin fricción. Las alturas y_1 y y_2 son iguales en cada rampa. Si un bloque con masa m se suelta del reposo en el extremo izquierdo de cada rampa, ¿cuál bloque tendrá mayor rapidez al llegar al extremo derecho? **i.** El bloque I; **ii.** el bloque II; **iii.** la rapidez es la misma para ambos bloques.





7.2 Energía potencial elástica

7.12 El tendón de Aquiles, que va de la parte posterior del tobillo al hueso del talón, actúa como un resorte natural. Cuando se estira y luego se relaja, el tendón almacena y después libera energía potencial elástica. Esta acción de resorte en nuestro talón reduce el trabajo que deben efectuar los músculos de la pierna al correr.



MasteringPHYSICS®

ActivPhysics 5.4: Inverse Bungee Jumper
ActivPhysics 5.5: Spring-Launched Bowler

Hay muchas situaciones en las que encontramos energía potencial que no es de naturaleza gravitacional. Un ejemplo es la banda de hule o liga de una resortera. El trabajo es efectuado por la fuerza que estira la banda, y ese trabajo se almacena en la banda hasta que esta se suelta. Entonces, la banda imparte energía cinética al proyectil.

Este es el mismo patrón que vimos en el mazo de la sección 7.1: efectuar trabajo sobre el sistema para almacenar energía, la cual después se convierte en energía cinética. Describiremos el proceso de almacenar energía en un cuerpo deformable, como un resorte o una banda de hule, en términos de *energía potencial elástica* (figura 7.12). Un cuerpo es *elástico* si recupera su forma y tamaño originales después de deformarse.

Específicamente, consideraremos el almacenamiento de energía en un resorte ideal como los que estudiamos en la sección 6.3. Para mantener un resorte ideal estirado una distancia x, debemos ejercer una fuerza $F = kx$, donde k es la constante de fuerza del resorte. Esta es una idealización útil porque muchos cuerpos elásticos presentan esta proporcionalidad directa entre la fuerza $\vec{F}$ y el desplazamiento x, siempre que x sea lo suficientemente pequeña.

Procedemos igual que con la energía potencial gravitacional. Comenzamos con el trabajo realizado por la fuerza elástica (del resorte) y lo combinamos con el teorema trabajo-energía. La diferencia es que la energía potencial gravitacional es una propiedad compartida entre un cuerpo y la Tierra; y la energía potencial elástica solo se almacena en el resorte (u otro cuerpo deformable).

La figura 7.13 muestra el resorte ideal de la figura 6.18, con su extremo izquierdo fijo y el extremo derecho sujeto a un bloque de masa m que puede moverse sobre el eje x. En la figura 7.13*a*, el cuerpo está en $x = 0$ cuando el resorte no está estirado ni comprimido. Movemos el bloque hacia un lado, estirando o comprimiendo el resorte, y luego lo soltamos. Al moverse el bloque de una posición x_1 a otra posición x_2, ¿cuánto trabajo realiza la fuerza elástica (del resorte) sobre el bloque?

En la sección 6.3 vimos que el trabajo que debemos efectuar *sobre* el resorte para mover un extremo desde un alargamiento x_1 hasta otro alargamiento distinto x_2 es

$$W = \tfrac{1}{2}kx_2^2 - \tfrac{1}{2}kx_1^2 \qquad \text{(trabajo efectuado } sobre \text{ un resorte)}$$

donde k es la constante de fuerza del resorte. Si estiramos más el resorte, realizamos trabajo positivo sobre él; si dejamos que el resorte se relaje sosteniendo un extremo, realizamos trabajo negativo sobre él. También vimos que esta expresión para el trabajo sigue siendo correcta si el resorte se comprime, en lugar de estirarse, de modo que x_1 o x_2, o ambas, son negativas. Ahora nos interesa calcular el trabajo efectuado *por* el resorte. De acuerdo con la tercera ley de Newton, un trabajo es el negativo del otro. Al cambiar los signos en la ecuación, vemos que, al desplazarse de x_1 a x_2, el resorte efectúa un trabajo W_{el} dado por

$$W_{el} = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \qquad \text{(trabajo efectuado } por \text{ un resorte)}$$

El subíndice “el” significa *elástico*. Si x_1 y x_2 son positivos y $x_2 > x_1$ (figura 7.13*b*), el resorte efectúa trabajo negativo sobre el bloque, que se mueve en la dirección $+x$ mientras el resorte tira de él en la dirección $-x$. El resorte se estira más y el bloque se frena. Si x_1 y x_2 son positivos y $x_2 < x_1$ (figura 7.13*c*), el trabajo del resorte es positivo al relajarse y el bloque se acelera. Si el resorte puede comprimirse o estirarse, x_1 o x_2, o ambas, pueden ser negativas; sin embargo, la expresión para W_{el} sigue siendo válida. En la figura 7.13*d*, x_1 y x_2 son negativas, pero x_2 lo es menos; el resorte comprimido efectúa trabajo positivo al relajarse, acelerando al bloque.

Al igual que hicimos con el trabajo gravitacional, podemos expresar el trabajo del resorte en términos de una cantidad dada al principio y al final del desplazamiento. Esta cantidad es $\frac{1}{2}kx^2$, que definimos como la **energía potencial elástica**:

$$U_{el} = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(energía potencial elástica)} \tag{7.9}$$

La figura 7.14 es una gráfica de la ecuación (7.9). La unidad de U_{el} es el joule (J), la misma de *todas* las cantidades de energía y trabajo; esto es evidente en la ecuación (7.9), si recordamos que las unidades de k son N/m y que $1\ \text{N}\cdot\text{m} = 1\ \text{J}$.

Podemos usar la ecuación (7.9) para expresar el trabajo W_{el} efectuado sobre el bloque por la fuerza elástica en términos del cambio en la energía potencial elástica:

$$W_{el} = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 = U_{el,1} - U_{el,2} = -\Delta U_{el} \tag{7.10}$$

Si un resorte estirado se estira aún más, como en la figura 7.13*b*, W_{el} es negativo y U_{el} *aumenta*; se almacena más energía potencial elástica en el resorte. Si un resorte estirado se relaja como en la figura 7.13*c*, x disminuye, W_{el} es positivo y U_{el} *disminuye*; el resorte pierde energía potencial elástica. Los valores negativos de x corresponden a un resorte comprimido; pero, como muestra la figura 7.14, U_{el} es positiva para x tanto positiva como negativa, y las ecuaciones (7.9) y (7.10) son válidas en ambos casos. Cuanto más se comprima *o* estire un resorte, mayor será su energía potencial elástica.

CUIDADO **energía potencial gravitacional contra energía potencial elástica** Una diferencia importante entre la energía potencial gravitacional $U_{grav} = mgy$ y la energía potencial elástica $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$ es que *no* tenemos la libertad de elegir $x = 0$ donde queramos. Para que sea congruente con la ecuación (7.9), $x = 0$ *debe* estar en la posición donde el resorte no está estirado ni comprimido. En esa posición, tanto su energía potencial elástica como la fuerza que ejerce son iguales a cero.

El teorema trabajo-energía establece que $W_{tot} = K_2 - K_1$, sin importar qué tipo de fuerzas actúan sobre el cuerpo. Si la fuerza elástica es la *única* que realiza trabajo sobre el cuerpo, entonces,

$$W_{tot} = W_{el} = U_{el,1} - U_{el,2}$$

El teorema trabajo-energía $W_{tot} = K_2 - K_1$ nos da entonces

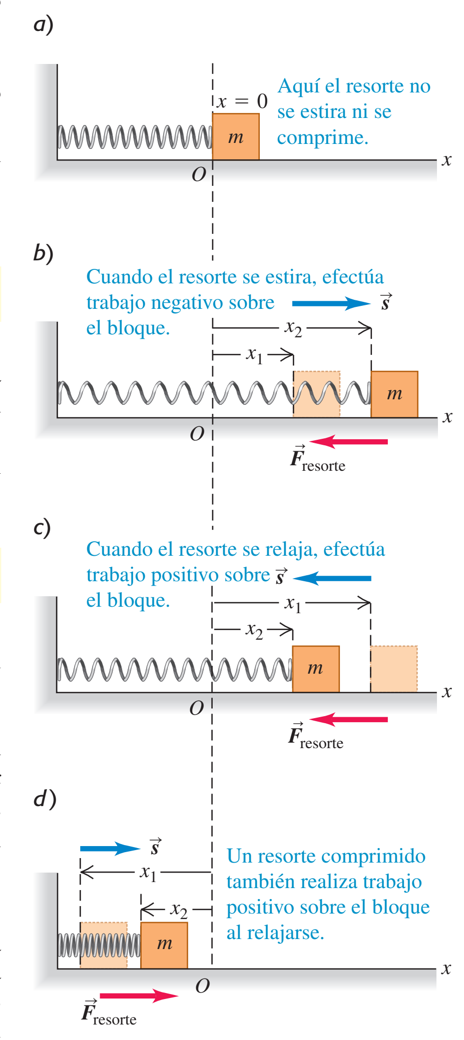
$$K_1 + U_{el,1} = K_2 + U_{el,2} \qquad \text{(si solo la fuerza elástica realiza trabajo)} \tag{7.11}$$

Aquí, U_{el} está dada por la ecuación (7.9), por lo que

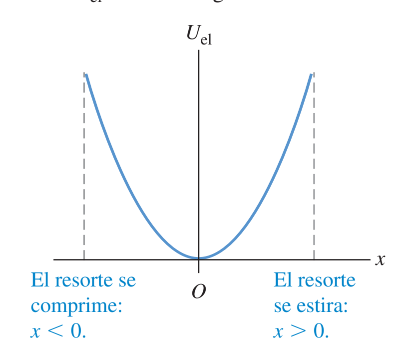
$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + \tfrac{1}{2}kx_2^2 \qquad \text{(si solo la fuerza elástica realiza trabajo)} \tag{7.12}$$

En este caso, la energía mecánica total $E = K + U_{el}$ (la suma de las energías cinética y potencial *elástica*) *se conserva*. Un ejemplo es el movimiento del bloque de la figura

7.13 Cálculo del trabajo realizado por un resorte unido a un bloque sobre una superficie horizontal. La cantidad x es la extensión o compresión del resorte.



7.14 La gráfica de la energía potencial elástica para un resorte ideal es una parábola: $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$, donde x es la extensión o compresión del resorte. La energía potencial elástica U_{el} nunca es negativa.



Aplicación Energía potencial elástica de un guepardo
Cuando un guepardo corre, su lomo se flexiona y se extiende una cantidad excepcional. La flexión del lomo estira los tendones y músculos elásticos a lo largo de la parte superior de la espina dorsal y también comprime a esta última, almacenando energía mecánica. Cuando el guepardo efectúa el siguiente salto, esa energía le ayuda a estirar la espina dorsal, facilitándole correr con más eficiencia y aumentando su velocidad.



Diferencia en la longitud entre la nariz y la cola

7.15 El salto en trampolín implica interacciones entre la energía cinética, la energía potencial gravitacional y la energía potencial elástica. Debido a la resistencia del aire y a las fuerzas de fricción con el trampolín, la energía mecánica no se conserva. Por eso, al cabo de un rato, los rebotes cesan, a menos que el saltador realice trabajo con sus piernas para compensar la pérdida de energía.



7.13, siempre que la superficie horizontal no tenga fricción de modo que ninguna fuerza, además de la ejercida por el resorte, efectúe trabajo.

Para que la ecuación (7.12) sea estrictamente correcta, el resorte ideal *no debe tener masa*; si la tiene, también tendrá energía cinética cuando las espiras del resorte se mueven hacia adelante y hacia atrás. Podemos despreciar la energía cinética del resorte si su masa es mucho menor que la masa m del cuerpo conectado al resorte. Por ejemplo, un automóvil común tiene una masa de 1200 kg o más, y los resortes de su suspensión tienen masas de unos cuantos kilogramos, así que podemos despreciarlas si deseamos estudiar cómo rebota el auto sobre su suspensión.

Situaciones con energía potencial tanto gravitacional como elástica

Las ecuaciones (7.11) y (7.12) son válidas si la única energía potencial del sistema es la elástica. ¿Qué sucede si tenemos fuerzas *tanto* gravitacionales *como* elásticas, como en un bloque conectado al extremo inferior de un resorte que cuelga verticalmente? ¿Y qué ocurre si el trabajo también es efectuado por otras fuerzas que *no pueden* describirse en términos de energía potencial, como la fuerza de resistencia del aire sobre un bloque en movimiento? Entonces, el trabajo total es la suma del trabajo efectuado por la fuerza gravitacional (W_{grav}), por la fuerza elástica (W_{el}) y por otras fuerzas (W_{otras}): $W_{tot} = W_{grav} + W_{el} + W_{otras}$. Entonces, el teorema trabajo-energía es

$$W_{grav} + W_{el} + W_{otras} = K_2 - K_1$$

El trabajo efectuado por la fuerza gravitacional es $W_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2}$ y el trabajo efectuado por el resorte es $W_{el} = U_{el,1} - U_{el,2}$. Por lo tanto, podemos rescribir el teorema trabajo-energía para este caso más general como

$$K_1 + U_{grav,1} + U_{el,1} + W_{otras} = K_2 + U_{grav,2} + U_{el,2} \quad \text{(válida en general)} \tag{7.13}$$

O bien, de manera equivalente,

$$K_1 + U_1 + W_{otras} = K_2 + U_2 \quad \text{(válida en general)} \tag{7.14}$$

donde $U = U_{grav} + U_{el} = mgy + \frac{1}{2}kx^2$ es la *suma* de la energía potencial gravitacional y la energía potencial elástica. Para abreviar, simplemente llamamos U a la "energía potencial".

La ecuación (7.14) es *la forma más general* de la relación entre energía cinética, energía potencial y trabajo realizado por otras fuerzas, la cual nos indica que:

El trabajo realizado por todas las fuerzas distintas de la elástica o la gravitacional es igual al cambio de energía mecánica total $E = K + U$ del sistema, donde $U = U_{grav} + U_{el}$ es la suma de la energía potencial gravitacional más la energía potencial elástica.

El "sistema" se compone del cuerpo de masa m, la Tierra con la que interactúa a través de la fuerza gravitacional, y el resorte cuya constante de fuerza es k.

Si W_{otras} es positivo, $E = K + U$ aumenta; si W_{otras} es negativo, E disminuye. Si las fuerzas gravitacional y elástica son las *únicas* que efectúan trabajo sobre el cuerpo, entonces $W_{otras} = 0$ y la energía mecánica total (que incluye energías potenciales gravitacional y elástica) se conserva. [Compare la ecuación (7.14) con las ecuaciones (7.7) y (7.8), que describen situaciones donde hay energía potencial gravitacional, pero no hay energía potencial elástica].

El salto en trampolín (figura 7.15) implica transformaciones entre la energía cinética, la energía potencial elástica y la energía potencial gravitacional. Cuando la persona desciende del punto más alto, la energía potencial gravitacional U_{grav} disminuye y la energía cinética K se incrementa. Mientras la persona está en contacto con el trampolín, una parte de la energía mecánica se convierte en energía potencial elástica

U_{el} que se almacena en los resortes del trampolín. Más allá de cierto punto, la rapidez y la energía cinética K del clavadista disminuyen, mientras U_{grav} continúa disminuyendo y U_{el} continúa aumentando. En la parte inferior del salto, el individuo hace un alto momentáneo ($K = 0$) en el punto más bajo de la trayectoria (U_{grav} es mínima) y los resortes se estiran al máximo (U_{el} es máxima). Entonces, los resortes convierten su energía nuevamente en K y U_{grav}, al impulsar al clavadista hacia arriba.

Estrategia para resolver problemas 7.2 Problemas usando energía mecánica II



La Estrategia para resolver problemas 7.1 (sección 7.1) es igualmente útil para resolver aquellos que implican fuerzas elásticas además de gravitacionales. Lo único nuevo es que ahora la energía potencial U incluye la energía potencial elástica $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$, donde x es el desplazamiento del resorte *con respecto a su longitud sin estirar*. El trabajo realizado por las fuerzas gravitacional y elástica se toma en cuenta en las energías potenciales; el trabajo de las otras fuerzas, W_{otras}, debe incluirse por separado.

Ejemplo 7.7 Movimiento con energía potencial elástica

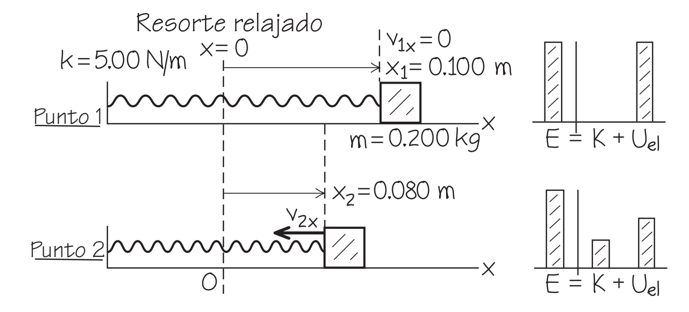


Un deslizador de masa $m = 0.200$ kg descansa en un riel horizontal de aire, sin fricción, conectado a un resorte con una constante de fuerza $k = 5.00$ N/m. Usted tira del deslizador, estirando el resorte 0.100 m, y luego lo libera partiendo del reposo. El deslizador regresa a su posición de equilibrio ($x = 0$). ¿Qué velocidad tiene cuando $x = 0.080$ m?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Al comenzar a moverse el deslizador, la energía potencial elástica se convierte en energía cinética. El deslizador permanece a la misma altura durante todo el movimiento, así que la energía potencial gravitacional no es un factor importante y $U = U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$. La figura 7.16 muestra el diagrama. Solo la fuerza del resorte realiza trabajo sobre el deslizador, así que $W_{otras} = 0$ y podemos usar la ecuación (7.11). Designamos el punto 1 como el lugar donde se suelta el deslizador (es decir, $x_1 = 0.100$ m), en tanto que el punto 2 se ubica en $x_2 = 0.080$ m. Conocemos la velocidad $v_{1x} = 0$; la incógnita es v_{2x}.

7.16 Diagramas y gráficas de barras de la energía para este problema.



EJECUTAR: Las energías son

$$K_1 = \tfrac{1}{2}mv_{1x}^2 = \tfrac{1}{2}(0.200\text{ kg})(0)^2 = 0$$

$$U_1 = \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{2}(5.00\text{ N/m})(0.100\text{ m})^2 = 0.0250\text{ J}$$

$$K_2 = \tfrac{1}{2}mv_{2x}^2$$

$$U_2 = \tfrac{1}{2}kx_2^2 = \tfrac{1}{2}(5.00\text{ N/m})(0.080\text{ m})^2 = 0.0160\text{ J}$$

Usamos la ecuación (7.11) para despejar K_2 y luego calcular v_{2x}:

$$K_2 = K_1 + U_1 - U_2 = 0 + 0.0250\text{ J} - 0.0160\text{ J} = 0.0090\text{ J}$$

$$v_{2x} = \pm\sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \pm\sqrt{\frac{2(0.0090\text{ J})}{0.200\text{ kg}}} = \pm 0.30\text{ m/s}$$

Elegimos la raíz negativa porque el deslizador se está moviendo en la dirección $-x$; la respuesta es $v_{2x} = -0.30$ m/s.

EVALUAR: Finalmente, el resorte invertirá el movimiento del deslizador, empujándolo de regreso en la dirección $+x$ (véase la figura 7.13*d*). La solución $v_{2x} = +0.30$ m/s nos dice que cuando el deslizador pase por $x = 0.080$ m en su viaje de retorno, su rapidez será de 0.30 m/s, la misma que cuando pasó por este punto moviéndose hacia la izquierda.

Ejemplo 7.8 Movimiento con energía potencial elástica y trabajo efectuado por otras fuerzas



Suponga que el deslizador del ejemplo 7.7 está inicialmente en reposo en $x = 0$, con el resorte sin estirar. Usted aplica al deslizador una fuerza constante $\vec{F}$ (de magnitud igual a 0.610 N) en la dirección $+x$. ¿Qué velocidad tiene este cuando se movió a $x = 0.100$ m?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Aunque la fuerza aplicada $\vec{F}$ es constante, la fuerza del resorte no lo es, así que la aceleración del deslizador no es constante. La energía mecánica total no se conserva debido al trabajo

Continúa

efectuado por la fuerza $\vec{F}$, así que debemos usar la relación general de energía de la ecuación (7.13). Al igual que en el ejemplo 7.7, ignoramos la energía potencial gravitacional porque no cambia la altura del deslizador. Por lo tanto, tenemos que $U = U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$. Esta vez tomamos el punto 1 en $x_1 = 0$, donde la velocidad es $v_{1x} = 0$, y como punto 2, $x = 0.100$ m. Entonces, el desplazamiento del deslizador es $\Delta x = x_2 - x_1 = 0.100$ m. La incógnita es v_{2x}, la velocidad en el punto 2.

EJECUTAR: La fuerza $\vec{F}$ es constante y en la misma dirección del desplazamiento, de modo que el trabajo realizado por esta fuerza es $F\Delta x$. Entonces, las energías son

$$K_1 = 0$$

$$U_1 = \tfrac{1}{2}kx_1^2 = 0$$

$$K_2 = \tfrac{1}{2}mv_{2x}^2$$

$$U_2 = \tfrac{1}{2}kx_2^2 = \tfrac{1}{2}(5.00\ \text{N/m})(0.100\ \text{m})^2 = 0.0250\ \text{J}$$

$$W_{otras} = F\Delta x = (0.610\ \text{N})(0.100\ \text{m}) = 0.0610\ \text{J}$$

Inicialmente, la energía mecánica total es cero; el trabajo realizado por $\vec{F}$ aumenta la energía mecánica total a 0.0610 J, de los cuales $U_2 =$ 0.0250 J corresponden a energía potencial elástica. El resto es energía cinética. De acuerdo con la ecuación (7.13),

$$K_1 + U_1 + W_{otras} = K_2 + U_2$$

$$K_2 = K_1 + U_1 + W_{otras} - U_2$$

$$= 0 + 0 + 0.0610\ \text{J} - 0.0250\ \text{J} = 0.0360\ \text{J}$$

$$v_{2x} = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2(0.0360\ \text{J})}{0.200\ \text{kg}}} = 0.60\ \text{m/s}$$

Elegimos la raíz cuadrada positiva porque el deslizador se mueve en la dirección $+x$.

EVALUAR: Para verificar la respuesta, piense qué cambiaría si desconectáramos el deslizador del resorte. Entonces, $\vec{F}$ sería la única fuerza que efectúa trabajo, la energía potencial elástica sería cero en todo momento, y la ecuación (7.13) nos daría

$$K_2 = K_1 + W_{otras} = 0 + 0.0610\ \text{J}$$

$$v_{2x} = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2(0.0610\ \text{J})}{0.200\ \text{kg}}} = 0.78\ \text{m/s}$$

La respuesta $v_{2x} = 0.60$ m/s es menor que 0.78 m/s porque el resorte efectúa trabajo negativo sobre el deslizador al estirarse (véase la figura 7.13*b*).

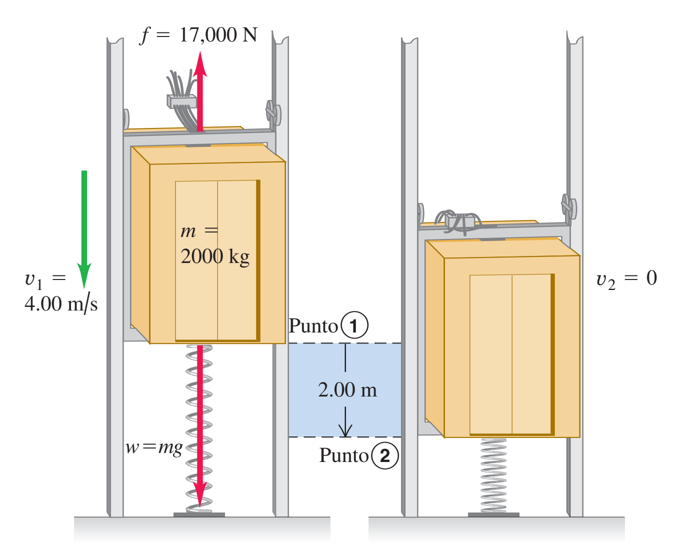
Si usted deja de empujar el deslizador cuando este alcanza el punto $x = 0.100$ m, la única fuerza que realiza trabajo sobre él es la fuerza del resorte. Por lo tanto, para $x > 0.100$ m, la energía mecánica total $E = K + U = 0.0610$ J es constante. Conforme el resorte continúa estirándose, el deslizador se frena y la energía cinética K disminuye mientras la energía potencial aumenta. El deslizador llegará al reposo en $x = x_3$; en este punto, la energía cinética es cero y la energía potencial $U = U_{el} = \frac{1}{2}kx_3^2$ es igual a la energía mecánica total, 0.0610 J. ¿Puede usted demostrar que $x_3 = 0.156$ m? (El deslizador se mueve otros 0.056 m después de que usted deja de empujar). Si no hay fricción, ¿el deslizador permanecerá en reposo?

Ejemplo 7.9 Movimiento con fuerzas gravitacional, elástica y de fricción



En una prueba, un elevador de 2000 kg (19,600 N) con cables rotos cae a 4.00 m/s cuando hace contacto con un resorte amortiguador en el fondo del cubo. El resorte está diseñado para detener el elevador, comprimiéndose 2.00 m al hacerlo (figura 7.17). Durante el movimiento, un freno de seguridad aplica una fuerza de fricción constante de 17,000 N al elevador. ¿Cuál es la constante de fuerza k necesaria para el resorte?

7.17 La caída de un elevador es detenida por un resorte y una fuerza de fricción constante.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos el enfoque de energía para determinar k, que aparece en la expresión de energía potencial elástica. En este problema interviene energía potencial *tanto* gravitacional *como* elástica. La energía mecánica total no se conserva porque la fricción realiza un trabajo negativo W_{otras} sobre el elevador. Por lo tanto, usaremos la forma más general de la relación de energía, la ecuación (7.13). Tomaremos como punto 1 la posición de la base del elevador cuando entra en contacto con el resorte, y como punto 2, su posición cuando queda en reposo. Elegimos el origen en el punto 1, así que $y_1 = 0$ y $y_2 = -2.00$ m. Entonces, la coordenada del extremo superior del resorte después del contacto es la misma que la coordenada del elevador, y la energía potencial elástica en cualquier punto entre los puntos 1 y 2 es $U_{el} = \frac{1}{2}ky^2$. La energía potencial gravitacional es $U_{grav} = mgy$, como siempre. Conocemos las rapideces inicial y final del elevador y la magnitud de la fuerza de fricción, así que la única incógnita es la constante de fuerza k.

EJECUTAR: La rapidez inicial del elevador es $v_1 = 4.00$ m/s, así que su energía cinética inicial es

$$K_1 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \tfrac{1}{2}(2000\ \text{kg})(4.00\ \text{m/s})^2 = 16{,}000\ \text{J}$$

El elevador se detiene en el punto 2, por lo que $K_2 = 0$. En el punto 1, la energía potencial $U_1 = U_{grav} + U_{el}$ es cero; $U_{grav} = 0$ porque $y_1 = 0$, y $U_{el} = 0$ porque el resorte no está comprimido. En el punto 2, hay energía potencial tanto gravitacional como elástica, de modo que

$$U_2 = mgy_2 + \tfrac{1}{2}ky_2^2$$

La energía potencial gravitacional en el punto 2 es

$$mgy_2 = (2000 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(-2.00 \text{ m}) = -39{,}200 \text{ J}$$

La "otra" fuerza es la fuerza de fricción constante de 17,000 N, que actúa opuesta al desplazamiento de 2.00 m, por lo que

$$W_{\text{otras}} = -(17{,}000 \text{ N})(2.00 \text{ m}) = -34{,}000 \text{ J}$$

Con estos términos en la ecuación (7.14), $K_1 + U_1 + W_{\text{otras}} = K_2 + U_2$:

$$K_1 + 0 + W_{\text{otras}} = 0 + (mgy_2 + \tfrac{1}{2}ky_2^2)$$

$$k = \frac{2(K_1 + W_{\text{otras}} - mgy_2)}{y_2^2}$$

$$= \frac{2[16{,}000 \text{ J} + (-34{,}000 \text{ J}) - (-39{,}200 \text{ J})]}{(-2.00 \text{ m})^2}$$

$$= 1.06 \times 10^4 \text{ N/m}$$

Esto es aproximadamente un décimo de la constante de fuerza de un resorte en la suspensión de un automóvil.

EVALUAR: Parecería que aquí hay una paradoja. La energía potencial elástica en el punto 2 es

$$\tfrac{1}{2}ky_2^2 = \tfrac{1}{2}(1.06 \times 10^4 \text{ N/m})(-2.00 \text{ m})^2 = 21{,}200 \text{ J}$$

Esto es *más* que la energía mecánica total en el punto 1:

$$E_1 = K_1 + U_1 = 16{,}000 \text{ J} + 0 = 16{,}000 \text{ J}$$

Sin embargo, la fuerza de fricción *disminuyó* la energía mecánica del sistema en 34,000 J entre los puntos 1 y 2. ¿Apareció energía de la nada? No. En el punto 2, que está por debajo del origen, también hay energía potencial gravitacional *negativa*, $mgy_2 = -39{,}200$ J. Por lo tanto, la energía mecánica total en el punto 2 no es 21,200 J, sino

$$E_2 = K_2 + U_2 = 0 + \tfrac{1}{2}ky_2^2 + mgy_2$$

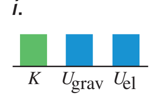
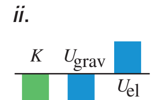
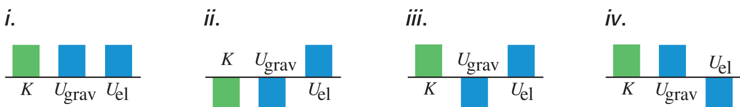
$$= 0 + 21{,}200 \text{ J} + (-39{,}200 \text{ J}) = -18{,}000 \text{ J}$$

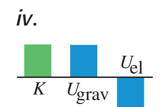
Esta es justamente la energía mecánica inicial de 16,000 J menos los 34,000 J perdidos por la fricción.

¿El elevador se quedará en el fondo del cubo? En el punto 2 el resorte comprimido ejerce una fuerza hacia arriba de magnitud $F_{\text{resorte}} = (1.06 \times 10^4 \text{ N/m})(2.00 \text{ m}) = 21{,}200$ N; mientras que la fuerza hacia abajo que ejerce la fuerza gravitacional es solo $w = mg = (2000 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 19{,}600$ N. Entonces, si no hubiera fricción, habría una fuerza neta hacia arriba de 21,200 N − 19,600 N = 1600 N y el elevador rebotaría. Pero el freno de seguridad ejerce una fuerza de fricción cinética de 17,000 N, y presumiblemente puede ejercer una fuerza de fricción estática máxima que es mayor que esto. Así, el freno evitará que el elevador rebote.

Evalúe su comprensión de la sección 7.2 Considere la situación del ejemplo 7.9 en el instante en que el elevador aún se desplaza hacia abajo y el resorte se comprime 1.00 m. En la figura, ¿cuál de las gráficas de barra de energía representa con mayor exactitud la energía cinética K, la energía potencial gravitacional U_{grav} y la energía potencial elástica U_{el} en ese instante?





7.3 Fuerzas conservativas y no conservativas

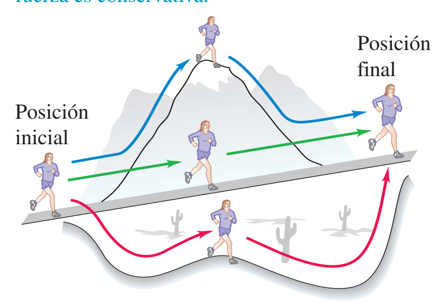
Al estudiar la energía potencial hemos hablado de "almacenar" energía cinética convirtiéndola en energía potencial, pensando siempre que podremos recuperarla nuevamente como energía cinética. Por ejemplo, una pelota lanzada hacia arriba se frena al convertir su energía cinética en energía potencial gravitacional; sin embargo, al bajar, la conversión se invierte y la pelota se acelera conforme su energía potencial se convierte en energía cinética. Si no hay resistencia del aire, la pelota se mueve con la misma rapidez cuando regresa al punto de lanzamiento.

Otro ejemplo es el de un deslizador que se desplaza sobre un riel de aire horizontal sin fricción, que choca contra un amortiguador de resorte en el extremo del riel. El resorte se comprime y el deslizador se detiene; luego, el resorte rebota. Si no hay fricción, el deslizador termina con la misma rapidez y energía cinética que tenía antes de chocar. Aquí también hay una conversión bidireccional: de energía cinética a potencial, y viceversa. En ambos casos, podemos definir una función de energía potencial de modo que la energía mecánica total, cinética más potencial, sea constante, o *se conserve* durante el movimiento.

Fuerzas conservativas

Una fuerza que presenta esta característica de conversión bidireccional entre energías cinética y potencial es una **fuerza conservativa**. Hemos visto dos ejemplos de fuer-

7.18 El trabajo realizado por una fuerza conservativa como la fuerza gravitacional depende solo de los extremos de la trayectoria, no de la trayectoria específica seguida entre esos puntos.



MasteringPHYSICS
PhET: The Ramp

zas conservativas: la gravitacional y la de un resorte. (Más adelante en este libro estudiaremos otra fuerza conservativa, la fuerza eléctrica entre objetos cargados). Una característica fundamental de las fuerzas conservativas es que su trabajo siempre es *reversible*. Algo que depositamos en el "banco" de energía puede retirarse después sin pérdida. Otro aspecto importante de las fuerzas conservativas es que un cuerpo puede moverse del punto 1 al 2 siguiendo varias trayectorias; pero el trabajo realizado por una fuerza conservativa es el mismo para todas las trayectorias (figura 7.18). De esta manera, si un cuerpo se mantiene cerca de la superficie terrestre, la fuerza gravitacional $m\vec{g}$ es independiente de la altura, y el trabajo realizado por esta fuerza solo depende del cambio de altura. Si el cuerpo describe una trayectoria cerrada, volviendo al punto de partida, el trabajo *total* de la fuerza gravitacional siempre es cero.

El trabajo realizado por una fuerza conservativa *siempre* tiene cuatro propiedades:

1. Puede expresarse como la diferencia entre los valores inicial y final de una función de *energía potencial*.
2. Es reversible.
3. Es independiente de la trayectoria del cuerpo y depende solo de los puntos inicial y final.
4. Si el punto inicial coincide con el punto final, el trabajo total es cero.

Si las *únicas* fuerzas que efectúan trabajo son conservativas, la energía mecánica total $E = K + U$ es constante.

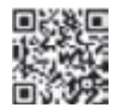
Fuerzas no conservativas

No todas las fuerzas son conservativas. Considere la fuerza de fricción que actúa sobre la caja que se desliza por la rampa del ejemplo 7.6 (sección 7.1). Cuando el cuerpo sube y luego regresa al punto de partida, el trabajo total efectuado por la fuerza de fricción sobre él *no* es cero. Al invertirse la dirección del movimiento, también se invierte la fuerza de fricción, por lo que realiza trabajo *negativo* en *ambas* direcciones. Si un automóvil con frenos bloqueados se derrapa por el pavimento disminuyendo su rapidez (y energía cinética), la energía cinética perdida no se puede recuperar invirtiendo el movimiento o de alguna otra manera, y la energía mecánica *no* se conserva. *No* hay función de energía potencial para la fuerza de fricción.

Asimismo, la fuerza de resistencia de fluidos (véase la sección 5.3) tampoco es conservativa. Si lanzamos una pelota hacia arriba, la resistencia del aire efectúa trabajo negativo sobre ella al subir *y* al bajar. La pelota regresa a la mano con menor rapidez y menos energía cinética que cuando se lanzó, y no hay forma de recuperar la energía mecánica perdida.

Una fuerza que no se conserva se llama **fuerza no conservativa**. El trabajo realizado por una fuerza no conservativa *no* puede representarse con una función de energía potencial. Algunas fuerzas no conservativas, como la fricción cinética o la resistencia de fluidos, hacen que la energía mecánica se pierda o se disipe; una fuerza de este tipo se llama **fuerza disipativa**. También hay fuerzas no conservativas que *aumentan* la energía mecánica. Los fragmentos de un petardo que estalla salen despedidos con una energía cinética muy grande, debido a una reacción química de la pólvora con el oxígeno. Las fuerzas liberadas por esta reacción no son conservativas porque el proceso es irreversible. (¡Los trozos nunca se volverán a unir espontáneamente para formar un petardo!).

Ejemplo 7.10 El trabajo de fricción depende de la trayectoria

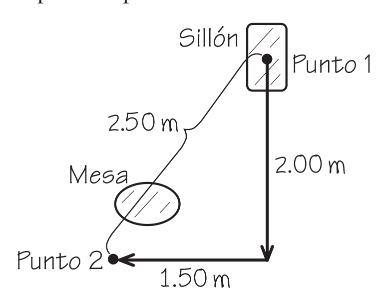


Imagine que está reacomodando sus muebles y desea mover 2.50 m un sillón de 40.0 kg a través de una habitación. Sin embargo, el camino rectilíneo está bloqueado por una pesada mesa de centro que no desea mover. Por lo tanto, mueve el sillón siguiendo una trayectoria de dos tramos que tienen 2.00 m y 1.50 m de longitud. En comparación con la trayectoria recta, ¿cuánto trabajo adicional debe realizar al empujar el sillón por la trayectoria acodada? El coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.200$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Aquí efectúan trabajo sobre el sillón tanto usted como la fuerza de fricción, así que debemos usar la relación de energía que incluye "otras" fuerzas. Usaremos esa relación para obtener un vínculo entre el trabajo efectuado por *usted* y el efectuado por la *fricción*. La figura 7.19 muestra el diagrama. El sillón está en reposo tanto en el punto 1 como en el punto 2, así que $K_1 = K_2 = 0$. No

7.19 Diagrama para este problema.



hay energía potencial elástica (no hay resortes), y la energía potencial gravitacional no cambia porque el sillón solo se mueve horizontalmente, de manera que $U_1 = U_2$. De la ecuación (7.14), se deduce que $W_{otras} = 0$. El "otro" trabajo realizado sobre el sillón es la suma del trabajo positivo que usted realiza, W_{usted}, más el trabajo negativo, W_{fric}, de la fuerza de fricción. Puesto que la suma es cero, tenemos

$$W_{usted} = -W_{fric}$$

Por lo tanto, calcularemos el trabajo realizado por la fuerza de fricción para determinar W_{usted}.

EJECUTAR: Como el piso es horizontal, la fuerza normal sobre el sillón es igual a su peso mg, y la magnitud de la fuerza de fricción es $f_k = \mu_k n = \mu_k mg$. El trabajo que usted debe efectuar en cada trayectoria es entonces

$$\begin{aligned} W_{usted} &= -W_{fric} = -(-f_k s) = +\mu_k mgs \\ &= (0.200)(40.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(2.50\text{ m}) \\ &= 196\text{ J} \qquad \text{(trayectoria rectilínea)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{usted} &= -W_{fric} = +\mu_k mgs \\ &= (0.200)(40.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(2.00\text{ m} + 1.50\text{ m}) \\ &= 274\text{ J} \qquad \text{(trayectoria acodada)} \end{aligned}$$

El trabajo extra que usted debe realizar es 274 J − 196 J = 78 J.

EVALUAR: La fricción realiza diferentes cantidades de trabajo sobre el sillón, −196 J y −274 J, por las dos trayectorias entre los puntos 1 y 2. Por lo tanto, la fricción es una fuerza *no conservativa*.

Ejemplo 7.11 ¿Conservativa o no conservativa?



En cierta región del espacio, la fuerza sobre un electrón es $\vec{F} = Cx\hat{\jmath}$, donde C es una constante positiva. El electrón se mueve alrededor de una espira cuadrada en el plano xy (figura 7.20). Calcule el trabajo de $\vec{F}$ sobre el electrón durante una vuelta en sentido antihorario. ¿Esta fuerza es conservativa o no conservativa?

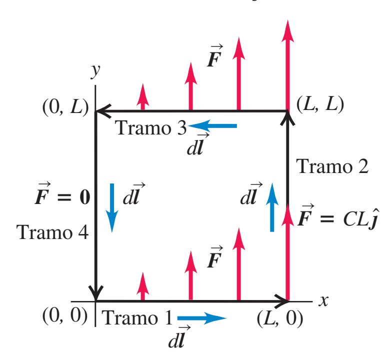
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La fuerza $\vec{F}$ no es constante y, en general, no está en la misma dirección que el desplazamiento. Para obtener el trabajo efectuado por $\vec{F}$, usaremos la expresión general del trabajo, la ecuación (6.14):

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

donde $d\vec{l}$ es un desplazamiento infinitesimal. Calcularemos el trabajo realizado en cada tramo del cuadrado y luego sumaremos los resultados para obtener el trabajo efectuado en el viaje completo. Si el trabajo del recorrido completo es cero, la fuerza $\vec{F}$ es conservativa, y se puede representar mediante una función de energía potencial.

7.20 Un electrón se mueve alrededor de una espira cuadrada mientras sobre él actúa la fuerza $\vec{F} = Cx\hat{\jmath}$.



EJECUTAR: En el primer tramo, de (0, 0) a (L, 0), la fuerza siempre es perpendicular al desplazamiento, así que $\vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$, y el trabajo efectuado sobre el primer tramo es $W_1 = 0$. La fuerza tiene siempre el mismo valor $\vec{F} = CL\hat{\jmath}$ en el segundo tramo de (L, 0) a (L, L). El desplazamiento en este tramo es en la dirección $+y$, así que $d\vec{l} = dy\hat{\jmath}$ y

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = CL\hat{\jmath} \cdot dy\hat{\jmath} = CL\,dy$$

El trabajo efectuado en el segundo tramo es entonces

$$W_2 = \int_{(L,0)}^{(L,L)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{y=0}^{y=L} CL\,dy = CL\int_0^L dy = CL^2$$

En el tercer tramo, de (L, L) a (0, L), $\vec{F}$ es otra vez perpendicular al desplazamiento, de manera que $W_3 = 0$. La fuerza es cero en el tramo final, de (0, L) a (0, 0), así que $W_4 = 0$. Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ en el viaje completo es

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 0 + CL^2 + 0 + 0 = CL^2$$

Los puntos inicial y final son los mismos, pero el trabajo total de $\vec{F}$ no es cero. Se trata de una fuerza *no conservativa*; *no puede* representarse con una función de energía potencial.

EVALUAR: Puesto que W es positivo, la energía mecánica *aumenta* conforme el electrón viaja alrededor de la espira. Esto no es una curiosidad matemática; es una descripción muy simplificada de lo que sucede en una planta generadora de electricidad. Una espira de alambre se mueve en un campo magnético, el cual produce una fuerza no conservativa similar a la del ejemplo. Los electrones que se mueven en el alambre adquieren energía al dar vuelta a la espira, y esa energía se conduce a través de líneas de transmisión al consumidor. (Veremos cómo funciona esto en el capítulo 29, en el volumen 2).

Si el electrón viajara por la espira en sentido *horario*, la fuerza $\vec{F}$ no cambiaría, pero se invertiría la dirección de cada desplazamiento infinitesimal $d\vec{l}$. Por lo tanto, el trabajo tendría signo opuesto y, para el recorrido completo en sentido horario, sería $W = -CL^2$. Este comportamiento es distinto al de la fuerza de fricción no conservativa. El trabajo realizado por la fricción sobre un cuerpo que se desliza en cualquier dirección sobre una superficie estacionaria siempre es negativo, sea cual fuere la dirección del movimiento (véase el ejemplo 7.6 en la sección 7.1).

La ley de conservación de la energía

Las fuerzas no conservativas no pueden representarse en términos de energía potencial; sin embargo, podemos describir sus efectos en términos de energías distintas de la cinética y la potencial. Cuando un automóvil con frenos bloqueados se derrapa hasta detenerse, se calientan los neumáticos y el camino. La energía asociada a este cambio en el estado de los materiales se denomina **energía interna**. Cuando se eleva la temperatura de un cuerpo, aumenta su energía interna; si se reduce su temperatura, disminuye su energía interna.

Para captar el significado de la energía interna, consideremos un bloque que se desliza por una superficie áspera. Cuando se desliza, la fricción realiza trabajo *negativo* sobre el bloque, y el cambio de la energía interna del bloque y de la superficie es *positivo* (ambos se calientan). Experimentos meticulosos han demostrado que el aumento en la energía interna es *exactamente* igual al valor absoluto del trabajo efectuado por la fricción. Dicho de otro modo,

$$\Delta U_{int} = -W_{otras}$$

donde ΔU_{int} es el cambio de la energía interna. Si sustituimos esto en la ecuación (7.7) o (7.14), vemos que

$$K_1 + U_1 - \Delta U_{int} = K_2 + U_2$$

Si escribimos $\Delta K = K_2 - K_1$ y $\Delta U = U_2 - U_1$, podemos expresar finalmente esto como

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{int} = 0 \qquad \text{(ley de conservación de la energía)} \qquad (7.15)$$

7.21 Cuando se quema un litro de gasolina en el motor de un automóvil, libera 3.3×10^7 J de energía interna. Por lo tanto, $\Delta U_{int} = -3.3 \times 10^7$ J, donde el signo menos indica que disminuyó la cantidad de energía almacenada en la gasolina. Esa energía se convierte en energía cinética (para aumentar la rapidez del auto) o en energía potencial (para que el auto suba una cuesta).



Este trascendental enunciado, es la forma general de la **ley de conservación de la energía**. En un proceso determinado, las energías cinética, potencial e interna de un sistema pueden cambiar; pero la *suma* de todos esos cambios siempre es cero. Una disminución en una forma de energía se compensa con un aumento en las otras (figura 7.21). Si ampliamos nuestra definición de energía para incluir la energía interna, la ecuación (7.15) indica que: *la energía nunca se crea ni se destruye, solo cambia de forma.* No se ha observado aún una excepción a esta regla.

El concepto de trabajo desapareció en la ecuación (7.15); en cambio, sugiere que pensemos solo en términos de conversión de energía de una forma a otra. Por ejemplo, si lanzamos una pelota hacia arriba, convertimos parte de la energía interna de las moléculas de nuestro cuerpo en energía cinética de la pelota, que se convierte en energía potencial gravitacional conforme la pelota sube, y otra vez en energía cinética al bajar. Si hay resistencia del aire, parte de la energía calienta el aire y la pelota, aumentando su energía interna. La energía se convierte en la forma cinética cuando la pelota cae. Si atrapamos la pelota al caer, la energía que no se perdió en el aire se convertirá otra vez en energía interna; la pelota y su mano ahora están más calientes que al principio.

En los capítulos 19 y 20 estudiaremos la relación entre la energía interna, los cambios de temperatura, el calor y el trabajo. Este es el meollo del campo de la física llamado *termodinámica.*

Ejemplo 7.12 Trabajo efectuado por la fricción



Examinemos otra vez el ejemplo 7.5 de la sección 7.1, donde Morton baja en patineta una rampa curva. Su energía cinética inicial es cero, y la potencial es 735 J. En la parte inferior, su energía cinética es de 450 J y la potencial es cero; por lo tanto, $\Delta K = +450$ J y $\Delta U = -735$ J. El trabajo $W_{otras} = W_{fric}$ efectuado por las fuerzas de fricción es -285 J, por lo que el cambio en la energía interna es $\Delta U_{int} = -W_{otras} = +285$ J. Las ruedas y los cojinetes de la patineta, y también la rampa, se calientan un poco. Según la ecuación (7.15), la suma de los cambios de energía es cero:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{int} = +450\text{ J} + (-735\text{ J}) + 285\text{ J} = 0$$

La energía total del sistema se conserva (incluidas las formas de energía internas y no mecánicas).

Evalúe su comprensión de la sección 7.3 En una hidroeléctrica, el agua que cae impulsa las turbinas (“ruedas de agua”), las cuales, a la vez, impulsan los generadores eléctricos. En comparación con la cantidad de energía potencial gravitacional liberada por el agua que cae, ¿cuánta energía eléctrica se produce? **i.** La misma; **ii.** más; **iii.** menos.



7.4 Fuerza y energía potencial

En los dos tipos de fuerzas conservativas (gravitacional y elástica) que hemos estudiado, comenzamos con una descripción del comportamiento de la *fuerza* y a partir de ello dedujimos una expresión para la *energía potencial*. Por ejemplo, para un cuerpo de masa m en un campo gravitacional uniforme, la fuerza gravitacional es $F_y = -mg$. Vimos que la energía potencial correspondiente es $U(y) = mgy$. Para estirar un resorte ideal una distancia x, ejercemos una fuerza igual a $+kx$. De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza que un resorte ideal ejerce sobre un cuerpo es opuesta, es decir, $F_x = -kx$. La función de energía potencial correspondiente es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

No obstante, en el estudio de la física, el lector encontrará situaciones donde se tiene una expresión de la *energía potencial* en función de la posición y se necesita determinar la *fuerza* correspondiente. Veremos varios ejemplos de este tipo cuando estudiemos las fuerzas eléctricas más adelante: en general, es mucho más fácil calcular primero la energía potencial eléctrica, y luego determinar la fuerza eléctrica correspondiente.

Veamos cómo calcular la fuerza que corresponde a una expresión de energía potencial dada. Primero, consideremos un movimiento rectilíneo sobre el eje x. Denotamos la componente x de la fuerza, que es función de x, con $F_x(x)$; y la energía potencial, con $U(x)$. Esta notación nos recuerda que tanto F_x como U son *funciones* de x. Ahora recordamos que, en cualquier desplazamiento, el trabajo W efectuado por una fuerza conservativa es el negativo del cambio ΔU de la energía potencial:

$$W = -\Delta U$$

Apliquemos esto a un pequeño desplazamiento Δx. El trabajo efectuado por $F_x(x)$ durante este desplazamiento es aproximadamente igual a $F_x(x)\,\Delta x$. Decimos “aproximadamente” porque $F_x(x)$ podría variar un poco en el intervalo Δx; pero, en general, es verdad que

$$F_x(x)\,\Delta x = -\Delta U \qquad \text{y} \qquad F_x(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

Probablemente ya se imagina usted hacia dónde vamos. Tomaremos el límite $\Delta x \to 0$; en este límite, la variación de F_x es despreciable y tenemos la relación exacta

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad \text{(fuerza a partir de la energía potencial, en una dimensión)} \tag{7.16}$$

Este resultado es lógico; en las regiones donde $U(x)$ cambia más rápidamente con x (es decir, donde $dU(x)/dx$ es grande), se efectúa el trabajo máximo durante un desplazamiento dado, y esto corresponde a una magnitud grande de fuerza. Además, si $F_x(x)$ está en la dirección $+x$, $U(x)$ *disminuye* al aumentar x. De esta manera, $F_x(x)$ y $dU(x)/dx$ deben tener signos opuestos. El significado físico de la ecuación (7.16) es que *una fuerza conservativa siempre trata de llevar el sistema a una energía potencial menor*.

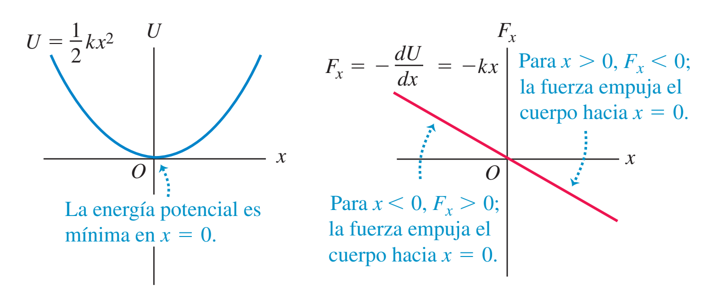
Como verificación, consideremos la función de la energía potencial elástica, $U(x) = kx^2$. Si sustituimos esto en la ecuación (7.16) se produce:

$$F_x(x) = -\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

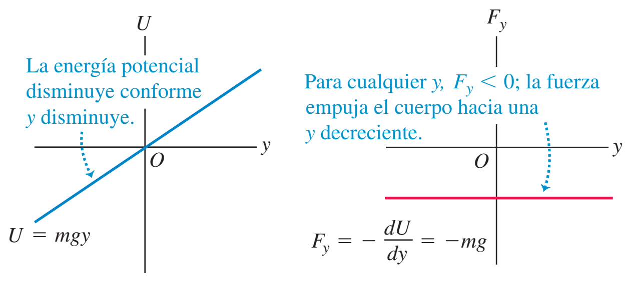
que es la expresión correcta para la fuerza ejercida por un resorte ideal (figura 7.22*a*). Asimismo, tenemos $U(y) = mgy$ para la energía potencial gravitacional; teniendo cuidado de cambiar x a y en la elección del eje, tenemos que $F_y = -dU/dy = -d(mgy)/dy = -mg$, que es la expresión correcta para la fuerza gravitacional (figura 7.22*b*).

7.22 Una fuerza conservativa es el negativo de la derivada de la energía potencial correspondiente.

a) Energía potencial y fuerza del resorte en función de x



b) La energía potencial y la fuerza gravitacionales en función de y



Ejemplo 7.13 Fuerza eléctrica y su energía potencial

Una partícula con carga eléctrica se mantiene en reposo en $x = 0$; mientras otra con carga idéntica puede moverse libremente en el eje $+x$. La energía potencial del sistema es $U(x) = C/x$, donde C es una constante positiva que depende de la magnitud de las cargas. Deduzca una expresión para la componente x de fuerza que actúa sobre la partícula móvil, en función de su posición.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Tenemos la función de energía potencial $U(x)$, y buscamos la función de la fuerza correspondiente usando la ecuación (7.16), $F_x(x) = -dU(x)/dx$.

EJECUTAR: La derivada de $1/x$ con respecto a x es $-1/x^2$, así que la fuerza sobre la partícula móvil con carga para $x > 0$ es

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -C\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{C}{x^2}$$

EVALUAR: La componente x de fuerza es positiva, y corresponde a una interacción de repulsión entre cargas eléctricas iguales. Tanto la energía potencial como la fuerza son muy grandes cuando las partículas están muy juntas (x es pequeña), y ambas se vuelven menores conforme las partículas se alejan una de otra (x es grande); la fuerza empuja a la partícula móvil hacia valores positivos grandes de x, donde la energía potencial es menor. (Estudiaremos más a fondo las fuerzas eléctricas en el capítulo 21, en el volumen 2).

Fuerza y energía potencial en tres dimensiones

Es posible extender este análisis a tres dimensiones, donde la partícula puede moverse en las direcciones x, y, z o todas a la vez, bajo la acción de una fuerza conservativa con componentes F_x, F_y y F_z. Cada componente de la fuerza puede ser función de las coordenadas x, y y z. La función de energía potencial U también es función de las tres coordenadas espaciales. Ahora podemos usar la ecuación (7.16) para calcular cada componente de la fuerza. El cambio de energía potencial ΔU cuando la partícula se mueve una distancia pequeña Δx en la dirección x está dada otra vez por $-F_x\,\Delta x$; no depende de F_y ni de F_z, que representan las componentes de fuerza perpendiculares al desplazamiento y que no efectúan trabajo. Tenemos de nuevo la relación aproximada

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

Las componentes de fuerza y y z se determinan exactamente de la misma forma:

$$F_y = -\frac{\Delta U}{\Delta y} \qquad F_z = -\frac{\Delta U}{\Delta z}$$

Para hacer que las relaciones sean exactas, tomamos los límites $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ y $\Delta z \to 0$ para que estos cocientes se conviertan en derivadas. Puesto que U puede ser función de las tres coordenadas, debemos recordar que, al calcular las derivadas, solo una coordenada cambia a la vez. Calculamos la derivada de U con respecto a x suponiendo que y y z son constantes y solo x varía, etcétera. Estas derivadas se llaman

derivadas parciales y su notación habitual es $\partial U/\partial x$, y así sucesivamente; el símbolo ∂ es una d modificada, por lo que escribimos

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \qquad \text{(fuerza a partir de la energía potencial)} \tag{7.17}$$

Podemos usar vectores unitarios para escribir una expresión vectorial compacta única para la fuerza $\vec{F}$:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) \quad \text{(fuerza a partir de la energía potencial)} \tag{7.18}$$

La expresión entre paréntesis representa una operación específica de la función U, donde se obtiene la derivada parcial de U con respecto a cada coordenada, se multiplica por el vector unitario correspondiente y se suma vectorialmente. Esta operación se denomina **gradiente** de U y suele abreviarse $\vec{\nabla}U$. Por lo tanto, la fuerza es el negativo del gradiente de la función de energía potencial:

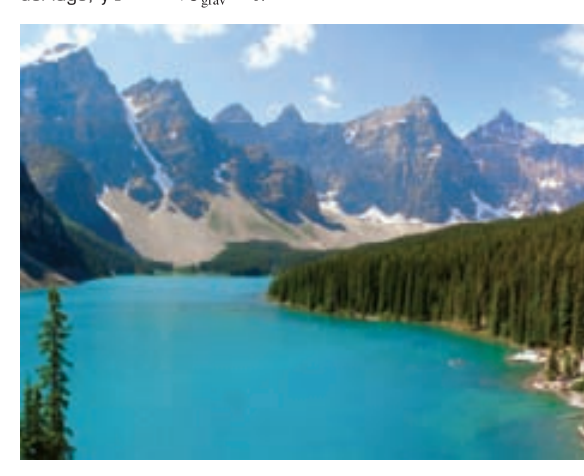
$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \tag{7.19}$$

Para comprobar, sustituyamos en la ecuación (7.19) la función $U = mgy$ para la energía potencial gravitacional:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(mgy) = -\left(\frac{\partial(mgy)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial(mgy)}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial(mgy)}{\partial z}\hat{k}\right) = (-mg)\hat{\jmath}$$

Esta es la expresión que ya conocemos para la fuerza gravitacional.

Aplicación Topografía y gradiente de energía potencial
Cuanto mayor es la elevación de un excursionista en el Parque Nacional Banff de Canadá, mayor es la energía potencial U_{grav}. Visualice un eje x horizontal que va de oeste a este, y un eje y que va de sur a norte. Entonces la función $U_{\text{grav}}(x, y)$ representa la elevación en función de la posición en el parque. Donde las pendientes de las montañas son muy pronunciadas, $\vec{F} = -\vec{\nabla}U_{\text{grav}}$ tiene una magnitud grande y hay una fuerza intensa que empuja al excursionista por la superficie de la montaña hacia una región de menor elevación (y por consiguiente, de menor U_{grav}). No existe ninguna fuerza sobre la superficie del lago, y esta tiene la misma elevación. Por lo tanto, U_{grav} es constante en todos los puntos de la superficie del lago, y $\vec{F} = -\vec{\nabla}U_{\text{grav}} = \mathbf{0}$.





Ejemplo 7.14 Fuerza y energía potencial en dos dimensiones

Un disco de hockey se desliza sobre una mesa horizontal de aire, sin fricción; sus coordenadas son x y y, y sobre él actúa una fuerza conservativa descrita por la función de energía potencial

$$U(x, y) = \tfrac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

Obtenga una expresión vectorial para la fuerza que actúa sobre el disco y encuentre una expresión para la magnitud de la fuerza.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Al empezar con la función $U(x, y)$, necesitamos obtener las componentes vectoriales y la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ correspondiente. Obtendremos las componentes empleando la ecuación (7.18). La función U no depende de z, así que la derivada parcial de U con respecto a z es $\partial U/\partial z = 0$ y la fuerza no tiene componente z; luego determinaremos la magnitud F de la fuerza empleando la fórmula $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$.

EJECUTAR: Las componentes x y y de $\vec{F}$ son

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -ky$$

De acuerdo con la ecuación (7.18), la expresión vectorial de la fuerza es

$$\vec{F} = (-kx)\hat{\imath} + (-ky)\hat{\jmath} = -k(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath})$$

La magnitud de la fuerza es

$$F = \sqrt{(-kx)^2 + (-ky)^2} = k\sqrt{x^2 + y^2} = kr$$

EVALUAR: Como $x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ es el vector de posición $\vec{r}$ de la partícula, podemos rescribir nuestro resultado como $\vec{F} = -k\vec{r}$. Esto representa una fuerza en dirección opuesta al vector de posición de la partícula, es decir, una fuerza dirigida hacia al origen, $r = 0$. Esta es la fuerza que se ejercería sobre el disco, si estuviera unido al extremo de un resorte que obedece la ley de Hooke y tiene longitud sin estirar despreciable en comparación con las demás distancias del problema. (El otro extremo está unido a la mesa de aire de hockey en el origen $r = 0$).

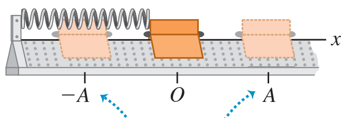
Para verificar el resultado, observe que $U = \tfrac{1}{2}kr^2$, donde $r^2 = x^2 + y^2$. Podemos calcular la fuerza a partir de esta expresión usando la ecuación (7.16) después de sustituir x por r:

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\tfrac{1}{2}kr^2\right) = -kr$$

Igual que en nuestro resultado anterior, la fuerza tiene magnitud kr; el signo menos indica que la fuerza está dirigida hacia el origen (en $r = 0$).

7.23 *a*) Deslizador sobre un riel de aire. El resorte ejerce una fuerza $F_x = -kx$.
b) Función de energía potencial.

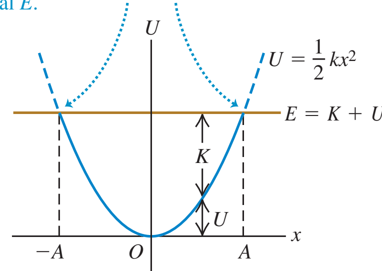
a)



Los límites del movimiento del deslizador están en $x = A$ y $x = -A$.

b)

En la gráfica, los límites del movimiento son los puntos donde la curva de U interseca la línea horizontal que representa la energía mecánica total E.



Aplicación Acróbatas en equilibrio
Cada uno de estos acróbatas se encuentra en equilibrio *inestable*. La energía potencial gravitacional es mínima sin importar hacia dónde se incline el acróbata. De modo que si este comienza a caer, continuará cayendo. Para permanecer en equilibrio, se requiere de la atención permanente del acróbata.



Evalúe su comprensión de la sección 7.4 Una fuerza conservativa F_x actúa sobre una partícula que se mueve a lo largo del eje x. En cierto punto, la fuerza es igual a cero. *a*) En ese punto, ¿cuál de los siguientes enunciados acerca del valor de la función de energía potencial $U(x)$ es correcto? **i.** $U(x) = 0$; **ii.** $U(x) > 0$; **iii.** $U(x) < 0$; **iv.** no hay información suficiente para decidir. *b*) En ese punto, ¿cuál de los siguientes enunciados acerca del valor de la derivada de $U(x)$ es correcto? **i.** $dU(x)/dx = 0$; **ii.** $dU(x)/dx > 0$; **iii.** $dU(x)/dx < 0$; **iv.** no hay información suficiente para decidir. ❙



7.5 Diagramas de energía

Cuando una partícula se mueve en línea recta bajo la acción de una fuerza conservativa, podemos entender mejor los movimientos posibles examinando la gráfica de la función de energía potencial $U(x)$. La figura 7.23*a* muestra un deslizador con masa m que se mueve en el eje x sobre un riel de aire. El resorte ejerce sobre él una fuerza de magnitud $F_x = -kx$. La figura 7.23*b* es la gráfica de la función de energía potencial correspondiente $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Si la fuerza elástica del resorte es la *única* fuerza horizontal que actúa sobre el deslizador, la energía mecánica total $E = K + U$ es constante e independiente de x. En ese caso, una gráfica de E en función de x es una recta horizontal. Empleamos el término **diagrama de energía** para una gráfica así, la cual muestra tanto la función de energía potencial $U(x)$ como la energía de la partícula, bajo la influencia de la fuerza, que corresponde a una energía potencial $U(x)$.

La distancia vertical entre las curvas de U y E en cada punto representa la diferencia $E - U$, y es igual a la energía cinética K en ese punto. Vemos que K es máxima en $x = 0$, y cero en los valores de x donde se cruzan las curvas, identificadas como A y $-A$ en el diagrama. Así, la rapidez v es máxima en $x = 0$ y cero en $x = \pm A$, los puntos del *máximo* desplazamiento posible desde $x = 0$ para un valor dado de la energía total E. La energía potencial U nunca puede ser mayor que la energía total E, pues entonces K tendría que ser negativa, lo cual es imposible. El movimiento es una oscilación entre los puntos $x = A$ y $x = -A$.

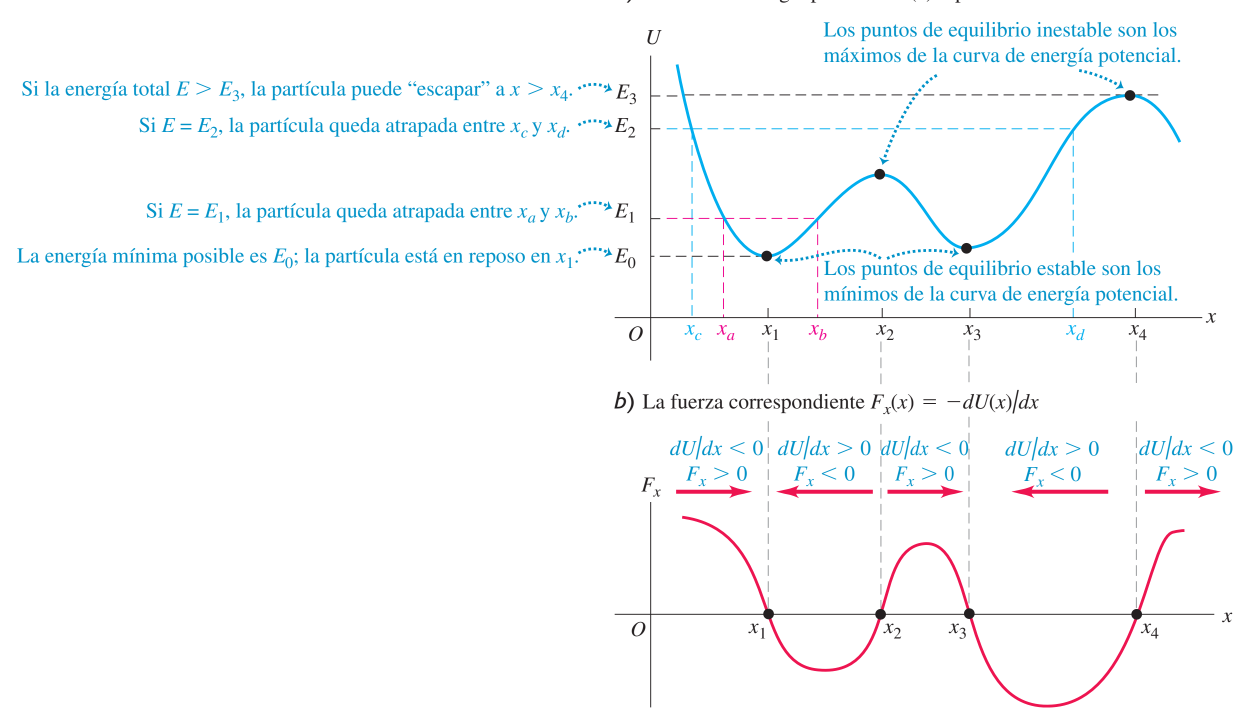
En cada punto, la fuerza F_x sobre el deslizador es igual al negativo de la pendiente de la curva $U(x)$: $F_x = -dU/dx$ (véase la figura 7.22*a*). Cuando la partícula está en $x = 0$, la pendiente y la fuerza son iguales a cero, y tenemos una posición de *equilibrio*. Si x es positiva, la pendiente de la curva de $U(x)$ es positiva y F_x es negativa, dirigida hacia el origen. Si x es negativa, la pendiente es negativa y F_x es positiva, otra vez hacia el origen. Una fuerza así se denomina *fuerza restauradora*; si el deslizador se desplaza hacia cualquier lado de $x = 0$, la fuerza tiende a "restaurarlo" a $x = 0$. Una situación parecida es una canica que rueda en una ensaladera de fondo redondo. Decimos que $x = 0$ es un punto de **equilibrio estable**. Más generalmente, *todo mínimo de una curva de energía potencial es una posición de equilibrio estable*.

La figura 7.24*a* muestra una función de energía potencial $U(x)$ hipotética, pero más general. La figura 7.24*b* ilustra la fuerza $F_x = -dU/dx$ correspondiente, donde x_1 y x_3 son puntos de equilibrio estable. En ellos, $F_x = 0$ porque la pendiente de la curva $U(x)$ es igual a cero. Si la partícula se desplaza hacia cualquier lado, la fuerza la empuja hacia el punto de equilibrio. La pendiente de la curva $U(x)$ también es cero en x_2 y x_4, que también son puntos de equilibrio. Sin embargo, cuando la partícula se desplaza un poco a la derecha de cualquiera de ellos, la pendiente de la curva de $U(x)$ se vuelve negativa, lo que corresponde a una F_x positiva que tiende a alejar más la partícula. Si esta se desplaza un poco a la izquierda, F_x es negativa y también tiende a alejar a la partícula del equilibrio. Esto es similar a una canica que rueda sobre la parte superior de una bola de bolos. Los puntos x_2 y x_4 se llaman puntos de **equilibrio inestable**; *todo máximo de una curva de energía potencial es una posición de equilibrio inestable*.

7.24 Las funciones máxima y mínima de energía potencial $U(x)$ corresponden a los puntos donde $F_x = 0$.







CUIDADO **Energía potencial y la dirección de una fuerza conservativa** La dirección de la fuerza sobre un cuerpo *no* está determinada por el signo de la energía potencial U; lo que importa es el signo de $F_x = -dU/dx$. Como vimos en la sección 7.1, la cantidad físicamente significativa es la *diferencia* en el valor de U entre dos puntos, y esto es lo que mide la derivada $F_x = -dU/dx$. Esto implica que siempre podemos agregar cualquier constante a la función de energía potencial sin alterar la física de la situación.

MasteringPHYSICS®
PhET: Energy Skate Park

Si la energía total es E_1 y la partícula está inicialmente cerca de x_1, solo puede moverse en la región entre x_a y x_b determinada por la intersección de las curvas de E_1 y U (figura 7.24*a*). De nuevo, U no puede ser mayor que E_1 porque K no puede ser negativa. Decimos que la partícula se mueve en un *pozo de potencial*, y x_a y x_b son los *puntos de retorno* de su movimiento (pues en ellos la partícula se detiene e invierte su dirección). Si aumentamos la energía total al nivel E_2, la partícula puede ampliar su movimiento, de x_c a x_d. Si la energía total es mayor que E_3, la partícula puede "escapar" y alcanzar valores indefinidamente grandes de x. En el otro extremo, E_0 representa la energía total mínima posible que el sistema puede tener.

Evalúe su comprensión de la sección 7.5 En la figura 7.24*b* la curva tiene un máximo en un punto entre x_2 y x_3. ¿Cuál enunciado describe correctamente lo que sucede a la partícula cuando se encuentra en ese punto? **i.** La aceleración de la partícula es cero. **ii.** La partícula acelera en la dirección $+x$; la magnitud de la aceleración es menor que en cualquier otro punto entre x_2 y x_3. **iii.** La partícula acelera en la dirección $+x$; la magnitud de la aceleración es mayor que en cualquier otro punto entre x_2 y x_3. **iv.** La partícula acelera en la dirección $-x$; la magnitud de la aceleración es menor que en cualquier otro punto entre x_2 y x_3. **v.** La partícula acelera en la direccion $-x$; la magnitud de la aceleración es mayor que en cualquier otro punto entre x_2 y x_3.

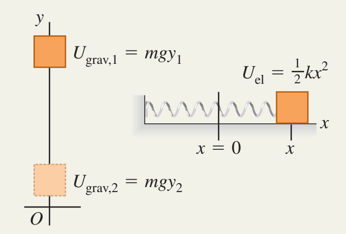
RESUMEN



Energía potencial gravitacional y energía potencial elástica: El trabajo efectuado sobre una partícula por una fuerza gravitacional constante puede representarse en términos de un cambio en la energía potencial gravitacional $U_{grav} = mgy$. Esta energía es una propiedad compartida de la partícula y la Tierra. La energía potencial también se asocia con la fuerza elástica $F_x = -kx$ ejercida por un resorte ideal, donde x es la distancia de estiramiento o de compresión. El trabajo efectuado por esta fuerza se representa como un cambio en la energía potencial elástica del resorte, $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$.

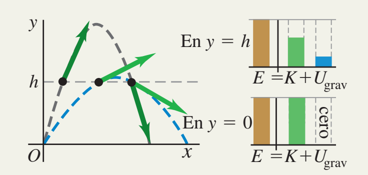
$$W_{grav} = mgy_1 - mgy_2 = U_{grav,1} - U_{grav,2} = -\Delta U_{grav} \quad (7.1), (7.3)$$

$$W_{el} = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 = U_{el,1} - U_{el,2} = -\Delta U_{el} \quad (7.10)$$



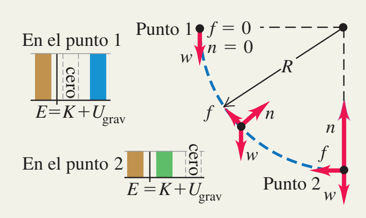
Cuándo se conserva la energía mecánica total: La energía potencial total U es la suma de las energías potenciales gravitacional y elástica: $U = U_{grav} + U_{el}$. Si solo fuerzas gravitacional y elástica realizan trabajo sobre una partícula, la suma de las energías cinética y potencial se conserva. Esta suma, $E = K + U$, se denomina energía mecánica total. (Véase los ejemplos 7.1, 7.3, 7.4 y 7.7).

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \quad (7.4), (7.11)$$



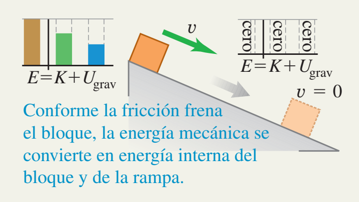
Cuándo no se conserva la energía mecánica total: Cuando fuerzas distintas de la gravitacional y la elástica efectúan trabajo sobre una partícula, el trabajo W_{otras} realizado por esas otras fuerzas es igual al cambio en la energía mecánica total (energía cinética más energía potencial total). (Véase los ejemplos 7.2, 7.5, 7.6, 7.8 y 7.9).

$$K_1 + U_1 + W_{otras} = K_2 + U_2 \quad (7.14)$$



Fuerzas conservativas, fuerzas no conservativas y la ley de conservación de la energía: Todas las fuerzas son conservativas o no conservativas. Una fuerza conservativa es aquella para la cual la relación trabajo-energía cinética es totalmente reversible. El trabajo de una fuerza conservativa siempre puede representarse mediante una función de energía potencial; no sucede lo mismo con el trabajo de una fuerza no conservativa. El trabajo realizado por fuerzas no conservativas se manifiesta como cambios en la energía interna de los cuerpos. La suma de las energías cinética, potencial e interna siempre se conserva. (Véase los ejemplos 7.10 a 7.12).

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{int} = 0 \quad (7.15)$$



Cálculo de la fuerza a partir de la energía potencial: En un movimiento rectilíneo, una fuerza conservativa $F_x(x)$ es la derivada negativa de la función de energía potencial U asociada a ella. En tres dimensiones, las componentes de una fuerza conservativa son las derivadas parciales negativas de U. (Véase los ejemplos 7.13 y 7.14).

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (7.16)$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (7.17)$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) \quad (7.18)$$

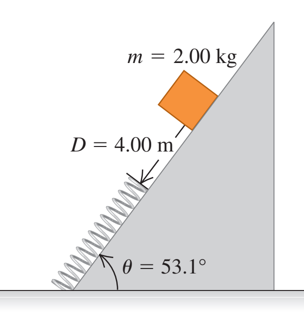
U
Equilibrios inestables
O
x
Equilibrios estables



PROBLEMA PRÁCTICO Resorte y fricción sobre un plano inclinado

Un paquete de 2.00 kg se suelta en un plano inclinado de 53.1°, a 4.00 m de un resorte largo, cuya constante de fuerza es de 1.20×10^2 N/m y está sujeto a la base del plano inclinado (figura 7.25). Los coeficientes de fricción entre el paquete y el plano inclinado son $\mu_s = 0.400$ y $\mu_k = 0.200$. La masa del resorte es despreciable. *a*) ¿Cuál es la compresión máxima del resorte? *b*) Al rebotar el paquete hacia arriba, ¿qué tanto se acerca a su posición inicial? *c*) ¿Cuál es el cambio en la energía interna del paquete y el plano inclinado a partir de que el paquete se libera, rebota y alcanza su altura máxima?

7.25 Situación inicial.



GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Este problema implica a la fuerza gravitacional, la fuerza del resorte y la fuerza de fricción, así como a la fuerza normal que actúa sobre el paquete. Como la fuerza del resorte no es constante, se deben usar métodos de energía. ¿La energía mecánica se conserva durante todo el movimiento? ¿Por qué?
2. Dibuje los diagramas de cuerpo libre del paquete cuando se desliza hacia abajo y hacia arriba del plano inclinado, incluyendo los ejes de coordenadas. (*Sugerencia:* Si elige que $x = 0$ se encuentre en el extremo del resorte sin comprimir, podrá usar $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$ para la energía potencial elástica del resorte).
3. Identifique los tres puntos críticos del movimiento del paquete: su posición inicial, su posición cuando llega al reposo con el resorte comprimido al máximo, y su posición máxima de rebote arriba del plano inclinado. (*Sugerencia:* Suponga que el paquete ya no está en contacto con el resorte en la última de estas posiciones. Si esto no es correcto, usted calculará un valor de x señalando que el resorte aún está parcialmente comprimido en ese punto).
4. Elabore una lista de las cantidades desconocidas e identifique cuáles de estas son las incógnitas.

EJECUTAR

5. Calcule la magnitud de la fuerza de fricción que actúa sobre el paquete. ¿La magnitud de esta fuerza depende de si el paquete se mueve hacia arriba o hacia abajo del plano inclinado, o depende de si el paquete está en contacto o no con el resorte? ¿La *dirección* de la fuerza normal depende de alguna de estas situaciones?
6. Escriba la ecuación general de energía para el movimiento del paquete entre los primeros dos puntos que identificó en el paso 3. Use esta ecuación para obtener la distancia que el resorte se comprime cuando el paquete está en el punto más bajo. (*Sugerencia:* Tendrá que resolver una ecuación cuadrática. Para identificar cuál de las dos soluciones de esta ecuación es la correcta, recuerde que la distancia que se comprime el resorte es positiva).
7. Escriba la ecuación general de energía para el movimiento del paquete entre el segundo punto y el tercero que identificó en el paso 3. Use esta ecuación para determinar la distancia que rebota el paquete.
8. Calcule el cambio de la energía interna durante el viaje de bajada y subida del paquete en el plano inclinado. Recuerde que el *aumento* de energía interna es igual a la *disminución* de la energía mecánica total.

EVALUAR

9. En el inciso *b*) la suposición de que el paquete no estaba en contacto con el resorte cuando alcanzó su altura máxima de rebote ¿era correcta?
10. Compruebe el resultado del inciso *c*) calculando el trabajo total realizado por la fuerza de fricción durante el recorrido completo. ¿Está de acuerdo con el resultado del paso 8?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P7.1 Se lanza una pelota de béisbol verticalmente hacia arriba con rapidez inicial v_0. Si no se ignora la resistencia del aire, cuando la pelota vuelva a su altura inicial su rapidez será menor que v_0. Explique esto usando conceptos de energía.

P7.2 Un proyectil tiene la misma energía cinética inicial sin importar su ángulo de lanzamiento. ¿Por qué no alcanza la misma altura máxima en todos los casos?

P7.3 Se deja caer un objeto, partiendo del reposo, de la parte superior de una rampa. Si la rampa no ejerce fricción, ¿la rapidez del objeto en la base de la rampa depende de la forma de la rampa o solo de su altura? Explique su respuesta. ¿Y cuando la rampa *sí* tiene fricción?

P7.4 Se deja caer un huevo a partir del reposo desde la azotea de un edificio al suelo. Un estudiante en la azotea observa la caída, y usa coordenadas con origen en la azotea; y otro estudiante en el suelo usa coordenadas con origen en el suelo. ¿Ambos estudiantes asignan valores iguales o diferentes a las energías potenciales gravitacionales inicial y final, al cambio de energía potencial gravitacional y a la energía cinética del huevo, justo antes de golpear el suelo? Explique su respuesta.

P7.5 Un profesor de física tenía una bola para jugar a los bolos colgada de una cuerda muy larga sujeta al techo muy alto de un aula grande. Para demostrar su fe en la conservación de la energía, retrocedía hasta un costado del estrado, tirando de la bola hasta que la cuerda

tensa la dejaba llegar justo a la punta de su nariz, y luego la soltaba. La pesada bola describía un gran arco sobre el estrado y regresaba, deteniéndose momentáneamente justo frente a la nariz del inmóvil e impávido profesor. Sin embargo, un día, después de la demostración, alzó la vista justo a tiempo para ver que un estudiante en el otro lado del estrado *empujaba* la bola después de tirar de ella hasta tenerla frente a su nariz, tratando de repetir la demostración. Termine de contar la historia y explique el posiblemente trágico desenlace.

P7.6 **¿Energía perdida?** El principio de conservación de la energía nos dice que la energía nunca se pierde, tan solo cambia de una forma a otra. Sin embargo, en muchas situaciones cotidianas, parece que se pierde energía. En cada caso, explique qué le ocurre a la energía "perdida". *a*) Una caja que se desliza por el piso se detiene a causa de la fricción. ¿De qué manera la fricción se lleva su energía cinética, y que le sucede a tal energía? *b*) Un automóvil se detiene cuando usted aplica los frenos. ¿Qué le ocurre a su energía cinética? *c*) La resistencia del aire consume algo de la energía potencial gravitacional de un objeto que cae. ¿En qué tipo de energía se convirtió la energía potencial "perdida"? *d*) Cuando un transbordador espacial toca tierra al regresar de su travesía, ha perdido casi toda su energía cinética y su energía potencial gravitacional. ¿A dónde se fue toda esa energía?

P7.7 ¿Una fuerza de fricción puede en algún caso *aumentar* la energía mecánica de un sistema? De ser así, mencione algunos ejemplos.

P7.8 Una clavadista rebota en un trampolín, subiendo un poco más alto cada rebote. Explique cómo aumenta la energía mecánica total.

P7.9 **Física fracturada.** A menudo las personas llaman recibo de *luz* a su recibo de electricidad, aun cuando la cantidad en la que se basa está expresada en *kilowatt-horas*. ¿Qué es lo que en realidad se cobra a las personas en el recibo?

P7.10 Una piedra de masa m y otra de masa $2m$ se sueltan desde el reposo a la misma altura sin que experimenten resistencia del aire durante la caída. ¿Qué enunciado sobre estas piedras es verdadero? (Puede haber más de una opción correcta). *a*) Ambas tienen la misma energía potencial gravitacional inicial. *b*) Ambas tienen la misma energía cinética cuando llegan al suelo. *c*) Ambas llegan al suelo con la misma rapidez. *d*) Cuando la piedra más pesada llega al suelo, tiene el doble de energía cinética que la más ligera. *e*) Cuando la piedra más pesada llega al suelo, tiene cuatro veces la energía cinética que la más ligera.

P7.11 En un estanque congelado sin fricción, un disco de hockey se oprime contra un resorte ideal fijo (sin estar sujeto a él), comprimiendo el resorte una distancia x_0. La energía máxima almacenada en el resorte es U_0, la rapidez máxima que el disco gana después de que se libera es v_0, y la energía cinética máxima es K_0. Ahora el disco se presiona de manera que comprime el resorte el doble en comparación con la situación anterior. En este caso, *a*) ¿cuál es la energía potencial máxima almacenada en el resorte (en términos de U_0)? *b*) ¿Cuáles son la energía cinética máxima y la rapidez (en términos de K_0 y de x_0) del disco?

P7.12 Cuando la gente siente frío, a menudo frota sus manos una contra la otra para calentarlas. ¿Cómo se produce calor al hacer esto? ¿De dónde proviene el calor?

P7.13 A menudo se escucha decir que, a final de cuentas, la mayor parte de la energía proviene del Sol. Rastree cada una de las siguientes energías hacia su origen en el Sol: *a*) la energía cinética de un avión a reacción; *b*) la energía potencial ganada por un alpinista; *c*) la energía eléctrica usada para hacer funcionar una computadora; *d*) la energía eléctrica de una planta hidroeléctrica.

P7.14 Una caja se desliza hacia abajo por una rampa, y las fuerzas de gravedad y de fricción realizan trabajo sobre ella. ¿El trabajo realizado por cada una de estas fuerzas puede expresarse en términos del cambio en una función de energía potencial? Para cada fuerza explique por qué.

P7.15 En términos físicos, explique por qué la fricción es una fuerza no conservativa. ¿Puede almacenar energía para su uso futuro?

P7.16 Un resorte atado en su posición comprimida se disuelve en ácido. ¿Qué pasa con su energía potencial?

P7.17 Puesto que solo los cambios en la energía potencial son importantes en cualquier problema, un estudiante decide tomar la energía potencial elástica de un resorte como cero, cuando el resorte está estirado una distancia x_1. Entonces, el estudiante decide que $U = \frac{1}{2}k(x - x_1)^2$. ¿Esto es correcto? Explique su respuesta.

P7.18 La figura 7.22*a* muestra la función de energía potencial para la fuerza $F_x = -kx$. Dibuje esa función para la fuerza $F_x = +kx$. Para esta fuerza, ¿$x = 0$ es un punto de equilibrio? ¿Es equilibrio estable o inestable? Explique su respuesta.

P7.19 La figura 7.22*b* muestra la función de energía potencial asociada con la fuerza gravitacional entre un objeto y la Tierra. Use esta curva para explicar por qué los objetos siempre caen hacia la Tierra al soltarse.

P7.20 En un sistema de dos partículas, solemos considerar que la energía potencial de la fuerza entre las partículas se acerca a cero cuando la separación entre ellas se acerca al infinito. En tal caso, explique por qué la energía potencial con una separación no infinita es positiva si las partículas se repelen, y negativa si se atraen.

P7.21 Explique por qué los puntos $x = A$ y $x = -A$ de la figura 7.23*b* se llaman *puntos de retorno*. ¿Cómo se relacionan los valores de E y U en un punto de retorno?

P7.22 Una partícula está en *equilibrio neutral* si la fuerza neta que actúa sobre ella es cero, y permanece igual a cero si la partícula se desplaza un poco en cualquier dirección. Dibuje la función de energía potencial cerca de un punto de equilibrio neutral, para el caso de movimiento unidimensional. Dé un ejemplo de un objeto en equilibrio neutral.

P7.23 La fuerza neta sobre una partícula de masa m tiene la función de energía potencial graficada en la figura 7.24*a*. Si la energía total es E_1, dibuje la curva de la rapidez v de la partícula contra su posición x. ¿En qué valor de x la rapidez es máxima? Dibuje v contra x si la energía total es E_2.

P7.24 función de energía potencial de una fuerza $\vec{F}$ es $U = \alpha x^3$, donde α es una constante positiva. ¿Qué dirección tiene $\vec{F}$?

EJERCICIOS

Sección 7.1 Energía potencial gravitacional

7.1 • En un día un alpinista de 75 kg asciende desde el nivel de 1500 m de un risco vertical hasta la cima a 2400 m. El siguiente día, desciende desde la cima hasta la base del risco, que está a una elevación de 1350 m. ¿Cuál es el cambio en su energía potencial gravitacional *a*) durante el primer día y *b*) durante el segundo día?

7.2 • BIO **¿A qué altura podemos saltar?** La altura máxima que un humano puede saltar, a partir de una posición en cuclillas, es de aproximadamente 60 cm. ¿En cuánto se incrementa la energía potencial gravitacional de una persona de 72 kg por este salto? ¿De dónde proviene esta energía?

7.3 •• PA Un saco de correo de 120 kg cuelga de una cuerda vertical de 3.5 m de longitud. Un trabajador de correos desplaza el saco a una posición lateral a 2.0 m de su posición original, manteniendo la cuerda tensa en todo momento. *a*) ¿Qué fuerza horizontal se necesita para mantener el saco en la nueva posición? *b*) Cuando el saco se mueve a esta posición, ¿cuánto trabajo realiza **i.** la cuerda y **ii.** el trabajador?

7.4 •• BIO **Calorías nutricionales.** La *caloría nutricional*, igual a 4186 J, es una medida de la energía que se libera cuando el cuerpo metaboliza el alimento. Cierta marca de una barra de frutas y cereal

contiene 140 calorías por barra. *a*) Si un excursionista de 65 kg come una de estas barras, ¿qué altura debe escalar para "eliminar" las calorías, suponiendo que toda la energía del alimento se utiliza solo en incrementar la energía potencial gravitacional? *b*) Si, como es normal, solo el 20% de las calorías nutricionales se convierte en energía mecánica, ¿cuál sería la respuesta del inciso *a*)? (*Nota:* En este y los demás problemas, suponemos que el 100% de las calorías nutricionales son absorbidas y utilizadas por el cuerpo. En realidad, esto no es verdad. La "eficiencia metabólica" de una persona es el porcentaje de calorías ingeridas que realmente se usan; el resto es eliminado por el cuerpo. La eficiencia metabólica varía considerablemente de una persona a otra).

7.5 • Se lanza una pelota de béisbol desde la azotea de un edificio de 22.0 m de altura con velocidad inicial de magnitud 12.0 m/s y dirigida con un ángulo de 53.1° sobre la horizontal. *a*) ¿Qué rapidez tiene la pelota justo antes de tocar el suelo? Use métodos de energía y desprecie la resistencia del aire. *b*) ¿Cuál es la respuesta del inciso *a*) si la velocidad inicial tiene un ángulo de 53.1° por *debajo* de la horizontal? *c*) Si se incluye el efecto de la resistencia del aire, ¿en qué inciso, *a*) o *b*), se obtiene la mayor rapidez?

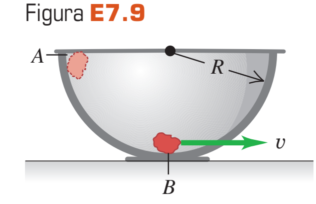
7.6 •• Una caja de masa M parte del reposo en la cima de una rampa sin fricción, inclinada con un ángulo α sobre la horizontal. Calcule su rapidez en la base de la rampa, a una distancia d desde donde inició. Obtenga la respuesta de dos maneras: *a*) Tome el nivel donde la energía potencial es cero como la base de la rampa con la dirección $+y$ hacia arriba. *b*) Tome el nivel cero para la energía potencial como la cima de la rampa con la dirección $+y$ hacia arriba. *c*) ¿Por qué no se tomó en cuenta la fuerza normal en la solución?

7.7 •• BIO **Energía de humanos contra energía de insectos.** Por su tamaño, la pulga común es uno de los saltadores mejor dotados del reino animal. Un ejemplar de 2.0 mm de longitud y 0.50 mg puede alcanzar una altura de 20 cm en un salto. *a*) Ignorando el arrastre del aire, ¿cuál es la velocidad de despegue de esta pulga? *b*) Calcule la velocidad cinética de la pulga en el despegue y su energía cinética por kilogramo de masa. *c*) Si un humano de 65 kg y 2.0 m de estatura pudiera saltar una altura comparada con su longitud igual a la que salta la pulga comparada con su longitud, ¿qué altura saltaría el humano y qué rapidez necesitaría en el despegue? *d*) De hecho, la mayoría de los humanos no pueden saltar más de 60 cm a partir de una posición en cuclillas. ¿Cuál es la energía cinética por kilogramo de masa en el despegue para esta persona de 65 kg? *e*) ¿Dónde almacena la pulga la energía que le permite realizar este salto repentino?

7.8 •• A una caja vacía se le da un empujón inicial hacia abajo de una rampa con rapidez inicial v_0, llegando a la base con rapidez v y energía cinética K. Se colocan unos libros en la caja, de modo que se cuadruplica la masa total. El coeficiente de fricción cinética es constante y la resistencia del aire es insignificante. Con la misma v_0 en la parte superior de la rampa, ¿qué rapidez y energía cinética tendría ahora la caja al llegar a la parte inferior? Explique su razonamiento.

7.9 •• PA Una piedra pequeña con masa de 0.20 kg se libera del reposo en el punto A, que se encuentra en el borde de un tazón hemisférico grande de radio $R = 0.50$ m (figura E7.9). Suponga que la piedra es pequeña en comparación con R, así que puede tratarse como partícula, y suponga que la piedra se desliza en lugar de rodar. El trabajo efectuado por la fricción sobre la piedra al bajar del punto A al punto B en la base del tazón es de 0.22 J. *a*) Entre los puntos A y B, ¿cuánto trabajo es efectuado sobre la piedra por **i.** la fuerza normal y **ii.** la fuerza de gravedad? *b*) ¿Qué rapidez tiene la piedra al llegar a B? *c*) De las tres fuerzas que actúan sobre la piedra cuando se desliza hacia abajo del tazón, ¿cuáles (si es que hay) son constantes y cuáles no lo son? Explique su respuesta. *d*) Justo cuando la piedra llega al punto B, ¿cuál es la fuerza normal sobre ella en el fondo del tazón?

Figura **E7.9**



7.10 •• BIO **Fracturas de huesos.** La energía máxima que un hueso puede absorber sin romperse depende de características como su área transversal y su elasticidad. Se ha encontrado que esta energía medida en los huesos de las piernas, de 6.0 cm^2 de área transversal, de humanos saludables es de alrededor de 200 J. *a*) ¿Aproximadamente de qué altura máxima puede saltar una persona de 60 kg y caer de manera rígida sobre ambos pies sin romperse las piernas? *b*) Probablemente le sorprenderá la pequeña magnitud de la respuesta del inciso *a*). Desde luego, la gente salta de alturas mucho mayores sin romperse las piernas. ¿Cómo es posible? ¿Qué más absorbe energía cuando un individuo salta de mayores alturas? (*Sugerencia:* Pregúntese lo siguiente. ¿Cómo aterrizó la persona del inciso *a*)? ¿Cómo aterriza normalmente la gente cuando salta de grandes alturas?). *c*) A la luz de las respuestas de los incisos *a*) y *b*), ¿cuál podría ser una de las razones por las que los adultos mayores son mucho más propensos que los jóvenes a fracturarse los huesos con una simple caída (como una caída en el baño)?

7.11 •• Imagine que, en un parque de diversiones, usted está probando una nueva montaña rusa con un carrito vacío de 120 kg de masa. Una parte de la vía es un rizo vertical con radio de 12.0 m. En la parte inferior del rizo (punto A), el carrito tiene rapidez de 25.0 m/s; y en la parte superior (punto B), de 8.0 m/s. ¿Cuánto trabajo efectúa la fricción cuando el carrito rueda del punto A al B?

7.12 • **Tarzán y Jane.** Tarzán, se encuentra en un árbol y ve a Jane en otro árbol. Él toma el extremo de una liana de 20 m que forma un ángulo de 45° con la vertical, se deja caer de la rama del árbol y describe un arco hacia abajo para llegar a los brazos de Jane. En este punto, su liana forma un ángulo de 30° con la vertical. Calcule la rapidez de Tarzán justo antes de llegar adonde está Jane para determinar si la abrazará tiernamente o la tirará de la rama. Ignore la resistencia del aire y la masa de la liana.

7.13 •• PA Un horno de microondas de 10.0 kg se empuja para subirlo 8.00 m por la superficie de una rampa inclinada a 36.9° sobre la horizontal, aplicando una fuerza constante $\vec{F}$ de magnitud 110 N, que actúa paralela a la rampa. El coeficiente de fricción cinética entre el horno y la rampa es de 0.250. *a*) ¿Qué trabajo realiza la fuerza $\vec{F}$ sobre el horno? *b*) ¿Qué trabajo realiza la fuerza de fricción sobre el horno? *c*) Calcule el aumento en la energía potencial del horno. *d*) Use las respuestas de los incisos *a*), *b*) y *c*) para calcular el aumento en la energía cinética del horno. *e*) Use $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ para calcular la aceleración del horno. Suponiendo que el horno parte del reposo, use la aceleración para calcular la rapidez del horno después de recorrer 8.00 m. Calcule con esto el aumento en la energía cinética del horno y compare su respuesta con la del inciso *d*).

Sección 7.2 Energía potencial elástica

7.14 •• Un resorte ideal de masa despreciable tiene 12.00 cm de longitud cuando nada se une a él. Cuando usted cuelga un peso de 3.15 kg del resorte, mide una longitud de 13.40 cm. Si usted quisiera almacenar 10.0 J de energía potencial en este resorte, ¿cuál sería su longitud *total*? Suponga que sigue cumpliendo la ley de Hooke.

7.15 •• Una fuerza de 800 N estira cierto resorte una distancia de 0.200 m. *a*) ¿Qué energía potencial tiene el resorte cuando se estira 0.200 m? *b*) ¿Y cuando se le comprime 5.00 cm?

7.16 • BIO **Tendones.** Los tendones, como una aproximación razonable que cumple con la ley de Hooke, son fibras elásticas resistentes que sujetan los músculos a los huesos. En pruebas de laboratorio sobre un tendón particular, se encontró que, cuando un objeto de 250 g cuelga de él, el tendón se estira 1.23 cm. *a*) Calcule la constante de fuerza

de este tendón en N/m. *b*) Debido a su espesor, la tensión máxima que este tendón puede soportar sin romperse es de 138 N. ¿Cuánto puede estirarse el tendón sin romperse, y cuánta energía se almacena en ese punto?

7.17 • Un resorte almacena energía potencial U_0 cuando se comprime una distancia x_0 desde su longitud sin comprimir. *a*) En términos de U_0, ¿cuánta energía almacena el resorte cuando se comprime **i.** el doble de la distancia y **ii.** la mitad de la distancia? *b*) En términos de x_0, ¿cuánto debe comprimirse desde su longitud sin comprimir para almacenar **i.** el doble de energía y **ii.** la mitad de energía?

7.18 • Una resortera dispara una piedra pequeña de río de 10 g una distancia de 22.0 m verticalmente hacia arriba. *a*) ¿Cuánta energía potencial se almacenó en la banda de caucho de la resortera? *b*) Con la misma energía potencial almacenada en la banda, ¿a qué altura puede dispararse una piedra de 25 g? *c*) ¿Qué efectos físicos ignoró al resolver este problema?

7.19 •• Un resorte de masa despreciable tiene una constante de fuerza $k = 1600$ N/m. *a*) ¿Qué tanto debe comprimirse para almacenar en él 3.20 J de energía potencial? *b*) El resorte se coloca verticalmente con un extremo en el piso, y se deja caer sobre él un libro de 1.20 kg desde una altura de 0.80 m. Determine la distancia máxima que se comprimirá el resorte.

7.20 • Un queso de 1.20 kg se coloca en un resorte vertical con masa despreciable y constante de fuerza $k = 1800$ N/m que está comprimido 15.0 cm. Cuando se suelta el resorte, ¿qué altura alcanza el queso sobre su posición original? (El queso y el resorte *no* están sujetos).

7.21 •• Considere el deslizador del ejemplo 7.7 (sección 7.2) y la figura 7.16. Igual que en el ejemplo, el deslizador se suelta del reposo con el resorte estirado 0.100 m. ¿Qué desplazamiento x tiene el deslizador con respecto a su posición de equilibrio cuando su rapidez es de 0.20 m/s? (Usted debe obtener más de una respuesta. Explique por qué).

7.22 •• Considere el deslizador del ejemplo 7.7 (sección 7.2) y la figura 7.16. *a*) Igual que en el ejemplo, el deslizador se suelta del reposo con el resorte estirado 0.100 m. ¿Qué rapidez tiene el deslizador cuando regresa a $x = 0$? *b*) ¿Qué desplazamiento inicial debe tener el deslizador para que su rapidez máxima en el movimiento subsiguiente sea de 2.50 m/s?

7.23 •• Una masa de 2.50 kg se empuja contra un resorte horizontal, cuya constante de fuerza es de 25.0 N/cm, sobre una mesa de aire sin fricción. El resorte está sujeto a la mesa, en tanto que la masa no está sujeta al resorte de ninguna manera. Cuando el resorte se comprime lo suficiente como para almacenar 11.5 J de energía potencial en él, la masa se libera repentinamente del reposo. *a*) Encuentre la rapidez máxima que alcanza la masa. ¿Cuándo ocurre? *b*) ¿Cuál es la aceleración máxima de la masa, y cuando ocurre?

7.24 •• *a*) ¿Qué rapidez tiene el elevador del ejemplo 7.9 (sección 7.2) después de haber bajado 1.00 m desde el punto 1 de la figura 7.17? *b*) ¿Qué aceleración tiene el elevador cuando está 1.00 m abajo del punto 1 de la figura 7.17?

7.25 •• Imagine que le piden diseñar un resorte que imparta a un satélite de 1160 kg una rapidez de 2.50 m/s relativa a un transbordador espacial en órbita. El resorte debe imprimir al satélite una aceleración máxima de 5.00g. La masa del resorte, la energía cinética de retroceso del transbordador y los cambios en la energía potencial gravitacional serán despreciables. *a*) ¿Qué constante de fuerza debe tener el resorte? *b*) ¿Qué distancia debe comprimirse el resorte?

7.26 •• Un bloque de 2.50 kg sobre un piso horizontal está sujeto a un resorte horizontal inicialmente comprimido 0.0300 m. El resorte tiene una constante de fuerza de 840 N/m. El coeficiente de fricción cinética entre el piso y el bloque es $\mu_k = 0.40$. El bloque y el resorte se liberan a partir del reposo y el bloque se desliza por el piso. ¿Cuál es la rapidez del bloque cuando ha recorrido una distancia de 0.0200 m a partir de su posición inicial? (En este punto el resorte está comprimido 0.0100 m).

Sección 7.3 Fuerzas conservativas y no conservativas

7.27 • Se tira de una caja de 10.0 kg, describiendo un círculo, usando un alambre horizontal sobre una superficie horizontal áspera, cuyo coeficiente de fricción cinética es de 0.250. Calcule el trabajo efectuado por la fricción durante un recorrido circular completo, si el radio es *a*) de 2.00 m y *b*) de 4.00 m. *c*) Con base en los resultados que acaba de obtener, ¿diría usted que la fricción es una fuerza conservativa o no conservativa? Explique su respuesta.

7.28 • Un reparador de azoteas de 75 kg sube por una escalera vertical de 7.0 m al techo plano de una casa. Después, camina 12 m sobre el techo, desciende por otra escalera vertical de 7.0 m y, por último, camina por el suelo regresando a su punto de partida. ¿Cuánto trabajo realizó sobre él la fuerza de gravedad *a*) cuando subió; *b*) cuando bajó; *c*) cuando caminó por el techo y por el suelo? *d*) ¿Cuál es el trabajo total efectuado por la gravedad sobre él durante todo el recorrido? *e*) Con base en su respuesta al inciso *d*), ¿diría usted que la gravedad es una fuerza conservativa o no conservativa? Explique su respuesta.

7.29 • Un libro de 0.60 kg se desliza sobre una mesa horizontal. La fuerza de fricción cinética que actúa sobre el libro tiene una magnitud de 1.2 N. *a*) ¿Cuánto trabajo realiza la fricción sobre el libro durante un desplazamiento de 3.0 m a la izquierda? *b*) Ahora el libro se desliza 3.0 m a la derecha, volviendo al punto inicial. Durante este segundo desplazamiento de 3.0 m, ¿qué trabajo efectúa la fricción sobre el libro? *c*) ¿Qué trabajo total efectúa la fricción sobre el libro durante el recorrido completo? *d*) Con base en su respuesta al inciso *c*), ¿diría que la fuerza de fricción es conservativa o no conservativa? Explique su respuesta.

7.30 •• **CALC** En un experimento, una de las fuerzas ejercidas sobre un protón es $\vec{F} = -\alpha x^2 \hat{\imath}$, donde $\alpha = 12$ N/m^2. *a*) ¿Cuánto trabajo efectúa cuando el protón se desplaza sobre la recta del punto (0.10 m, 0) al punto (0.10 m, 0.40 m)? *b*) ¿Y sobre la recta del punto (0.10 m, 0) al punto (0.30 m, 0)? *c*) ¿Y sobre la recta del punto (0.30 m, 0) al punto (0.10 m, 0)? *d*) ¿Es una fuerza $\vec{F}$ conservativa? Explique su respuesta. Si $\vec{F}$ es conservativa, ¿cuál es su función de energía potencial? Sea $U = 0$ cuando $x = 0$.

7.31 • Usted y tres amigos se encuentran de pie en las esquinas de un cuadrado de 8.0 m de lado, en medio del piso de un gimnasio, como se muestra en la figura E7.31. Usted toma su libro de física y lo empuja de una persona a otra. La masa del libro es de 1.5 kg y el coeficiente de fricción cinética entre el libro y el piso es $\mu_k = 0.25$. *a*) El libro se desliza de usted a Beth y luego de Beth a Carlos a lo largo de las líneas que conectan a estas personas. ¿Qué trabajo realiza la fricción durante este desplazamiento? *b*) Usted desliza el libro hacia Carlos a lo largo de la diagonal del cuadrado. ¿Qué trabajo realiza la fricción durante este desplazamiento? *c*) Usted desliza el libro a Kim, quien se lo devuelve. ¿Qué trabajo total realiza la fricción durante este movimiento del libro? *d*) ¿La fuerza de fricción sobre el libro es conservativa o no conservativa? Explique su respuesta.

Figura **E7.31**

7.32 • Cuando un reparador de azoteas trabaja en un techo inclinado 36° arriba de la horizontal, accidentalmente golpea con el codo su caja de herramientas de 85.0 N, provocando que se deslice hacia abajo, a partir del reposo. Si parte a 4.25 m del extremo inferior del techo, ¿a qué rapidez se moverá la caja de herramientas cuando llegue al extremo del techo si la fuerza de fricción cinética sobre ella es de 22.0 N?

7.33 •• Una esquiadora de 62.0 kg se desplaza a 6.50 m/s en una planicie horizontal, sin fricción, cubierta por la nieve, cuando encuentra una zona áspera de 3.50 m de longitud. El coeficiente de fricción cinética entre esta zona y sus esquíes es de 0.300. Después de cruzar la zona áspera y regresar a la nieve libre de fricción, esquía de bajada por una colina sin fricción, cubierta de hielo de 2.50 m de altura. *a*) ¿Con qué rapidez se desplaza la esquiadora cuando llega a la parte inferior de la colina? *b*) ¿Cuánta energía interna se generó al cruzar la zona áspera?

Sección 7.4 Fuerza y energía potencial

7.34 •• **CALC** La energía potencial de un par de átomos de hidrógeno separados una distancia grande x está dada por $U(x) = -C_6/x^6$, donde C_6 es una constante positiva. ¿Qué fuerza ejerce un átomo sobre el otro? ¿Esta fuerza es de atracción o de repulsión?

7.35 •• **CALC** Una fuerza paralela al eje x actúa sobre una partícula que se mueve sobre el eje x. La fuerza produce una energía potencial $U(x)$ dada por $U(x) = \alpha x^4$, donde $\alpha = 1.20 \text{ J/m}^4$. ¿Cuál es la fuerza (magnitud y dirección) cuando la partícula está en $x = -0.800$ m?

7.36 •• **CALC** Sobre un objeto que se mueve en el plano xy actúa una fuerza conservativa descrita por la función de energía potencial $U(x, y) = \alpha(1/x^2 + 1/y^2)$, donde α es una constante positiva. Deduzca una expresión para la fuerza expresada en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

7.37 •• **CALC** Un bloque pequeño con masa de 0.0400 kg se mueve en el plano xy. La fuerza neta sobre el bloque está descrita por la función de energía potencial $U(x, y) = (5.80 \text{ J/m}^2)x^2 - (3.60 \text{ J/m}^3)y^3$. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la aceleración del bloque cuando se encuentra en el punto $x = 0.300$ m, $y = 0.600$ m?

Sección 7.5 Diagramas de energía

7.38 • Una canica se mueve sobre el eje x. La función de energía potencial se muestra en la figura E7.38. *a*) ¿En cuál de las coordenadas x marcadas es cero la fuerza sobre la canica? *b*) ¿Cuál de esas coordenadas es una posición de equilibrio estable? *c*) ¿Y de equilibrio inestable?

Figura **E7.38**

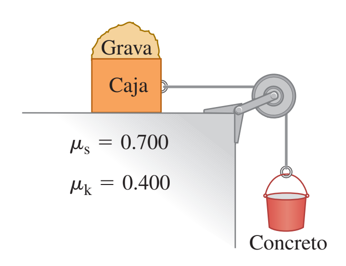
7.39 • **CALC** La energía potencial de dos átomos en una molécula diatómica se aproxima mediante la ecuación $U(r) = a/r^{12} - b/r^6$, donde r es la distancia entre los átomos y a y b son constantes positivas. *a*) Determine la fuerza $F(r)$ que actúa sobre un átomo en función de r. Elabore dos gráficas, una de $U(r)$ contra r y otra de $F(r)$ contra r. *b*) Encuentre la distancia de equilibrio entre los dos átomos. ¿Es estable el equilibrio? *c*) Suponga que los dos átomos están a la distancia de equilibrio obtenida en el inciso *b*). ¿Qué energía mínima debe agregarse a la molécula para *disociarla*, es decir, para separar los dos átomos una distancia infinita? Esta es la *energía de disociación* de la molécula. *d*) Para la molécula de CO, la distancia de equilibrio entre los átomos de carbono y oxígeno es de 1.13×10^{-10} m y la energía de disociación es de 1.54×10^{-18} J por molécula. Calcule los valores de las constantes a y b.

PROBLEMAS

7.40 •• Dos bloques con diferente masa están unidos a cada uno de los extremos de una cuerda ligera, la cual pasa por una polea ligera sin fricción que está suspendida del techo. Los bloques se sueltan desde el reposo y el más pesado comienza a descender. Una vez que este bloque ha descendido 1.20 m, su rapidez es de 3.00 m/s. Si la masa total de los dos bloques es de 15.0 kg, ¿qué masa tiene cada bloque?

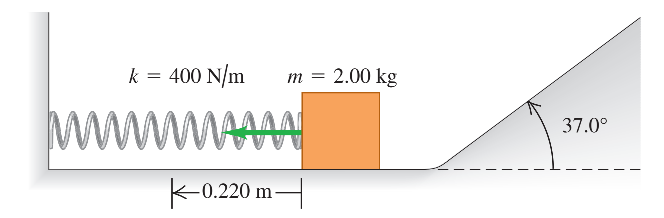
7.41 ••• En una obra en construcción, una cubeta de 65.0 kg de concreto cuelga de un cable ligero (pero resistente), que pasa por una polea ligera sin fricción y está conectada a una caja de 80.0 kg ubicada en un techo horizontal (figura P7.41). El cable tira horizontalmente de la caja y una bolsa de grava de 50.0 kg descansa sobre la parte superior de la caja. Se indican los coeficientes de fricción entre la caja y el techo. *a*) Obtenga la fuerza de fricción sobre la bolsa de grava y sobre la caja. *b*) Repentinamente un trabajador quita la bolsa de grava. Utilice la conservación de la energía para calcular la rapidez de la cubeta luego de que haya descendido 2.00 m partiendo del reposo. (Podrá verificar su respuesta resolviendo este problema utilizando las leyes de Newton).

Figura **P7.41**



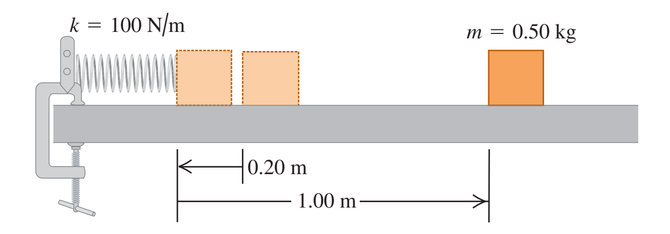
7.42 • Un bloque de 2.00 kg se empuja contra un resorte de masa despreciable y constante de fuerza $k = 400$ N/m, comprimiéndolo 0.220 m. Al soltarse el bloque, se mueve por una superficie sin fricción que primero es horizontal y luego sube a 37.0° (figura P7.42). *a*) ¿Qué rapidez tiene el bloque al deslizarse sobre la superficie horizontal después de separarse del resorte? *b*) ¿Qué altura sobre el plano inclinado alcanza el bloque antes de detenerse y regresar?

Figura **P7.42**



7.43 • Un bloque con masa de 0.50 kg se empuja contra un resorte horizontal de masa despreciable, comprimiéndolo 0.20 m (figura P7.43). Al soltarse, el bloque se mueve 1.00 m sobre una mesa horizontal antes de detenerse. La constante del resorte es $k = 100$ N/m. ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética μ_k entre el bloque y la mesa?

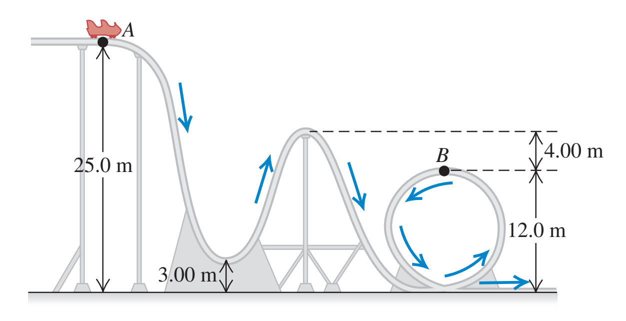
Figura **P7.43**



7.44 • En una superficie horizontal, una caja con masa de 50.0 kg se coloca contra un resorte que almacena 360 J de energía. El resorte se suelta y la caja se desliza 5.60 m antes de detenerse. ¿Qué rapidez tiene la caja cuando está a 2.00 m de su posición inicial?

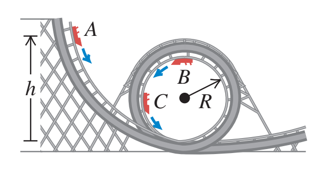
7.45 •• El carrito de 350 kg de una montaña rusa inicia su recorrido, partiendo del reposo, en el punto A y se desliza hacia un rizo vertical en una superficie sin fricción, como se muestra en la figura P7.45. *a*) ¿Con qué rapidez se mueve el carrito en el punto B? *b*) ¿Con qué fuerza se presiona contra las vías en el punto B?

Figura **P7.45**



7.46 •• **PA** **Recorrido por un rizo vertical.** El carrito de un juego en un parque de diversiones rueda sin fricción por la vía de la figura P7.46, y parte del reposo en A a una altura h arriba de la base del rizo. Trate el carrito como partícula. *a*) ¿Qué valor mínimo debe tener h (en términos de R) para que el carrito se desplace por el rizo sin caer en la parte superior (el punto B)? *b*) Si $h = 3.50R$ y $R = 20.0$ m, calcule la rapidez, aceleración radial y aceleración tangencial de los pasajeros cuando el carrito está en el punto C, en el extremo de un diámetro horizontal. Elabore un diagrama a escala aproximada de las componentes de la aceleración.

Figura **P7.46**



7.47 •• Un trozo de madera de 2.0 kg resbala por la superficie que se muestra en la figura P7.47. Los lados curvos son perfectamente lisos; pero la parte inferior horizontal tiene una longitud de 30 m y es áspera, con coeficiente de fricción cinética de 0.20 con la madera. El trozo de madera parte del reposo 4.0 m arriba del fondo áspero. *a*) ¿Dónde se detendrá finalmente este objeto? *b*) ¿Cuál es el trabajo total que realiza la fricción desde que se suelta la madera hasta que se detiene?

Figura **P7.47**



7.48 •• **Subir y bajar la colina.** Una roca de 28 kg se acerca al pie de una colina con rapidez de 15 m/s. La ladera de la colina tiene un ángulo constante de 40.0° sobre la horizontal. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre la colina y la roca son 0.75 y 0.20, respectivamente. *a*) Use la conservación de la energía para obtener la altura máxima por arriba del pie de la colina a la que subirá la roca. *b*) ¿La roca permanecerá en reposo en el punto más alto o se deslizará cuesta abajo? *c*) Si la roca resbala hacia abajo, calcule su rapidez cuando vuelva al pie de la colina.

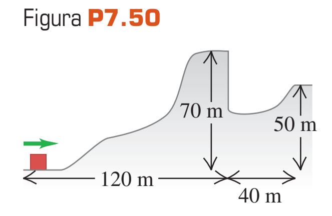
7.49 •• Una piedra de 15.0 kg baja deslizándose una colina nevada (figura P7.49), partiendo del punto A con una rapidez de 10.0 m/s. No hay fricción en la colina entre los puntos A y B, pero sí en el terreno plano de la parte inferior, entre B y la pared. Después de entrar en la región áspera horizontal, la piedra recorre 100 m y choca con un resorte muy largo y ligero, cuya constante de fuerza es de 2.00 N/m. Los coeficientes de fricción cinética y estática entre la piedra y el suelo horizontal son de 0.20 y 0.80, respectivamente. *a*) ¿Qué rapidez tiene la piedra al llegar al punto B? *b*) ¿Qué distancia comprimirá la piedra al resorte? *c*) ¿La piedra se moverá otra vez después de haber sido detenida por el resorte?

Figura **P7.49**

A
20 m
B
15 m
Zona áspera

7.50 •• **PA** Un bloque de 2.8 kg que se desliza remonta la colina lisa, cubierta de hielo, de la figura P7.50. La cima de la colina es horizontal y está 70 m más arriba que su base. ¿Qué rapidez mínima debe tener el bloque en la base de la colina para no quedar atrapado en el foso al otro lado de la colina?

Figura **P7.50**



7.51 ••• **Salto con *bungee*.** La cuerda de un *bungee* tiene 30.0 m de longitud y, cuando está estirada una distancia x, ejerce una fuerza restauradora de magnitud kx. Imagine que su suegro (cuya masa es de 95.0 kg) está de pie en una plataforma 45.0 m sobre el suelo, con un extremo del *bungee* atado firmemente a su tobillo (en tanto que el otro extremo está atado a la plataforma). Usted le prometió que, cuando se deje caer de la plataforma, caerá una distancia máxima de solo 41.0 m antes de que el *bungee* lo detenga. Usted tenía varias cuerdas de *bungee* para elegir y las probó atándolas a un árbol y estirándolas tirando del otro extremo con una fuerza de 380.0 N. Durante esas pruebas, ¿qué distancia se estirará el *bungee* que debe elegir?

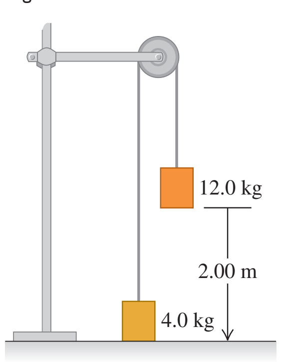
7.52 •• **Rampa de salto en esquí.** Imagine que está diseñando una rampa de salto en esquí para los siguientes Juegos Olímpicos de Invierno. Necesita calcular la altura vertical h desde la puerta de salida hasta la base de la rampa. Los esquiadores se empujan con vigor en la salida de modo que, por lo regular, tienen una rapidez de 2.0 m/s al llegar a la puerta de salida. Por cuestiones de seguridad, los esquiadores no deben tener una rapidez mayor que 30.0 m/s al llegar a la base de la rampa. Usted determina que, para un esquiador de 85.0 kg en buena condición física, la fricción y la resistencia del aire efectuarán en total 4000 J de trabajo sobre él durante su descenso. Determine la altura máxima h con la que no se excederá la máxima rapidez segura.

7.53 ••• El Gran Sandini es un cirquero de 60 kg que es disparado por un cañón de resorte. No son comunes los hombres de su complexión, así que usted le ayudará a diseñar un nuevo cañón, el cual tendrá un resorte muy grande de masa muy pequeña y constante de fuerza de 1100 N/m, que se comprimirá con una fuerza de 4400 N. El interior del cañón está recubierto con teflón, por lo que la fuerza de fricción media es de solo 40 N durante los 4.0 m que el cirquero se mueve dentro de él. ¿Con qué rapidez sale el cirquero del extremo del cañón, 2.5 m arriba de su posición inicial en reposo?

7.54 ••• Imagine que está diseñando una rampa de entrega para unas cajas que contienen equipo de gimnasio. Las cajas de 1470 N tendrán una rapidez de 1.8 m/s en la parte más alta de una rampa con pendiente de 22.0° hacia abajo. La rampa ejerce una fuerza de fricción cinética de 550 N sobre cada caja, y la fricción estática máxima también tiene este valor. Cada caja comprimirá un resorte en la base de la rampa y se detendrá después de recorrer una distancia total de 8.0 m sobre la rampa. Una vez detenidas, las cajas no deben rebotar de regreso. Calcule la constante de fuerza que debe tener el resorte para satisfacer los criterios de diseño.

7.55 •• Un sistema que consta de dos cubetas de pintura conectadas por una cuerda ligera se suelta del reposo con la cubeta de pintura de 12.0 kg a 2.00 m sobre el piso (figura P7.55). Use el principio de conservación de la energía para calcular la rapidez con que esta cubeta golpea el piso. Puede ignorar la fricción y la masa de la polea.

Figura **P7.55**



7.56 •• Un cohete de 1500 kg despega con una rapidez inicial ascendente de 50.0 m/s. Para ayudar a los motores, los ingenieros lo lanzarán desde el reposo sobre una rampa que se eleva 53° por arriba de la horizontal (figura P7.56). En la base, la rampa da vuelta hacia arriba y lanza el cohete verticalmente. Los motores proporcionan un empuje hacia adelante constante de 2000 N, y la fricción con la superficie de la rampa es una constante de 500 N. ¿A qué distancia de la base de la rampa medida a lo largo de la superficie debe empezar a deslizarse el cohete?

Figura **P7.56**

El cohete inicia aquí.
El cohete se lanza hacia arriba.
53°

7.57 • **Física legal.** En un accidente de tránsito, un automóvil golpeó a un peatón y luego el conductor pisó el freno para detener el auto. Durante el juicio, el abogado del conductor alegó que este había respetado el límite de rapidez de 35 mph que indicaban los letreros, pero que esa rapidez permitida era demasiado alta para que el conductor pudiera ver y reaccionar a tiempo ante el peatón. Imagine que el fiscal le llama como testigo experto. En la investigación del accidente observa que las marcas de derrape producidas durante el tiempo en que los frenos estaban aplicados tienen una longitud de 280 ft, y el dibujo de los neumáticos produjo un coeficiente de fricción cinética de 0.30 con el pavimento. *a*) En su testimonio en el juzgado, ¿dirá que el conductor conducía respetando el límite de rapidez? Usted deberá ser capaz de respaldar su conclusión con un razonamiento claro, porque es seguro que uno de los abogados lo someterá a un interrogatorio. *b*) Si la multa por exceso de rapidez fuera de $10 por cada mph más allá del límite de rapidez permitido, ¿el conductor tendría que pagar multa y, en tal caso, de cuánto sería?

7.58 ••• Un palo de madera con masa despreciable y longitud de 80.0 cm gira sobre un eje horizontal que pasa por su centro. Una rata blanca con masa de 0.500 kg se aferra a un extremo y un ratón con masa de 0.200 kg se aferra al otro extremo del palo, el cual está horizontal cuando el sistema se libera del reposo. Si los animales logran permanecer asidos, ¿qué rapidez tiene cada uno cuando el palo pasa por la posición vertical?

7.59 •• **PA** Una papa de 0.300 kg está atada a un hilo de 2.50 m, y el otro extremo está atado a un soporte rígido. La papa se sostiene con el hilo tensado horizontalmente y se suelta. *a*) ¿Qué rapidez tiene la papa en el punto más bajo de su movimiento? *b*) ¿Qué tensión hay en el hilo en ese punto?

7.60 •• Los siguientes datos son de una simulación por computadora de una pelota de béisbol de 0.145 kg al ser bateada, considerando la resistencia del aire:

t	x	y	v_x	v_y
0	0	0	30.0 m/s	40.0 m/s
3.05 s	70.2 m	53.6 m	18.6 m/s	0
6.59 s	124.4 m	0	11.9 m/s	−28.7 m/s

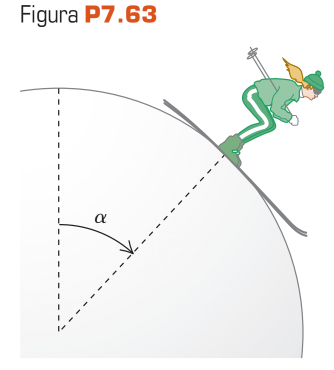
a) ¿Cuánto trabajo realizó el aire sobre la pelota al viajar esta de su posición inicial a su máxima altura? *b*) ¿Y al bajar de la altura máxima a la altura inicial? *c*) Explique por qué la magnitud del trabajo calculado en el inciso *b*) es menor que la del calculado en el inciso *a*).

7.61 •• **Bajando por un poste.** Un bombero de masa m parte del reposo y baja una distancia d deslizándose por un poste. Al final, él se mueve con tanta rapidez como si se hubiera dejado caer desde una plataforma de altura $h \leq d$ arriba del suelo, con resistencia del aire despreciable. *a*) ¿Qué fuerza de fricción media ejerció el bombero sobre el poste? ¿Es lógica su respuesta en los casos especiales de $h = d$ y $h = 0$? *b*) Calcule la fuerza de fricción promedio que ejerce un bombero de 75 kg si $d = 2.5$ m y $h = 1.0$ m. *c*) En términos de g, h y d, ¿qué rapidez tiene el bombero cuando está a una distancia y arriba de la base del poste?

7.62 •• Una esquiadora de 60.0 kg parte del reposo en la cima de una ladera de 65.0 m de altura. *a*) Si las fuerzas de fricción efectúan −10.5 kJ de trabajo sobre ella al descender, ¿qué rapidez tiene al pie de la ladera? *b*) Ahora, la esquiadora se mueve horizontalmente y cruza un tramo de nieve suave, donde $\mu_k = 0.20$. Si el tramo tiene 82.0 m de anchura y la fuerza promedio de la resistencia del aire que actúa sobre la esquiadora es de 160 N, ¿qué rapidez tiene ella después de cruzar esa zona? *c*) Ahora, la esquiadora choca contra un montón de nieve, penetrando 2.5 m antes de detenerse. ¿Qué fuerza promedio ejerce la nieve sobre ella al detenerla?

7.63 • **PA** Una esquiadora comienza su recorrido en la parte superior de una enorme bola de nieve sin fricción, con rapidez inicial muy pequeña, y baja esquiando por el costado (figura P7.63). ¿En qué punto pierde ella contacto con la bola de nieve y sigue una trayectoria tangencial? Es decir, en el instante en que ella pierde contacto con la nieve, ¿qué ángulo α forma con la vertical una línea radial que va del centro de la bola a la esquiadora?

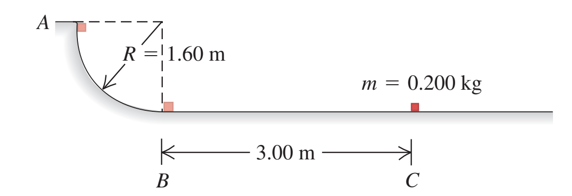
Figura **P7.63**



7.64 •• Se arroja una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 15 m/s a un ángulo de 60.0° arriba de la horizontal. Use la conservación de la energía para calcular la altura máxima de la pelota.

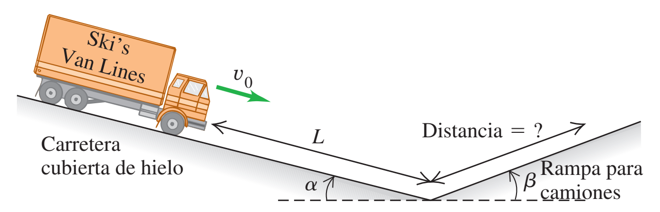
7.65 •• En un puesto de carga de camiones de una oficina de correos, un paquete pequeño de 0.200 kg se suelta del reposo en el punto A de una vía que forma un cuarto de círculo con radio de 1.60 m (figura P7.65). El paquete es mucho menor que 1.60 m, por lo que puede tratarse como una partícula. El paquete se desliza por la vía y llega al punto B con rapidez de 4.80 m/s. A partir de aquí, el paquete se desliza 3.00 m sobre una superficie horizontal hasta el punto C, donde se detiene. *a*) ¿Qué coeficiente de fricción cinética tiene la superficie horizontal? *b*) ¿Cuánto trabajo realiza la fricción sobre el paquete al deslizarse este por el arco circular entre A y B?

Figura **P7.65**



7.66 ••• Los frenos de un camión de masa m fallan al bajar por una carretera cubierta de hielo con un ángulo de inclinación α constante hacia abajo (figura P7.66). Inicialmente, el camión baja con rapidez v_0. Después de bajar una distancia L con fricción despreciable, el conductor guía el camión desbocado hacia una rampa de seguridad con ángulo β constante hacia arriba. La rampa tiene una superficie arenosa blanda donde el coeficiente de fricción por rodamiento es μ_r. ¿Qué distancia sube el camión por la rampa antes de detenerse? Use métodos de energía.

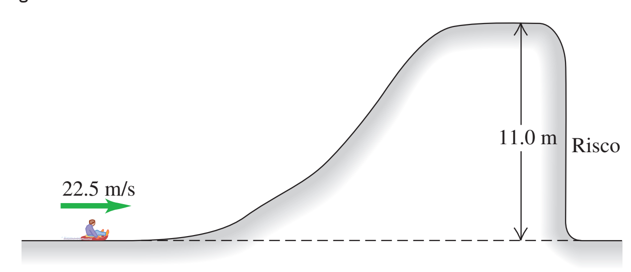
Figura **P7.66**



7.67 •• **CALC** Cierto resorte *no* obedece la ley de Hooke; ejerce una fuerza de restauración $F_x(x) = -\alpha x - \beta x^2$ si se estira o se comprime, donde $\alpha = 60.0$ N/m y $\beta = 18.0$ N/m^2. Se desprecia la masa del resorte. *a*) Calcule la función de energía potencial $U(x)$ del resorte. Sea $U = 0$ cuando $x = 0$. *b*) Un objeto con masa de 0.900 kg en una superficie horizontal sin fricción se une a este resorte, se tira de él hasta desplazarlo 1.00 m a la derecha (dirección $+x$) para estirar el resorte, y se suelta. ¿Qué rapidez tiene el objeto cuando está 0.50 m a la derecha de la posición de equilibrio $x = 0$?

7.68 •• **PA** Un trineo junto con su pasajero que tienen una masa combinada de 125 kg viaja sobre la superficie cubierta de hielo de una colina perfectamente lisa, como se muestra en la figura P7.68. ¿A qué distancia del pie del risco aterriza el trineo?

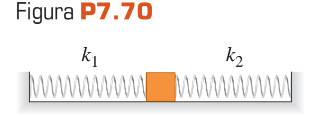
Figura **P7.68**



7.69 •• Un bloque de hielo de 0.150 kg se coloca contra un resorte horizontal comprimido montado en una mesa horizontal que está a 1.20 m sobre el piso. El resorte tiene una constante de fuerza de 1900 N/m, y está comprimido inicialmente 0.045 m. La masa del resorte es despreciable. El resorte se suelta y el bloque se desliza sobre la mesa, cae por el borde y se sigue deslizando por el piso. Si la fricción entre el hielo y la mesa es despreciable, ¿qué rapidez tiene el bloque al llegar al piso?

7.70 •• Un bloque de 3.00 kg está unido a dos resortes ideales horizontales, cuyas constantes de fuerza son $k_1 = 25.0$ N/cm y $k_2 = 20.0$ N/cm (figura P7.70). El sistema está inicialmente en equilibrio sobre una superficie horizontal sin fricción. Ahora el bloque se empuja 15.0 cm a la derecha y se suelta del reposo. *a*) ¿Cuál es la rapidez máxima del bloque? ¿En qué parte del movimiento se registra la rapidez máxima? *b*) ¿Cuál es la compresión máxima del resorte 1?

Figura **P7.70**



7.71 •• Un aparato experimental de masa m se coloca sobre un resorte vertical de masa despreciable y se empuja hasta comprimirlo una distancia x. El aparato se suelta y alcanza su altura máxima a una distancia h sobre el punto donde se soltó. El aparato no está unido al resorte, y ya no está en contacto con este al alcanzar la altura h. La magnitud de aceleración máxima que el aparato resiste sin dañarse es a, donde $a > g$. *a*) ¿Qué constante de fuerza debe tener el resorte? *b*) ¿Qué distancia x debe comprimirse el resorte inicialmente?

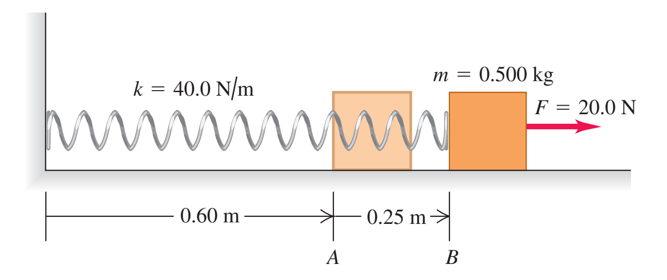
7.72 •• Si un pez se sujeta a un resorte vertical y se baja suavemente a su posición de equilibrio, el resorte se estira una distancia d. Si el mismo pez se sujeta al resorte no estirado y se deja caer desde el reposo, ¿cuánto llega a estirar el resorte? (*Sugerencia:* Calcule la constante de fuerza del resorte en términos de d y la masa m del pez).

7.73 ••• **CALC** Un pez de 3.00 kg está sujeto al extremo inferior de un resorte vertical de masa despreciable y constante de fuerza igual a 900 N/m. Inicialmente, el resorte no está comprimido ni estirado. Se suelta el pez a partir del reposo. *a*) ¿Cuál es la rapidez después de que ha descendido 0.0500 m a partir de su posición inicial? *b*) ¿Cuál es la máxima rapidez del pez durante el descenso?

7.74 •• Un cesto de peso despreciable cuelga verticalmente de una balanza de resorte que tiene una constante de fuerza de 1500 N/m. *a*) Si repentinamente se coloca en el cesto un ladrillo de 3.0 kg, calcule la distancia máxima que el resorte se estira. *b*) Si en vez de ello, usted suelta el ladrillo 1.0 m por arriba del cesto, ¿cuál será la elongación máxima del resorte?

7.75 • Un bloque de 0.500 kg unido a un resorte de 0.60 m y constante de fuerza $k = 40.0$ N/m está en reposo con su cara posterior en el punto A de una mesa horizontal de aire sin fricción (figura P7.75). La masa del resorte es despreciable. Se tira del bloque a la derecha de la superficie con una fuerza horizontal constante de 20.0 N. *a*) ¿Qué rapidez tiene el bloque cuando su cara posterior llega al punto B, que está 0.25 m a la derecha del punto A? *b*) El bloque se suelta cuando la cara posterior del mismo alcanza el punto B. En el movimiento subsiguiente, ¿qué tanto se acerca el bloque a la pared a la que está sujeto el extremo izquierdo del resorte?

Figura **P7.75**



7.76 •• **Física estudiantil.** Los miembros del club universitario Iota Eta Pi construyen una plataforma apoyada en cuatro resortes verticales en las esquinas, en el sótano del club. Usando un casco protector, un miembro valiente se pone de pie en medio de la plataforma; su peso comprime los resortes 0.18 m. Otros cuatro estudiantes, empujando hacia abajo las esquinas de la plataforma, comprimen los resortes 0.53 m más, hasta que la parte superior del casco del valiente queda 0.90 m abajo del techo del sótano, y simultáneamente sueltan la plataforma. Ignore las masas de los resortes y de la plataforma. *a*) Cuando el polvo se disipa,

le piden calcular la rapidez del valiente justo antes de que su casco choque contra el frágil techo. *b*) Si no hubiera techo, ¿qué altura habría alcanzado el estudiante? *c*) En el análisis de la prueba, el decano de estudiantes sugiere que la próxima vez mejor intenten el ejercicio en exteriores y en otro planeta. ¿Cambiaría la respuesta del inciso *b*) si la travesura se hubiera efectuado en otro planeta con un valor de g distinto? Suponga que los estudiantes empujan la plataforma 0.53 m igual que antes. Explique su razonamiento.

7.77 ••• PA Un bloque pequeño con masa de 0.0500 kg se desliza en un círculo vertical de radio $R = 0.800$ m en el interior de una pista circular. No existe fricción entre la pista y el bloque. En la parte inferior de la trayectoria del bloque, la fuerza normal que la pista ejerce sobre el bloque tiene una magnitud de 3.40 N. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza normal que la pista ejerce sobre el bloque cuando se encuentra en la parte superior de su trayectoria?

7.78 ••• PA Un bloque pequeño con masa de 0.0400 kg se desliza en un círculo vertical de radio $R = 0.500$ m en el interior de una pista circular. En una de las revoluciones, cuando el bloque se encuentra en la parte inferior de su trayectoria, el punto A, la magnitud de la fuerza normal ejercida por la pista sobre el bloque tiene una magnitud de 3.95 N. En la misma revolución, cuando el bloque alcanza la parte superior de su trayectoria, el punto B, la magnitud de la fuerza normal ejercida sobre el bloque es de 0.680 N. ¿Cuánto trabajo realiza la fricción sobre el bloque cuando este se desplaza del punto A al punto B?

7.79 •• Una presa hidroeléctrica tiene detrás un lago con área superficial de 3.0×10^6 m^2 y costados verticales bajo el nivel del agua, el cual está 150 m arriba de la base de la presa. Cuando el agua pasa por las turbinas en la base de la presa, su energía mecánica se convierte en energía eléctrica con eficiencia del 90%. *a*) Si la energía potencial gravitacional se toma como cero en la base de la presa, ¿cuánta energía hay almacenada en el metro superior del agua del lago? La densidad del agua es de 1000 kg/m^3. *b*) ¿Qué volumen de agua deberá pasar por la presa para generar 1000 kilowatts-hora de energía eléctrica? ¿Qué distancia baja el nivel de agua del lago cuando esa cantidad de agua pasa por la presa?

7.80 •• CALC ¿Cuánta energía total está almacenada en el lago del problema 7.79? Igual que en ese problema, sea cero la energía potencial gravitacional en la base de la presa. Exprese su respuesta en joules y en kilowatts-hora. (*Sugerencia:* Divida el lago en capas horizontales infinitesimales con espesor dy e integre para obtener la energía potencial total).

7.81 ••• Un bloque de madera con masa de 1.50 kg se coloca contra un resorte comprimido en la base de una pendiente de 30.0° (punto A). Al soltarse el resorte, el bloque sube por la pendiente. En el punto B, 6.00 m pendiente arriba de A, el bloque tiene una rapidez de 7.00 m/s dirigida pendiente arriba y ya no está en contacto con el resorte. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la pendiente es $\mu_k = 0.50$. La masa del resorte es despreciable. Calcule la energía potencial almacenada inicialmente en el resorte.

7.82 •• PA Péndulo. Una piedrita de 0.12 kg está atada a un hilo sin masa de 0.80 m de longitud, formando un péndulo simple que oscila con un ángulo máximo de 45° con la vertical. La resistencia del aire es despreciable. *a*) ¿Qué rapidez tiene la piedra cuando el hilo pasa por la posición vertical? *b*) ¿Qué tensión hay en el hilo cuando forma un ángulo de 45° con la vertical? *c*) ¿Y cuando pasa por la vertical?

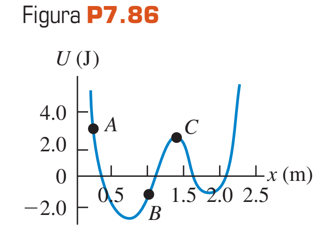
7.83 ••• CALC Varias fuerzas actúan sobre una cortadora controlada por un microprocesador. Una es $\vec{F} = -\alpha x y^2 \hat{\jmath}$, que tiene la dirección $-y$ y cuya magnitud depende de la posición de la cortadora. La constante es $\alpha = 2.50$ N/m^3. Considere el desplazamiento de la cortadora desde el origen hasta el punto $x = 3.00$ m, $y = 3.00$ m. *a*) Calcule el trabajo efectuado sobre la cortadora por $\vec{F}$ si el desplazamiento sigue la recta $y = x$ que conecta los dos puntos. *b*) Calcule el trabajo efectuado sobre la cortadora por $\vec{F}$ suponiendo ahora que esta se mueve primero sobre el eje x hasta $x = 3.00$ m, $y = 0$ y, luego, se mueve paralela al eje y hasta $x = 3.00$ m, $y = 3.00$ m. *c*) Compare el trabajo realizado por $\vec{F}$ siguiendo las dos trayectorias. ¿$\vec{F}$ es conservativa o no conservativa? Explique su respuesta.

7.84 • CALC *a*) ¿La fuerza $\vec{F} = Cy^2\hat{\jmath}$, donde C es una constante negativa dada en N/m^2, es conservativa o no conservativa? Justifique su respuesta. *b*) ¿La fuerza $\vec{F} = Cy^2\hat{\imath}$, donde C es una constante negativa dada en N/m^2, es conservativa o no conservativa? Justifique su respuesta.

7.85 •• CALC Varias fuerzas actúan sobre un objeto. Una es $\vec{F} = \alpha x y \hat{\imath}$, que tiene la dirección x y cuya magnitud depende de la posición del objeto. (Véase el problema 6.98). La constante es $\alpha = 2.00$ N/m^2. El objeto sigue esta trayectoria: **1.** Parte del origen y se mueve por el eje y hasta el punto $x = 0$, $y = 1.50$ m; **2.** se mueve paralelo al eje x hasta el punto $x = 1.50$ m, $y = 1.50$ m; **3.** se mueve paralelo al eje y hasta el punto $x = 1.50$ m, $y = 0$; **4.** se mueve paralelo al eje x volviendo al origen. *a*) Dibuje la trayectoria en el plano xy. *b*) Calcule el trabajo realizado por $\vec{F}$ sobre el objeto en cada tramo y en el recorrido completo "de ida y vuelta". *c*) ¿$\vec{F}$ es conservativa o no conservativa? Explique su respuesta.

7.86 • Una partícula se mueve a lo largo del eje x y sobre ella actúa una sola fuerza conservativa paralela al eje x. Tal fuerza corresponde a la función de energía potencial graficada en la figura P7.86. La partícula se suelta del reposo en el punto A. *a*) ¿Qué dirección tiene la fuerza sobre la partícula en A? *b*) ¿Y en B? *c*) ¿En qué valor de x es máxima la energía cinética de la partícula? *d*) ¿Qué fuerza actúa sobre la partícula en C? *e*) ¿Qué valor máximo de x alcanza la partícula durante su movimiento? *f*) ¿Qué valor o valores de x corresponden a puntos de equilibrio estable? *g*) ¿Y de equilibrio inestable?

Figura **P7.86**



PROBLEMA DE DESAFÍO

7.87 ••• CALC Un protón de masa m se mueve en una dimensión. La función de energía potencial es $U(x) = \alpha/x^2 - \beta/x$, donde α y β son constantes positivas. El protón se libera del reposo en $x_0 = \alpha/\beta$. *a*) Demuestre que $U(x)$ puede escribirse como

$$U(x) = \frac{\alpha}{x_0^2}\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - \frac{x_0}{x}\right]$$

Grafique $U(x)$. Calcule $U(x_0)$, ubicando así el punto x_0 en la gráfica. *b*) Calcule $v(x)$, la rapidez del protón en función de la posición. Grafique $v(x)$ y describa el movimiento cualitativamente. *c*) ¿Para qué valor de x es máxima la rapidez del protón? ¿Cuál es el valor de esa rapidez máxima? *d*) ¿Qué fuerza actúa sobre el protón en el inciso *c*)? *e*) Si ahora el protón se libera en $x_1 = 3\alpha/\beta$, ubique x_1 en la gráfica de $U(x)$. Calcule $v(x)$ y describa cualitativamente el movimiento. *f*) En cada caso de protón liberado ($x = x_0$ y $x = x_1$), ¿qué valores máximos y mínimos de x se alcanzan durante el movimiento?

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

La energía cinética K del pato permanece constante porque la rapidez es la misma, pero la energía potencial gravitacional U_{grav} disminuye conforme el pato desciende. De modo que la energía mecánica total $E = K + U_{grav}$ disminuye. La energía mecánica perdida se transforma en calentamiento en la piel del pato (es decir, en un aumento de su energía interna), y en turbulencia del aire a través del cual pasa el pato (un incremento en la energía interna del aire). Véase el análisis de la sección 7.3.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

7.1 Respuesta: iii. La energía cinética inicial $K_1 = 0$, la energía potencial inicial $U_1 = mgy_1$ y la energía potencial final $U_2 = mgy_2$ son las mismas para ambos bloques. La energía mecánica se conserva en ambos casos, así que la energía cinética final $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$ también es la misma para ambos bloques. Por lo tanto, ¡la rapidez en el extremo derecho es la *misma* en ambos casos!
7.2 Respuesta: iii. El elevador aún se mueve hacia abajo, de manera que la energía cinética K es positiva (recuerde que K nunca puede ser negativa); el elevador está debajo del punto 1, así que $y < 0$ y $U_{grav} < 0$; y el resorte se comprime, por lo que $U_{el} > 0$.
7.3 Respuesta: iii. A causa de la fricción en las turbinas y entre el agua y las turbinas, algo de la energía potencial se pierde al calentar el agua y el mecanismo.
7.4 Respuestas: *a*) iv, *b*) i. Si $F_x = 0$ en un punto, la derivada de $U(x)$ en ese punto debe ser cero porque $F_x = -dU(x)/dx$. Sin embargo, esto no nos dice absolutamente nada acerca del *valor* de $U(x)$ en ese punto.
7.5 Respuesta: iii. La figura 7.24*b* muestra la componente de fuerza F_x. Donde esta tiene su valor máximo (más positivo), la componente x de la fuerza y la aceleración x tienen valores más positivos que en los valores adyacentes de x.

Problema práctico

Respuestas: ***a*)** 1.06 m
***b*)** 1.32 m
***c*)** 20.7 J

MOMENTO LINEAL, IMPULSO Y COLISIONES

8



? ¿Qué podría causar un daño más grande a esta zanahoria: una bala calibre .22 que se mueve a 220 m/s como se muestra aquí, o una bala más ligera de la misma longitud y diámetro pero de la mitad de la masa que se mueve al doble de velocidad?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- El significado de momento lineal de una partícula y cómo el impulso de la fuerza neta que actúa sobre una partícula hace que su momento lineal varíe.
- Las condiciones en las que el momento lineal total de un sistema de partículas es constante (es decir, se conserva).
- A resolver problemas en los que dos cuerpos colisionan entre sí.
- La diferencia entre choques elásticos, inelásticos y totalmente inelásticos.
- La definición del centro de masa de un sistema y lo que determina la forma en que se mueve el centro de masa.
- Cómo analizar situaciones, como la propulsión de un cohete, en las cuales la masa de un cuerpo cambia conforme se mueve.

Hay muchas preguntas relacionadas con fuerzas que no pueden contestarse aplicando directamente la segunda ley de Newton, $\sum\vec{F} = m\vec{a}$. Por ejemplo, si una camioneta choca de frente con un auto compacto, ¿qué determina hacia dónde se mueven los restos después del choque? Cuando usted juega billar, ¿cómo determina la dirección que debe dar a la bola blanca para introducir la bola 8 en la buchaca? Y cuando un meteorito choca contra la Tierra, ¿qué tanta de la energía cinética del meteorito se libera en el impacto?

Algo que tienen en común todas estas preguntas es que implican fuerzas acerca de las que sabemos muy poco: las fuerzas que actúan entre el auto y la camioneta, entre las dos bolas de billar, o entre el meteorito y la Tierra. Lo sobresaliente es que en este capítulo veremos que ¡no necesitamos saber *nada* acerca de estas fuerzas para contestar preguntas de este tipo!

Nuestro enfoque utiliza dos conceptos nuevos, *momento lineal* e *impulso*, y una nueva ley de conservación, la de *conservación del momento lineal*, tan importante como la de conservación de la energía. La ley de conservación del momento lineal es válida aun en situaciones en las que las leyes de Newton son inadecuadas, tales como cuerpos que se mueven con una rapidez muy alta (cercana a la de la luz) u objetos muy pequeños (como las partículas que constituyen los átomos). En el ámbito de la mecánica newtoniana, la conservación del momento lineal nos permite analizar muchas situaciones que serían muy difíciles si tratáramos de aplicar las leyes de Newton directamente. Entre ellas están los *choques*, en los que dos cuerpos ejercen, uno sobre el otro, fuerzas muy grandes en un lapso muy breve.

8.1 Momento lineal e impulso

En el capítulo 6 replanteamos la segunda ley de Newton para una partícula, $\sum\vec{F} = m\vec{a}$, en términos del teorema del trabajo y la energía, el cual nos ayudó a resolver muchos problemas de física y nos condujo a la ley de conservación de la energía. Volvamos a $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ y veamos otra forma útil de reformular esta ley fundamental.

Segunda ley de Newton en términos del momento lineal

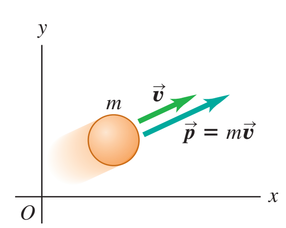
Consideremos una partícula de masa constante m. (Más adelante, en este mismo capítulo, veremos cómo manejar situaciones en las que la masa de un cuerpo cambia). Puesto que $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, podemos escribir la segunda ley de Newton para esta partícula así:

$$\sum \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \tag{8.1}$$

Podemos introducir m en la derivada porque es constante. Así, la segunda ley de Newton dice que la fuerza neta $\sum \vec{F}$ que actúa sobre una partícula es igual a la rapidez de cambio de la combinación $m\vec{v}$, el producto de la masa por la velocidad de la partícula. Llamamos a esta combinación **momento lineal** (o **cantidad de movimiento**) de la partícula, el cual se representa con el símbolo $\vec{p}$ así que

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \text{(definición de momento lineal)} \tag{8.2}$$

8.1 Vectores de velocidad y de momento lineal de una partícula.



El momento lineal $\vec{p}$ es una cantidad vectorial; el momento lineal de una partícula tiene la misma dirección que su velocidad $\vec{v}$.

Cuanto mayores son la masa m y la rapidez v de una partícula, mayor será la magnitud de su momento lineal mv. Sin embargo, tenga en mente que el momento lineal es una cantidad *vectorial* con la misma dirección que la velocidad de la partícula (figura 8.1). De esta forma, un automóvil que viaja al norte a 20 m/s y un automóvil idéntico que viaja al este a 20 m/s tienen la misma *magnitud* de momento lineal (mv), pero diferentes *vectores* de momento lineal ($m\vec{v}$) porque sus direcciones son distintas.

A menudo expresamos el momento lineal de una partícula en términos de sus componentes. Si la partícula tiene componentes de velocidad v_x, v_y y v_z, entonces sus componentes de momento lineal p_x, p_y y p_z (a las que también llamamos *momento lineal x*, *momento lineal y* y *momento lineal z*) están dadas por

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z \tag{8.3}$$

Estas tres ecuaciones de componentes son equivalentes a la ecuación (8.2).

Las unidades de la magnitud del momento lineal son las de masa por rapidez; las unidades del SI para momento lineal son kg·m/s.

Si ahora sustituimos la definición de momento lineal, ecuación (8.2), en la ecuación (8.1), tenemos

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{(segunda ley de Newton en términos de momento lineal)} \tag{8.4}$$

La fuerza neta (suma vectorial de todas las fuerzas) que actúa sobre una partícula es igual a la rapidez de cambio del momento lineal de la partícula. Esta, y no $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, es la forma en que Newton planteó originalmente su segunda ley (aunque él llamó *momentum* al momento lineal), y solo es válida en marcos de referencia inerciales.

Según la ecuación (8.4), un cambio rápido de momento lineal requiere una fuerza neta grande, mientras que un cambio gradual de momento lineal requiere una fuerza neta menor. Este principio se usa en el diseño de dispositivos de seguridad para automóviles como las bolsas de aire (figura 8.2).

8.2 Si un automóvil que se desplaza con gran rapidez se detiene súbitamente en un choque, el momento lineal del conductor (masa por velocidad) se reduce de un valor alto a cero en un breve lapso. Una bolsa de aire hace que el conductor pierda momento lineal más gradualmente que si se impactara en forma abrupta contra el volante; esto reduce la fuerza ejercida sobre el conductor y, por lo tanto, la posibilidad de resultar lesionado.



Teorema del impulso y el momento lineal

El momento lineal de una partícula, $\vec{p} = m\vec{v}$ y su energía cinética, $K = \frac{1}{2}mv^2$ dependen de la masa y la velocidad de la partícula. ¿Cuál es la diferencia fundamental entre estas cantidades? Una respuesta puramente matemática es que el momento lineal es un vector cuya magnitud es proporcional a la rapidez, mientras que la energía cinética es un escalar proporcional al cuadrado de la rapidez. Sin embargo, para ver la diferencia *física* entre momento lineal y energía cinética, necesitamos definir primero una cantidad íntimamente relacionada con el momento lineal: el *impulso*.

Consideremos primero una partícula sobre la que actúa una fuerza neta *constante* $\sum\vec{F}$ durante un tiempo Δt, de t_1 a t_2. (Veremos el caso de fuerzas variables dentro de poco). El **impulso** de la fuerza neta, denotado con $\vec{J}$, se define como el producto de la fuerza neta por el intervalo de tiempo:

$$\vec{J} = \sum\vec{F}(t_2 - t_1) = \sum\vec{F}\,\Delta t \quad \text{(suponiendo una fuerza neta constante)} \tag{8.5}$$

El impulso es una cantidad vectorial; su dirección es la de la fuerza neta $\sum\vec{F}$, y su magnitud es el producto de la magnitud de la fuerza neta por el tiempo en que esta actúa. Las unidades de impulso en el SI son newton-segundo (N·s). Puesto que 1 N = 1 kg·m/s^2, otras unidades para el impulso son kg·m/s, las mismas del momento lineal.

Para ver para qué nos sirve el impulso, volvamos a la segunda ley de Newton planteada en términos de momento lineal, ecuación 8.4. Si la fuerza neta $\sum\vec{F}$ es constante $d\vec{p}/dt$ también es constante. En tal caso, $d\vec{p}/dt$ es igual al cambio *total* de momento lineal $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$ durante el lapso $t_2 - t_1$, dividido entre dicho lapso:

$$\sum\vec{F} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1}$$

Si multiplicamos esta ecuación por $(t_2 - t_1)$, tenemos

$$\sum\vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

Al comparar esto con la ecuación (8.5), obtenemos un resultado conocido como **teorema del impulso y el momento lineal**:

$$\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad \text{(teorema del impulso y el momento lineal)} \tag{8.6}$$

El cambio del momento lineal de una partícula durante un intervalo de tiempo es igual al impulso de la fuerza neta que actúa sobre la partícula durante ese intervalo.

El teorema del impulso y el momento lineal también se cumple si las fuerzas no son constantes. Para comprobarlo, integramos los dos miembros de la segunda ley de Newton $\sum\vec{F} = d\vec{p}/dt$ con respecto al tiempo entre los límites t_1 y t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum\vec{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt}\,dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

La integral de la izquierda es, por definición, el impulso $\vec{J}$ de la fuerza neta $\sum\vec{F}$ durante este intervalo:

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \sum\vec{F}\,dt \quad \text{(definición general de impulso)} \tag{8.7}$$

Con esta definición, el teorema del impulso y el momento lineal $\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$, ecuación (8.6), es válido aun si la fuerza neta $\sum\vec{F}$ varía con el tiempo.

Podemos definir una fuerza neta *media* $\vec{F}_{\text{med}}$ tal que, aun si $\sum\vec{F}$ no es constante, el impulso $\vec{J}$ esté dado por

$$\vec{J} = \vec{F}_{\text{med}}(t_2 - t_1) \tag{8.8}$$

Si $\sum\vec{F}$ es constante, $\sum\vec{F} = \vec{F}_{\text{med}}$ y la ecuación (8.8) se reduce a la ecuación (8.5).

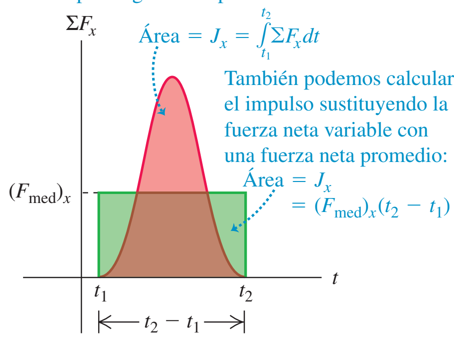
La figura 8.3*a* muestra una gráfica de la componente x de la fuerza neta $\sum F_x$ en función del tiempo durante un choque. Esto podría representar la fuerza sobre un balón que está en contacto con el pie de un futbolista entre los tiempos t_1 y t_2. La componente x del impulso durante ese intervalo está representada por el área roja bajo la curva entre t_1 y t_2. Esta área es igual al área rectangular verde delimitada por t_1, t_2 y

Aplicación Impulso del pájaro carpintero
Al pájaro carpintero (*Dryocopus pileatus*) se le conoce por golpear su pico contra los árboles hasta 20 veces por segundo y hasta 12,000 veces en un día. La fuerza de impacto es de hasta 1200 veces el peso de la cabeza del ave. Como el impacto dura un tiempo corto, el impulso —es decir, el producto de la fuerza neta durante el impacto multiplicado por la duración del mismo— es relativamente pequeño. (El pájaro carpintero tiene un cráneo grueso de hueso esponjoso y un cartílago para absorber el impacto, ubicado en la base de la mandíbula inferior, para evitar cualquier daño).

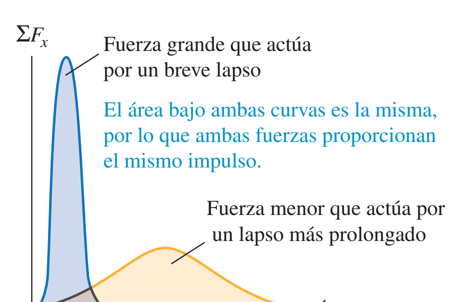


8.3 Significado del área roja bajo una gráfica de $\sum F_x$ contra t.

a)



b)



$(F_{med})_x$, así que $(F_{med})_x(t_2 - t_1)$ es igual al impulso de la fuerza variable real durante el mismo intervalo. Observe que una fuerza grande que actúa durante un breve tiempo puede tener el mismo impulso que una fuerza menor que actúa por un tiempo más prolongado, si las áreas bajo las curvas fuerza-tiempo son iguales (figura 8.3*b*). En estos términos, una bolsa de aire de un automóvil (véase la figura 8.2) proporciona el mismo impulso al conductor que el volante o el tablero, pero aplicando una fuerza menos intensa y menos dañina durante un tiempo más prolongado.

Tanto el impulso como el momento lineal son vectores, y las ecuaciones (8.5) a (8.8) son vectoriales. En problemas específicos, suele ser más fácil usarlas en su forma de componentes:

$$J_x = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x\, dt = (F_{med})_x(t_2 - t_1) = p_{2x} - p_{1x} = mv_{2x} - mv_{1x}$$
$$J_y = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_y\, dt = (F_{med})_y(t_2 - t_1) = p_{2y} - p_{1y} = mv_{2y} - mv_{1y} \tag{8.9}$$

y lo mismo para la componente z.

Comparación entre el momento lineal y la energía cinética

Ahora podemos ver la diferencia fundamental entre momento lineal y energía cinética. El teorema del impulso y el momento lineal $\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ dice que los cambios en el momento lineal de una partícula se deben al impulso, el cual depende del *tiempo* durante el que actúa la fuerza neta. En cambio, el teorema del trabajo y la energía $W_{tot} = K_2 - K_1$ nos dice que la energía cinética cambia cuando se realiza trabajo sobre una partícula; el trabajo total depende de la *distancia* en la que actúa la fuerza neta. Considere una partícula que parte del reposo en t_1, de manera que $\vec{v}_1 = 0$. Su momento lineal inicial es $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1 = 0$, y su energía cinética inicial es $K_1 = \frac{1}{2}mv_1{}^2 = 0$. Ahora, una fuerza neta constante igual a $\vec{F}$ actúa sobre la partícula del tiempo t_1 al tiempo t_2. En este intervalo, la partícula se mueve una distancia s en la dirección de la fuerza. De acuerdo con la ecuación (8.6), el momento lineal de la partícula en el instante t_2 es



ActivPhysics 6.1: Momentum and Energy Change

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \vec{J} = \vec{J}$$

donde $\vec{J} = \vec{F}(t_2 - t_1)$ es el impulso que actúa sobre la partícula. Así, *el momento lineal de una partícula es igual al impulso que la aceleró desde el reposo hasta su rapidez actual*; el impulso es el producto de la fuerza neta que aceleró el cuerpo por el *tiempo* requerido para la aceleración. En cambio, la energía cinética de la partícula en t_2 es $K_2 = W_{tot} = Fs$, el *trabajo* total efectuado sobre la partícula para acelerarla desde el reposo. El trabajo total es igual al producto de la fuerza neta por la *distancia* necesaria para acelerar la partícula (figura 8.4).

8.4 La *energía cinética* de una pelota de béisbol lanzada es igual al trabajo que realiza el *pitcher* sobre ella (la fuerza multiplicada por la distancia que recorre la pelota durante el lanzamiento). El *momento lineal* de la pelota es igual al impulso que le imparte el *pitcher* (la fuerza multiplicada por el tiempo que le llevó hacer que la pelota alcanzara su rapidez).



Veamos una aplicación de la distinción entre momento lineal y energía cinética. Suponga que puede elegir entre atrapar una pelota de 0.50 kg que se mueve a 4.0 m/s o una de 0.10 kg que se mueve a 20 m/s. ¿Cuál es más fácil de atrapar? Ambas tienen la misma magnitud de momento lineal, $p = mv = (0.50\text{ kg})(4.0\text{ m/s}) = (0.10\text{ kg})(20\text{ m/s}) = 2.0\text{ kg}\cdot\text{m/s}$, pero valores muy diferentes de energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$; la pelota grande y lenta tiene $K = 4.0$ J, mientras que la pequeña y rápida tiene $K = 20$ J. Puesto que el momento lineal es igual para ambas pelotas, las dos requieren el mismo *impulso* para detenerse. Pero detener la pelota de 0.10 kg con la mano requiere cinco veces más *trabajo* que detener la de 0.50 kg, porque la pelota pequeña tiene cinco veces más energía cinética. Por lo tanto, para una fuerza dada que ejerzamos con la mano, tardaremos el mismo tiempo (duración de la atrapada) en detener cualquiera de las pelotas, pero nuestra mano y nuestro brazo serán empujados cinco veces más hacia atrás si decidimos atrapar la pelota pequeña y rápida. Para minimizar el esfuerzo del brazo, debemos optar por atrapar la pelota de 0.50 kg de menor energía cinética.

Los teoremas de impulso-momento lineal y trabajo-energía son relaciones entre fuerza y movimiento, y ambos se basan en las leyes de Newton; son principios *integrales* que relacionan el movimiento en dos instantes separados por un intervalo

finito. En cambio, la segunda ley de Newton misma (en cualquiera de las formas $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ o $\sum\vec{F} = d\vec{p}/dt$) es un principio *diferencial* que relaciona las fuerzas con la rapidez del cambio de velocidad o de momento lineal en cada instante.

Ejemplo conceptual 8.1 Momento lineal contra energía cinética



Considere otra vez la carrera descrita en el ejemplo conceptual 6.5 (sección 6.2) entre dos veleros en un lago congelado sin fricción. Los botes tienen masas m y $2m$, y el viento ejerce la misma fuerza horizontal constante $\vec{F}$ sobre cada uno (véase la figura 6.14). Los botes parten del reposo y cruzan la meta que está a una distancia s. ¿Cuál bote llega a la meta con mayor momento lineal?

SOLUCIÓN

En el ejemplo conceptual 6.5 se pedía comparar las *energías cinéticas* de los veleros al cruzar la meta. Se respondió esto recordando que *la energía cinética de un cuerpo es igual al trabajo total efectuado para acelerarlo desde el reposo*. Los dos veleros partieron del reposo, y el trabajo total efectuado fue el mismo para ambos (porque la fuerza neta y el desplazamiento fueron iguales). Por lo tanto, los dos veleros cruzan la meta con la misma energía cinética.

De manera similar, para comparar los *momentos lineales* de los veleros, usamos el concepto de que *el momento lineal de cada velero es igual al impulso que lo aceleró a partir del reposo*. Como se expuso en el ejemplo conceptual 6.5, la fuerza neta sobre cada velero es igual a la fuerza constante horizontal $\vec{F}$ del viento. Sea Δt el tiempo que un velero tarda en llegar a la meta, de manera que el impulso sobre el velero en ese tiempo es $\vec{J} = \vec{F}\,\Delta t$. El velero parte del reposo, así que esto es el momento lineal $\vec{p}$ del velero en la meta:

$$\vec{p} = \vec{F}\,\Delta t$$

Ambos veleros están sujetos a la misma fuerza $\vec{F}$, pero tardan tiempos diferentes Δt en llegar a la meta. El velero de masa $2m$ acelera más lentamente y tarda más tiempo en recorrer la distancia s; por lo tanto, hay mayor impulso sobre este velero entre la salida y la meta. Así que el velero de masa $2m$ cruza la meta con una magnitud mayor de momento lineal que el de masa m (pero con la misma energía cinética). ¿Puede el lector demostrar que el velero de masa $2m$ tiene $\sqrt{2}$ veces más momento lineal en la meta que el de masa m?

Ejemplo 8.2 Una pelota golpea una pared

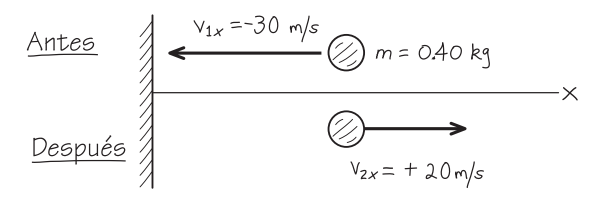


Suponga que lanza una pelota de 0.40 kg contra una pared, a la cual golpea moviéndose horizontalmente hacia la izquierda a 30 m/s y rebotando horizontalmente a la derecha con rapidez de 20 m/s. *a*) Calcule el impulso de la fuerza neta sobre la pelota durante el choque con la pared. *b*) Si la pelota está en contacto con la pared durante 0.010 s, calcule la fuerza horizontal media que la pared ejerce sobre la pelota durante el impacto.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Nos dan información suficiente para determinar los valores inicial y final del momento lineal de la pelota, así que podemos usar el teorema del impulso y el momento lineal para calcular el impulso. Luego, usaremos la definición de impulso para determinar la fuerza media. La figura 8.5 muestra el diagrama. El movimiento es puramente horizontal, así que solo necesitamos un eje. Tomaremos la dirección de x positiva a la derecha. La incógnita en el inciso *a*) es la componente x del impulso, J_x, que obtendremos de las componentes x del momento lineal antes y después del impacto, empleando las ecuaciones (8.9). En el inciso *b*), la incógnita es la componente x media de la fuerza, $(F_{med})_x$; una vez que conozcamos J_x, podremos obtener esa fuerza utilizando las ecuaciones (8.9).

8.5 Diagrama para este problema.



EJECUTAR: *a*) Con el eje x que elegimos, las componentes x inicial y final del momento lineal de la pelota son

$$p_{1x} = mv_{1x} = (0.40\text{ kg})(-30\text{ m/s}) = -12\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$
$$p_{2x} = mv_{2x} = (0.40\text{ kg})(+20\text{ m/s}) = +8.0\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

De acuerdo con la ecuación para x de las ecuaciones (8.9), la componente x del impulso es igual al *cambio* en la componente x del momento lineal:

$$J_x = p_{2x} - p_{1x}$$
$$= 8.0\text{ kg}\cdot\text{m/s} - (-12\text{ kg}\cdot\text{m/s}) = 20\text{ kg}\cdot\text{m/s} = 20\text{ N}\cdot\text{s}$$

b) El choque dura $t_2 - t_1 = \Delta t = 0.010$ s. De acuerdo con la ecuación para x de las ecuaciones (8.9), $J_x = (F_{med})_x(t_2 - t_1) = (F_{med})_x\Delta t$, así que

$$(F_{med})_x = \frac{J_x}{\Delta t} = \frac{20\text{ N}\cdot\text{s}}{0.010\text{ s}} = 2000\text{ N}$$

EVALUAR: La componente x del impulso J_x es positiva; es decir, hacia la derecha en la figura 8.5. Tal como debe ser: el impulso representa el "empujón" que la pared da a la pelota, y es evidente que tal "empujón" es hacia la derecha.

CUIDADO **El momento lineal es un vector** Puesto que el momento lineal es un vector, tuvimos que incluir el signo negativo en $p_{1x} = -12$ kg·m/s. Si por descuido lo hubiéramos omitido, habríamos obtenido 8.0 kg·m/s − (12 kg·m/s) = −4 kg·m/s, para el impulso. ¡Esta respuesta indicaría que la pared dio a la pelota un empujón a la *izquierda*! Asegúrese de considerar la *dirección* del momento lineal al efectuar sus cálculos.

La fuerza que la pared ejerce sobre la pelota debe ser lo suficientemente grande (2000 N, igual al peso de un objeto de 200 kg) para modificar el momento lineal de la pelota en un lapso de tiempo tan

Continúa

corto. Las otras fuerzas que actúan sobre la pelota durante el choque son muy débiles en comparación; por ejemplo, la fuerza gravitacional es de solo 3.9 N. Así, durante el breve lapso que dura el choque, podemos ignorar las demás fuerzas sobre la pelota. La figura 8.6 muestra el choque de una pelota de tenis sobre una raqueta.

Observe que el valor de 2000 N que calculamos es solo la fuerza horizontal *media* que la pared ejerce sobre la pelota durante el impacto, y corresponde a la línea horizontal $(F_{\text{med}})_x$ de la figura 8.3*a*. La fuerza horizontal es cero antes del impacto, sube hasta un máximo y luego disminuye hasta cero cuando la pelota deja de estar en contacto con la pared. Si la pelota es relativamente rígida, como una de béisbol o de golf, el choque dura poco tiempo y la fuerza máxima es grande, como en la curva más estrecha de la figura 8.3*b*. Si la pelota es más blanda, como una de tenis, el choque dura más tiempo y la fuerza máxima es menor, como en la curva de menor altura en la figura 8.3*b*.

8.6 Por lo regular, una pelota de tenis está en contacto con la raqueta cerca de 0.01 s, y se aplana notablemente por la tremenda fuerza que sobre ella ejerce la raqueta.



Ejemplo 8.3 Pateo de un balón de fútbol

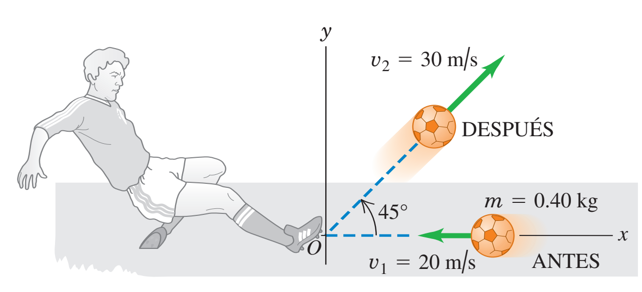
Un balón de fútbol soccer tiene una masa de 0.40 kg e inicialmente se mueve hacia la izquierda a 20 m/s, pero luego es pateado de manera que adquiere una velocidad con magnitud de 30 m/s y dirección de 45° hacia arriba y a la derecha (figura 8.7*a*). Calcule el impulso de la fuerza neta y la fuerza neta media, suponiendo que el choque dura $\Delta t = 0.010$ s.

SOLUCIÓN

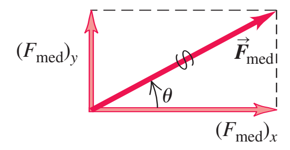
IDENTIFICAR y PLANTEAR: El balón se mueve en dos dimensiones, por lo que debemos tratar el momento lineal y el impulso como cantidades vectoriales. Tomamos el eje *x* horizontal hacia la derecha, y el *y*, vertical hacia arriba. Las incógnitas son las componentes del impulso neto, J_x y J_y, sobre el balón, y las componentes de la fuerza neta media, $(F_{\text{med}})_x$ y $(F_{\text{med}})_y$, sobre el balón. Las obtendremos usando el teorema de impulso-momento lineal en su forma de componentes, ecuaciones (8.9).

8.7 *a*) Patada a un balón de fútbol. *b*) Cálculo de la fuerza media a partir de sus componentes.

a) Diagrama antes y después



b) Fuerza media sobre el balón



EJECUTAR: Usando cos 45° = sen 45° = 0.707, obtenemos las componentes de velocidad para antes y después de patear el balón:

$$v_{1x} = -20 \text{ m/s} \qquad v_{1y} = 0$$
$$v_{2x} = v_{2y} = (30 \text{ m/s})(0.707) = 21.2 \text{ m/s}$$

De acuerdo con las ecuaciones (8.9), las componentes del impulso son

$$J_x = p_{2x} - p_{1x} = m(v_{2x} - v_{1x})$$
$$= (0.40 \text{ kg})[21.2 \text{ m/s} - (-20 \text{ m/s})] = 16.5 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$
$$J_y = p_{2y} - p_{1y} = m(v_{2y} - v_{1y})$$
$$= (0.40 \text{ kg})(21.2 \text{ m/s} - 0) = 8.5 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Según las ecuaciones (8.8), las componentes de la fuerza neta media son

$$(F_{\text{med}})_x = \frac{J_x}{\Delta t} = 1650 \text{ N} \qquad (F_{\text{med}})_y = \frac{J_y}{\Delta t} = 850 \text{ N}$$

La magnitud y la dirección de la fuerza neta media $\vec{F}_{\text{med}}$ son

$$F_{\text{med}} = \sqrt{(1650 \text{ N})^2 + (850 \text{ N})^2} = 1.9 \times 10^3 \text{ N}$$
$$\theta = \arctan \frac{850 \text{ N}}{1650 \text{ N}} = 27°$$

El balón no estaba inicialmente en reposo, de modo que su velocidad final *no* tiene la misma dirección que la fuerza media que actúa sobre él.

EVALUAR: $\vec{F}_{\text{med}}$ incluye la fuerza de gravedad, la cual es muy pequeña; el peso del balón es de solo 3.9 N. Al igual que en el ejemplo 8.2, la fuerza media que actúa durante el choque es ejercida casi totalmente por el objeto que el balón golpea (en este caso, el pie del futbolista).

Evalúe su comprensión de la sección 8.1 Clasifique las siguientes situaciones de acuerdo con la magnitud del impulso de la fuerza neta, en orden decreciente. En cada situación un automóvil de 1000 kg se desplaza a lo largo de una carretera recta de este a oeste. **i.** El automóvil se desplaza inicialmente hacia el este a 25 m/s y se detiene en 10 s. **ii.** El automóvil se desplaza inicialmente hacia al este a 25 m/s y se detiene en 5 s. **iii.** El automóvil está inicialmente en reposo, y se le aplica una fuerza neta de 2000 N con dirección al este durante 10 s. **iv.** El automóvil se desplaza inicialmente hacia el este a 25 m/s y se le aplica una fuerza neta de 2000 N con dirección al oeste durante 10 s. **v.** El automóvil se desplaza inicialmente hacia el este a 25 m/s. En un lapso de 30 s, el automóvil invierte su sentido y termina desplazándose hacia el oeste a 25 m/s.

8.2 Conservación del momento lineal

El concepto de momento lineal tiene especial importancia en situaciones en las que dos o más cuerpos *interactúan*. Para ver por qué, consideremos primero un sistema idealizado de dos cuerpos que interactúan entre sí, y con nada más; por ejemplo, dos astronautas que se tocan mientras flotan libremente en el espacio exterior en un ambiente de gravedad cero (figura 8.8). Consideremos a los astronautas como partículas. Cada partícula ejerce una fuerza sobre la otra; según la tercera ley de Newton, las dos fuerzas siempre son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Por lo tanto, los *impulsos* que actúan sobre las dos partículas son iguales y opuestos, y los cambios de momento lineal de las dos partículas serán iguales y opuestos.

Repasemos esto a la luz de ciertos términos nuevos. En cualquier sistema, las fuerzas que las partículas del sistema ejercen entre sí se denominan **fuerzas internas**; las fuerzas ejercidas sobre cualquier parte del sistema por algún objeto externo son **fuerzas externas**. En el sistema de la figura 8.8, las fuerzas internas son $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$, ejercida por la partícula B sobre la A, y $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$ ejercida por la partícula A sobre la B. *No* hay fuerzas externas, así que tenemos un **sistema aislado**.

La fuerza neta sobre la partícula A es $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$ y la fuerza neta sobre la partícula B es $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$, así que, por la ecuación (8.4), las tasas de cambio de los momentos lineales de ambas partículas son

$$\vec{F}_{B \text{ sobre } A} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} \qquad \vec{F}_{A \text{ sobre } B} = \frac{d\vec{p}_B}{dt} \tag{8.10}$$

El momento lineal de cada partícula cambia, pero estos cambios están relacionados entre sí por la tercera ley de Newton: las dos fuerzas $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$ y $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$ siempre son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Es decir, $\vec{F}_{B \text{ sobre } A} = -\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$, así que $\vec{F}_{B \text{ sobre } A} + \vec{F}_{A \text{ sobre } B} = \mathbf{0}$. Sumando las dos expresiones de la ecuación (8.10), tenemos

$$\vec{F}_{B \text{ sobre } A} + \vec{F}_{A \text{ sobre } B} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} = \frac{d(\vec{p}_A + \vec{p}_B)}{dt} = \mathbf{0} \tag{8.11}$$

Las tasas de cambio de los dos momentos lineales son iguales y opuestas, así que la tasa de cambio de la suma vectorial $\vec{p}_A + \vec{p}_B$ es cero. Ahora definimos el **momento lineal total** $\vec{P}$ del sistema de dos partículas como la suma vectorial de los momentos lineales de las partículas individuales. Esto es,

$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B \tag{8.12}$$

Así, la ecuación (8.11) se convierte finalmente en

$$\vec{F}_{B \text{ sobre } A} + \vec{F}_{A \text{ sobre } B} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \mathbf{0} \tag{8.13}$$

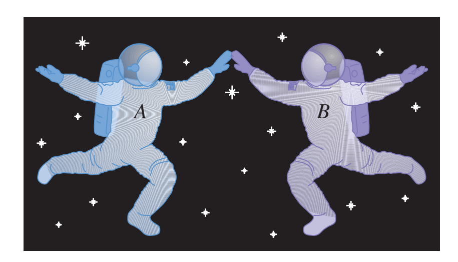
La rapidez de cambio del momento lineal *total* $\vec{P}$ es cero. Por lo tanto, el momento lineal total del sistema es constante, aunque los momentos lineales individuales de las partículas que constituyen el sistema pueden cambiar.

Si también hay fuerzas externas, deben incluirse en el lado izquierdo de la ecuación (8.13), junto con las internas. En general, el momento lineal total no será constante, pero si la suma vectorial de las fuerzas externas es cero, como en la figura 8.9, estas no tienen efecto en el lado izquierdo de la ecuación (8.13), y $d\vec{P}/dt$ será otra vez cero. Así, tenemos el siguiente resultado general:

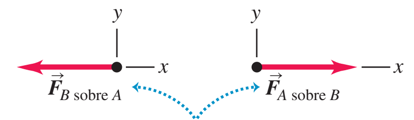
Si la suma vectorial de las fuerzas externas sobre un sistema es cero, el momento lineal total del sistema es constante.

Esta es la forma más sencilla del **principio de conservación del momento lineal**, el cual es una consecuencia directa de la tercera ley de Newton. La utilidad de este principio radica en que no depende de la naturaleza detallada de las fuerzas internas que

8.8 Dos astronautas se empujan mutuamente mientras flotan libres en el entorno de gravedad cero del espacio exterior.

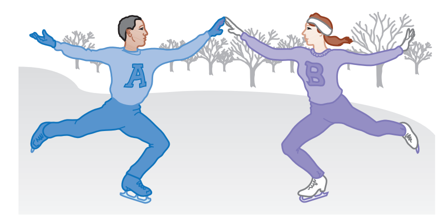


No hay fuerzas externas que actúen sobre el sistema de los dos astronautas, por lo que su momento lineal total se conserva.

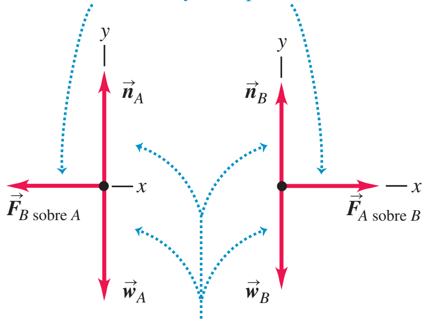


Las fuerzas que los astronautas ejercen uno sobre el otro constituyen un par acción-reacción.

8.9 Dos patinadores se empujan entre sí mientras patinan en una superficie horizontal sin fricción. (Compare con la figura 8.8).



Las fuerzas que los patinadores ejercen uno sobre otro constituyen un par acción-reacción.

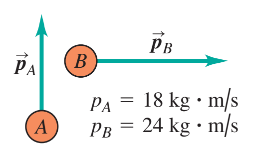


Aunque las fuerzas normales y gravitacionales son fuerzas externas, su suma vectorial es cero, por lo que el momento lineal total se conserva.

actúan entre los miembros del sistema, así que podemos aplicarlo incluso si (como suele suceder) sabemos muy poco acerca de las fuerzas internas. Usamos la segunda ley de Newton para deducir este principio, así que debemos tener cuidado de usarlo solo en marcos de referencia inerciales.

Podemos generalizar este principio para un sistema con cualquier número de partículas A, B, C, … que solo interactúan entre sí. El momento lineal total del sistema es

$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B + \cdots = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B + \cdots \quad \text{(momento lineal total de un sistema de partículas)} \tag{8.14}$$



ActivPhysics 6.3: Momentum Conservation and Collisions
ActivPhysics 6.7: Explosion Problems
ActivPhysics 6.10: Pendulum Person-Projectile Bowling

Nuestro argumento es el mismo de antes: la tasa total de cambio del momento lineal del sistema debido a cada par acción-reacción de fuerzas internas es cero. Así, la tasa total de cambio del momento lineal del sistema entero es cero siempre que la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre él sea cero. Las fuerzas internas pueden cambiar los momentos lineales de las partículas individuales del sistema, pero no el momento lineal *total* del sistema.

8.10 Cuando se aplica la conservación del momento lineal, recuerde que ¡esta es una cantidad vectorial!

$\vec{p}_A$ $\vec{p}_B$ B A

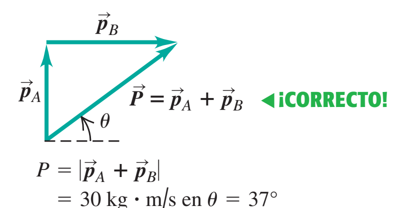
$p_A = 18$ kg · m/s
$p_B = 24$ kg · m/s

Un sistema de dos partículas con momentos lineales en diferentes direcciones.

NO podemos calcular la magnitud del momento lineal total sumando las magnitudes de los momentos lineales individuales.

$P = p_A + p_B = 42$ kg · m/s ◀ INCORRECTO

En vez de ello, usamos la suma vectorial:



$P = |\vec{p}_A + \vec{p}_B|$
$= 30$ kg · m/s en $\theta = 37°$

CUIDADO La conservación del momento lineal significa la conservación de sus componentes Al aplicar la conservación del momento lineal a un sistema, es indispensable recordar que el momento lineal es una cantidad *vectorial*. Por lo tanto, se debe usar una suma vectorial para calcular el momento lineal total de un sistema (figura 8.10). Por lo regular, el empleo de componentes es el método más sencillo. Si p_{Ax}, p_{Ay} y p_{Az} son las componentes del momento lineal de la partícula A, y de manera similar para las demás partículas, entonces la ecuación (8.14) equivale a las ecuaciones de componentes

$$\begin{aligned} P_x &= p_{Ax} + p_{Bx} + \cdots \\ P_y &= p_{Ay} + p_{By} + \cdots \\ P_z &= p_{Az} + p_{Bz} + \cdots \end{aligned} \tag{8.15}$$

Si la suma vectorial de las fuerzas externas sobre el sistema es cero, entonces P_x, P_y y P_z son constantes.

En ciertos aspectos, el principio de conservación del momento lineal es más general que el de conservación de la energía mecánica. Por ejemplo, la energía mecánica se conserva solo si las fuerzas internas son *conservativas*, es decir, si permiten la conversión bidireccional entre energía cinética y energía potencial, pero la conservación del momento lineal es válida aun si las fuerzas internas *no* son conservativas. En este capítulo analizaremos situaciones en las que se conservan tanto el momento lineal como la energía mecánica, y otras en que solo el momento lineal se conserva. Estos dos principios desempeñan un papel fundamental en todas las áreas de la física, y los encontraremos durante todo nuestro estudio.

Estrategia para resolver problemas 8.1 Conservación del momento lineal



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Verifique que la suma vectorial de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema de partículas sea cero. Si no es así, no se puede usar la conservación del momento lineal.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Trate cada cuerpo como partícula. Elabore dibujos de "antes" y "después", incluyendo los vectores de velocidad. Asigne símbolos algebraicos a cada magnitud, ángulo y componente. Use letras para identificar cada partícula, y los subíndices 1 y 2 para las cantidades de "antes" y "después". Incluya los valores conocidos como las magnitudes, los ángulos o las componentes.
2. Defina un sistema de coordenadas y muéstrelo en sus diagramas; indique la dirección positiva de cada eje.
3. Identifique las incógnitas.

EJECUTAR *la solución:*

1. Escriba una ecuación con símbolos, igualando las componentes x totales iniciales y finales del momento lineal, usando $p_x = mv_x$ para cada partícula. Escriba la ecuación correspondiente para las componentes y. Las componentes de velocidad pueden ser negativas o positivas, de modo que ¡tenga cuidado con los signos!
2. En algunos problemas, las consideraciones de energía (analizadas en la sección 8.4) proporcionan ecuaciones que relacionan las velocidades.
3. Resuelva estas ecuaciones para obtener las incógnitas.

EVALUAR *la respuesta:* ¿Es lógica la respuesta desde el punto de vista de la física? Si la incógnita es el momento lineal de un cuerpo dado, verifique que la dirección del momento lineal sea razonable.



Ejemplo 8.4 Retroceso de un rifle

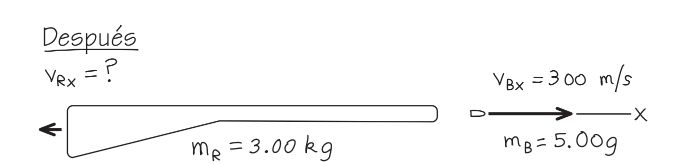
Un tirador sostiene holgadamente un rifle de masa $m_R = 3.00$ kg, de manera que este puede retroceder libremente al hacer un disparo. Dispara una bala de masa $m_B = 5.00$ g con una velocidad horizontal relativa al suelo de $v_{Bx} = 300$ m/s. ¿Qué velocidad de retroceso v_{Rx} tiene el rifle? ¿Qué momento lineal y energía cinética finales tiene la bala? ¿Y el rifle?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Si el tirador ejerce sobre el rifle fuerzas horizontales insignificantes, entonces no hay fuerza horizontal neta sobre el sistema (bala y rifle) durante el disparo, y el momento lineal horizontal total del sistema se conserva. La figura 8.11 ilustra el caso. Sea el eje $+x$ la dirección en que apunta el rifle. Inicialmente, el rifle y la bala están en reposo, así que la componente x inicial del momento lineal total es cero. Una vez disparada la bala, su componente x de momento lineal es $p_{Bx} = m_B v_{Bx}$, y la del rifle, es $p_{Rx} = m_R v_{Rx}$. Las incógnitas son v_{Rx}, p_{Bx}, p_{Rx}, y las energías cinéticas finales $K_B = \frac{1}{2} m_B v_{Bx}^2$ y $K_R = \frac{1}{2} m_R v_{Rx}^2$.

8.11 Diagrama para este problema.





EJECUTAR: La conservación de la componente x del momento lineal total da

$$P_x = 0 = m_B v_{Bx} + m_R v_{Rx}$$

$$v_{Rx} = -\frac{m_B}{m_R} v_{Bx} = -\left(\frac{0.00500 \text{ kg}}{3.00 \text{ kg}}\right)(300 \text{ m/s}) = -0.500 \text{ m/s}$$

El signo negativo significa que el retroceso es en la dirección opuesta a la de la bala.

Los momentos lineales y las energías cinéticas al final son

$$p_{Bx} = m_B v_{Bx} = (0.00500 \text{ kg})(300 \text{ m/s}) = 1.50 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$K_B = \tfrac{1}{2} m_B v_{Bx}^2 = \tfrac{1}{2}(0.00500 \text{ kg})(300 \text{ m/s})^2 = 225 \text{ J}$$

$$p_{Rx} = m_R v_{Rx} = (3.00 \text{ kg})(-0.500 \text{ m/s}) = -1.50 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$K_R = \tfrac{1}{2} m_R v_{Rx}^2 = \tfrac{1}{2}(3.00 \text{ kg})(-0.500 \text{ m/s})^2 = 0.375 \text{ J}$$

EVALUAR: La bala y el rifle tienen *momentos lineales* finales iguales y opuestos por la tercera ley de Newton: porque se sometieron a la interacción de fuerzas iguales y opuestas durante el mismo *tiempo*, es decir, los impulsos son iguales y opuestos. Pero la bala viaja una *distancia* mucho mayor que el rifle durante la interacción. Por ello, la fuerza sobre la bala realiza mucho más trabajo que la fuerza sobre el rifle, dando a la bala una *energía cinética* mucho mayor que la del rifle. La razón de 600:1 de las dos energías cinéticas es igual al inverso de la razón de las masas; de hecho, puede demostrarse que esto siempre sucede en situaciones de retroceso (véase ejercicio 8.26).



Ejemplo 8.5 Choque en una línea recta

Dos deslizadores de masas diferentes se acercan uno al otro sobre un riel de aire sin fricción (figura 8.12*a*). Después de chocar (figura 8.12*b*), el deslizador B tiene una velocidad final de +2.0 m/s (figura 8.12*c*). ¿Qué velocidad final tiene el deslizador A? Compare los cambios en el momento lineal y la velocidad de los dos deslizadores.

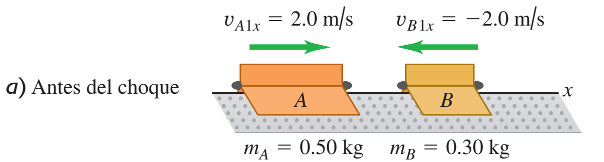
SOLUCIÓN

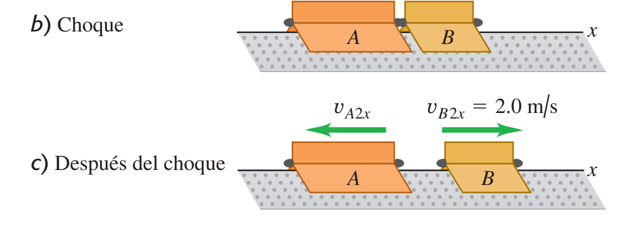
IDENTIFICAR y PLANTEAR: Al igual que con los patinadores mostrados en la figura 8.9, la fuerza vertical total sobre los deslizadores es cero, y la fuerza neta sobre cada uno es la fuerza horizontal que cada deslizador ejerce sobre el otro. La fuerza externa neta sobre el *sistema* de dos deslizadores es cero, así que el momento lineal total se conserva. Tomamos el eje x positivo hacia la derecha. Nos dan las masas y las velocidades iniciales de los dos deslizadores, así como la velocidad final del deslizador B. Las incógnitas son v_{A2x}, la componente x final de la velocidad del deslizador A, y los cambios en el momento lineal y la velocidad de los dos deslizadores (es decir, el valor *después* del choque menos el valor *antes* del choque).

EJECUTAR: La componente x del momento lineal total antes del choque es

$$\begin{aligned} P_x &= m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} \\ &= (0.50 \text{ kg})(2.0 \text{ m/s}) + (0.30 \text{ kg})(-2.0 \text{ m/s}) \\ &= 0.40 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

8.12 Dos deslizadores chocan en un riel de aire.





Esta es positiva (a la derecha en la figura 8.12) porque el deslizador A tiene mayor magnitud de momento lineal que el B. La componente x del momento lineal total vale lo mismo después del choque, así que

$$P_x = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

Continúa

Se despeja v_{A2x}:

$$v_{A2x} = \frac{P_x - m_B v_{B2x}}{m_A} = \frac{0.40\ \text{kg}\cdot\text{m/s} - (0.30\ \text{kg})(2.0\ \text{m/s})}{0.50\ \text{kg}}$$
$$= -0.40\ \text{m/s}$$

Los cambios en los momentos lineales son

$$m_A v_{A2x} - m_A v_{A1x} = (0.50\ \text{kg})(-0.40\ \text{m/s}) - (0.50\ \text{kg})(2.0\ \text{m/s}) = -1.2\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$m_B v_{B2x} - m_B v_{B1x} = (0.30\ \text{kg})(2.0\ \text{m/s}) - (0.30\ \text{kg})(-2.0\ \text{m/s}) = +1.2\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Los cambios en las velocidades x son

$$v_{A2x} - v_{A1x} = (-0.40\ \text{m/s}) - 2.0\ \text{m/s} = -2.4\ \text{m/s}$$
$$v_{B2x} - v_{B1x} = 2.0\ \text{m/s} - (-2.0\ \text{m/s}) = +4.0\ \text{m/s}$$

EVALUAR: Los deslizadores estuvieron sujetos a la interacción de fuerzas iguales y opuestas en el mismo tiempo de la colisión. De acuerdo con el teorema de impulso-momento lineal, experimentaron impulsos iguales y opuestos y, por lo tanto, cambios iguales y opuestos en el momento lineal. Sin embargo, de acuerdo con la segunda ley de Newton, el deslizador con menos masa (B) tuvo mayor magnitud de aceleración y, por consiguiente, un mayor cambio de velocidad.

Ejemplo 8.6 Choque en un plano horizontal



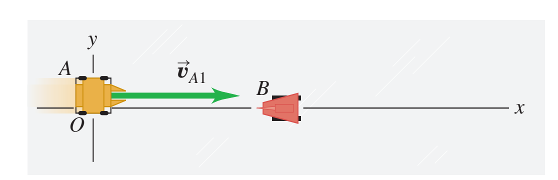
La figura 8.13*a* muestra dos robots combatientes que se deslizan sobre una superficie sin fricción. El robot A, con masa de 20 kg, se mueve inicialmente a 2.0 m/s en forma paralela al eje x. Choca con el robot B, cuya masa es de 12 kg y está inicialmente en reposo. Después del choque, el robot A se mueve a 1.0 m/s en una dirección que forma un ángulo $\alpha = 30°$ con su dirección inicial (figura 8.13*b*). ¿Qué velocidad final tiene el robot B?

SOLUCIÓN

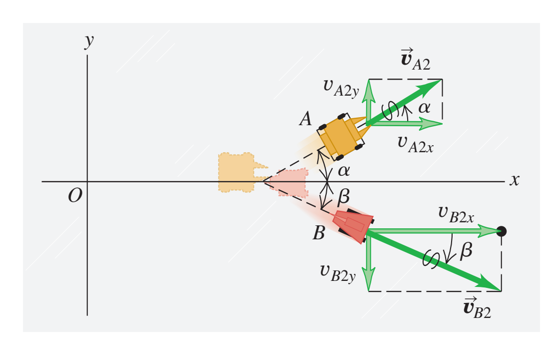
IDENTIFICAR y PLANTEAR: No hay fuerzas externas horizontales, así que las componentes x y y del momento lineal total del sistema se conservan. La conservación del momento lineal exige que la suma de las componentes x del momento lineal *antes* del choque (subíndice 1) sea igual a la suma *después* del choque (subíndice 2), y lo mismo con las sumas de las componentes y. La incógnita es $\vec{v}_{B2}$, la velocidad final del robot B.

8.13 Vista superior de las velocidades *a*) antes y *b*) después del choque.

a) Antes del choque



b) Después del choque



EJECUTAR: Las ecuaciones de conservación del momento lineal y sus soluciones para v_{B2x} y v_{B2y} son

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$
$$v_{B2x} = \frac{m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} - m_A v_{A2x}}{m_B}$$
$$= \frac{\begin{bmatrix}(20\ \text{kg})(2.0\ \text{m/s}) + (12\ \text{kg})(0) \\ - (20\ \text{kg})(1.0\ \text{m/s})(\cos 30°)\end{bmatrix}}{12\ \text{kg}}$$
$$= 1.89\ \text{m/s}$$

$$m_A v_{A1y} + m_B v_{B1y} = m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y}$$
$$v_{B2y} = \frac{m_A v_{A1y} + m_B v_{B1y} - m_A v_{A2y}}{m_B}$$
$$= \frac{\begin{bmatrix}(20\ \text{kg})(0) + (12\ \text{kg})(0) \\ - (20\ \text{kg})(1.0\ \text{m/s})(\text{sen}\, 30°)\end{bmatrix}}{12\ \text{kg}}$$
$$= -0.83\ \text{m/s}$$

La figura 8.13*b* ilustra el movimiento del robot B después del choque. La magnitud de $\vec{v}_{B2}$ es

$$v_{B2} = \sqrt{(1.89\ \text{m/s})^2 + (-0.83\ \text{m/s})^2} = 2.1\ \text{m/s}$$

y el ángulo de su dirección a partir de $+x$ es

$$\beta = \arctan \frac{-0.83\ \text{m/s}}{1.89\ \text{m/s}} = -24°$$

EVALUAR: Podemos comprobar la respuesta confirmando que las componentes de momento lineal total antes y después del choque son iguales. En un principio, el robot A tiene una componente x de momento lineal $m_A v_{A1x} = (20\ \text{kg})(2.0\ \text{m/s}) = 40\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$ y la correspondiente componente y es cero; el robot B tiene momento lineal igual a cero. Después del choque, las componentes de momento lineal son $m_A v_{A2x} = (20\ \text{kg})(1.0\ \text{m/s})(\cos 30°) = 17\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$, y $m_B v_{B2x} = (12\ \text{kg})(1.89\ \text{m/s}) = 23\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$; el momento lineal total en x es de $40\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$, igual que antes del choque. Las componentes y finales son $m_A v_{A2y} = (20\ \text{kg})(1.0\ \text{m/s})(\text{sen}\ 30°) = 10\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$, y $m_B v_{B2y} = (12\ \text{kg})(-0.83\ \text{m/s}) = -10\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$; la componente y total del momento lineal es cero, igual que antes del choque.

Evalúe su comprensión de la sección 8.2 Un juguete accionado por un resorte está en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. Cuando se suelta el resorte, el juguete se divide en tres piezas con masas iguales, A, B y C, que se deslizan por la superficie. La pieza A se aleja en la dirección $-x$, mientras que la B se aleja en la dirección $-y$. *a*) ¿Cuáles son los signos de las componentes de velocidad de la pieza C? *b*) ¿Cuál de las tres piezas se mueve más rápido?



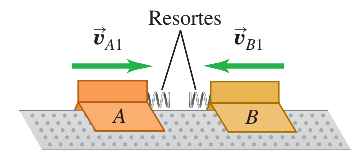
8.3 Conservación del momento lineal y choques

Para la mayoría de las personas, el término *choque* probablemente significa un percance automovilístico. Si bien usaremos el término en ese sentido, ampliaremos su significado para incluir cualquier interacción intensa entre cuerpos, con duración relativamente corta. Así que no solo incluimos accidentes automovilísticos, sino también bolas que chocan en una mesa de billar, neutrones que inciden sobre núcleos atómicos en un reactor nuclear, el impacto de un meteorito sobre el desierto de Arizona, y el encuentro cercano de una nave espacial con el planeta Saturno.

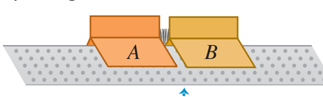
Si las fuerzas entre los cuerpos son mucho mayores que las externas, como suele suceder en la mayoría de los choques, podemos ignorar las fuerzas externas y tratar los cuerpos como un sistema *aislado*. Entonces, el momento lineal se conserva y el momento lineal total del sistema tendrá el mismo valor antes y después del choque. Dos automóviles que chocan en un cruce cubierto de hielo son un buen ejemplo. Incluso dos automóviles que chocan en pavimento seco se pueden tratar como un sistema aislado durante la colisión si las fuerzas entre los autos son mucho mayores que las fuerzas de fricción del pavimento contra los neumáticos.

8.14 Dos deslizadores experimentan un choque elástico en una superficie sin fricción. Cada deslizador tiene un protector de resorte de acero que ejerce una fuerza conservativa sobre el otro deslizador.

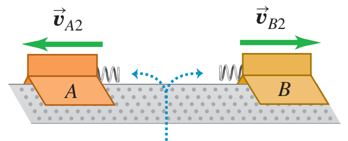
a) Antes del choque



b) Choque elástico



c) Después del choque





Video Tutor Demo

Choques elásticos e inelásticos

Si las fuerzas entre los cuerpos son *conservativas*, de manera que no se pierde ni gana energía mecánica en el choque, la energía *cinética* total del sistema es la misma antes y después del choque. Esto se denomina **choque elástico**. Un choque entre dos canicas o dos bolas de billar es casi totalmente elástico. La figura 8.14 muestra un modelo de choque elástico. Al chocar los deslizadores, los resortes se comprimen momentáneamente y parte de la energía cinética original se convierte por un momento en energía potencial elástica. Luego los deslizadores rebotan, los resortes se expanden y la energía potencial se convierte en energía cinética.

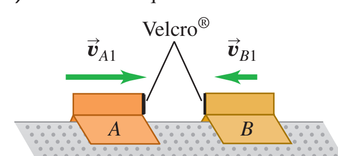
Un choque en el que la energía cinética total final es *menor* que la inicial es un **choque inelástico**. Una albóndiga que cae en un plato de espagueti y una bala que se incrusta en un bloque de madera son ejemplos de choques inelásticos. Un choque inelástico en el que los cuerpos chocan y se mueven como uno solo después de la colisión es un **choque totalmente inelástico**. En la figura 8.15 se presenta un ejemplo; se han reemplazado los protectores de resorte de la figura 8.14 por una cinta Velcro® que hace que los dos cuerpos se adhieran.

CUIDADO **Un choque inelástico no tiene que ser *totalmente* inelástico** Es un error común pensar que los *únicos* choques inelásticos son aquellos en que los cuerpos quedan unidos. En realidad, los choques inelásticos incluyen muchas situaciones en que los cuerpos *no* se unen. Si dos automóviles chocan levemente y rebotan, el trabajo efectuado para deformar las defensas (los parachoques) no puede recuperarse como energía cinética de los automóviles, de manera que el choque es inelástico (figura 8.16).

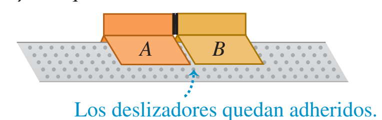
Recuerde esta regla: **En cualquier choque en el que se pueden ignorar las fuerzas externas, el momento lineal se conserva y el momento lineal total es el mismo antes y después de la colisión; *solo* en choques elásticos, la energía cinética total es igual antes y después de la colisión**.

8.15 Dos deslizadores experimentan un choque totalmente inelástico. Los protectores de resorte de los deslizadores se sustituyeron por cintas Velcro®, de manera que los deslizadores quedan adheridos después del choque.

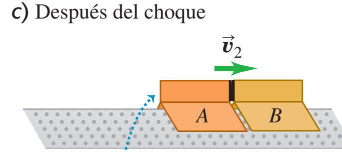
a) Antes del choque



b) Choque totalmente inelástico



c) Después del choque



Choques totalmente inelásticos

Veamos qué sucede con el momento lineal y la energía cinética en un choque *totalmente* inelástico de dos cuerpos (A y B), como en la figura 8.15. Puesto que los cuerpos quedan unidos después del choque, tienen la misma velocidad final $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_{A2} = \vec{v}_{B2} = \vec{v}_2$$



8.16 Los automóviles se diseñan para que los choques sean inelásticos, de manera que su estructura absorba tanta energía del choque como sea posible. Esta energía absorbida no puede recuperarse, pues se invierte en deformar de manera permanente el automóvil.

La conservación del momento lineal da la relación

$$m_A\vec{v}_{A1} + m_B\vec{v}_{B1} = (m_A + m_B)\vec{v}_2 \quad \text{(choque totalmente inelástico)} \tag{8.16}$$

Si conocemos las masas y las velocidades iniciales, podemos calcular la velocidad final común $\vec{v}_2$.

Suponga, por ejemplo, que un cuerpo con masa m_A y componente x inicial de velocidad v_{A1x} choca inelásticamente con un cuerpo de masa m_B en reposo ($v_{B1x} = 0$). Según la ecuación (8.16), la componente x de la velocidad después del choque v_{2x}, común a ambos cuerpos, es

$$v_{2x} = \frac{m_A}{m_A + m_B}v_{A1x} \quad \text{(choque totalmente inelástico, } B \text{ en reposo)} \tag{8.17}$$

Verifiquemos que la energía cinética total después de este choque totalmente inelástico es menor que antes. El movimiento es solo sobre el eje x, por lo que las energías cinéticas K_1 y K_2 antes y después del choque, respectivamente, son

$$K_1 = \tfrac{1}{2}m_A v_{A1x}{}^2$$

$$K_2 = \tfrac{1}{2}(m_A + m_B)v_{2x}{}^2 = \tfrac{1}{2}(m_A + m_B)\left(\frac{m_A}{m_A + m_B}\right)^2 v_{A1x}{}^2$$

La razón entre las energías cinéticas final e inicial es

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_A}{m_A + m_B} \quad \text{(choque totalmente inelástico, } B \text{ en reposo)} \tag{8.18}$$

El lado derecho siempre es menor que la unidad porque el denominador siempre es mayor que el numerador. Aun si la velocidad inicial de m_B no es cero, es fácil verificar que la energía cinética después de un choque totalmente inelástico siempre es menor que antes.

Atención: No se recomienda memorizar las ecuaciones (8.17) y (8.18). Solo se dedujeron para demostrar que siempre se pierde energía cinética en un choque totalmente inelástico.

Ejemplo 8.7 Choque totalmente inelástico



Revisaremos el choque descrito en el ejemplo 8.5 (sección 8.2), pero esta vez, los deslizadores están equipados para permanecer unidos después del choque. Calcule la velocidad final común x y compare las energías cinéticas inicial y final del sistema.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: No hay fuerzas externas en la dirección x, así que la componente x del momento lineal se conserva. La figura 8.17 ilustra el diagrama. Las incógnitas son la velocidad final v_{2x} y las energías cinéticas inicial y final del sistema, K_1 y K_2.

8.17 Diagrama del problema.

Antes: A, $v_{A1x} = 2.0$ m/s, $m_A = 0.50$ kg; B, $v_{B1x} = -2.0$ m/s, $m_B = 0.30$ kg

Después: A B, $v_{2x} = ?$

EJECUTAR: Por la conservación del momento lineal,

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = (m_A + m_B)v_{2x}$$

$$v_{2x} = \frac{m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x}}{m_A + m_B}$$

$$= \frac{(0.50 \text{ kg})(2.0 \text{ m/s}) + (0.30 \text{ kg})(-2.0 \text{ m/s})}{0.50 \text{ kg} + 0.30 \text{ kg}}$$

$$= 0.50 \text{ m/s}$$

Puesto que v_{2x} es positiva, los deslizadores se mueven juntos a la derecha después del choque. Antes de este, las energías cinéticas son

$$K_A = \tfrac{1}{2}m_A v_{A1x}{}^2 = \tfrac{1}{2}(0.50 \text{ kg})(2.0 \text{ m/s})^2 = 1.0 \text{ J}$$

$$K_B = \tfrac{1}{2}m_B v_{B1x}{}^2 = \tfrac{1}{2}(0.30 \text{ kg})(-2.0 \text{ m/s})^2 = 0.60 \text{ J}$$

La energía cinética total antes del choque es $K_1 = K_A + K_B = 1.6$ J. La energía cinética después del choque es

$$K_2 = \tfrac{1}{2}(m_A + m_B)v_{2x}{}^2 = \tfrac{1}{2}(0.50 \text{ kg} + 0.30 \text{ kg})(0.50 \text{ m/s})^2$$

$$= 0.10 \text{ J}$$

EVALUAR: La energía cinética final es solo $\frac{1}{16}$ de la original; $\frac{15}{16}$ se convierten de energía mecánica en otras formas. Si hay una bola de goma de mascar entre los deslizadores, se aplasta y se calienta. Si hay un resorte entre los deslizadores que se comprime cuando estos se enganchan, la energía se almacena como energía potencial del resorte. En ambos casos, la energía *total* del sistema se conserva, aunque la energía *cinética* no lo hace. Sin embargo, en un sistema aislado, el momento lineal *siempre* se conserva, sin importar que el choque sea elástico o no.

Ejemplo 8.8 El péndulo balístico



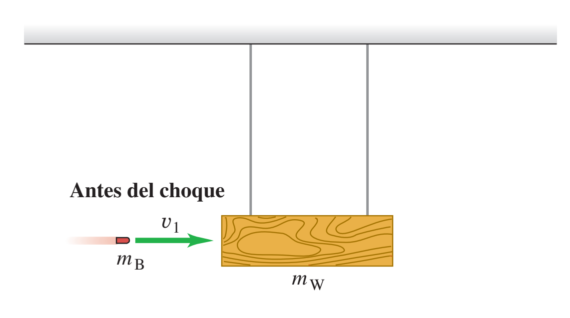
La figura 8.18 muestra un péndulo balístico, un sistema sencillo para medir la rapidez de un proyectil. La bala, con masa m_B, tiene un choque totalmente inelástico con un bloque de madera de masa m_W que cuelga como péndulo. Después del impacto, el bloque oscila hasta una altura máxima y. En términos de y, m_B y m_W, ¿qué rapidez inicial v_1 tiene la bala?

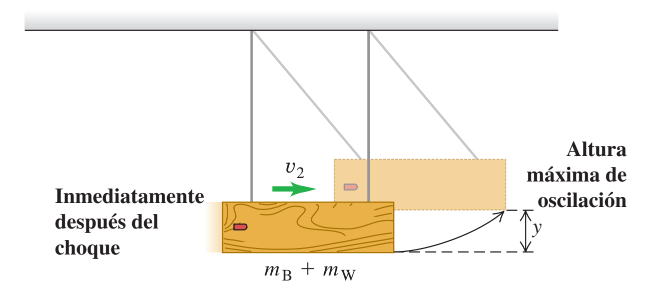
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Analizaremos el suceso en dos etapas: **1.** la incrustación de la bala en el bloque y **2.** la oscilación del bloque. Durante la primera etapa, la bala se incrusta en el bloque con tal rapidez, que este no se mueve apreciablemente. Las cuerdas de soporte permanecen casi verticales, así que la fuerza externa horizontal que actúa sobre el sistema formado por la bala y el bloque es insignificante, y la componente horizontal del momento lineal se conserva. Sin embargo, la energía mecánica *no* se conserva en esta etapa porque hay una fuerza no conservativa que realiza trabajo (la fuerza de fricción entre la bala y el bloque).

En la segunda etapa, el bloque y la bala se mueven juntos. Las únicas fuerzas que actúan sobre este sistema son la gravedad (una fuerza conservativa) y las tensiones de las cuerdas (que no efectúan trabajo). Por lo tanto, cuando el péndulo oscila, la *energía mecánica* se conserva. Sin embargo, el momento lineal *no* se conserva durante esta etapa porque hay una fuerza externa neta (la fuerza de gravedad y las tensiones en las cuerdas no se cancelan cuando estas se encuentran inclinadas).

8.18 Péndulo balístico.





PLANTEAR: Tomamos el eje x positivo hacia la derecha y el eje y positivo hacia arriba. La incógnita es v_1. Otra incógnita es la rapidez v_2 del sistema inmediatamente después del choque. Usaremos la conservación del momento lineal en la primera etapa para relacionar v_1 con v_2, y la conservación de la energía en la segunda etapa para relacionar v_2 con y.

EJECUTAR: En la primera etapa, todas las velocidades tienen la dirección $+x$. La conservación del momento lineal da

$$m_B v_1 = (m_B + m_W)v_2$$
$$v_1 = \frac{m_B + m_W}{m_B} v_2$$

Al principio de la segunda etapa, la energía cinética del sistema es $K = \frac{1}{2}(m_B + m_W)v_2^2$. El sistema oscila hacia arriba, se detiene momentáneamente a una altura y, donde su energía cinética es cero y su energía potencial es $(m_B + m_W)gy$, y luego baja. La conservación de energía da

$$\frac{1}{2}(m_B + m_W)v_2^2 = (m_B + m_W)gy$$
$$v_2 = \sqrt{2gy}$$

Sustituimos esta expresión de v_2 en la ecuación de momento lineal:

$$v_1 = \frac{m_B + m_W}{m_B}\sqrt{2gy}$$

EVALUAR: Verifiquemos nuestras respuestas considerando algunas cifras reales: $m_B = 5.00$ g $= 0.00500$ kg, $m_W = 2.00$ kg y $y = 3.00$ cm $= 0.0300$ m. Entonces, tenemos

$$v_1 = \frac{0.00500\text{ kg} + 2.00\text{ kg}}{0.00500\text{ kg}}\sqrt{2(9.80\text{ m/s}^2)(0.0300\text{ m})}$$
$$= 307\text{ m/s}$$

La rapidez v_2 del bloque justo después del impacto es

$$v_2 = \sqrt{2gy} = \sqrt{2(9.80\text{ m/s}^2)(0.0300\text{ m})}$$
$$= 0.767\text{ m/s}$$

Las rapideces v_1 y v_2 parecen reales. Antes del impacto, la energía cinética de la bala es $\frac{1}{2}(0.00500\text{ kg})(307\text{ m/s})^2 = 236$ J y la del sistema justo después del impacto es $\frac{1}{2}(2.005\text{ kg})(0.767\text{ m/s})^2 = 0.590$ J. Casi toda la energía cinética desaparece al astillarse la madera y al calentarse la bala y el bloque.



Ejemplo 8.9 Choque entre automóviles

Un automóvil de 1000 kg viaja al norte a 15 m/s, y choca con una vagoneta de 2000 kg que viaja al este a 10 m/s. Los ocupantes usan cinturones de seguridad y no hay lesionados, pero los dos automóviles se alejan del punto de impacto como uno solo. El ajustador de la aseguradora le pide calcular la velocidad de los vehículos justo después del impacto. ¿Qué le contesta?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Trataremos los automóviles como un sistema aislado, de modo que el momento lineal del sistema se conserva. Podemos hacerlo porque (como veremos después) las magnitudes de las fuerzas horizontales que los vehículos ejercen uno sobre el otro durante el choque son mucho mayores que las fuerzas externas, como la fricción. La figura 8.19 muestra el diagrama y los ejes de coordenadas. Podemos calcular el momento lineal total, $\vec{P}$, antes del choque mediante las ecuaciones (8.15). El momento lineal tiene el mismo valor inmediatamente después del choque; por lo tanto, podemos calcular la velocidad $\vec{V}$ justo después del choque (la incógnita) empleando la relación $\vec{P} = M\vec{V}$, donde $M = m_C + m_T = 3000$ kg es la masa de los vehículos.

EJECUTAR: De acuerdo con las ecuaciones (8.15), las componentes de $\vec{P}$ son

$$\begin{aligned} P_x &= p_{Cx} + p_{Tx} = m_C v_{Cx} + m_T v_{Tx} \\ &= (1000\text{ kg})(0) + (2000\text{ kg})(10\text{ m/s}) \\ &= 2.0 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s} \\ P_y &= p_{Cy} + p_{Ty} = m_C v_{Cy} + m_T v_{Ty} \\ &= (1000\text{ kg})(15\text{ m/s}) + (2000\text{ kg})(0) \\ &= 1.5 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s} \end{aligned}$$

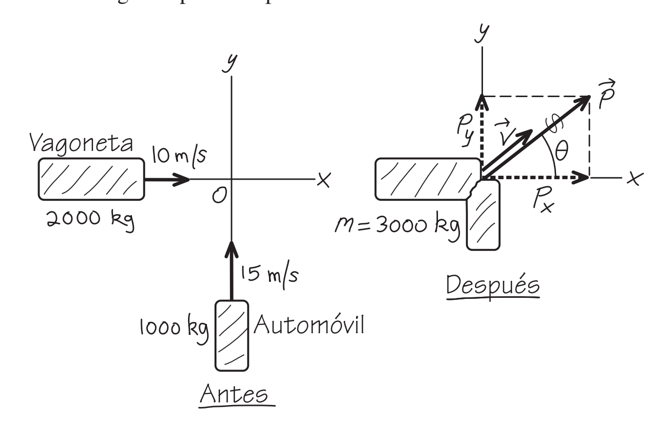
La magnitud de $\vec{P}$ es

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{(2.0 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s})^2 + (1.5 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s})^2} \\ &= 2.5 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s} \end{aligned}$$

y su dirección está dada por el ángulo θ indicado en la figura 8.19:

$$\tan\theta = \frac{P_y}{P_x} = \frac{1.5 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{2.0 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}} = 0.75 \qquad \theta = 37°$$

8.19 Diagrama para este problema.



Utilizando $\vec{P} = M\vec{V}$, la dirección de la velocidad $\vec{V}$ justo después del choque es también $\theta = 37°$ y su magnitud es

$$V = \frac{P}{M} = \frac{2.5 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{3000\text{ kg}} = 8.3\text{ m/s}$$

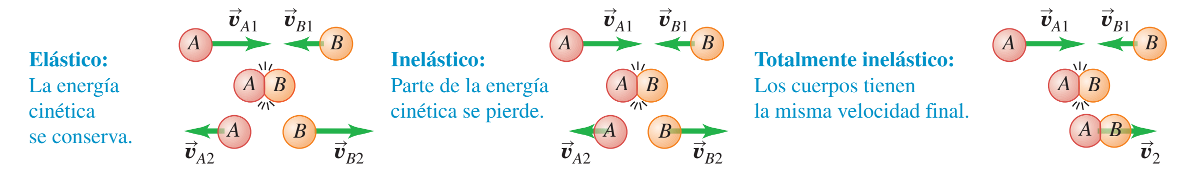
EVALUAR: El choque es inelástico, por lo que cabe esperar que la energía cinética total después del choque sea menor que antes. Como se observa, la energía cinética inicial es 2.1×10^5 J, y la final, 1.0×10^5 J.

Ahora se justifica nuestra suposición de que podemos despreciar las fuerzas externas sobre los vehículos durante el choque. El peso del automóvil es de 10,000 N aproximadamente; si el coeficiente de fricción cinética es de 0.5, la fuerza de fricción sobre el automóvil durante el impacto es de alrededor de 5000 N. La energía cinética inicial del automóvil es $\frac{1}{2}(1000\text{ kg})(15\text{ m/s})^2 = 1.1 \times 10^5$ J, de modo que se debe realizar -1.1×10^5 J de trabajo para detenerlo. Si el automóvil se aplasta 0.20 m al detenerse, se necesitaría una fuerza de magnitud $(1.1 \times 10^5\text{ J})/(0.20\text{ m}) = 5.5 \times 10^5$ N; esta es 110 veces la fuerza de fricción. Por lo tanto, es razonable despreciar la fuerza de fricción externa comparada con las fuerzas internas que los vehículos ejercen uno sobre el otro.

Clasificación de los choques

Es importante recordar que los choques se pueden clasificar considerando su energía (figura 8.20). Un choque en el que la energía cinética se conserva se denomina *elástico*. (Examinaremos esto con mayor profundidad en la siguiente sección). Un choque en el que la energía cinética total disminuye se llama *inelástico*. Cuando dos cuerpos tienen una velocidad final común, decimos que el choque es *totalmente inelástico*. También hay casos en los que la energía cinética final es *mayor* que el valor inicial. El retroceso de los rifles analizado en el ejemplo 8.4 (sección 8.2) es un ejemplo.

8.20 Los choques se clasifican con base en consideraciones de energía.



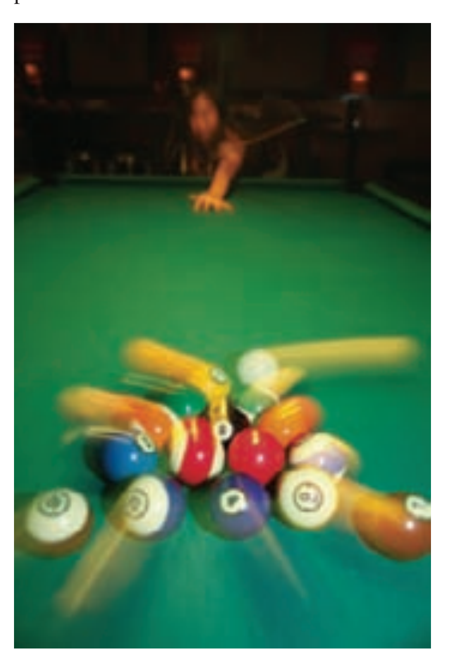
Por último, hacemos hincapié una vez más en que, en ocasiones, podemos utilizar la conservación del momento lineal incluso cuando hay fuerzas externas que actúan sobre el sistema, si la fuerza externa neta que actúa sobre los cuerpos que chocan es pequeña en comparación con las fuerzas internas durante el choque (como en el ejemplo 8.9).

Evalúe su comprensión de la sección 8.3 Para cada situación, indique si el choque es elástico o inelástico. Si es inelástico, indique si es totalmente inelástico. *a*) Usted deja caer de su mano una pelota que choca contra el piso, la cual rebota y casi alcanza a regresar a su mano. *b*) Usted deja caer otra pelota de su mano y deja que choque contra el suelo. La pelota rebota y llega a la mitad de la altura de la que fue soltada. *c*) Usted deja caer una bola de arcilla de su mano. Cuando choca con el suelo, la bola de arcilla se detiene.

8.4 Choques elásticos

Como vimos en la sección 8.3, un *choque elástico* en un sistema aislado es uno en el que se conserva la energía cinética (al igual que el momento lineal). Estos choques ocurren cuando las fuerzas entre los cuerpos que chocan son *conservativas*. Si chocan dos bolas de billar, se aplastan un poco cerca de la superficie de contacto, pero luego rebotan. Parte de la energía cinética se almacena temporalmente como energía potencial elástica, pero al final se convierte una vez más en energía cinética (figura 8.21).

8.21 Las bolas de billar casi no se deforman al chocar, y pronto recuperan su forma original. Por ello, la fuerza de interacción entre las bolas es casi perfectamente conservativa, y el choque es casi perfectamente elástico.



Examinemos un choque elástico entre dos cuerpos A y B. Comencemos con un choque en una dimensión, con todas las velocidades en la misma línea, la que elegimos como eje x. Así, los momentos lineales y las velocidades solo tienen componentes x. Llamamos v_{A1x} y v_{B1x} a las velocidades x antes del choque, y v_{A2x} y v_{B2x} a las velocidades después del choque. Por la conservación de la energía cinética, tenemos

$$\tfrac{1}{2}m_A v_{A1x}{}^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_{B1x}{}^2 = \tfrac{1}{2}m_A v_{A2x}{}^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_{B2x}{}^2$$

y la conservación del momento lineal da

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

Si conocemos las masas m_A y m_B y las velocidades iniciales v_{A1x} y v_{B1x}, podemos resolver estas dos ecuaciones para obtener las velocidades finales v_{A2x} y v_{B2x}.

Choques elásticos, un cuerpo inicialmente en reposo

La solución general de las ecuaciones anteriores es algo complicada, así que nos concentraremos en el caso especial en que el cuerpo B está en reposo antes del choque (es decir, $v_{B1x} = 0$). Piense que el cuerpo B es el blanco que A debe golpear. Entonces, las ecuaciones de conservación de energía cinética y el momento lineal son, respectivamente,

$$\tfrac{1}{2}m_A v_{A1x}{}^2 = \tfrac{1}{2}m_A v_{A2x}{}^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_{B2x}{}^2 \qquad (8.19)$$

$$m_A v_{A1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x} \qquad (8.20)$$

MasteringPHYSICS

ActivPhysics 6.2: Collisions and Elasticity
ActivPhysics 6.5: Car Collisions: Two Dimensions
ActivPhysics 6.9: Pendulum Bashes Box

Podemos despejar v_{A2x} y v_{B2x} en términos de las masas y la velocidad inicial v_{A1x}. Esto implica operaciones algebraicas algo complicadas, pero vale la pena. ¡Sin sufrimiento, no hay ganancia! El enfoque más sencillo es un tanto indirecto, pero de pasada revela otra característica interesante de los choques elásticos.

Reacomodemos primero las ecuaciones (8.19) y (8.20) como sigue:

$$m_B v_{B2x}{}^2 = m_A(v_{A1x}{}^2 - v_{A2x}{}^2) = m_A(v_{A1x} - v_{A2x})(v_{A1x} + v_{A2x}) \qquad (8.21)$$

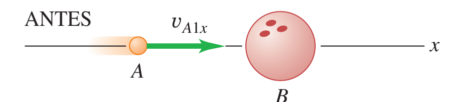
$$m_B v_{B2x} = m_A(v_{A1x} - v_{A2x}) \qquad (8.22)$$

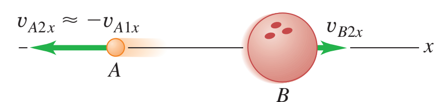
Ahora dividimos la ecuación (8.21) entre la (8.22) para obtener

$$v_{B2x} = v_{A1x} + v_{A2x} \qquad (8.23)$$

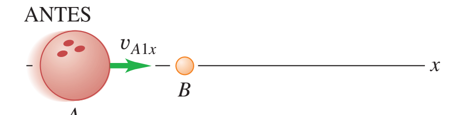
8.22 Choque entre *a*) una pelota de ping-pong que se mueve y una bola para jugar a los bolos inicialmente en reposo, y *b*) una bola para jugar a los bolos que se mueve y una pelota de ping-pong inicialmente estacionaria.

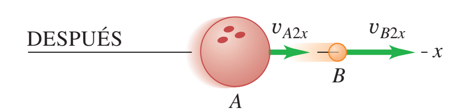
a) La pelota de ping-pong golpea una bola para jugar a los bolos.





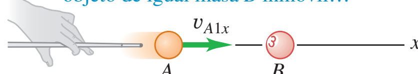
b) Una bola para jugar a los bolos golpea una pelota de ping-pong.



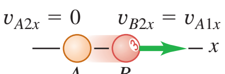


8.23 Choque elástico unidimensional entre cuerpos de igual masa.

Cuando un objeto *A* en movimiento tiene un choque elástico unidimensional con un objeto de igual masa *B* inmóvil…



… todo el momento lineal y la energía cinética de *A* se transfieren a *B*.



Sustituimos esta expresión en la ecuación (8.22) para eliminar v_{B2x}, y luego despejamos v_{A2x}:

$$m_B(v_{A1x} + v_{A2x}) = m_A(v_{A1x} - v_{A2x})$$

$$v_{A2x} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_{A1x} \tag{8.24}$$

Por último, sustituimos este resultado en la ecuación (8.23) para obtener

$$v_{B2x} = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_{A1x} \tag{8.25}$$

Ahora podemos interpretar los resultados. Suponga que *A* es una pelota de ping-pong y *B* es una bola para jugar a los bolos. Esperamos que *A* rebote después del choque con una velocidad casi igual a la original pero en la dirección opuesta (figura 8.22*a*), y que la velocidad de *B* sea mucho menor. Eso es precisamente lo que las ecuaciones predicen. Si m_A es mucho menor que m_B, la fracción de la ecuación (8.24) es aproximadamente igual a (−1), y v_{A2x} es casi igual a $-v_{A1x}$. La fracción de la ecuación (8.25) es mucho menor que 1, así que v_{B2x} es mucho menor que v_{A1x}. La figura 8.22*b* muestra el caso opuesto, en el que *A* es la bola para jugar a los bolos y *B* la pelota de ping-pong, y m_A es mucho mayor que m_B. ¿Qué cree usted que sucederá? Verifique sus predicciones con las de las ecuaciones (8.24) y (8.25).

Otro caso interesante se presenta cuando las masas son iguales (figura 8.23). Si $m_A = m_B$, entonces las ecuaciones (8.24) y (8.25) dan $v_{A2x} = 0$ y $v_{B2x} = v_{A1x}$. Es decir, el cuerpo que al principio está en movimiento se detiene por completo al chocar con el que está inicialmente en reposo, comunicándole todo su momento lineal y toda su energía cinética. Todos los jugadores de billar conocen muy bien este comportamiento.

Choques elásticos y velocidad relativa

Volvamos ahora al caso general en que *A* y *B* tienen diferente masa. La ecuación (8.23) puede rescribirse así:

$$v_{A1x} = v_{B2x} - v_{A2x} \tag{8.26}$$

Aquí, $v_{B2x} - v_{A2x}$ es la velocidad de *B* relativa a *A* *después* del choque; según la ecuación (8.26), esto es igual a v_{A1x}, el *negativo* de la velocidad de *B* relativa a *A* *antes* del choque. (Tratamos las velocidades relativas en la sección 3.5). La velocidad relativa tiene la misma magnitud, pero signo opuesto, antes y después del choque. El signo cambia porque *A* y *B* se están acercando antes del choque y alejándose después. Si vemos el choque desde un marco de referencia que se mueve con velocidad constante relativa al primero, las velocidades de los cuerpos son diferentes, pero las velocidades *relativas* son las mismas. Así, lo que dijimos acerca de las velocidades relativas se cumple en general para *cualquier* choque elástico rectilíneo, aun si ningún cuerpo está en reposo inicialmente. *En un choque rectilíneo elástico de dos cuerpos, las velocidades relativas antes y después del choque tienen la misma magnitud pero signo opuesto*. Esto significa que si *B* se está moviendo antes del choque, la ecuación (8.26) se convierte en

$$v_{B2x} - v_{A2x} = -(v_{B1x} - v_{A1x}) \tag{8.27}$$

Resulta que una relación *vectorial* similar a la ecuación (8.27) es una propiedad general de *todos* los choques elásticos, aun si ambos cuerpos se mueven inicialmente y las velocidades no están alineadas. Este resultado proporciona una definición alternativa y equivalente de choque elástico: *en un choque elástico, la velocidad relativa de los dos cuerpos tiene la misma magnitud antes y después del choque*. Siempre que se satisface esta condición, la energía cinética total también se conserva.

Si un choque elástico de dos cuerpos no es de frente, las velocidades no están alineadas. Si todas están en el mismo plano, cada velocidad final tiene dos componentes desconocidas y hay cuatro incógnitas en total. La conservación de la energía y la conservación de las componentes *x* y *y* del momento lineal solo dan tres ecuaciones. Para determinar las velocidades finales sin ambigüedad, necesitamos información adicional, como la dirección o la magnitud de una de esas velocidades.

Ejemplo 8.10 Choque rectilíneo elástico



Repetiremos el experimento del choque en el riel de aire del ejemplo 8.5 (sección 8.2), pero agregando resortes ideales como defensas a los deslizadores para que el choque sea elástico. ¿Cuáles son las velocidades finales de los deslizadores?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La fuerza externa neta que actúa sobre el sistema es cero, por lo que el momento lineal del sistema se conserva. La figura 8.24 muestra el diagrama. Calcularemos las incógnitas, v_{A2x} y v_{B2x}, empleando la ecuación (8.27), la relación de la velocidad relativa en un choque elástico y la ecuación de conservación del momento lineal.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (8.27),

$$\begin{aligned} v_{B2x} - v_{A2x} &= -(v_{B1x} - v_{A1x}) \\ &= -(-2.0\text{ m/s} - 2.0\text{ m/s}) = 4.0\text{ m/s} \end{aligned}$$

A partir de la conservación del momento lineal,

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

$$(0.50\text{ kg})(2.0\text{ m/s}) + (0.30\text{ kg})(-2.0\text{ m/s}) = (0.50\text{ kg})v_{A2x} + (0.30\text{ kg})v_{B2x}$$

$$0.50v_{A2x} + 0.30v_{B2x} = 0.40\text{ m/s}$$

(Para obtener la última ecuación, dividimos ambos lados de la ecuación anterior entre 1 kg. Esto hace las unidades iguales a las de la primera ecuación). Resolviendo estas ecuaciones simultáneamente, tenemos

$$v_{A2x} = -1.0\text{ m/s} \qquad v_{B2x} = 3.0\text{ m/s}$$

8.24 Diagrama de este problema.

EVALUAR: Ambos cuerpos invierten sus direcciones; A se mueve a la izquierda a 1.0 m/s, y B lo hace a la derecha a 3.0 m/s. Esto difiere del resultado del ejemplo 8.5 porque ese choque *no* era elástico. El deslizador A con mayor masa desacelera durante el choque, así que pierde energía cinética. El deslizador B con menor masa acelera y gana energía cinética. La energía cinética total antes del choque (que calculamos en el ejemplo 8.7) es de 1.6 J. La energía cinética total después del choque es

$$\tfrac{1}{2}(0.50\text{ kg})(-1.0\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(0.30\text{ kg})(3.0\text{ m/s})^2 = 1.6\text{ J}$$

Como esperábamos, las energías cinéticas antes y después de este choque elástico son iguales. La energía cinética se transfiere de A a B, sin que nada de ella se pierda en el proceso.

CUIDADO **Atención a las ecuaciones de choques elásticos** Este problema *no* se podría haber resuelto utilizando las ecuaciones (8.24) y (8.25), ya que estas solo son válidas si el cuerpo B inicialmente está *en reposo*. ¡Asegúrese siempre de resolver el problema en cuestión empleando ecuaciones que sean válidas!

Ejemplo 8.11 Fisión moderada de neutrones en un reactor nuclear

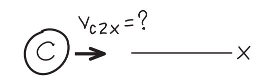


La fisión de núcleos de uranio en un reactor nuclear produce neutrones de alta rapidez. Antes de que un neutrón pueda provocar fisiones adicionales eficientemente, debe ser frenado por choques sucesivos con núcleos en el *moderador* del reactor. El primer reactor nuclear (construido en 1942 en la Universidad de Chicago) usaba carbono (grafito) como moderador. Suponga que un neutrón (masa = 1.0 u) que viaja a 2.6×10^7 m/s experimenta un choque elástico de frente con un núcleo de carbono (masa = 12 u) inicialmente en reposo. Las fuerzas externas durante el choque son despreciables; calcule las velocidades después del choque. (1 u es la *unidad de masa atómica*, igual a 1.66×10^{-27} kg).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se desprecian las fuerzas externas, así que el momento lineal se conserva en el choque. El choque es elástico, de manera que la energía cinética también se conserva. La figura 8.25 muestra el diagrama. Tomamos el eje x en la dirección en que el neutrón se mueve inicialmente. Puesto que el choque es de frente, ambas partículas se mueven en este mismo eje después del choque. Como el núcleo de carbono está inicialmente en reposo, podemos usar las ecuaciones (8.24) y (8.25), reemplazando A por n (para el neutrón) y B por C (para el núcleo del carbono). Tenemos $m_n = 1.0$ u, $m_C = 12$ u, y $v_{n1x} = 2.6 \times 10^7$ m/s. Las incógnitas son las velocidades finales v_{n2x} y v_{C2x}.

8.25 Diagrama de este problema.



EJECUTAR: Dejaremos que usted realice los cálculos. (*Sugerencia:* No es necesario convertir las unidades de masa atómica a kilogramos). Los resultados son

$$v_{n2x} = -2.2 \times 10^7\text{ m/s} \qquad v_{C2x} = 0.4 \times 10^7\text{ m/s}$$

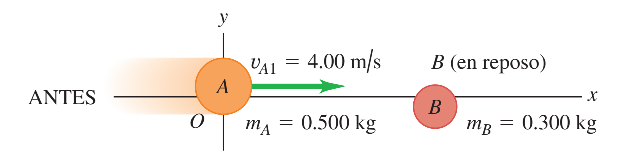
EVALUAR: El neutrón termina con $|(m_n - m_C)/(m_n + m_C)| = \frac{11}{13}$ de su rapidez inicial, y la rapidez del núcleo de carbono en retroceso es $|2m_n/(m_n + m_C)| = \frac{2}{13}$ de la rapidez inicial del neutrón. La energía cinética es proporcional a la rapidez al cuadrado, así que la energía cinética final del neutrón es $(\frac{11}{13})^2 \approx 0.72$ de su valor original. Después de un segundo choque de frente, su energía cinética será $(0.72)^2$, es decir, cerca de la mitad de su valor original, y así sucesivamente. Después de una docena de choques (algunos de los cuales son de frente), la rapidez del neutrón será lo suficientemente baja y podrá causar una reacción de fisión eficiente en un núcleo de uranio.

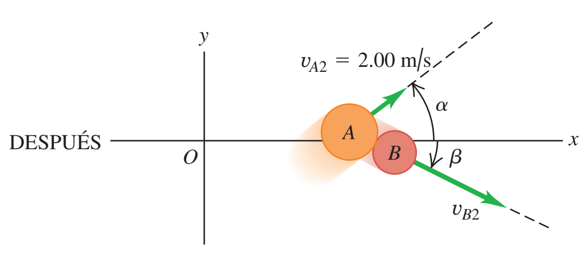


Ejemplo 8.12 Choque elástico bidimensional

La figura 8.26 muestra un choque elástico de dos discos de hockey (masas $m_A = 0.500$ kg y $m_B = 0.300$ kg) en una mesa de aire, sin fricción. El disco A tiene velocidad inicial de 4.00 m/s en la dirección $+x$ y velocidad final de 2.00 m/s en una dirección α desconocida. El disco B está inicialmente en reposo. Calcule la rapidez final v_{B2} del disco B y los ángulos α y β.

8.26 Choque elástico que no es de frente.





SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos las ecuaciones de conservación de la energía y conservación del momento lineal en x y y. Estas tres ecuaciones deben ser suficientes para obtener las tres incógnitas mencionadas en el enunciado del problema.

EJECUTAR: Puesto que el choque es elástico, las energías cinéticas inicial y final son iguales:

$$\tfrac{1}{2}m_A v_{A1}^2 = \tfrac{1}{2}m_A v_{A2}^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_{B2}^2$$

$$v_{B2}^2 = \frac{m_A v_{A1}^2 - m_A v_{A2}^2}{m_B}$$

$$= \frac{(0.500\text{ kg})(4.00\text{ m/s})^2 - (0.500\text{ kg})(2.00\text{ m/s})^2}{0.300\text{ kg}}$$

$$v_{B2} = 4.47\text{ m/s}$$

La conservación de las componentes x y y del momento lineal total da

$$m_A v_{A1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

$$(0.500\text{ kg})(4.00\text{ m/s}) = (0.500\text{ kg})(2.00\text{ m/s})(\cos\alpha) + (0.300\text{ kg})(4.47\text{ m/s})(\cos\beta)$$

$$0 = m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y}$$

$$0 = (0.500\text{ kg})(2.00\text{ m/s})(\operatorname{sen}\alpha) - (0.300\text{ kg})(4.47\text{ m/s})(\operatorname{sen}\beta)$$

Tenemos dos ecuaciones simultáneas para α y β. Dejamos al lector dar los detalles de la solución. (*Sugerencia:* Despeje $\cos\beta$ en la primera ecuación y $\operatorname{sen}\beta$ en la segunda; luego, eleve al cuadrado las ecuaciones y súmelas. Como $\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$, esto elimina β y deja una ecuación de la que podemos despejar $\cos\alpha$ y, por lo tanto, α. Luego se sustituye este valor en cualquiera de las dos ecuaciones para despejar β). Los resultados son

$$\alpha = 36.9° \qquad \beta = 26.6°$$

EVALUAR: Para comprobar las respuestas, nos aseguramos de que la componente y del momento lineal sea cero antes y después del choque. En este caso dichas componentes son

$$p_{A2y} = (0.500\text{ kg})(2.00\text{ m/s})(\operatorname{sen} 36.9°) = +0.600\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

$$p_{B2y} = -(0.300\text{ kg})(4.47\text{ m/s})(\operatorname{sen} 26.6°) = -0.600\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

y la suma de estos valores es cero.

Evalúe su comprensión de la sección 8.4 Casi todos los reactores nucleares modernos usan agua como moderador (véase el ejemplo 8.11). ¿Las moléculas de agua (masa $m_w = 18.0$ u) son mejores o peores moderadores que los átomos de carbono? (Una ventaja del agua es que también actúa como refrigerante del núcleo radiactivo del reactor). ❙

8.5 Centro de masa

Podemos replantear el principio de conservación del momento lineal en una forma útil usando el concepto de **centro de masa**. Supongamos que tenemos varias partículas con masas m_1, m_2, etcétera. Las coordenadas de m_1 son (x_1, y_1), las de m_2 son (x_2, y_2), y así sucesivamente. Definimos el centro de masa del sistema como el punto con coordenadas (x_{cm}, y_{cm}) dadas por

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \qquad \text{(centro de masa)} \quad (8.28)$$

El vector de posición $\vec{r}_{cm}$ del centro de masa se puede expresar en términos de los vectores de posición $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots$ de las partículas como

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad \text{(centro de masa)} \tag{8.29}$$

En términos estadísticos, el centro de masa es una posición *media ponderada de la masa* de las partículas.



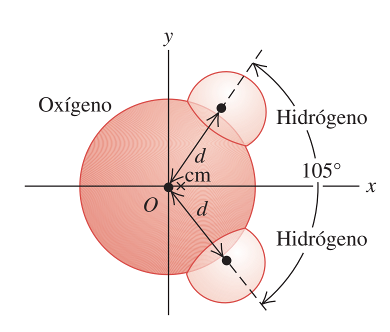
Ejemplo 8.13 Centro de masa de una molécula de agua

La figura 8.27 muestra un modelo simple de la estructura de una molécula de agua. La separación entre el oxígeno y el hidrógeno es $d = 9.57 \times 10^{-11}$ m. Cada átomo de hidrógeno tiene una masa de 1.0 u, y el de oxígeno, de 16.0 u. Determine la posición del centro de masa.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Casi toda la masa de los átomos se concentra en el núcleo, cuyo radio es apenas 10^{-5} veces el radio del átomo. Así que podemos representar los átomos como partículas puntuales. El sistema de coordenadas se muestra en la figura 8.27, con el eje x a lo largo del eje de simetría de la molécula. Usaremos las ecuaciones (8.28) para determinar x_{cm} y y_{cm}.

8.27 ¿Dónde está el centro de masa de una molécula de agua?



EJECUTAR: El átomo de oxígeno está en $x = 0$, $y = 0$. La coordenada x de cada átomo de hidrógeno es d cos (105°/2); las coordenadas y son $\pm d$ sen (105°/2). De acuerdo con las ecuaciones (8.28),

$$x_{cm} = \frac{\left[\begin{array}{l}(1.0\text{ u})(d\cos 52.5°) + (1.0\text{ u}) \\ \times (d\cos 52.5°) + (16.0\text{ u})(0)\end{array}\right]}{1.0\text{ u} + 1.0\text{ u} + 16.0\text{ u}} = 0.068d$$

$$y_{cm} = \frac{\left[\begin{array}{l}(1.0\text{ u})(d\,\text{sen}\,52.5°) + (1.0\text{ u}) \\ \times (-d\,\text{sen}\,52.5°) + (16.0\text{ u})(0)\end{array}\right]}{1.0\text{ u} + 1.0\text{ u} + 16.0\text{ u}} = 0$$

Al sustituir $d = 9.57 \times 10^{-11}$ m, obtenemos

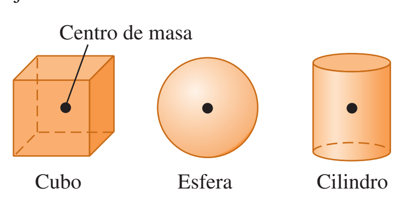
$$x_{cm} = (0.068)(9.57 \times 10^{-11}\text{ m}) = 6.5 \times 10^{-12}\text{ m}$$

EVALUAR: El centro de masa está mucho más cerca del átomo de oxígeno (ubicado en el origen) que de cualquiera de los átomos de hidrógeno, porque su masa es mucho mayor. El centro de masa está en el *eje de simetría* de la molécula. Si la molécula gira 180° sobre este eje, se verá exactamente igual que antes. La rotación no afecta la posición del centro de masa, así que *debe* estar en el eje de simetría.

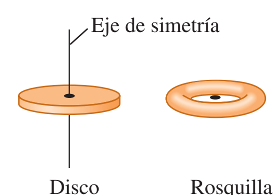
En el caso de cuerpos sólidos, que tienen (al menos en el nivel macroscópico) una distribución continua de materia, las sumas de las ecuaciones (8.28) deben sustituirse por integrales. Los cálculos suelen ser complicados, pero, en general, podemos decir tres cosas acerca de tales problemas (figura 8.28). Primero, si un cuerpo homogéneo tiene un centro geométrico, como una bola de billar, un terrón de azúcar o una lata de jugo de naranja congelado, el centro de masa está en el centro geométrico. Segundo, si un cuerpo tiene un eje de simetría, como una rueda o una polea, el centro de masa está sobre ese eje. Tercero, ninguna ley dice que el centro de masa debe estar dentro del cuerpo. Por ejemplo, el centro de masa de una rosquilla está en el centro del agujero.

Hablaremos un poco más acerca de la localización del centro de masa en el capítulo 11, cuando veamos un concepto relacionado, el *centro de gravedad*.

8.28 Localización del centro de masa de un objeto simétrico.



Si un objeto homogéneo tiene un centro geométrico, es ahí donde se localiza el centro de masa.

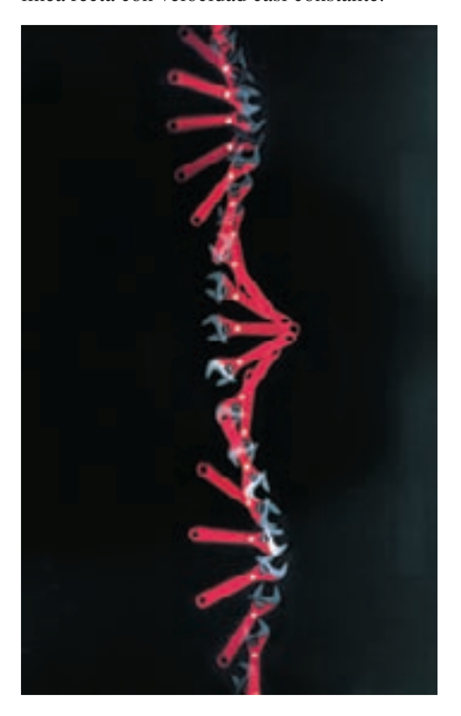


Si un objeto tiene un eje de simetría, el centro de masa estará sobre este. El centro de masa no siempre está dentro del objeto, como en el caso de una rosquilla.

Movimiento del centro de masa

Para comprender la importancia del centro de masa de un conjunto de partículas, debemos preguntar qué le sucede cuando las partículas se mueven. Las componentes x y y de velocidad del centro de masa, $v_{cm\text{-}x}$ y $v_{cm\text{-}y}$, son las derivadas de x_{cm} y y_{cm} respecto al tiempo. Asimismo, dx_1/dt es la componente x de velocidad de la partícula 1,

8.29 El centro de masa de esta llave se marca con un punto blanco. La fuerza externa neta que actúa sobre la llave es casi cero. Cuando la llave gira en una superficie horizontal lisa, el centro de masa se mueve en línea recta con velocidad casi constante.



y así sucesivamente, por lo que $dx_1/dt = v_{1x}$, etcétera. Al derivar las ecuaciones (8.28) respecto al tiempo, obtenemos

$$v_{\text{cm-}x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + m_3 v_{3x} + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$
$$v_{\text{cm-}y} = \frac{m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + m_3 v_{3y} + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \tag{8.30}$$

Estas ecuaciones son equivalentes a la ecuación vectorial que se obtiene al derivar la ecuación (8.29) respecto al tiempo:

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \tag{8.31}$$

Denotamos la masa *total* $m_1 + m_2 + \cdots$ con M. Así, podemos rescribir la ecuación (8.31) como

$$M\vec{v}_{\text{cm}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots = \vec{P} \tag{8.32}$$

El lado derecho es el momento lineal total $\vec{P}$ del sistema. Así, hemos demostrado que *el momento lineal total es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa*. Al atrapar una pelota, realmente estamos atrapando un conjunto de un gran número de moléculas de masas $m_1, m_2, m_3, \ldots$ El impulso que sentimos se debe al momento lineal total de ese conjunto, pero es el mismo como si estuviéramos atrapando una sola partícula de masa $M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots$ que se mueve con velocidad $\vec{v}_{\text{cm}}$, a velocidad del centro de masa del conjunto. Así, la ecuación (8.32) ayuda a justificar la representación de un cuerpo extenso como partícula.

En un sistema de partículas sobre el que la fuerza neta externa es cero, de manera que el momento lineal total $\vec{P}$ es constante, la velocidad del centro de masa $\vec{v}_{\text{cm}} = \vec{P}/M$ también es constante. Suponga que marcamos el centro de masa de una llave ajustable, y deslizamos la llave con cierto giro sobre una mesa lisa horizontal (figura 8.29). El movimiento total parece complicado, pero el centro de masa sigue una línea recta, como si toda la masa estuviera concentrada en ese punto.

Ejemplo 8.14 Tirar de una cuerda en el hielo

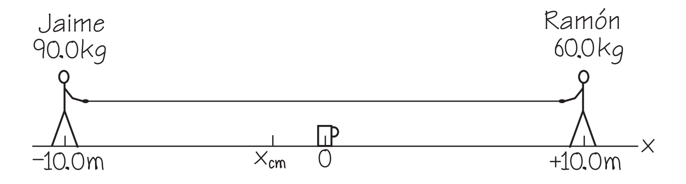


Jaime (masa de 90.0 kg) y Ramón (masa de 60.0 kg) están separados 20.0 m, sobre un estanque helado. A medio camino entre ellos hay un tarro de su bebida favorita. Los dos tiran de los extremos de una cuerda ligera que hay entre ellos. Cuando Jaime se ha movido 6.0 m hacia el tarro, ¿cuánto y en qué dirección se ha movido Ramón?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La superficie es horizontal y (suponemos) sin fricción, así que la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema de Jaime, Ramón y la cuerda es cero; y se conserva su momento lineal total. Inicialmente no hay movimiento, así que el momento lineal total es cero. La velocidad del centro de masa es cero, y permanece en reposo. Tomemos el origen en la posición del tarro, con el eje $+x$ hacia Ramón. La figura 8.30 muestra el diagrama. Usamos la ecuación (8.28) para calcular la posición del centro de masa; se desprecia la masa de la cuerda.

8.30 Diagrama de este problema.



EJECUTAR: Las coordenadas x iniciales de Jaime y Ramón son -10.0 m y $+10.0$ m, respectivamente, así que la coordenada x del centro de masa es

$$x_{\text{cm}} = \frac{(90.0\text{ kg})(-10.0\text{ m}) + (60.0\text{ kg})(10.0\text{ m})}{90.0\text{ kg} + 60.0\text{ kg}} = -2.0\text{ m}$$

Al moverse Jaime 6.0 m hacia el tarro, su nueva coordenada x es -4.0 m; llamaremos a la nueva coordenada x de Ramón x_2. El centro de masa no se mueve, así que

$$x_{\text{cm}} = \frac{(90.0\text{ kg})(-4.0\text{ m}) + (60.0\text{ kg})x_2}{90.0\text{ kg} + 60.0\text{ kg}} = -2.0\text{ m}$$
$$x_2 = 1.0\text{ m}$$

Jaime se ha movido 6.0 m y aún está a 4.0 m del tarro, pero Ramón se movió 9.0 m y está a solo 1.0 m de él.

EVALUAR: La razón de las distancias que los hombres se mueven, $(6.0\text{ m})/(9.0\text{ m}) = \frac{2}{3}$, es igual a la razón *inversa* de sus masas. ¿Puede decir por qué? Como la superficie no tiene fricción, los dos hombres seguirán moviéndose y chocarán en el centro de masa; Ramón llegará primero al tarro. Este resultado es independiente de la fuerza con que ellos tiran; si tiran con más fuerza, solo se logrará que se muevan más rápido.

Fuerzas externas y movimiento del centro de masa

Si la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema de partículas no es cero, el momento lineal total no se conserva y la velocidad del centro de masa cambia. Veamos la relación entre el movimiento del centro de masa y las fuerzas que actúan sobre el sistema.

Las ecuaciones (8.31) y (8.32) dan la *velocidad* del centro de masa en términos de las velocidades de las partículas individuales. Derivamos estas ecuaciones respecto al tiempo para demostrar que las *aceleraciones* están relacionadas de la misma forma. Sea $\vec{a}_{cm} = d\vec{v}_{cm}/dt$ la aceleración del centro de masa; entonces,

$$M\vec{a}_{cm} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \cdots \qquad (8.33)$$

Ahora, $m_1\vec{a}_1$ es la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre la primera partícula, y así sucesivamente, por lo que el lado derecho de la ecuación (8.33) es igual a la suma vectorial $\sum\vec{F}$ de *todas* las fuerzas que actúan sobre *todas* las partículas. Al igual que en la sección 8.2, podemos clasificar cada fuerza como *interna* o *externa*. La suma de todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas es entonces

$$\sum\vec{F} = \sum\vec{F}_{ext} + \sum\vec{F}_{int} = M\vec{a}_{cm}$$

Por la tercera ley de Newton, todas las fuerzas internas se cancelan en pares, y $\sum\vec{F}_{int} = \mathbf{0}$. Lo que queda en el lado izquierdo es la suma solo de las fuerzas *externas*:

$$\sum\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \qquad \text{(cuerpo o conjunto de partículas)} \qquad (8.34)$$

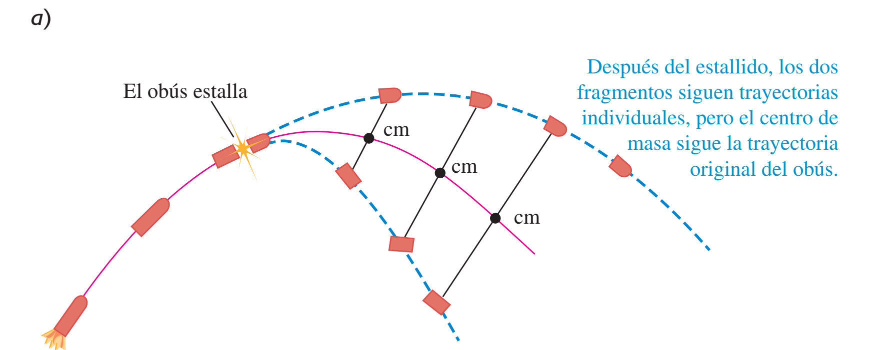
Cuando fuerzas externas actúan sobre un cuerpo o un conjunto de partículas, el centro de masa se mueve como si toda la masa estuviera concentrada en ese punto y sobre él actuara una fuerza neta igual a la suma de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema.

Este resultado quizá no suene muy impresionante, pero, de hecho, es básico en toda la mecánica. En realidad, hemos estado usándolo todo el tiempo; sin él, no podríamos representar un cuerpo extenso como una partícula puntual al aplicar las leyes de Newton. Este resultado explica por qué solo fuerzas *externas* pueden afectar el movimiento de un cuerpo extenso. Si usted tira de su cinturón hacia arriba, este ejercerá una fuerza igual hacia abajo sobre sus manos; se trata de fuerzas *internas* que se cancelan y no afectan el movimiento global del cuerpo.

Suponga que un obús con una trayectoria parabólica (ignorando la resistencia del aire) estalla en vuelo dividiéndose en dos fragmentos de igual masa (figura 8.31*a*). Los fragmentos siguen nuevas trayectorias parabólicas, pero el centro de masa sigue la trayectoria parabólica original, como si toda la masa aún estuviera concentrada ahí. Un juego pirotécnico que estalla en el aire (figura 8.31*b*) es un ejemplo espectacular de este efecto.

8.31 *a*) Un obús estalla en vuelo produciendo dos fragmentos. Si la resistencia del aire es despreciable, el centro de masa sigue la misma trayectoria que tenía el obús antes de estallar. *b*) El mismo efecto se da cuando estallan juegos pirotécnicos.

a)



b)



Esta propiedad del centro de masa es importante al analizar el movimiento de cuerpos rígidos. Describimos el movimiento de un cuerpo extenso como la combinación de un movimiento de traslación del centro de masa y la rotación alrededor de un eje que pasa por ese centro de masa. Volveremos a este tema en el capítulo 10. Tal propiedad también es importante en el movimiento de objetos astronómicos. No es correcto decir que la Luna está en órbita alrededor de la Tierra; más bien, ambos cuerpos se mueven en órbitas alrededor de su centro de masa.

Hay otra forma más útil de describir el movimiento de un sistema de partículas. Usando $\vec{a}_{cm} = d\vec{v}_{cm}/dt$, podemos rescribir la ecuación (8.33) como

$$M\vec{a}_{cm} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d(M\vec{v}_{cm})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{8.35}$$

La masa total M del sistema es constante, así que podemos incluirla en la derivada. Al sustituir la ecuación (8.35) en la (8.34), obtenemos

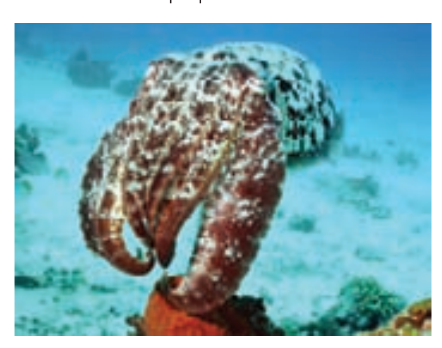
$$\sum\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{(cuerpo extenso o sistema de partículas)} \tag{8.36}$$

Esta ecuación se parece a la (8.4). La diferencia es que la ecuación (8.36) describe un *sistema* de partículas, como un cuerpo extenso, y la ecuación (8.4) describe una sola partícula. Las interacciones entre las partículas del sistema pueden alterar los momentos lineales individuales de las partículas, pero el momento lineal *total* $\vec{P}$ del sistema solo puede cambiar si fuerzas externas actúan sobre el sistema.

Por último, observamos que, si la fuerza externa neta es cero, la ecuación (8.34) dice que la aceleración $\vec{a}_{cm}$ del centro de masa es cero. Así que la velocidad $\vec{v}_{cm}$ del centro de masa es constante, como en el caso de la llave de la figura 8.29. De acuerdo con la ecuación (8.36), el momento lineal total $\vec{P}$ también es constante. Esto reafirma nuestro planteamiento del principio de conservación del momento lineal que hicimos en la sección 8.3.

Evalúe su comprensión de la sección 8.5 ¿El centro de masa en la figura 8.31*a* continuará en la misma trayectoria parabólica incluso después de que uno de los fragmentos golpee el suelo? ¿Por qué? ❙

Aplicación Propulsión a reacción de los calamares
Tanto un motor a reacción como un calamar usan variaciones en su masa para obtener propulsión. Ambos incrementan su masa tomando un fluido a baja velocidad (aire en el caso del motor, y agua en el del calamar); luego, su masa disminuye al expulsar ese fluido a alta velocidad. El resultado neto es una fuerza de propulsión.



MasteringPHYSICS®
ActivPhysics 6.6: Saving an Astronaut

8.6 Propulsión de un cohete

Las consideraciones de momento lineal son especialmente útiles para analizar un sistema en el que las masas de sus partes cambian con el tiempo. En tales casos, no es posible usar la segunda ley de Newton $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ directamente porque m cambia. La propulsión de un cohete es un ejemplo típico e interesante de este tipo de análisis. Un cohete es impulsado hacia adelante por la expulsión hacia atrás de combustible quemado que inicialmente estaba en la nave. La fuerza hacia adelante que actúa sobre el cohete es la reacción a la fuerza hacia atrás que actúa sobre el material expulsado. La masa total del sistema es constante, pero la del cohete disminuye al expulsarse material.

Como un ejemplo sencillo, consideremos un cohete encendido en el espacio exterior, donde no hay fuerza gravitacional ni resistencia del aire. Denotamos con m la masa del cohete, la cual cambiará al irse consumiendo el combustible. Elegimos el eje x en la dirección de movimiento del cohete. La figura 8.32*a* muestra el cohete en el instante t, cuando su masa es m y la componente x de su velocidad relativa a nuestro sistema de coordenadas es v. (Por sencillez, omitiremos el subíndice x en este análisis). La componente x del momento lineal total en este instante es $P_1 = mv$. En un lapso corto dt, la masa del cohete cambia en dm. Esta cantidad es intrínsecamente negativa porque la masa m del cohete *disminuye* con el tiempo. Durante dt, se expulsa una masa *positiva* $-dm$ de combustible quemado. Sea v_{esc} la *rapidez* de escape de este material *relativa al cohete*; el combustible quemado se expulsa en dirección opuesta al movimiento, así que su componente x de *velocidad* relativa al cohete es $-v_{esc}$. La

componente x de velocidad v_{cq} del combustible quemado con respecto a nuestro sistema de coordenadas es entonces

$$v_{cq} = v + (-v_{esc}) = v - v_{esc}$$

y la componente x del momento lineal de la masa expulsada ($-dm$) es

$$(-dm)v_{cq} = (-dm)(v - v_{esc})$$

Como se indica en la figura 8.32*b*, al final del intervalo de tiempo dt, la componente x de velocidad del cohete y el combustible no quemado ha aumentado a $v + dv$, y su masa ha disminuido a $m + dm$ (recuerde que dm es negativa). El momento lineal del cohete en este instante es

$$(m + dm)(v + dv)$$

Por lo tanto, la componente x *total* de momento lineal P_2 del cohete más el combustible quemado en el instante $t + dt$ es

$$P_2 = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - v_{esc})$$

De acuerdo con nuestra suposición inicial, el cohete y el combustible son un sistema aislado, así que el momento lineal se conserva y la componente x total del momento lineal del sistema debe ser la misma en t y en $t + dt$: $P_1 = P_2$. Por lo tanto,

$$mv = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - v_{esc})$$

Esto puede simplificarse a

$$m\,dv = -dm\,v_{esc} - dm\,dv$$

Podemos despreciar el término ($-dm\,dv$) porque es el producto de dos cantidades pequeñas y, por lo tanto, mucho menor que los otros términos. Al desechar este término, dividiendo el resto entre dt y reordenando, obtenemos

$$m\frac{dv}{dt} = -v_{esc}\frac{dm}{dt} \tag{8.37}$$

Ahora dv/dt es la aceleración del cohete, así que el primer miembro de la ecuación (masa por aceleración) es igual a la fuerza neta F, o *empuje*, que actúa sobre el cohete:

$$F = -v_{esc}\frac{dm}{dt} \tag{8.38}$$

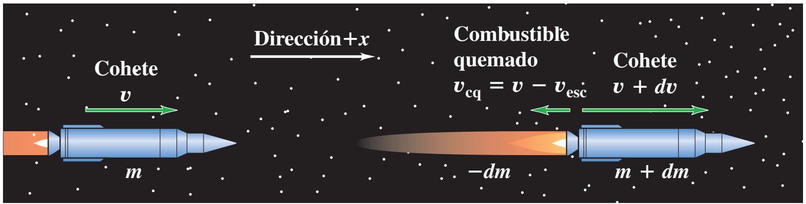
El empuje es proporcional tanto a la rapidez relativa v_{esc} del combustible expulsado como a la masa de combustible expulsado por unidad de tiempo, $-dm/dt$. (Recuerde que dm/dt es negativa porque es la tasa de cambio de la masa del cohete, así que F es positiva).

La componente x de la aceleración del cohete es

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{v_{esc}}{m}\frac{dm}{dt} \tag{8.39}$$

8.32 Un cohete se mueve en el espacio exterior sin gravedad *a*) en el instante t y *b*) en el instante $t + dt$.

a) *b*)



En el tiempo t, el cohete tiene masa m y una componente x de la velocidad v.

En el tiempo $t + dt$, el cohete tiene masa $m + dm$ (donde dm es intrínsecamente *negativa*) y componente x de la velocidad $v + dv$. El combustible quemado tiene una componente x de velocidad $v_{cq} = v - v_{esc}$ y masa $-dm$. (Se necesita el signo menos para hacer $-dm$ *positivo* porque dm es negativo).



Video Tutor Demo

8.33 Con la finalidad de dar suficiente empuje para elevar su carga en el espacio, el vehículo de lanzamiento Atlas V expele más de 1000 kg de combustible quemado por segundo con una rapidez de casi 4000 m/s.



Esta es positiva porque v_{esc} es positiva (recuerde, es la *rapidez* de escape) y dm/dt es negativa. La masa m del cohete disminuye continuamente al consumirse el combustible. Si v_{esc} y dm/dt son constantes, la aceleración aumenta hasta agotarse el combustible.

La ecuación (8.38) nos dice que un cohete eficaz quema combustible rápidamente ($-dm/dt$ grande), y lo expulsa con rapidez relativa alta (v_{esc} grande), como en la figura 8.33. En los albores de la propulsión a reacción, quienes no entendían la conservación del momento lineal pensaban que un cohete no funcionaría en el espacio exterior porque "no tendría contra qué empujar". Al contrario, los cohetes funcionan de manera *óptima* en el espacio ¡porque no hay resistencia del aire! El cohete de la figura 8.33 *no* está "empujando contra el suelo" para elevarse.

Si la rapidez de escape v_{esc} es constante, podemos integrar la ecuación (8.39) para obtener una relación entre la velocidad v en cualquier instante y la masa restante m. En el instante $t = 0$, sea la masa m_0 y la velocidad v_0. Entonces rescribimos la ecuación (8.39) como

$$dv = -v_{esc}\frac{dm}{m}$$

Cambiamos las variables de integración a v' y m', para poder usar v y m como límites superiores (rapidez y masa finales). Integramos ambos lados usando los límites v_0 a v y m_0 a m, y sacamos la constante v_{esc} de la integral:

$$\int_{v_0}^{v} dv' = -\int_{m_0}^{m} v_{esc}\frac{dm'}{m'} = -v_{esc}\int_{m_0}^{m}\frac{dm'}{m'}$$

$$v - v_0 = -v_{esc}\ln\frac{m}{m_0} = v_{esc}\ln\frac{m_0}{m} \qquad (8.40)$$

La razón m_0/m es la masa original dividida entre la masa después de agotarse el combustible. En naves espaciales prácticas, esta razón se hace lo más grande posible para tener una ganancia máxima de rapidez, lo cual implica que la masa inicial del cohete es casi puro combustible. La velocidad final del cohete será mayor en magnitud (a menudo *mucho* mayor) que la rapidez relativa v_{esc} si $\ln(m_0/m) > 1$, es decir, $m_0/m > e = 2.71828\ldots$

Hemos supuesto en todo este análisis que el cohete se encuentra en el espacio exterior, sin gravedad. Sin embargo, la fuerza de gravedad debe tenerse en cuenta si el cohete se lanza desde la superficie de un planeta, como en la figura 8.33 (véase el problema 8.112).

Ejemplo 8.15 Aceleración de un cohete



Un cohete está en el espacio exterior, lejos de cualquier planeta, cuando enciende su motor. El cohete expulsa el combustible a una tasa constante; en el primer segundo de encendido, el cohete expulsa $\frac{1}{120}$ de su masa inicial m_0 con rapidez relativa de 2400 m/s. ¿Cuál es la aceleración inicial del cohete?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Conocemos la rapidez de escape del cohete, v_{esc}, y la fracción de la masa inicial perdida durante el primer segundo de encendido, con lo que podemos obtener dm/dt. Usaremos la ecuación (8.39) para calcular la aceleración del cohete.

EJECUTAR: Inicialmente, la tasa de cambio de la masa es

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m_0/120}{1\text{ s}} = -\frac{m_0}{120\text{ s}}$$

De acuerdo con la ecuación (8.39),

$$a = -\frac{v_{esc}}{m_0}\frac{dm}{dt} = -\frac{2400\text{ m/s}}{m_0}\left(-\frac{m_0}{120\text{ s}}\right) = 20\text{ m/s}^2$$

EVALUAR: La respuesta no depende de m_0. Si v_{esc} es la misma, la aceleración inicial es la misma para una nave de 120,000 kg que expulsa 1000 kg/s que para un astronauta de 60 kg equipado con un cohete pequeño que expulsa 0.5 kg/s.



Ejemplo 8.16 Rapidez de un cohete

Suponga que $\frac{3}{4}$ de la masa inicial del cohete del ejemplo 8.15 es combustible, de manera que el combustible se consume completamente en 90 s a tasa constante. La masa final del cohete es $m = m_0/4$. Si el cohete parte del reposo en nuestro sistema de coordenadas, calcule su rapidez al final de ese tiempo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: Nos dan la velocidad inicial $v_0 = 0$, la rapidez de escape $v_{esc} = 2400$ m/s, y la masa final m como una fracción de la masa inicial m_0. Usamos la ecuación (8.40) para obtener la rapidez final v:

$$v = v_0 + v_{esc} \ln \frac{m_0}{m} = 0 + (2400 \text{ m/s})(\ln 4) = 3327 \text{ m/s}$$

EVALUAR: Veamos qué sucede a medida que el cohete adquiere rapidez. (Para ilustrar este punto, usaremos más cifras de las significativas). Al principio, cuando la velocidad del cohete es cero, el combustible expulsado se mueve hacia atrás, en relación a nuestro sistema de coordenadas, a 2400 m/s. Conforme el cohete se mueve hacia adelante y acelera, la rapidez del combustible relativa a nuestro sistema de referencia disminuye; cuando la rapidez del cohete alcanza los 2400 m/s, esta rapidez relativa es *cero*. [Conociendo la tasa de consumo de combustible, es posible resolver la ecuación (8.40) para demostrar que esto ocurre en el instante $t = 75.6$ s aproximadamente]. Después de este tiempo, el combustible quemado expulsado se mueve *hacia adelante*, no hacia atrás, en nuestro sistema. En relación con nuestro marco de referencia, la última parte del combustible expulsado tiene una velocidad hacia adelante de 3327 m/s − 2400 m/s = 927 m/s.

Evalúe su comprensión de la sección 8.6 *a*) Si un cohete en el espacio exterior, sin gravedad, tiene el mismo empuje en todo momento, ¿su aceleración es constante, creciente o decreciente? *b*) Si el cohete tiene la misma aceleración en todo momento, ¿el empuje es constante, creciente o decreciente?



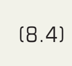
RESUMEN

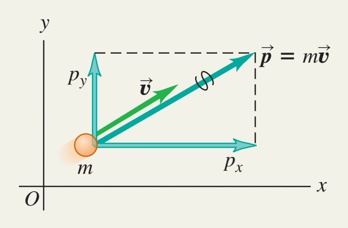


Momento lineal de una partícula: El momento lineal $\vec{p}$ de una partícula es una cantidad vectorial igual al producto de la masa m de la partícula por su velocidad $\vec{v}$. La segunda ley de Newton dice que la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual a la tasa de cambio del momento lineal de la partícula.

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{8.2}$$

$$\sum\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{8.4}$$



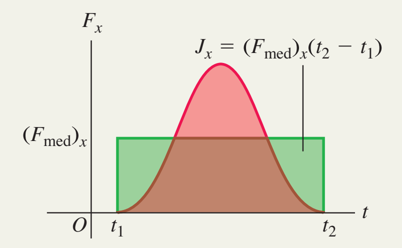


Impulso y momento lineal: Si una fuerza neta constante $\sum\vec{F}$ actúa sobre una partícula durante un intervalo de tiempo Δt de t_1 a t_2, el impulso $\vec{J}$ de la fuerza neta es el producto de la fuerza neta por el intervalo de tiempo. Si $\sum\vec{F}$ varía con el tiempo, $\vec{J}$ es la integral de la fuerza neta en el intervalo de tiempo. En cualquier caso, el cambio en el momento lineal de una partícula durante un intervalo de tiempo es igual al impulso de la fuerza neta que actúa sobre tal partícula durante ese intervalo. El momento lineal de una partícula es igual al impulso que la aceleró desde el reposo hasta su rapidez actual. (Véase los ejemplos 8.1 a 8.3).

$$\vec{J} = \sum\vec{F}(t_2 - t_1) = \sum\vec{F}\,\Delta t \tag{8.5}$$

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \sum\vec{F}\,dt \tag{8.7}$$

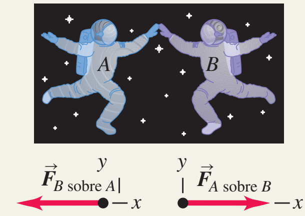
$$\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \tag{8.6}$$



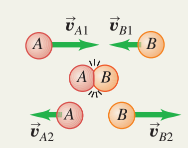
Conservación del momento lineal: Una fuerza interna es una fuerza ejercida por una parte de un sistema sobre otra. Una fuerza externa es una fuerza ejercida sobre cualquier parte del sistema por algún elemento externo al sistema. Si la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema es cero, el momento lineal total $\vec{P}$ del sistema (la suma vectorial de los momentos lineales de las partículas individuales que constituyen el sistema) es constante, esto es, se conserva. Cada componente del momento lineal total se conserva individualmente. (Véase los ejemplos 8.4 a 8.6).

$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B + \cdots$$
$$= m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B + \cdots \tag{8.14}$$

Si $\sum\vec{F} = \mathbf{0}$, entonces $\vec{P} =$ constante.



Choques: En todo tipo de choques, los momentos lineales totales inicial y final son iguales. En un choque elástico entre dos cuerpos, las energías cinéticas totales inicial y final también son iguales, y las velocidades relativas inicial y final tienen la misma magnitud. En un choque inelástico entre dos cuerpos, la energía cinética total final es menor que la inicial. Si los dos cuerpos tienen la misma velocidad final, el choque es totalmente inelástico. (Véase los ejemplos 8.7 a 8.12).

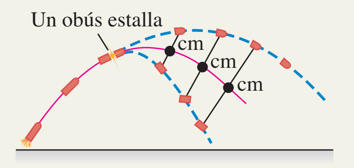


Centro de masa: El vector de posición del centro de masa de un sistema de partículas, $\vec{r}_{cm}$, es un promedio ponderado de las posiciones $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots$ de las partículas individuales. El momento lineal total $\vec{P}$ de un sistema es igual a su masa total M multiplicada por la velocidad $\vec{v}_{cm}$, de su centro de masa. El centro de masa se mueve como si toda la masa M estuviera concentrada en ese punto. Si la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema es cero, la velocidad del centro de masa $\vec{v}_{cm}$ es constante. Si la fuerza externa neta no es cero, el centro de masa se acelera como si fuera una partícula de masa M sobre la que actúa la misma fuerza externa neta. (Véase los ejemplos 8.13 y 8.14).

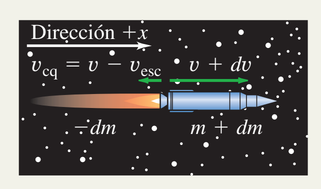
$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$
$$= \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{8.29}$$

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots$$
$$= M\vec{v}_{cm} \tag{8.32}$$

$$\sum\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \tag{8.34}$$



Propulsión de un cohete: En la propulsión de cohetes, la masa de un cohete cambia al quemarse el combustible y ser expulsado de la nave. El análisis del movimiento del cohete debe incluir el momento lineal que se lleva el combustible quemado, así como el del cohete mismo. (Véase los ejemplos 8.15 y 8.16).



PROBLEMA PRÁCTICO Un choque después de otro



Una esfera A de masa igual a 0.600 kg se mueve inicialmente a la derecha a 4.00 m/s. La esfera B, de masa igual a 1.80 kg, se encuentra inicialmente a la derecha de la esfera A y se mueve a la derecha a 2.00 m/s. Después de que las esferas chocan, la esfera B se mueve a 3.00 m/s en la misma dirección de antes. *a*) ¿Cuál es la velocidad (magnitud y dirección) de la esfera A después del choque? *b*) ¿El choque es elástico o inelástico? *c*) Luego, la esfera B tiene un choque desalineado con una esfera C, cuya masa es de 1.20 kg y que inicialmente se encuentra en reposo. Después de este choque, la esfera B se mueve a 2.00 m/s a 19.0° de su dirección inicial. ¿Cuál es la velocidad (magnitud y dirección) de la esfera C después del choque? *d*) ¿Cuál es el impulso (magnitud y dirección) impartido a la esfera B por la esfera C cuando chocan? *e*) ¿Esta segunda colisión es elástica o inelástica? *f*) ¿Cuál es la velocidad (magnitud y dirección) del centro de masa del sistema de tres esferas (A, B y C) después del segundo choque? Ninguna fuerza externa actúa sobre las esferas de este problema.

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. En estos choques, el momento lineal se conserva. ¿Puede explicar por qué?
2. Elija los ejes x y y, y asigne subíndices a los valores antes del primer choque, después del primer choque pero antes del segundo, y después del segundo choque.
3. Elabore una lista de las incógnitas, y elija las ecuaciones que usará para obtenerlas.

EJECUTAR

4. Obtenga la velocidad de la esfera A después del primer choque. ¿A se frena o se acelera con este choque? ¿Esto es lógico?
5. Ahora que conoce las velocidades tanto de A como de B después del primer choque, determine si este es elástico o inelástico. (¿Cómo se hace esto?).
6. El segundo choque es bidimensional, de modo que tendrá que cumplirse que *ambas* componentes del momento lineal se conserven. Use esto para calcular la rapidez y dirección de la esfera C después del segundo choque. (*Sugerencia:* Después del primer choque, la esfera B tiene la misma velocidad hasta que golpea a la esfera C).
7. Use la definición de impulso para calcular el impulso impartido a la esfera B por la esfera C. Recuerde que el impulso es un vector.
8. Use la misma técnica empleada en el paso 5 para determinar si el segundo choque es elástico o no.
9. Calcule la velocidad del centro de masa después del segundo choque.

EVALUAR

10. Compare las direcciones de los vectores que obtuvo en los pasos 6 y 7. ¿Esto es una coincidencia? ¿Por qué?
11. Calcule la velocidad del centro de masa antes y después del primer choque. Compare con el resultado del paso 9. Otra vez, ¿esto es una coincidencia? ¿Por qué?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P8.1 Al partir leños con martillo y cuña, ¿es más efectivo un martillo pesado que uno ligero? ¿Por qué?

P8.2 Suponga que usted atrapa una pelota de béisbol y, después, alguien le ofrece la opción de atrapar una bola para jugar a los bolos con el mismo momento lineal, o bien, con la misma energía cinética que la pelota. ¿Qué elegiría? ¿Por qué?

P8.3 Al caer la lluvia, ¿qué pasa con su momento lineal al golpear el suelo? ¿Es válida su respuesta para la famosa manzana de Newton?

P8.4 Un auto tiene la misma energía cinética si viaja al sur a 30 m/s que si lo hace al noroeste a 30 m/s. ¿Su momento lineal es el mismo en ambos casos? Explique.

P8.5 Un camión acelera conforme se frena en una autopista. Un marco de referencia inercial está fijo al suelo con su origen en un poste. Otro marco está fijo a un automóvil de policía que viaja en la autopista con velocidad constante. ¿El momento lineal del camión es el mismo en ambos marcos de referencia? Explique. ¿La tasa de cambio del momento lineal del camión es la misma en los dos marcos? Explique.

P8.6 *a*) Cuando un automóvil grande choca con uno pequeño, ¿cuál experimenta el mayor cambio en el momento lineal: el automóvil grande o el pequeño? ¿O es igual en ambos? *b*) Considerando la respuesta del inciso *a*), ¿por qué es más probable que los ocupantes del automóvil pequeño se lesionen, suponiendo que ambos automóviles son igual de sólidos?

P8.7 Una mujer de pie en una capa de hielo horizontal sin fricción lanza una roca grande con rapidez v_0 y ángulo α sobre la horizontal. Considere el sistema formado por la mujer y la roca. ¿Se conserva el momento lineal del sistema? ¿Por qué? ¿Se conserva cualquier componente del momento lineal del sistema? Nuevamente, ¿por qué?

P8.8 En el ejemplo 8.7 (sección 8.3), donde los deslizadores de la figura 8.15 quedan unidos después de chocar, el choque es inelástico, ya que $K_2 < K_1$. En el ejemplo 8.5 (sección 8.2), ¿el choque es inelástico? Explique.

P8.9 En un choque totalmente inelástico entre dos objetos que se unen después del choque, ¿es posible que la energía cinética final del sistema sea cero? De ser así, cite un ejemplo. Si la energía cinética final es cero, ¿cuál debe ser el momento lineal inicial del sistema? ¿La energía cinética inicial del sistema es igual a cero? Explique.

P8.10 Puesto que la energía cinética de una partícula está dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$ y su momento lineal por $\vec{p} = m\vec{v}$, es fácil demostrar que $K = p^2/2m$. ¿Cómo es posible entonces tener un evento durante el cual el momento lineal total del sistema sea constante, pero la energía cinética total cambie?

P8.11 En los ejemplos 8.10 a 8.12 (sección 8.4), verifique que el vector de velocidad relativa de los dos cuerpos tenga la misma magnitud antes y después del choque. En cada caso, ¿qué sucede con la *dirección* del vector de velocidad relativa?

P8.12 Si un vidrio cae al piso, es más probable que se rompa si el piso es de concreto que si es de madera. ¿Por qué? (Remítase a la figura 8.3*b*).

P8.13 En la figura 8.22*b*, la energía cinética de la pelota de ping-pong es mayor después de su interacción con la bola para jugar a los bolos que antes. ¿De dónde proviene la energía adicional? Describa el suceso en términos de la conservación de energía.

P8.14 Se dispara una ametralladora hacia una placa de acero. ¿La fuerza media que actúa sobre la placa por los impactos es mayor si las balas rebotan o si se aplastan y se quedan adheridas a la placa? Explique.

P8.15 Una fuerza neta de 4 N actúa durante 0.25 s sobre un objeto en reposo y le imprime una rapidez final de 5 m/s. ¿Cómo podría una fuerza de 2 N producir esa rapidez final?

P8.16 Una fuerza neta cuya componente x es $\sum F_x$ actúa sobre un objeto desde el instante t_1 hasta el t_2. La componente x del momento lineal del objeto es la misma en ambos instantes, pero $\sum F_x$ no siempre es cero en ese lapso. ¿Qué puede decir acerca de la gráfica de $\sum F_x$ contra t?

P8.17 Un tenista golpea la pelota con la raqueta. Considere el sistema de la pelota y la raqueta. ¿El momento lineal total del sistema es el mismo justo antes y justo después del golpe? ¿El momento lineal total justo después del golpe es el mismo que 2 s después, cuando la pelota se encuentra en el punto más alto de su trayectoria? Explique cualquier diferencia entre ambos casos.

P8.18 En el ejemplo 8.4 (sección 8.2), considere el sistema del rifle y la bala. ¿Qué rapidez tiene el centro de masa del sistema después del disparo? Explique su respuesta.

P8.19 Se suelta del reposo un huevo desde una azotea hasta el suelo. Conforme el huevo cae, ¿qué pasa con el momento lineal del sistema formado por el huevo y la Tierra?

P8.20 Una mujer está de pie en el centro de un lago congelado perfectamente liso y sin fricción. Puede ponerse en movimiento aventando objetos, pero suponga que no tiene nada que lanzar. ¿Puede llegar a la orilla *sin* lanzar nada?

P8.21 En un entorno con gravedad cero, ¿puede una nave impulsada por cohetes alcanzar una rapidez mayor que la rapidez relativa con que se expulsa el combustible quemado?

P8.22 Cuando un objeto se divide en dos (por explosión, desintegración radiactiva, etcétera), el fragmento más ligero adquiere más energía cinética que el más pesado (también se pueden incluir los casos en los que ocurre el retroceso). Esto es una consecuencia de la conservación del momento lineal, pero, ¿puede explicarlo también empleando las leyes de Newton del movimiento?

P8.23 Una manzana cae de un árbol sin experimentar resistencia del aire. Conforme cae, ¿cuál de los siguientes enunciados acerca de ella es verdadero? *a*) Solo su momento lineal se conserva; *b*) solo su energía mecánica se conserva; *c*) tanto su momento lineal como su energía mecánica se conservan; *d*) su energía cinética se conserva.

P8.24 Dos trozos de arcilla chocan y quedan pegados. Durante el choque, ¿cuál de los siguientes enunciados es verdadero? *a*) Solo el momento lineal de la arcilla se conserva; *b*) solo la energía mecánica de la arcilla se conserva; *c*) tanto el momento lineal como la energía mecánica de la arcilla se conservan; *d*) la energía cinética de la arcilla se conserva.

P8.25 Dos canicas se presionan contra un ligero resorte ideal entre ellas, sin que estén unidas al resorte de ninguna forma. Luego, se les libera sobre una mesa horizontal sin fricción y pronto se alejan libremente del resorte. Conforme las canicas se alejan entre sí, ¿cuál de los siguientes enunciados acerca de ellas es verdadero? *a*) Solo el momento lineal de las canicas se conserva; *b*) solo la energía mecánica de las canicas se conserva; *c*) tanto el momento lineal como la energía mecánica de las canicas se conservan; *d*) la energía cinética de las canicas se conserva.

P8.26 Una camioneta muy pesada choca de frente con un automóvil compacto muy ligero. ¿Cuál de los siguientes enunciados acerca del choque es correcto? *a*) La cantidad de energía cinética que pierde la camioneta es igual a la cantidad de energía cinética que gana el automóvil compacto; *b*) el momento lineal que pierde la camioneta es igual al momento lineal que gana el automóvil compacto; *c*) durante el choque, el automóvil compacto experimenta una fuerza considerablemente mayor que la camioneta; *d*) ambos vehículos pierden la misma cantidad de energía cinética.

EJERCICIOS

Sección 8.1 Momento lineal e impulso

8.1 • *a*) ¿Qué magnitud tiene el momento lineal de un camión de 10,000 kg que viaja con rapidez de 12.0 m/s? *b*) ¿Con qué rapidez tendría que viajar una camioneta de 2000 kg para tener **i.** el mismo momento lineal? **ii.** ¿la misma energía cinética?

8.2 • En una competencia varonil de pista y campo, la bala tiene una masa de 7.30 kg y se lanza con una rapidez de 15.0 m/s a 40.0° por encima de la horizontal ubicada sobre la pierna izquierda extendida de un hombre. ¿Cuáles son las componentes iniciales horizontal y vertical del momento lineal de esa bala?

8.3 •• *a*) Demuestre que la energía cinética K y la magnitud del momento lineal p de una partícula de masa m están relacionadas por la expresión $K = p^2/2m$. *b*) Un cardenal (*Richmondena cardinalis*) de 0.040 kg y una pelota de béisbol de 0.145 kg tienen la misma energía cinética. ¿Cuál tiene mayor magnitud de momento lineal? ¿Cuál es la razón entre las magnitudes del momento lineal del cardenal y de la pelota? *c*) Un hombre de 700 N y una mujer de 450 N tienen el mismo momento lineal. ¿Quién tiene mayor energía cinética? ¿Cuál es la razón entre las energías cinéticas del hombre y de la mujer?

8.4 • Dos vehículos se aproximan a una intersección. Uno es una camioneta *pickup* de 2500 kg que viaja a 14.0 m/s con dirección este-oeste (la dirección $-x$), y el otro es un automóvil sedán de 1500 kg que va de sur a norte (la dirección $+y$) a 23.0 m/s. *a*) Determine las componentes x y y del momento lineal neto de este sistema. *b*) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del momento lineal neto?

8.5 • Un defensor de línea de fútbol americano de 110 kg corre hacia la derecha a 2.75 m/s, mientras otro defensor de 125 kg corre directamente hacia el primero a 2.60 m/s. ¿Cuáles son *a*) la magnitud y dirección del momento lineal neto de estos dos deportistas, y *b*) su energía cinética total?

8.6 •• BIO **Biomecánica.** La masa de una pelota de tenis reglamentaria es de 57 g (si bien puede variar ligeramente), y las pruebas han demostrado que la pelota está en contacto con la raqueta durante 30 ms. (Este número también puede variar, dependiendo de la raqueta y del golpe). En este ejercicio supondremos un contacto de 30.0 ms. El servicio de tenis más rápido que se conoce lo realizó "Big Bill" Tilden en 1931 con una rapidez de 73.14 m/s. *a*) ¿Qué impulso y qué fuerza ejerció Big Bill sobre la pelota de tenis en su servicio récord? *b*) Si el oponente de Big Bill devolvió su servicio con una rapidez de 55 m/s, ¿qué fuerza e impulso ejerció sobre la pelota, suponiendo solo movimiento horizontal?

8.7 • **Fuerza de un golpe de golf.** Una pelota de golf de 0.0450 kg, en reposo, adquiere una rapidez de 25.0 m/s al ser golpeada por un palo. Si el tiempo de contacto es de 2.00 ms, ¿qué fuerza media actúa

sobre la pelota? ¿Es significativo el efecto del peso de la pelota durante el tiempo de contacto? ¿Por qué?

8.8 • **Fuerza de un batazo.** Una pelota de béisbol tiene masa de 0.145 kg. *a*) Si se lanza con una velocidad de 45.0 m/s y después de batearla su velocidad es de 55.0 m/s en la dirección opuesta, determine la magnitud del cambio de momento lineal de la pelota y el impulso aplicado a ella con el bate. *b*) Si la pelota está en contacto con el bate durante 2.00 ms, calcule la magnitud de la fuerza media aplicada por el bate.

8.9 • Un disco de hockey de 0.160 kg se mueve en una superficie horizontal cubierta de hielo y sin fricción. En $t = 0$, el disco se mueve hacia la derecha a 3.00 m/s. *a*) Calcule la velocidad (magnitud y dirección) del disco después de que se aplica una fuerza de 25.0 N hacia la derecha durante 0.050 s. *b*) Si, en lugar de ello, se aplica una fuerza de 12.0 N dirigida a la izquierda, entre $t = 0$ y $t = 0.050$ s, ¿cuál es la velocidad final del disco?

8.10 • El motor de un sistema de maniobras orbitales (OMS) del transbordador espacial ejerce una fuerza de $(26{,}700\text{ N})\hat{\boldsymbol{j}}$ durante 3.90 s, expulsando una masa insignificante de combustible en comparación con la masa de 95,000 kg de la nave. *a*) ¿Qué impulso tiene la fuerza en el lapso de 3.90 s? *b*) ¿Cómo cambia el momento lineal de la nave por este impulso? *c*) ¿Y su velocidad? *d*) ¿Por qué no podemos calcular el cambio resultante en la energía cinética del transbordador?

8.11 • **CALC** En el instante $t = 0$, un cohete de 2150 kg en el espacio exterior enciende un motor que ejerce una fuerza creciente sobre él en la dirección $+x$. Esta fuerza obedece la ecuación $F_x = At^2$, donde t es el tiempo, y tiene una magnitud de 781.25 N cuando $t = 1.25$ s. *a*) Calcule el valor en el SI de la constante A, incluyendo sus unidades. *b*) ¿Qué impulso ejerce el motor sobre el cohete durante el lapso de 1.50 s que comienza 2.00 s después de encender el motor? *c*) ¿Cuánto cambia la velocidad del cohete durante ese lapso?

8.12 •• Un bate golpea una pelota de 0.145 kg. Justo antes del impacto, la pelota viaja horizontalmente hacia la derecha a 50.0 m/s, y pierde contacto con el bate viajando hacia la izquierda a 65.0 m/s con un ángulo de 30° por arriba de la horizontal. Si la pelota y el bate están en contacto durante 1.75 ms, calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza media que actúa sobre la pelota.

8.13 • Una piedra de 2.00 kg se desliza hacia la derecha por una superficie horizontal sin fricción a 5.00 m/s, cuando repentinamente es golpeada por un objeto que ejerce una gran fuerza horizontal sobre ella por un breve lapso. La gráfica en la figura E8.13 indica la magnitud de esa fuerza como función del tiempo. *a*) ¿Qué impulso ejerce esa fuerza sobre la piedra? *b*) Calcule la magnitud y dirección de la velocidad de la piedra inmediatamente después de que la fuerza deja de actuar, si esa fuerza actúa **i.** hacia la derecha o **ii.** hacia la izquierda.

Figura **E8.13**

8.14 •• **BIO** **Fractura de un hueso.** Pruebas experimentales han demostrado que un hueso se romperá si experimenta una densidad de fuerza de 1.03×10^8 N/m^2. Suponga que una persona de 70.0 kg patina sin cuidado hacia una viga de metal que golpea con su frente y detiene completamente su movimiento hacia adelante. Si el área de contacto con la frente de la persona es de 1.5 cm^2, ¿cuál es la máxima rapidez con la cual puede golpear la viga sin romperse un hueso cuando su cabeza está en contacto con la viga por 10.0 ms?

8.15 •• Durante su calentamiento para un partido, una jugadora de tenis golpea verticalmente una pelota de 57.0 g con su raqueta. Si la pelota está en reposo justo antes de ser golpeada y adquiere una altura de 5.50 m, ¿qué impulso dio la jugadora a la pelota?

8.16 •• **CALC** Partiendo en $t = 0$, se aplica una fuerza neta horizontal $\vec{F} = (0.280\text{ N/s})t\hat{\boldsymbol{\imath}} + (-0.450\text{ N/s}^2)t^2\hat{\boldsymbol{j}}$ a una caja que tiene un momento lineal inicial $\vec{p} = (-3.00\text{ kg}\cdot\text{m/s})\hat{\boldsymbol{\imath}} + (4.00\text{ kg}\cdot\text{m/s})\hat{\boldsymbol{j}}$. ¿Cuál es el momento lineal de la caja en $t = 2.00$ s?

Sección 8.2 Conservación del momento lineal

8.17 •• Los gases en expansión que salen por el cañón de un rifle también contribuyen al retroceso. Una bala de calibre .30 tiene una masa de 0.00720 kg y una rapidez de 601 m/s relativa al cañón del rifle, cuya masa es de 2.80 kg. El rifle, sostenido sin firmeza, retrocede a 1.85 m/s en relación con el suelo. Calcule el momento lineal de los gases al salir del cañón, en un sistema de coordenadas fijo al suelo.

8.18 • Una astronauta de 68.5 kg está haciendo una reparación en el espacio en la estación espacial en órbita. Ella arroja una herramienta de 2.25 kg con una rapidez de 3.20 m/s en relación con la estación espacial. ¿Con qué rapidez y dirección comenzará a moverse la astronauta?

8.19 • **BIO** **Propulsión animal.** Los calamares y pulpos se impulsan a sí mismos expeliendo agua. Para hacer esto, guardan agua en una cavidad y luego contraen repentinamente esa cavidad para forzar la salida del agua a través de una abertura. Un calamar de 6.50 kg (incluyendo el agua en la cavidad) está en reposo, cuando de pronto ve un peligroso depredador. *a*) Si el calamar tiene 1.75 kg de agua en su cavidad, ¿con qué rapidez debe expeler esa agua para alcanzar una rapidez de 2.50 m/s y escapar así del depredador? Desprecie cualquier efecto de arrastre del agua circundante. *b*) ¿Cuánta energía cinética genera el calamar con esta maniobra?

8.20 •• Suponga que usted está de pie en una plancha de hielo que cubre el estacionamiento del estadio de fútbol americano de Buffalo; la fricción entre sus pies y el hielo es insignificante. Un amigo le lanza un balón de 0.400 kg que viaja horizontalmente a 10.0 m/s. La masa de usted es de 70.0 kg. *a*) Si atrapa el balón, ¿con qué rapidez se moverán usted y el balón después? *b*) Si el balón lo golpea en el pecho y rebota moviéndose horizontalmente a 8.0 m/s en la dirección opuesta, ¿qué rapidez tendrá usted después del choque?

8.21 •• En una mesa de aire horizontal sin fricción, el disco A (con masa de 0.250 kg) se mueve hacia el disco B (con masa de 0.350 kg) que está en reposo. Después del choque, A se mueve a 0.120 m/s a la izquierda, y B lo hace a 0.650 m/s a la derecha. *a*) ¿Qué rapidez tenía A antes del choque? *b*) Calcule el cambio de energía cinética total del sistema durante el choque.

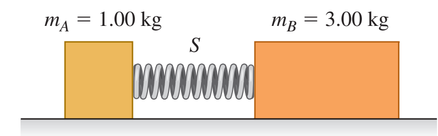
8.22 •• Cuando los automóviles están equipados con parachoques (defensas) flexibles, rebotan durante choques a baja rapidez, provocando daños menores. En un accidente de este tipo, un auto de 1750 kg viaja hacia la derecha a 1.50 m/s y choca con un auto de 1450 kg que va hacia la izquierda a 1.10 m/s. Las mediciones indican que la rapidez del auto más pesado inmediatamente después del choque era de 0.250 m/s en su dirección original. Podemos ignorar la fricción de la carretera durante el choque. *a*) ¿Cuál era la rapidez del auto más ligero inmediatamente después del choque? *b*) Calcule el cambio en la energía cinética combinada del sistema de los dos vehículos durante este choque.

8.23 •• Dos masas idénticas de 1.50 kg se presionan contra los extremos opuestos de un resorte ligero con constante de fuerza de 1.75 N/cm, comprimiendo el resorte 20.0 cm a partir de su longitud normal. Calcule la rapidez de cada masa cuando se mueven libremente sobre una mesa horizontal sin fricción.

8.24 • El bloque A de la figura E8.24 tiene una masa de 1.00 kg, y el B, de 3.00 kg. A y B se juntan de manera forzada, comprimiendo un

resorte S entre ellos; luego, el sistema se suelta del reposo en una superficie plana sin fricción. El resorte, de masa despreciable, está suelto y cae a la superficie después de extenderse. El bloque B adquiere una rapidez de 1.20 m/s. *a*) ¿Qué rapidez final tiene A? *b*) ¿Cuánta energía potencial se almacenó en el resorte comprimido?

Figura **E8.24**



8.25 •• Un cazador que se encuentra sobre un estanque congelado y sin fricción utiliza un rifle que dispara balas de 4.20 g a 965 m/s. La masa del cazador (incluyendo su rifle) es de 72.5 kg; el hombre sostiene con fuerza el arma después de disparar. Calcule la velocidad de retroceso del cazador si dispara el rifle *a*) horizontalmente y *b*) a 56.0° por encima de la horizontal.

8.26 • Un núcleo atómico súbitamente se fisiona (se divide) en dos partes. El fragmento A, de masa m_A, viaja hacia la izquierda con una rapidez v_A. El fragmento B, de masa m_B, viaja hacia la derecha con una rapidez v_B. *a*) Con base en la conservación del momento lineal, despeje v_B en términos de m_A, m_B y v_A. *b*) Utilice los resultados del inciso *a*) para demostrar que $K_A/K_B = m_B/m_A$, donde K_A y K_B son las energías cinéticas de los dos fragmentos.

8.27 •• Dos patinadores, Daniel (masa de 65.0 kg) y Rebeca (masa de 45.0 kg) están practicando. Daniel se detiene para atar su agujeta y, cuando está detenido, es golpeado por Rebeca, quien se desplazaba a 13.0 m/s antes de chocar con él. Después del choque, Rebeca se mueve con una velocidad de magnitud igual a 8.00 m/s con un ángulo de 53.1° con respecto a su dirección original. Ambos patinadores se mueven en una superficie de patinaje horizontal y sin fricción. *a*) Calcule la magnitud y dirección de la velocidad de Daniel después del choque. *b*) ¿Cuál es el cambio en la energía cinética total de los dos patinadores como resultado del choque?

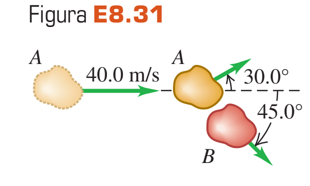
8.28 •• Usted está de pie sobre una gran plancha de hielo sin fricción, sosteniendo una gran roca. Para salir del hielo, usted avienta la roca de manera que esta adquiere una velocidad relativa a la Tierra de 12.0 m/s, a 35.0° por arriba de la horizontal. Si su masa es de 70.0 kg y la masa de la roca es de 15.0 kg, ¿qué rapidez tiene usted después de lanzar la roca? (Véase la pregunta para análisis P8.7).

8.29 • **Masa variable.** Un vagón abierto de 24,000 kg viaja sin fricción sobre una vía horizontal. Está lloviendo muy fuerte, y la lluvia cae de forma vertical. El vagón originalmente está vacío y tiene una rapidez de 4.00 m/s. *a*) ¿Qué rapidez tiene el vagón después de acumular 3000 kg de agua de lluvia? *b*) Puesto que la lluvia cae verticalmente, ¿cómo afecta esto al movimiento horizontal del vagón?

8.30 • Un astronauta en el espacio no puede utilizar medios convencionales, como una báscula o balanza, para determinar la masa de un objeto. Pero cuenta con dispositivos para medir la distancia y el tiempo de manera exacta. Él sabe que su masa es de 78.4 kg, pero no está seguro de la masa de un enorme tanque de gas en el interior del cohete sin aire. Cuando el tanque se aproxima a él a 3.50 m/s, empuja su cuerpo contra este, lo que disminuye la rapidez del tanque a 1.20 m/s (pero no invierte su dirección) y da al astronauta una rapidez de 2.40 m/s. ¿Cuál es la masa del tanque?

8.31 •• **Choque de asteroides.** Dos asteroides de igual masa, pertenecientes al cinturón de asteroides entre Marte y Júpiter, chocan de forma oblicua. El asteroide A, que inicialmente viajaba a 40.0 m/s, se desvía 30.0° con respecto a su dirección original, mientras que el asteroide B, que inicialmente estaba en reposo, viaja a 45.0° con respecto a la dirección original de A (figura E8.31). *a*) Calcule la rapidez de cada asteroide después del choque. *b*) ¿Qué fracción de la energía cinética original del asteroide A se disipa durante el choque?

Figura **E8.31**



Sección 8.3 Conservación del momento lineal y choques

8.32 • Dos patinadores chocan y quedan asidos sobre una pista de hielo sin fricción. Uno de ellos, cuya masa es de 70.0 kg, se movía hacia la derecha a 2.00 m/s, mientras que el otro, cuya masa es de 65.0 kg, se movía hacia la izquierda a 2.50 m/s. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la velocidad de estos patinadores inmediatamente después de que chocan?

8.33 •• Un pez de 15.0 kg, que nada a 1.10 m/s, repentinamente engulle un pez de 4.50 kg que estaba detenido. Desprecie los efectos de arrastre del agua. *a*) Calcule la rapidez del pez grande inmediatamente después de haberse comido al pequeño. *b*) ¿Cuánta energía mecánica se disipó durante esta comida?

8.34 • Dos amorosas nutrias se deslizan una hacia la otra por una superficie horizontal lodosa (y por lo tanto, sin fricción). Una de ellas, con masa de 7.50 kg, se desliza hacia la izquierda a 5.00 m/s, mientras que la otra, con masa de 5.75 kg, se desliza hacia la derecha a 6.00 m/s. Las nutrias quedan unidas después de chocar. *a*) Calcule la magnitud y la dirección de la velocidad de estas nutrias después del choque. *b*) ¿Cuánta energía mecánica se disipa durante este juego?

8.35 • **Misión de impacto profundo.** En julio de 2005, en la misión "Impacto Profundo" de la NASA, una sonda de 372 kg, que se desplazaba a 37,000 km/h, chocó directamente contra la superficie del cometa Tempel 1. La rapidez original del cometa en ese momento era de 40,000 km/h y su masa se estimó en el rango de $(0.10 - 2.5) \times 10^{14}$ kg. Utilice el menor valor de la masa estimada. *a*) ¿Cuál es el cambio en la velocidad del cometa que se produjo por el choque? ¿Será perceptible ese cambio? *b*) Suponga que este cometa fuera a chocar contra la Tierra para fusionarse con ella. ¿En cuánto cambiaría la velocidad de nuestro planeta? ¿Sería apreciable ese cambio? (La masa de la Tierra es de 5.97×10^{24} kg).

8.36 • Un auto deportivo de 1050 kg se desplaza hacia el oeste a 15.0 m/s por una carretera horizontal cuando choca con un camión de 6320 kg, que viaja hacia el este por el mismo camino a 10.0 m/s. Los dos vehículos quedan unidos después del choque. *a*) ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tendrán los dos vehículos inmediatamente después del choque? *b*) ¿Qué rapidez debería llevar el camión para que ambos vehículos se detengan por el choque? *c*) Encuentre el cambio de energía cinética del sistema de los dos vehículos en las situaciones de los incisos *a*) y *b*). ¿En cuál situación tiene mayor magnitud el cambio de energía cinética?

8.37 •• En un campo de fútbol muy lodoso, un apoyador de 110 kg taclea a un corredor de 85 kg. Justo antes del choque, el apoyador resbala con una velocidad de 8.8 m/s hacia el norte, y el corredor lo hace con una velocidad de 7.2 m/s hacia el este. ¿Con qué velocidad (magnitud y dirección) se mueven juntos los dos jugadores inmediatamente después del choque?

8.38 •• **Análisis de un accidente.** Dos automóviles chocan en una intersección. El automóvil A, con masa de 2000 kg, va de oeste a este, mientras que el automóvil B, con masa de 1500 kg, va de norte a sur a 15 m/s. Como resultado de este choque, los dos automóviles quedan enredados y se mueven después como uno solo. En su papel de testigo experto, usted inspecciona la escena y determina que, después del cho-

que, los automóviles se movieron a un ángulo de 65° al sur del este del punto de impacto. *a*) Con qué rapidez se mueven los automóviles justo después del choque? *b*) ¿Con qué rapidez iba el automóvil *A* inmediatamente antes del choque?

8.39 • Dos automóviles, uno compacto con masa de 1200 kg y otro grande, un devorador de gasolina, de 3000 kg, chocan de frente a velocidades típicas de autopista. *a*) ¿Cuál experimenta un cambio de mayor magnitud en su momento lineal? ¿Cuál experimenta un mayor cambio de velocidad? *b*) Si el automóvil más grande cambia su velocidad en Δv, calcule el cambio en la velocidad del automóvil pequeño en términos de Δv. *c*) ¿Los ocupantes de cuál automóvil esperaría usted que sufran lesiones más graves? Explique su respuesta.

8.40 •• BIO **Defensa de las aves.** Para proteger a sus crías en el nido, los halcones peregrinos vuelan tras las aves de rapiña (como los cuervos) con gran rapidez. En uno de tales episodios, un halcón de 600 g que vuela a 20.0 m/s choca con un cuervo de 1.50 kg que vuela a 9.0 m/s. El halcón choca con el cuervo en ángulo recto con respecto a su trayectoria original y rebota a 5.0 m/s. (Estas cifras son estimaciones del autor, quien presenció este ataque en el norte de Nuevo México). *a*) ¿En qué ángulo cambió el halcón la dirección del vuelo del cuervo? *b*) ¿Cuál era la rapidez del cuervo inmediatamente después del choque?

8.41 • En el cruce de la Avenida Texas y el Paseo Universitario, un automóvil subcompacto amarillo de 950 kg que viaja al este por el Paseo choca con una camioneta *pickup* color rojo de 1900 kg que viaja al norte por la Avenida Texas y no respetó el alto de un semáforo (figura E8.41). Los dos vehículos quedan unidos después del choque y se deslizan a 16.0 m/s en dirección 24.0° al este del norte. Calcule la rapidez de cada vehículo antes del choque. El choque tiene lugar durante una tormenta; las fuerzas de fricción entre los vehículos y el pavimento húmedo son despreciables.

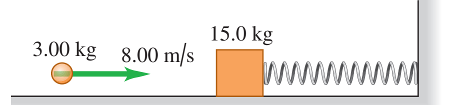
Figura **E8.41**

8.42 •• Una bala de 5.00 g se dispara horizontalmente hacia un bloque de madera de 1.20 kg que descansa en una superficie horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es de 0.20. La bala queda incrustada en el bloque, que se desliza 0.230 m por la superficie antes de detenerse. ¿Qué rapidez tenía inicialmente la bala?

8.43 •• **Péndulo balístico.** Una bala de rifle de 12.0 g se dispara a 380 m/s contra un péndulo balístico de 6.00 kg, suspendido de una cuerda de 70.0 cm de longitud (véase el ejemplo 8.8, sección 8.3). Calcule *a*) la distancia vertical que sube el péndulo, *b*) la energía cinética inicial de la bala y *c*) la energía cinética de la bala y el péndulo inmediatamente después de que la bala se incrusta en el péndulo.

8.44 •• **Combinación de las leyes de conservación.** Un bloque de 15.0 kg está sujeto a un resorte horizontal muy ligero con constante de fuerza de 500.0 N/m, que reposa sobre una mesa horizontal sin fricción (figura E8.44). De repente, es golpeado por una piedra de 3.00 kg que viaja de forma horizontal a 8.00 m/s hacia la derecha, con lo cual la piedra rebota horizontalmente a 2.00 m/s hacia la izquierda. Calcule la distancia máxima que el bloque comprime el resorte después del choque.

Figura **E8.44**



8.45 •• PA Un adorno de 5.00 kg cuelga de un alambre de 1.50 m cuando es golpeado repentinamente por un proyectil de 3.00 kg que viaja en trayectoria horizontal a 12.0 m/s. El proyectil se incrusta en el adorno durante el choque. ¿Cuál es la tensión del alambre inmediatamente después del choque?

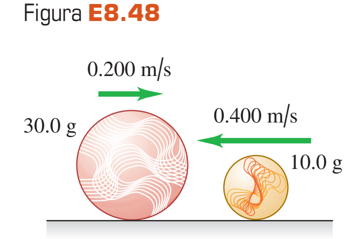
Sección 8.4 Choques elásticos

8.46 •• Un deslizador de 0.150 kg se mueve a la derecha a 0.80 m/s en un riel de aire horizontal sin fricción y choca de frente con un deslizador de 0.300 kg que se mueve a la izquierda con una rapidez de 2.20 m/s. Calcule la velocidad final (magnitud y dirección) de cada deslizador si el choque es elástico.

8.47 •• Los bloques *A* (masa de 2.00 kg) y *B* (masa de 10.00 kg) se mueven en una superficie horizontal sin fricción. En un principio, el bloque *B* está en reposo y el *A* se mueve hacia él a 2.00 m/s. Los bloques están equipados con protectores de resorte ideal, como en el ejemplo 8.10 (sección 8.4). El choque es de frente, así que todos los movimientos antes y después del choque están en una línea recta. *a*) Calcule la energía máxima almacenada en los protectores de resorte y la velocidad de cada bloque en ese momento. *b*) Calcule la velocidad de cada bloque una vez que se han separado.

8.48 • Una canica de 10.0 g se desliza a la izquierda a 0.400 m/s sobre una acera horizontal de Nueva York, cubierta de hielo y sin fricción, y tiene un choque elástico de frente con una canica de 30.0 g que se desliza a la derecha con una velocidad de magnitud igual a 0.200 m/s (figura E8.48). *a*) Determine la velocidad (magnitud y dirección) de cada canica después del choque. (Puesto que el choque es de frente, los movimientos son en una línea). *b*) Calcule el *cambio en el momento lineal* (es decir, el momento lineal después del choque menos el momento lineal antes del choque) para cada canica. Compare los valores obtenidos. *c*) Calcule el *cambio de energía cinética* (es decir, la energía cinética después del choque menos la energía cinética antes del choque) para cada canica. Compare los valores obtenidos.

Figura **E8.48**



8.49 •• **Moderadores.** Los reactores nucleares canadienses usan moderadores de *agua pesada* en los que se dan choques elásticos entre neutrones y deuterones de masa 2.0 u (véase el ejemplo 8.11 en la sección 8.4). *a*) ¿Qué rapidez tiene un neutrón, expresada como fracción de su rapidez original, después de un choque elástico de frente con un deuterón inicialmente en reposo? *b*) ¿Qué energía cinética tiene, expresada como fracción de su energía cinética original? *c*) ¿Cuántos choques sucesivos como este reducirán la rapidez de un neutrón a 1/59,000 de su valor original?

8.50 •• Imagine que controla un acelerador de partículas que envía un haz de protones (masa *m*) a 1.50×10^7 m/s contra un objetivo gaseoso de un elemento desconocido. El detector indica que algunos protones rebotan en la misma línea después de chocar con uno de los núcleos del elemento desconocido. Todos esos protones tienen una rapidez de rebote de 1.20×10^7 m/s. Suponga que la rapidez inicial del núcleo objetivo es despreciable y que el choque es elástico. *a*) Calcule la masa del núcleo del elemento desconocido. Exprese su respuesta en términos de la masa *m* del protón. *b*) ¿Qué rapidez tiene el núcleo desconocido inmediatamente después de este choque?

Sección 8.5 Centro de masa

8.51 • Tres bloques de chocolate de forma irregular tienen las siguientes masas y coordenadas de su respectivo centro de masa: **1.** 0.300 kg,

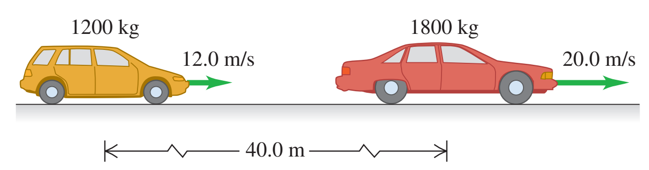
(0.200 m, 0.300 m); **2.** 0.400 kg, (0.100 m, −0.400 m); **3.** 0.200 kg, (−0.300 m, 0.600 m). Determine las coordenadas del centro de masa del sistema formado por los tres bloques.

8.52 • Calcule la posición del centro de masa del sistema formado por el Sol y Júpiter. (Como Júpiter tiene mayor masa que el resto de los planetas juntos, se obtendrá básicamente la posición del centro de masa del Sistema Solar). ¿El centro de masa está dentro o fuera del Sol? Use los datos del apéndice F.

8.53 •• **Plutón y Caronte.** El diámetro de Plutón mide aproximadamente 2370 km, y el diámetro de su satélite Caronte mide 1250 km. Aunque la distancia varía, sus centros a menudo están separados unos 19,700 km. Suponiendo que tanto Plutón como Caronte tienen la misma composición y, por consiguiente, la misma densidad media, determine la ubicación del centro de masa de este sistema en relación con el centro de Plutón.

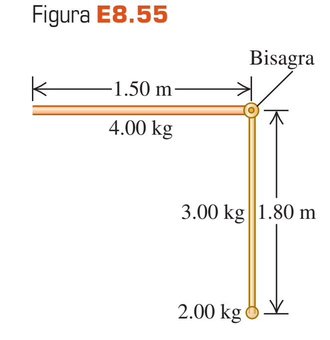
8.54 • Una camioneta de 1200 kg avanza en una autopista recta a 12.0 m/s. Otro automóvil, con masa de 1800 kg y rapidez de 20.0 m/s, tiene su centro de masa 40.0 m adelante del centro de masa de la camioneta (figura E8.54). *a*) Determine la posición del centro de masa del sistema formado por los dos vehículos. *b*) Calcule la magnitud del momento lineal total del sistema, a partir de los datos anteriores. *c*) Calcule la rapidez del centro de masa del sistema. *d*) Calcule el momento lineal total del sistema, usando la rapidez del centro de masa. Compare su resultado con el del inciso *b*).

Figura **E8.54**



8.55 • La refacción de una máquina consiste en una barra delgada y uniforme de 4.00 kg y 1.50 m de longitud, colgada en forma perpendicular, mediante una bisagra, a una barra vertical similar cuya masa es de 3.00 kg y que mide 1.80 m de longitud. La barra más larga tiene una bola pequeña, pero densa, de 2.00 kg unida a uno de sus extremos (figura E8.55). ¿Qué distancia se mueve horizontal y verticalmente el centro de masa de esta refacción si la barra vertical se mueve alrededor del pivote en sentido antihorario 90° para hacer a la refacción completamente horizontal?

Figura **E8.55**



8.56 • En un instante dado, el centro de masa de un sistema de dos partículas se encuentra sobre el eje x en $x = 2.0$ m y tiene una velocidad de (5.0 m/s). Una partícula está en el origen. La otra tiene masa de 0.10 kg y está en reposo en el eje x, en $x = 8.0$ m. *a*) ¿Qué masa tiene la partícula que se localiza en el origen? *b*) Calcule el momento lineal total del sistema. *c*) ¿Qué velocidad tiene la partícula que se encuentra en el origen?

8.57 •• En el ejemplo 8.14 (sección 8.5), Ramón tira de la cuerda para impulsarse con una rapidez de 0.70 m/s. ¿Cuál es la rapidez de Jaime?

8.58 • **CALC** Un sistema consta de dos partículas. En $t = 0$ una partícula está en el origen; la otra, cuya masa es de 0.50 kg, se encuentra en el eje y en $y = 6.0$ m. En $t = 0$ el centro de masa del sistema está en el eje y en $y = 2.4$ m. La velocidad del centro de masa está dada por $(0.75\ \text{m/s}^3)t^2\hat{\imath}$. *a*) Calcule la masa total del sistema. *b*) Calcule la aceleración del centro de masa en cualquier instante t. *c*) Calcule la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema en $t = 3.0$ s.

8.59 • **CALC** El momento lineal de un modelo de avión controlado por radio está dado por $[(-0.75\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^3)t^2 + (3.0\ \text{kg}\cdot\text{m/s})]\hat{\imath} + (0.25\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2)t\hat{\jmath}$. Determine las componentes x, y y z de la fuerza neta que actúa sobre el avión.

8.60 •• **BIO** **Cambio de su centro de masa.** Para mantener los cálculos muy sencillos, pero todavía razonables, modelaremos una pierna humana de 92.0 cm de longitud (medida a partir de la articulación de la cadera), suponiendo que las partes superior e inferior de la pierna (incluyendo el pie) tienen longitudes iguales y que cada una de ellas es uniforme. Para una persona de 70.0 kg, la masa de la parte superior de la pierna es de 8.60 kg, mientras que la de la parte inferior (incluyendo el pie) es de 5.25 kg. Determine la ubicación del centro de masa de esta pierna, en relación con la articulación de la cadera, si está *a*) estirada horizontalmente, y *b*) doblada por la rodilla para formar un ángulo recto con la parte superior de la pierna que permanece horizontal.

Sección 8.6 Propulsión de un cohete

8.61 •• Un astronauta de 70 kg flota en el espacio en una unidad de maniobras tripulada (MMU, por las siglas de *manned maneuvering unit*) de 110 kg y experimenta una aceleración de 0.029 m/s^2 al disparar uno de sus impulsores. *a*) Si la rapidez del gas N_2 que escapa, relativa al astronauta, es de 490 m/s, ¿cuánto gas se gasta en 5.0 s? *b*) ¿Qué empuje tiene el impulsor?

8.62 • Un cohete pequeño quema 0.0500 kg de combustible cada segundo, expulsándolo como gas con una velocidad de 1600 m/s relativa al cohete. *a*) ¿Qué empuje tiene el cohete? *b*) ¿Funcionaría el cohete en el espacio exterior donde no hay atmósfera? Si es así, ¿cómo se podría guiar? ¿Podría frenarlo?

8.63 • El modelo de motor C6-5 de un cohete tiene un impulso de 10.0 N·s durante 1.70 s mientras quema 0.0125 kg de combustible. El empuje máximo es de 13.3 N. La masa inicial del motor más el combustible es de 0.0258 kg. *a*) ¿Qué fracción del empuje máximo es el empuje medio? *b*) Calcule la rapidez relativa de los gases de escape, suponiéndola constante. *c*) Suponiendo que la rapidez relativa de los gases de escape es constante, calcule la rapidez final del motor si está sujeto a una armazón muy ligera y se enciende estando en reposo en el espacio exterior, sin gravedad.

8.64 •• Sin duda, los cohetes alcanzan gran rapidez, pero, ¿qué rapidez máxima es razonable? Suponga que un cohete se enciende desde el reposo en una estación espacial donde la fuerza de gravedad es despreciable. *a*) Si el cohete expulsa gas con rapidez relativa de 2000 m/s y se desea que el cohete alcance una rapidez final de $1.00 \times 10^{-3}c$, donde c es la rapidez de la luz, ¿qué fracción de la masa total inicial del cohete *no* es combustible? *b*) ¿Cuál es esta fracción si se desea alcanzar una rapidez final de 3000 m/s?

8.65 •• Un cohete de una etapa se enciende desde el reposo en una plataforma espacial donde la fuerza de gravedad es despreciable. Si el combustible se quema en 50.0 s y la rapidez relativa de los gases de escape es $v_{esc} = 2100$ m/s, ¿cuál debe ser la razón de masas m_0/m para adquirir una rapidez final v de 8.00 km/s (similar a la rapidez orbital de un satélite terrestre)?

PROBLEMAS

8.66 •• **PA CALC** Una niña de 40.0 kg se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción, con un momento lineal inicial hacia el este, de magnitud igual a 90.0 k·m/s. En $t = 0$, se aplica sobre la niña una fuerza neta de magnitud $F = (8.20\ \text{N/s})t$ en dirección hacia el oeste. *a*) ¿En qué valor de t la niña tiene un momento lineal hacia el oeste de magnitud de 60.0 kg·m/s? *b*) ¿Cuánto trabajo ha realizado la fuerza sobre la niña en el intervalo de tiempo de $t = 0$ hasta el tiempo calculado en el inciso *a*)? *c*) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de la niña en el instante calculado en el inciso *a*)?

8.67 •• Una esfera de acero con masa de 40.0 g se deja caer desde una altura de 2.00 m sobre una plancha de acero horizontal, rebotando a una altura de 1.60 m. *a*) Calcule el impulso que se da a la esfera en el impacto. *b*) Si el contacto dura 2.00 ms, calcule la fuerza media que actúa sobre la esfera durante el impacto.

8.68 • En una erupción volcánica, una roca de 2400 kg es lanzada verticalmente hacia arriba. Al alcanzar su altura máxima, estalla de forma súbita (a causa de los gases atrapados) y se divide en dos fragmentos, uno de los cuales tiene una masa tres veces mayor que la del otro. El fragmento más liviano comenzó con una velocidad horizontal y tocó tierra 318 m directamente al norte del punto del estallido. ¿Dónde caerá el otro fragmento? Desprecie la resistencia del aire.

8.69 •• Una pelota de tenis de 0.560 N tiene una velocidad de $(20.0\ \text{m/s})\hat{\imath} - (4.0\ \text{m/s})\hat{\jmath}$, justo antes de ser golpeada por una raqueta. Durante los 3.00 ms que la raqueta y la pelota están en contacto, la fuerza neta que actúa sobre la pelota es constante e igual a $-(380\ \text{N})\hat{\imath} + (110\ \text{N})\hat{\jmath}$. *a*) ¿Qué componentes *x* y *y* tiene el impulso de la fuerza neta aplicada a la pelota? *b*) ¿Qué componentes *x* y *y* tiene la velocidad final de la pelota?

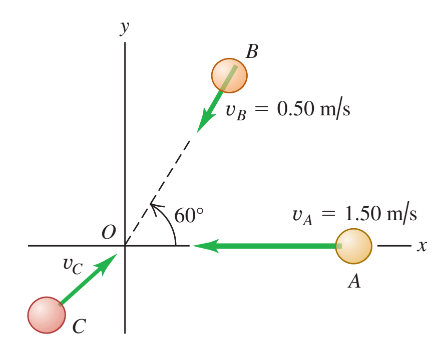
8.70 • Tres discos de hockey idénticos en una mesa horizontal de aire tienen imanes repelentes. Se les junta y luego se les suelta simultáneamente. Todos tienen la misma rapidez en cualquier instante. Un disco se mueve al oeste. ¿Cuál es la dirección de la velocidad de cada uno de los otros dos discos?

8.71 •• Un convertible azul de 1500 kg viaja al sur, y una camioneta roja de 2000 kg viaja al oeste. Si el momento lineal total del sistema formado por los dos vehículos es de 7200 kg·m/s dirigido 60.0° al oeste del sur, ¿qué rapidez tiene cada vehículo?

8.72 •• Un vagón de ferrocarril se mueve sobre vías rectas sin fricción con resistencia despreciable del aire. En los casos que siguen, el vagón tiene inicialmente una masa total (vehículo y contenido) de 200 kg y viaja hacia el este a 5.00 m/s. Suponiendo que no se sale de la vía, calcule su *velocidad final* si: *a*) una masa de 25.0 kg se lanza lateralmente desde el vagón con velocidad de 2.00 m/s relativa a la velocidad inicial del vagón; *b*) una masa de 25.0 kg se lanza hacia atrás con velocidad de 5.00 m/s relativa al movimiento inicial del vagón; *c*) una masa de 25.0 kg se avienta al interior del vagón con velocidad de 6.00 m/s relativa al suelo y opuesta en dirección a la velocidad inicial del vagón.

8.73 • Las esferas *A* (masa de 0.020 kg), *B* (masa de 0.030 kg) y *C* (masa de 0.050 kg) se acercan al origen deslizándose sobre una mesa de aire sin fricción (figura P8.73). Las velocidades iniciales de *A* y *B* se indican en la figura. Las tres esferas llegan al origen simultáneamente y se unen. *a*) ¿Qué componentes *x* y *y* debe tener la velocidad inicial de *C* si después del choque los tres objetos tienen una velocidad de 0.50 m/s en la dirección +*x*? *b*) Si *C* tiene la velocidad obtenida en el inciso *a*), ¿cuál es el cambio en la energía cinética del sistema de las tres esferas como resultado del choque?

Figura **P8.73**



8.74 ••• Usted y sus amigos efectúan experimentos de física en un estanque congelado que sirve como superficie horizontal sin fricción. Sam, de 80.0 kg, recibe un empujón y se desliza hacia el este. Abigaíl, de 50.0 kg, recibe también un empujón y se desliza hacia el norte. Los dos chocan. Después del choque, Sam se mueve a 37.0° al norte del este con rapidez de 6.00 m/s, y Abigaíl, a 23.0° al sur del este con rapidez de 9.00 m/s. *a*) ¿Qué rapidez tenía cada uno antes del choque? *b*) ¿Cuánto disminuyó la energía cinética total de las dos personas durante el choque?

8.75 ••• El núcleo del ^{214}Po decae radiactivamente emitiendo una partícula alfa (masa 6.65×10^{-27} kg) con una energía cinética de 1.23×10^{-12} J, medida en el marco de referencia del laboratorio. Suponiendo que el Po estaba inicialmente en reposo en este marco, calcule la velocidad de retroceso del núcleo que queda después de la desintegración.

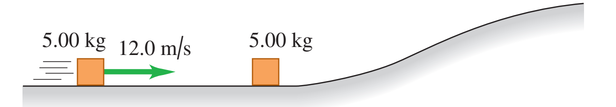
8.76 • **PA** En una exhibición de autos antiguos, un Nash Metropolitan modelo 1955 de 840 kg avanza a 9.0 m/s seguido de un Packard Clipper modelo 1957 de 1620 kg que avanza a 5.0 m/s. *a*) ¿Qué auto tiene mayor energía cinética? ¿Cuál es la razón entre las energías cinéticas del Nash y el Packard? *b*) ¿Qué auto tiene mayor magnitud del momento lineal? ¿Cuál es la razón entre las magnitudes de momento lineal del Nash y el Packard? *c*) Sean F_N y F_P las fuerzas netas requeridas para detener en un tiempo *t* el Nash y el Packard, respectivamente. ¿Cuál fuerza es mayor: F_N o F_P? ¿Cuánto vale la razón F_N/F_P? *d*) Sean ahora F_N y F_P las fuerzas netas requeridas para detener en una distancia *d* el Nash y el Packard, respectivamente. ¿Cuál fuerza es mayor: F_N o F_P? ¿Cuánto vale la razón F_N/F_P?

8.77 •• **PA** Un bloque de madera de 8.00 kg reposa en el extremo de una mesa sin fricción a 2.20 m arriba del suelo. Una bola de arcilla de 0.500 kg se desliza a través de la mesa con una rapidez de 24.0 m/s, golpea el bloque de madera y se adhiere a él. El objeto combinado abandona el extremo de la mesa y cae al suelo. ¿Qué distancia horizontal recorre el objeto cuando llega al suelo?

8.78 ••• **PA** Un pequeño bloque de madera de 0.800 kg de masa está suspendido del extremo inferior de una cuerda ligera de 1.60 m de longitud. El bloque está en reposo inicialmente. Una bala de 12.0 g de masa es disparada al bloque con una velocidad horizontal v_0. La bala golpea el bloque y se incrusta en él. Después del choque, el objeto combinado oscila en el extremo de la cuerda. Cuando el bloque se eleva una altura vertical de 0.800 m, la tensión en la cuerda es de 4.80 N. ¿Cuál era la velocidad inicial v_0 de la bala?

8.79 •• **Combinación de las leyes de conservación.** Un trozo de hielo de 5.00 kg se desliza a 12.0 m/s sobre el piso de un valle cubierto de hielo cuando choca y se adhiere con otro pedazo de hielo de 5.00 kg que estaba en reposo (figura P8.79). Como el valle tiene hielo, no hay fricción. Después del choque, ¿qué altura sobre el suelo del valle alcanzan los pedazos combinados?

Figura **P8.79**



8.80 •• **Análisis de un accidente automovilístico.** Suponga que lo llaman como testigo experto para analizar el siguiente accidente automovilístico: el automóvil *B*, con una masa de 1900 kg, estaba detenido ante un semáforo cuando fue golpeado por detrás por el automóvil *A*, con una masa de 1500 kg. Los automóviles se enganchan de los parachoques durante la colisión y se deslizan hasta detenerse con los frenos de todos los neumáticos bloqueados. Las mediciones de las marcas

del derrape dejadas por los neumáticos miden 7.15 m de longitud. El coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos y el pavimento es de 0.65. *a*) ¿Cuál era la rapidez del automóvil *A* inmediatamente antes del choque? *b*) Si el límite de rapidez es de 35 mph, ¿el automóvil *A* lo *rebasó* y, de ser así, por cuántas millas por hora?

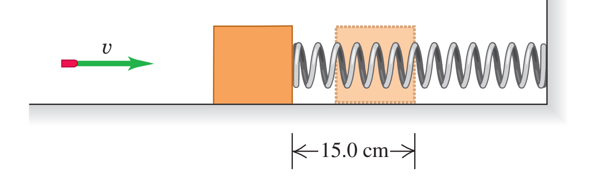
8.81 •• **Análisis de un accidente.** Un automóvil sedán de 1500 kg atraviesa una gran intersección viajando de norte a sur cuando es golpeado por una camioneta de 2200 kg que viaja de este a oeste. Los dos automóviles se enganchan debido al impacto y se deslizan como uno solo después del choque. Las mediciones en la escena del accidente indican que el coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos de los automóviles y el pavimento es de 0.75 y los automóviles se deslizaron hasta detenerse 5.39 m al oeste y 6.43 m al sur del punto de impacto. ¿A qué rapidez viajaba cada automóvil justo antes del choque?

8.82 ••• **PA** Un bastidor de 0.150 kg, suspendido de un resorte, estira a este 0.070 m. Un trozo de masilla de 0.200 kg en reposo se deja caer sobre el bastidor desde una altura de 30.0 cm (figura P8.82). ¿Qué distancia máxima baja el bastidor con respecto a su posición inicial?

Figura **P8.82**

8.83 • Una bala de rifle de 8.00 g golpea y se incrusta en un bloque de 0.992 kg que descansa en una superficie horizontal sin fricción sujeto a un resorte (figura P8.83). El impacto comprime el resorte 15.0 cm. La calibración del resorte indica que se requiere una fuerza de 0.750 N para comprimirlo 0.250 cm. *a*) Calcule la magnitud de la velocidad del bloque inmediatamente después del impacto. *b*) ¿Qué rapidez tenía inicialmente la bala?

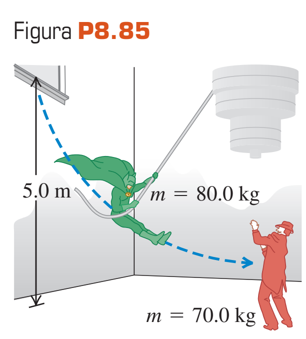
Figura **P8.83**



8.84 •• **Rebote de una bala.** Una piedra de 0.100 kg descansa en una superficie horizontal sin fricción. Una bala de 6.00 g que viaja horizontalmente a 350 m/s golpea la piedra y rebota horizontalmente en ángulo recto de su dirección original, con rapidez de 250 m/s. *a*) Calcule la magnitud y la dirección de la velocidad de la piedra después del golpe. *b*) ¿Es perfectamente elástico el choque?

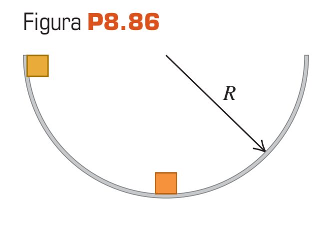
8.85 •• Un doble de cine (masa de 80.0 kg) se pone de pie en un alféizar a 5.0 m sobre el piso (figura P8.85). Sujetando una cuerda atada a un candelabro, oscila hacia abajo para pelear con el villano (masa de 70.0 kg), quien está de pie exactamente abajo del candelabro. (Suponga que el centro de masa del doble baja 5.0 m, y él suelta la cuerda justo al chocar con el villano). *a*) ¿Con qué rapidez comienzan a deslizarse los contrincantes entrelazados sobre el piso? *b*) Si el coeficiente de fricción cinética entre sus cuerpos y el piso es $\mu_k = 0.250$, ¿qué distancia se deslizan?

Figura **P8.85**



8.86 •• **PA** Dos masas idénticas se sueltan del reposo en un tazón hemisférico liso de radio *R*, desde las posiciones que se muestran en la figura P8.86. Se puede despreciar la fricción entre las masas y la superficie del tazón. Si se unen cuando chocan, ¿qué altura por arriba del fondo del tazón alcanzarán las masas después de chocar?

Figura **P8.86**



8.87 •• Una pelota con masa *M*, que se mueve horizontalmente a 4.00 m/s, choca elásticamente con un bloque de masa 3*M* que inicialmente está en reposo y cuelga del techo por medio de un alambre de 50.0 cm. Determine el ángulo máximo de oscilación del bloque después del impacto.

8.88 ••• **PA** Una esfera de plomo de 20.00 kg cuelga de un gancho atado a un alambre delgado de 3.50 m de longitud, y puede girar en un círculo completo. De forma repentina, un dardo de acero de 5.00 kg la golpea horizontalmente, incrustándose en ella. ¿Qué rapidez inicial mínima debe tener el dardo para que la combinación describa un círculo completo después del choque?

8.89 ••• **PA** Una pelota de 8.00 kg, que cuelga del techo atada a un alambre ligero de 135 cm de longitud, experimenta un choque elástico con una pelota de 2.00 kg que se mueve horizontalmente a 5.00 m/s justo antes del choque. Calcule la tensión en el alambre inmediatamente después del choque.

8.90 •• Un obús en reposo de 7.0 kg explota y se divide en dos fragmentos, uno de masa igual a 2.0 kg y el otro de 5.0 kg. Si el fragmento más pesado gana 100 J de energía cinética a partir de la explosión, ¿cuánta energía cinética gana el más ligero?

8.91 •• Una bala de 4.00 g viaja horizontalmente con una velocidad de magnitud igual a 400 m/s y choca con un bloque de madera de 0.800 kg que estaba en reposo en una superficie plana. La bala atraviesa el bloque y sale con su rapidez reducida a 190 m/s. El bloque se desliza una distancia de 45.0 cm sobre la superficie con respecto a su posición inicial. *a*) ¿Qué coeficiente de fricción cinética hay entre el bloque y la superficie? *b*) ¿En cuánto se reduce la energía cinética de la bala? *c*) ¿Qué energía cinética tiene el bloque en el instante en que la bala sale de él?

8.92 •• Una bala de 5.00 g se dispara *a través de* un bloque de madera de 1.00 kg suspendido de una cuerda de 2.00 m de longitud. El centro de masa del bloque se eleva 0.38 cm. Calcule la rapidez de la bala al salir del bloque si su rapidez inicial es de 450 m/s.

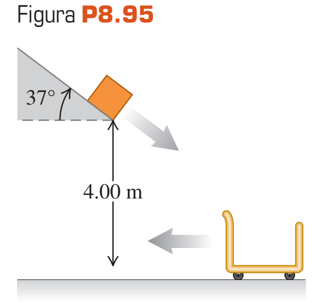
8.93 •• Un neutrón de masa *m* experimenta un choque elástico de frente con un núcleo de masa *M* en reposo. *a*) Demuestre que si la energía cinética inicial del neutrón es K_0, la energía cinética que pierde durante el choque es $4mMK_0/(M+m)^2$. *b*) ¿Con qué valor de *M* pierde más energía el neutrón incidente? *c*) Si *M* tiene el valor calculado en el inciso *b*), ¿qué rapidez tiene el neutrón después del choque?

8.94 •• **División de energía en choques elásticos.** Un objeto estacionario con masa m_B es golpeado de frente por un objeto con masa m_A que se mueve con rapidez inicial v_0. *a*) Si el choque es elástico, ¿qué porcentaje de la energía original tendrá cada objeto después del choque? *b*) Aplique el resultado del inciso *a*) a los siguientes casos especiales: **i.** $m_A = m_B$ y **ii.** $m_A = 5m_B$. *c*) ¿Con qué valores, si existen, de la razón de masas m_A/m_B la energía cinética original se divide equitativamente entre los dos objetos después del choque?

8.95 •• **PA** En el centro de distribución de una compañía de embarques, un carrito abierto de 50.0 kg está rodando hacia la izquierda con

rapidez de 5.00 m/s (figura P8.95). La fricción entre el carrito y el piso es despreciable. Un paquete de 15.0 kg baja deslizándose por una rampa inclinada 37° sobre la horizontal y sale proyectado con una rapidez de 3.00 m/s. El paquete cae en el carrito y siguen avanzando juntos. Si el extremo inferior de la rampa está a una altura de 4.00 m sobre el fondo del carrito, *a*) ¿qué rapidez tendrá el paquete inmediatamente antes de caer en el carrito? y *b*) ¿qué rapidez final tendrá el carrito?

Figura **P8.95**



8.96 • Un disco azul de hockey con masa de 0.0400 kg, que se desliza con rapidez de 0.200 m/s sobre una mesa de aire horizontal sin fricción, experimenta un choque perfectamente elástico de frente con un disco rojo de masa *m*, inicialmente en reposo. Después del choque, la velocidad del disco azul es de 0.050 m/s en la misma dirección que su velocidad inicial. Calcule *a*) la velocidad (magnitud y dirección) del disco rojo después del choque; y *b*) la masa *m* del disco rojo.

8.97 ••• Jack y Jill están de pie sobre una caja en reposo en la superficie horizontal sin fricción de un estanque congelado. La masa de Jack es de 75.0 kg, la de Jill es de 45.0 kg y la de la caja es de 15.0 kg. Se acuerdan que deben ir por un cubo de agua, así que los dos saltan horizontalmente desde encima de la caja. Inmediatamente después de saltar, cada uno se aleja de la caja con una rapidez de 4.00 m/s relativa a la caja. *a*) ¿Qué rapidez final tiene la caja si Jack y Jill saltan simultáneamente y en la misma dirección? (*Sugerencia:* Use un sistema de coordenadas inercial fijo al suelo). *b*) ¿Cuál es la rapidez final de la caja si Jack salta primero y Jill lo hace unos segundos después, en la misma dirección? *c*) ¿Qué rapidez final tiene la caja si Jill salta primero y luego Jack, en la misma dirección?

8.98 • Imagine que sostiene una pelota pequeña en contacto con una pelota grande y directamente arriba del centro de esta última. Si luego deja caer la pelota pequeña un poco después de dejar caer la grande, la pelota pequeña rebotará con rapidez sorprendente. Para ver el caso extremo, ignore la resistencia del aire y suponga que la pelota grande choca elásticamente con el piso y luego rebota para chocar elásticamente con la pelota pequeña en descenso. Justo antes del choque entre las dos pelotas, la grande se mueve hacia arriba con velocidad $\vec{v}$ y la pequeña tiene velocidad $-\vec{v}$. (¿Entiende por qué?). Suponga que la masa de la pelota grande es mucho mayor que la de la pequeña. *a*) ¿Qué velocidad tiene la pelota pequeña justo después del choque con la grande? *b*) Use la respuesta al inciso *a*) para calcular la razón entre la distancia de rebote de la pelota pequeña y la distancia que cayó antes del choque.

8.99 ••• Un disco de hockey *B* descansa sobre una superficie de hielo liso y es golpeado por otro disco *A* de la misma masa. *A* viaja inicialmente a 15.0 m/s y es desviado 25.0° con respecto a su dirección original. Suponga un choque perfectamente elástico. Calcule la rapidez final de cada disco y la dirección de la velocidad de *B* después del choque.

8.100 ••• **División de energía.** Un objeto con masa *m*, que inicialmente está en reposo, explota y produce dos fragmentos, uno con masa m_A y otro con masa m_B, donde $m_A + m_B = m$. *a*) Si se libera una energía *Q* en la explosión, ¿cuánta energía cinética tendrá cada fragmento inmediatamente después de la explosión? *b*) ¿Qué porcentaje de la energía total liberada recibirá cada fragmento si la masa de uno es cuatro veces la del otro?

8.101 ••• **Desintegración de neutrones.** Un neutrón en reposo se desintegra (se rompe) para producir un protón y un electrón. En la desintegración se libera energía, la cual aparece como energía cinética del protón y del electrón. La masa de un protón es 1836 veces la de un electrón. ¿Qué fracción de la energía total liberada se convertirá en energía cinética del protón?

8.102 •• Un núcleo de ^{232}Th (torio) en reposo se desintegra para producir un núcleo de ^{228}Ra (radio) con emisión de una partícula alfa. La energía cinética total de los productos de la desintegración es de 6.54×10^{-13} J. La masa de una partícula alfa es 1.76% de la masa de un núcleo de ^{228}Ra. Calcule la energía cinética de: *a*) el núcleo de ^{228}Ra en retroceso y *b*) la partícula alfa.

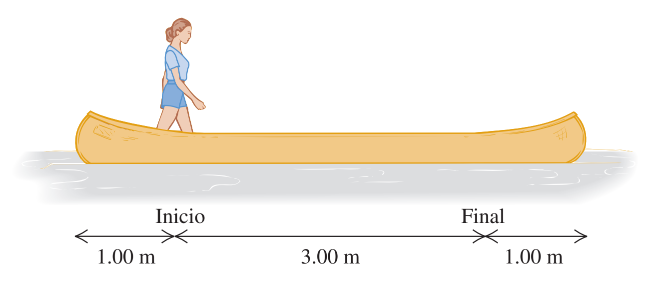
8.103 • **Antineutrino.** En la desintegración beta, un núcleo emite un electrón. Un núcleo de ^{210}Bi (bismuto) en reposo experimenta la desintegración beta para producir ^{210}Po (polonio). Suponga que el electrón emitido se mueve hacia la derecha con un momento lineal de 5.60×10^{-22} kg·m/s. El núcleo de ^{210}Po, cuya masa es de 3.50×10^{-25} kg, retrocede hacia la izquierda con rapidez de 1.14×10^3 m/s. La conservación del momento lineal requiere la emisión de una segunda partícula, llamada antineutrino. Calcule la magnitud y dirección del momento lineal del antineutrino emitido en esta desintegración.

8.104 •• Jonathan y Jane están sentados en un trineo en reposo sobre hielo sin fricción. Jonathan pesa 800 N, Jane pesa 600 N y el trineo pesa 1000 N. Las dos personas ven una araña venenosa en el piso del trineo y saltan hacia afuera. Jonathan salta a la izquierda con velocidad (relativa al hielo) de 5.00 m/s a 30.0° por arriba de la horizontal, y Jane salta a la derecha a 7.00 m/s (relativa al hielo) a 36.9° por arriba de la horizontal. Calcule la velocidad horizontal (magnitud y dirección) del trineo después del salto.

8.105 •• Dos amigos, Burt y Ernie, están de pie en los extremos opuestos de un tronco uniforme que está flotando en un lago. El tronco tiene 3.0 m de longitud y masa de 20.0 kg. La masa de Burt es de 30.0 kg y la de Ernie de 40.0 kg. Inicialmente los dos amigos y el tronco están en reposo relativo a la orilla. Entonces Burt ofrece a Ernie una galleta, quien camina hacia el extremo del tronco de Burt para tomarla. En relación con la orilla, ¿qué distancia se mueve el tronco durante el tiempo en que Ernie llega con Burt? Ignore la fuerza horizontal que el agua ejerce sobre el tronco y suponga que ni Burt ni Ernie caen del tronco.

8.106 •• Una mujer de 45.0 kg está de pie en una canoa de 60.0 kg y 5.00 m de longitud. Ella camina desde un punto a 1.00 m de un extremo hasta un punto a 1.00 m del otro extremo (figura P8.106). Si se ignora la resistencia del agua al movimiento de la canoa, ¿qué distancia se mueve la canoa durante este proceso?

Figura **P8.106**



8.107 •• Imagine que está de pie en una plancha de concreto que descansa sobre un lago congelado. Suponga que no hay fricción entre la plancha y el hielo. La plancha pesa cinco veces más que usted. Si usted comienza a caminar a 2.00 m/s en relación con el hielo, ¿con qué rapidez relativa al hielo se moverá la plancha?

8.108 •• **PA** Un proyectil de 20.0 kg se dispara con un ángulo de 60.0° sobre la horizontal y rapidez de 80.0 m/s. En el punto más alto

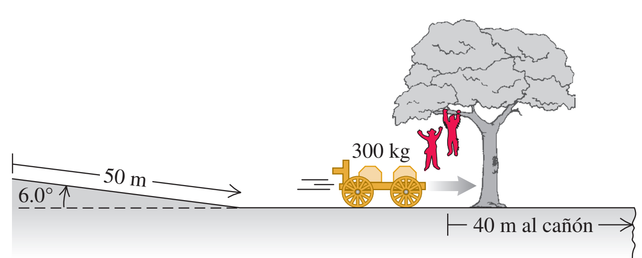
de la trayectoria, el proyectil estalla en dos fragmentos de igual masa; uno cae verticalmente con rapidez inicial cero. Ignore la resistencia del aire. *a*) ¿A qué distancia del punto de disparo cae el otro fragmento si el terreno es plano? *b*) ¿Cuánta energía se libera en la explosión?

8.109 ••• PA Un cohete de fuegos artificiales se dispara verticalmente hacia arriba. En su altura máxima de 80.0 m, estalla y se divide en dos fragmentos, uno con masa de 1.40 kg y otro con masa de 0.28 kg. En la explosión, 860 J de energía química se convierten en energía cinética de los dos fragmentos. *a*) ¿Qué rapidez tiene cada fragmento inmediatamente después de la explosión? *b*) Se observa que los dos fragmentos caen al suelo al mismo tiempo. ¿Qué distancia hay entre los puntos en los que caen? Suponga que el suelo es horizontal y que la resistencia del aire es despreciable.

8.110 ••• Un obús de 12.0 kg es disparado con un ángulo de 55.0° sobre la horizontal con una rapidez inicial de 150 m/s. En el punto más alto de la trayectoria, el obús estalla en dos fragmentos, uno con tres veces más masa que el otro. Los dos fragmentos llegan al suelo al mismo tiempo. Suponga que la resistencia del aire es despreciable. Si el fragmento más pesado cae en el punto desde el cual se lanzó el obús, ¿dónde caerá el fragmento más ligero y cuánta energía se habrá liberado en la explosión?

8.111 • PA Un bandido suelta una carreta con dos cajas de oro (masa total = 300 kg) que estaba en reposo 50 m cuesta arriba de una pendiente de 6.0° (figura P8.111). El plan es que la carreta baje la cuesta, ruede por terreno plano y luego caiga en un cañón donde sus cómplices esperan. Sin embargo, en un árbol a 40 m del borde del cañón están el Llanero Solitario (masa de 75.0 kg) y Toro (masa de 60.0 kg), quienes se dejan caer verticalmente sobre la carreta al pasar por debajo de ellos. *a*) Si nuestros héroes necesitan 5.0 s para tomar el oro y saltar, ¿lo lograrán antes de que la carreta llegue al borde del risco? La carreta rueda con fricción despreciable. *b*) Cuando los héroes caen en la carreta, ¿se conserva la energía cinética del sistema de los héroes más la carreta? Si no, ¿aumenta o disminuye, y por cuánto?

Figura **P8.111**



8.112 •• CALC En la sección 8.6 consideramos un cohete que se enciende en el espacio exterior donde no hay resistencia del aire y la fuerza de gravedad es despreciable. Suponga ahora que el cohete en reposo acelera verticalmente desde la superficie terrestre. Siga ignorando la resistencia del aire y considere solo la parte del movimiento en la que la altura del cohete es pequeña y g puede suponerse constante. *a*) ¿Cómo se modifica la ecuación (8.37) cuando se toma en cuenta la fuerza de gravedad? *b*) Deduzca una expresión para la aceleración a del cohete, análoga a la ecuación (8.39). *c*) ¿Qué aceleración tiene el cohete del ejemplo 8.15 (sección 8.6) si está cerca de la superficie terrestre y no en el espacio? Ignore la resistencia del aire. *d*) Calcule la rapidez del cohete del ejemplo 8.16 (sección 8.6) después de 90 s si parte de la superficie terrestre y no del espacio exterior. Puede despreciar la resistencia del aire. Compare su respuesta con la rapidez calculada en el ejemplo 8.16.

8.113 •• Cohete de múltiples etapas. Suponga que la primera etapa de un cohete de dos etapas tiene una masa total de 12,000 kg, de los cuales 9000 kg son de combustible. La masa total de la segunda etapa es 1000 kg, de los cuales 700 kg corresponden al combustible. Suponga que la rapidez relativa v_{esc} del material expulsado es constante, e ignore los efectos gravitacionales (que son pequeños durante el periodo de encendido si la tasa de consumo de combustible es alta). *a*) Suponga que todo el combustible de este cohete de dos etapas se utiliza en un cohete de una sola etapa con la misma masa total de 13,000 kg. En términos de v_{esc}, ¿qué rapidez tendría el cohete, partiendo del reposo, al agotarse el combustible? *b*) En cuanto al cohete de dos etapas, ¿qué rapidez tiene al agotarse el combustible de la primera etapa si esta transporta la segunda etapa hasta este punto? Dicha rapidez es ahora la rapidez inicial de la segunda etapa, que en este punto se separa de la primera. *c*) ¿Qué rapidez final tiene la segunda etapa? *d*) ¿Qué valor de v_{esc} se requiere para impartir a la segunda etapa del cohete una rapidez de 7.00 km/s?

PROBLEMAS DE DESAFÍO

8.114 • CALC Gota de lluvia de masa variable. En un problema de propulsión de cohetes, la masa es variable. Un problema similar es una gota de lluvia que cae a través de una nube de gotitas de agua, algunas de las cuales se adhieren a la gota *aumentando* su masa al caer. La fuerza sobre la gota es

$$F_{ext} = \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

Suponga que la masa de la gota depende de la distancia x que ha caído. Entonces, $m = kx$, donde k es constante, y $dm/dt = kv$. Puesto que $F_{ext} = mg$, esto da

$$mg = m\frac{dv}{dt} + v(kv)$$

O bien, dividiendo entre k,

$$xg = x\frac{dv}{dt} + v^2$$

Esta es una ecuación diferencial con solución de la forma $v = at$, donde a es la aceleración constante. Suponga que la velocidad inicial de la gota es cero. *a*) Usando la solución propuesta para v, calcule la aceleración a. *b*) Calcule la distancia que la gota cae en $t = 3.00$ s. *c*) Con $k = 2.00$ g/m, calcule la masa de la gota en $t = 3.00$ s. [Otros aspectos interesantes del problema pueden consultarse en K. S. Krane, *Amer. Jour. Phys*., vol. 49 (1981), pp. 113-117].

8.115 •• CALC En la sección 8.5, calculamos el centro de masa considerando objetos constituidos por un número *finito* de masas puntuales u objetos que, por simetría, pueden representarse con un número finito de masas puntuales. Si la distribución de masa de un objeto sólido no permite una determinación simple del centro de masa por simetría, las sumas de las ecuaciones (8.28) deben generalizarse a integrales:

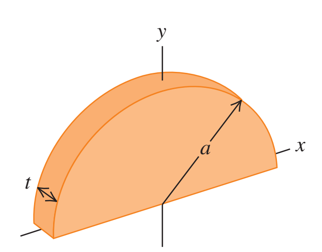
$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm$$

donde x y y son las coordenadas de un fragmento pequeño del objeto con masa dm. Se integra sobre todo el objeto. Considere una varilla

delgada de longitud L, masa M y área transversal A. Sea el origen de coordenadas en el extremo izquierdo de la varilla y el eje $+x$ a lo largo de la varilla. *a*) Si la densidad $\rho = M/V$ del objeto es uniforme, realice la integración anterior para demostrar que la coordenada x del centro de masa está en el centro geométrico de la varilla. *b*) Si la densidad del objeto varía linealmente con x, es decir, $\rho = \alpha x$ (donde α es una constante positiva), calcule la coordenada x del centro de masa de la varilla.

8.116 •• **CALC** Use los métodos del problema de desafío 8.115 para calcular las coordenadas x y y del centro de masa de una placa metálica semicircular con densidad uniforme ρ, espesor t y radio a. La masa de la placa es entonces $M = \frac{1}{2}\rho\pi a^2 t$. Use el sistema de coordenadas de la figura P8.116.

Figura **P8.116**



Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

Las dos balas tienen la misma magnitud de momento lineal $p = mv$ (el producto de la masa por la rapidez), pero la bala ligera, más rápida, tiene dos veces más energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$. Por lo tanto, la bala ligera puede efectuar dos veces más trabajo sobre la zanahoria (y causar dos veces más daño) en el proceso de detenerse (véase la sección 8.1).

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

8.1 **Respuesta: v, i y ii (empate en segundo lugar), iii y iv (empate en tercer lugar)** El impulso de la fuerza neta se puede calcular de dos formas: **1.** como la fuerza neta multiplicada por el tiempo durante el que actúa la fuerza neta, y **2.** como el cambio en el momento lineal de la partícula sobre la que actúa la fuerza neta. Nuestra elección del método depende de qué información se nos dé. Tomamos la dirección $+x$ hacia el este. **i.** La fuerza no se conoce, así que usamos el método 2: $J_x = mv_{2x} - mv_{1x} = (1000\text{ kg})(0) - (1000\text{ kg})(25\text{ m/s}) = -25{,}000\text{ kg}\cdot\text{m/s}$, por lo que la magnitud del impulso es $25{,}000\text{ kg}\cdot\text{m/s} = 25{,}000\text{ N}\cdot\text{s}$. **ii.** Por la misma razón que en **i**, usamos el método 2: $J_x = mv_{2x} - mv_{1x} = (1000\text{ kg})(0) - (1000\text{ kg})(25\text{ m/s}) = -25{,}000\text{ kg}\cdot\text{m/s}$, y la magnitud del impulso, una vez más, es $25{,}000\text{ kg}\cdot\text{m/s} = 25{,}000\text{ N}\cdot\text{s}$. **iii.** La velocidad final no se conoce, así que usamos el método 1: $J_x = (\sum F_x)_{\text{med}}(t_2 - t_1) = (2000\text{ N})(10\text{ s}) = 20{,}000\text{ N}\cdot\text{s}$, por lo que la magnitud del impulso es $20{,}000\text{ N}\cdot\text{s}$. **iv.** Por la misma razón que en **iii**, empleamos el método 1: $J_x = (\sum F_x)_{\text{med}}(t_2 - t_1) = (-2000\text{ N})(10\text{ s}) = -20{,}000\text{ N}\cdot\text{s}$, de manera que la magnitud del impulso es $20{,}000\text{ N}\cdot\text{s}$. **v.** La fuerza no se conoce, así que usamos el método 2: $J_x = mv_{2x} - mv_{1x} = (1000\text{ kg})(-25\text{ m/s}) - (1000\text{ kg})(25\text{ m/s}) = -50{,}000\text{ kg}\cdot\text{m/s}$ y la magnitud del impulso es $50{,}000\text{ kg}\cdot\text{m/s} = 50{,}000\text{ N}\cdot\text{s}$.

8.2 **Respuestas: *a*) $v_{C2x} > 0$, $v_{C2y} > 0$, *b*) pieza C** No hay fuerzas horizontales externas, así que las componentes x y y del momento lineal total del sistema se conservan. Las dos componentes son cero antes de soltarse el resorte, así que después deberán ser cero. Por lo tanto,

$$P_x = 0 = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x} + m_C v_{C2x}$$
$$P_y = 0 = m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y} + m_C v_{C2y}$$

Nos dicen que $m_A = m_B = m_C$, $v_{A2x} < 0$, $v_{A2y} = 0$, $v_{B2x} = 0$ y $v_{B2y} < 0$. Podemos resolver las ecuaciones anteriores para demostrar que $v_{C2x} = -v_{A2x} > 0$ y $v_{C2y} = -v_{B2y} > 0$, por lo que las componentes de velocidad de la pieza C son positivas. La pieza C tiene una rapidez $\sqrt{v_{C2x}^2 + v_{C2y}^2} = \sqrt{v_{A2x}^2 + v_{B2y}^2}$, que es mayor que la rapidez de cualquiera de las piezas A o B.

8.3 **Respuestas: *a*) elástico, *b*) inelástico, *c*) totalmente inelástico** En cada caso, la energía potencial gravitacional se convierte en energía cinética conforme la pelota cae, y el choque es entre la pelota y el suelo. En *a*) toda la energía inicial se convierte en energía potencial gravitacional, así que no se pierde energía cinética en el rebote, y el choque es elástico. En *b*) hay menos energía potencial gravitacional al final que al principio, por lo que algo de energía cinética se pierde en el rebote. Por lo tanto, el choque es inelástico. En *c*) la pelota pierde toda la energía cinética que tiene para dar, la pelota queda pegada al suelo, y el choque es totalmente inelástico.

8.4 **Respuesta: peores** Después del choque con una molécula de agua inicialmente en reposo, la rapidez del neutrón es $|(m_n - m_w)/(m_n + m_w)| = |(1.0\text{ u} - 18\text{ u})/(1.0\text{ u} + 18\text{ u})| = \frac{17}{19}$ de su rapidez inicial, y su energía cinética es $\left(\frac{17}{19}\right)^2 = 0.80$ del valor inicial. Por lo tanto, una molécula de agua es peor moderador que un átomo de carbono, cuyos valores son $\frac{11}{13}$ y $\left(\frac{11}{13}\right)^2 = 0.72$ respectivamente.

8.5 **Respuesta: no** Si la gravedad es la única fuerza que actúa sobre el sistema de dos fragmentos, el centro de masa seguirá la trayectoria parabólica de un objeto que cae libremente. Sin embargo, una vez que el fragmento toca tierra, el suelo ejerce una fuerza normal sobre ese fragmento. Por lo tanto, la fuerza neta sobre el sistema cambia, y la trayectoria del centro de masa se modifica en respuesta a ello.

8.6 **Respuestas: *a*) creciente, *b*) decreciente** De acuerdo con las ecuaciones (8.37) y (8.38), el empuje F es igual a $m\,(dv/dt)$, donde m es la masa del cohete y dv/dt es su aceleración. Como m disminuye con el tiempo, si el empuje F es constante, la aceleración deberá aumentar con el tiempo (la misma fuerza actúa sobre una masa menor); si la aceleración dv/dt es constante, el empuje deberá disminuir con el tiempo (se requiere una fuerza menor para acelerar una masa más pequeña).

Problema práctico

Respuestas: *a*) 1.00 m/s a la derecha *b*) Elástico
c) 1.93 m/s a $-30.4°$
d) 2.31 kg·m/s a 149.6° *e*) Inelástico
f) 1.67 m/s en dirección $+x$

9 ROTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS



? Todos los segmentos del aspa de una turbina giratoria de viento tienen la misma velocidad angular. En comparación con un segmento dado del aspa, ¿cuántas veces mayor es la rapidez lineal de un segundo segmento ubicado al doble de distancia del eje de rotación? ¿Cuántas veces mayor es su aceleración radial?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir la rotación de un cuerpo rígido en términos de las coordenadas, la velocidad y la aceleración angulares.
- Cómo analizar la rotación de un cuerpo rígido cuando la aceleración angular es constante.
- Cómo relacionar la rotación de un cuerpo rígido con la velocidad y la aceleración lineales de un punto en el cuerpo.
- El significado del momento de inercia de un cuerpo en torno a un eje de rotación y cómo se relaciona con la energía cinética de rotación.
- Cómo calcular el momento de inercia de varios cuerpos.

¿Qué tienen en común los movimientos de un disco compacto, una rueda de la fortuna, una sierra circular y un ventilador de techo? Ninguno puede representarse adecuadamente como un *punto* en movimiento; todos implican un cuerpo que *gira* alrededor de un eje que está fijo en algún marco de referencia inercial.

La rotación se da en todos los niveles, desde el movimiento de los electrones en los átomos hasta los movimientos de las galaxias enteras. Necesitamos desarrollar métodos generales para analizar el movimiento de un cuerpo en rotación. En este capítulo y en el siguiente consideraremos los cuerpos con tamaño y forma definidos que, en general, pueden tener movimiento de rotación además de movimiento de traslación.

Muchos cuerpos reales son muy complejos; las fuerzas que actúan sobre ellos pueden deformarlos: estirarlos, torcerlos y aplastarlos. Por el momento, ignoraremos estas deformaciones y supondremos que el cuerpo tiene forma y tamaño perfectamente definidos e inmutables. Llamamos a este modelo idealizado **cuerpo rígido**. Este capítulo y el siguiente tratan principalmente del movimiento de rotación de un cuerpo rígido.

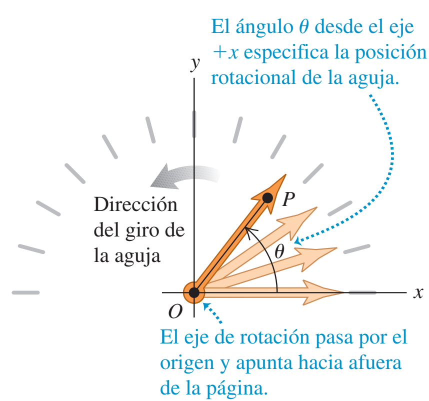
Comenzaremos con el lenguaje de la cinemática para *describir* el movimiento de rotación. Luego estudiaremos la energía cinética de rotación, la clave para aplicar los métodos de energía en el movimiento de rotación. En el capítulo 10 desarrollaremos los principios dinámicos que relacionan las fuerzas sobre un cuerpo con su movimiento de rotación.

9.1 Velocidad y aceleración angulares

Para analizar el movimiento de rotación, pensemos primero en un cuerpo rígido que gira alrededor de un *eje fijo*, es decir, un eje que está en reposo en algún marco de referencia inercial y que no cambia de dirección relativa al marco. El cuerpo rígido en rotación podría ser la flecha de un motor, un trozo de asado en una brocheta o un carrusel.

La figura 9.1 muestra un cuerpo rígido (en este caso, la aguja indicadora de un velocímetro) que gira alrededor de un eje fijo, el cual pasa por el punto O y es perpendicu-

9.1 Aguja de un velocímetro (un ejemplo de cuerpo rígido) que gira en sentido antihorario alrededor de un eje fijo.

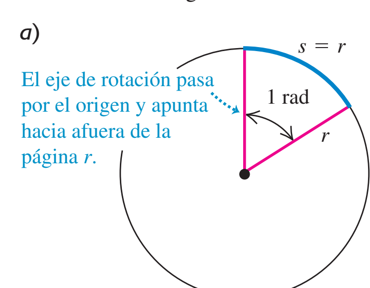


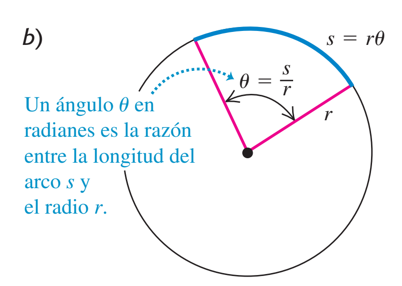
lar al plano del diagrama, al que llamamos plano xy. Una forma de describir la rotación de este cuerpo sería elegir un punto específico P del cuerpo y seguir la pista a sus coordenadas x y y. Este método no es el más conveniente, pues requiere dos números (las dos coordenadas x y y) para especificar la posición rotacional del cuerpo. En lugar de eso, observamos que la línea OP está fija en el cuerpo y gira con él. El ángulo θ que esta línea forma con el eje $+x$ describe la posición rotacional del cuerpo; usaremos solo esta cantidad θ como *coordenada* de rotación.

La coordenada angular θ de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo puede ser positiva o negativa. Si hacemos que los ángulos positivos se midan en sentido antihorario desde el eje $+x$, entonces el ángulo θ en la figura 9.1 es positivo. En cambio, si elegimos la dirección horaria como la rotación positiva, θ será negativo en la figura 9.1. Cuando consideramos el movimiento rectilíneo de una partícula, fue indispensable especificar la dirección del desplazamiento positivo sobre esa línea; al analizar la rotación alrededor de un eje fijo, es igualmente indispensable especificar la dirección de rotación positiva.

Al describir un movimiento de rotación, la forma más natural de medir el ángulo θ no es en grados, sino en **radianes**. Como se muestra en la figura 9.2*a*, un radián (1 rad) es el ángulo subtendido en el centro de un círculo por un arco cuya longitud es igual al radio del círculo. En la figura 9.2*b*, un ángulo θ es subtendido por un arco de longitud s en un círculo de radio r. El valor de θ (en radianes) es igual a s entre r:

9.2 Medición de ángulos en radianes.





$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{o bien,} \qquad s = r\theta \tag{9.1}$$

Un ángulo en radianes es la razón de dos longitudes, así que es un número puro, sin dimensiones. Si $s = 3.0$ m y $r = 2.0$ m, entonces $\theta = 1.5$, pero a menudo escribiremos esto como 1.5 rad, para distinguirlo de un ángulo medido en grados o revoluciones.

La circunferencia de un círculo (es decir, la longitud del arco que rodea el círculo) es 2π veces el radio, así que hay 2π (unos 6.283) radianes en una revolución completa (360°). Por lo tanto,

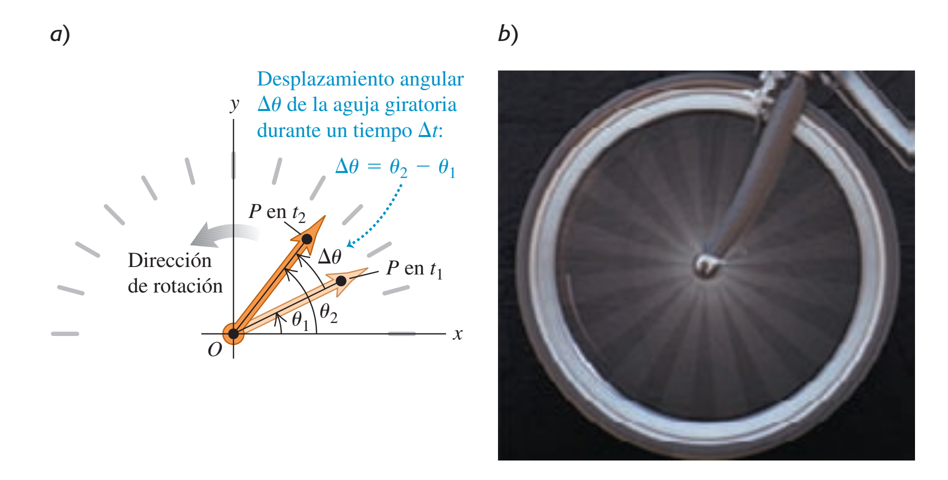
$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = 57.3°$$

Asimismo, $180° = \pi$ rad, $90° = \pi/2$ rad, etcétera. Si insistiéramos en medir θ en grados, tendríamos que incluir un factor más de $(2\pi/360)$ en el lado derecho de $s = r\theta$ en la ecuación (9.1). Al medir los ángulos en radianes, mantenemos la relación entre el ángulo y la distancia a lo largo de un arco lo más sencilla posible.

Velocidad angular

La coordenada θ de la figura 9.1 especifica la posición rotacional de un cuerpo rígido en un instante determinado. Podemos describir el *movimiento* de rotación del cuerpo rígido en términos de la razón de cambio de θ, de forma análoga a como describimos el movimiento rectilíneo en el capítulo 2. En la figura 9.3*a*, una línea de referencia OP en un cuerpo que gira forma un ángulo θ_1 con el eje $+x$ en el instante t_1. En un instante posterior t_2, el ángulo cambió a θ_2. Definimos la **velocidad angular media** $\omega_{\text{med-}z}$ (la letra griega omega) del cuerpo en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ como la razón del **desplazamiento angular** $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ en Δt:

$$\omega_{\text{med-}z} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{9.2}$$



9.3 *a*) Desplazamiento angular $\Delta\theta$ de un cuerpo en rotación. *b*) Cada parte de un cuerpo rígido en rotación tiene la misma velocidad angular media $\Delta\theta/\Delta t$.

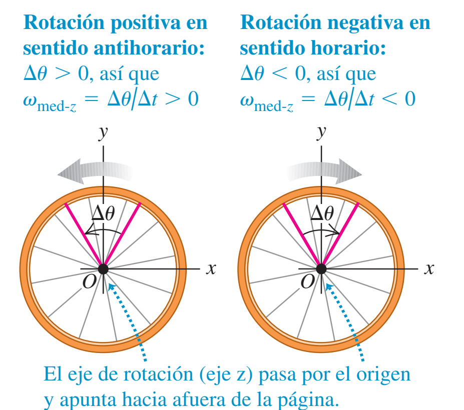
El subíndice z indica que el cuerpo de la figura 9.3*a* está girando en torno al eje z, que es perpendicular al plano del diagrama. La **velocidad angular instantánea** ω_z es el límite de $\omega_{\text{med-}z}$ cuando Δt tiende a cero, es decir, la derivada de θ con respecto a t:

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{(definición de velocidad angular)} \quad (9.3)$$

Cuando nos referimos simplemente a "velocidad angular", hablamos de la velocidad angular instantánea, no de la velocidad angular media.

La velocidad angular ω_z puede ser positiva o negativa, dependiendo de la dirección en que gira el cuerpo rígido (figura 9.4). La *rapidez* angular ω, que usaremos mucho en las secciones 9.3 y 9.4, es la magnitud de la velocidad angular. Al igual que la rapidez ordinaria (lineal) v, la rapidez angular nunca es negativa.

9.4 La velocidad angular media de un cuerpo rígido (que aquí se muestra) y la velocidad angular instantánea pueden ser positivas o negativas.



CUIDADO **Velocidad angular contra velocidad lineal** Tenga presente la distinción entre velocidad angular ω_z y velocidad ordinaria, o *velocidad lineal*, v_x (véase la sección 2.2). Si un objeto tiene una velocidad v_x, el objeto en su totalidad se *mueve* a lo largo del eje x. En contraste, si un objeto tiene una velocidad angular ω_z, está *girando* en torno al eje z. *No* quiere decir que el objeto se mueve a lo largo del eje z.

Diferentes puntos de un cuerpo rígido en rotación recorren diferentes distancias en un tiempo dado, dependiendo de la distancia de cada punto al eje de rotación. No obstante, como el cuerpo es rígido, *todos* los puntos giran el mismo ángulo en el mismo tiempo (figura 9.3*b*). Por lo tanto, *en cualquier instante, todas las partes de un cuerpo rígido en rotación tienen la misma velocidad angular*. La velocidad angular es positiva si el cuerpo gira en la dirección de θ creciente, y negativa si lo hace en la dirección de θ decreciente.

Si el ángulo de θ está en radianes, la unidad de velocidad angular es el radián por segundo (rad/s). Suelen usarse otras unidades, como revoluciones por minuto (rev/min o rpm). Puesto que 1 rev = 2π rad, dos conversiones útiles son

$$1 \text{ rev/s} = 2\pi \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad 1 \text{ rev/min} = 1 \text{ rpm} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s}$$

Es decir, 1 rad/s es alrededor de 10 rpm.



Ejemplo 9.1 Cálculo de la velocidad angular

La posición angular θ de un volante de 0.36 m de diámetro está dada por

$$\theta = (2.0\ \text{rad/s}^3)t^3$$

a) Calcule θ, en radianes y en grados, en $t_1 = 2.0$ s y $t_2 = 5.0$ s. *b*) Calcule la distancia que recorre una partícula en el borde del volante durante el intervalo $t_1 = 2.0$ s a $t_2 = 5.0$ s. *c*) Calcule la velocidad angular media, en rad/s y en rev/min, en ese intervalo. *d*) Calcule las velocidades angulares instantáneas en $t_1 = 2.0$ s y $t_2 = 5.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Podemos calcular las incógnitas θ_1 (la posición angular en el tiempo t_1), θ_2 (la posición angular en el tiempo t_2) y el desplazamiento angular $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ a partir de la expresión dada. Conociendo $\Delta\theta$, calcularemos la distancia recorrida y la velocidad angular media entre t_1 y t_2 empleando las ecuaciones (9.1) y (9.2), respectivamente. Para calcular las velocidades angulares instantáneas ω_{1z} (en el tiempo t_1) y ω_{2z} (en el tiempo t_2), derivaremos θ con respecto al tiempo, como en la ecuación (9.3).

EJECUTAR: *a*) Sustituimos los valores de t en la ecuación dada para θ:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= (2.0\ \text{rad/s}^3)(2.0\ \text{s})^3 = 16\ \text{rad}\\ &= (16\ \text{rad})\frac{360°}{2\pi\ \text{rad}} = 920°\\ \theta_2 &= (2.0\ \text{rad/s}^3)(5.0\ \text{s})^3 = 250\ \text{rad}\\ &= (250\ \text{rad})\frac{360°}{2\pi\ \text{rad}} = 14{,}000°\end{aligned}$$

b) Durante el intervalo de t_1 a t_2, el desplazamiento angular del volante es $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 250\ \text{rad} - 16\ \text{rad} = 234$ rad. El radio r es la mitad del diámetro, es decir, 0.18 m. Para usar la ecuación (9.1), los ángulos se *deben* expresar en radianes:

$$s = r\theta_2 - r\theta_1 = r\Delta\theta = (0.18\ \text{m})(234\ \text{rad}) = 42\ \text{m}$$

Omitimos "radianes" de las unidades de s porque θ es un número adimensional; la distancia s se mide en metros, al igual que r.

c) De acuerdo con la ecuación (9.2),

$$\begin{aligned}\omega_{\text{med-}z} &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{250\ \text{rad} - 16\ \text{rad}}{5.0\ \text{s} - 2.0\ \text{s}} = 78\ \text{rad/s}\\ &= \left(78\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)\left(\frac{1\ \text{rev}}{2\pi\ \text{rad}}\right)\left(\frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}}\right) = 740\ \text{rev/min}\end{aligned}$$

d) Según la ecuación (9.3):

$$\begin{aligned}\omega_z &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}[(2.0\ \text{rad/s}^3)t^3] = (2.0\ \text{rad/s}^3)(3t^2)\\ &= (6.0\ \text{rad/s}^3)t^2\end{aligned}$$

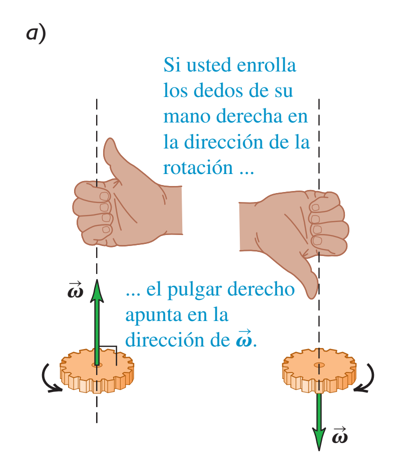
En los instantes $t_1 = 2.0$ s y $t_2 = 5.0$ s, tenemos

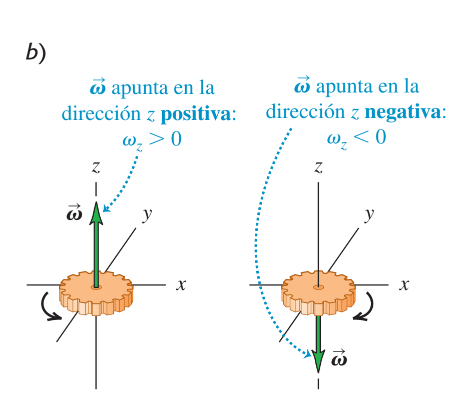
$$\begin{aligned}\omega_{1z} &= (6.0\ \text{rad/s}^3)(2.0\ \text{s})^2 = 24\ \text{rad/s}\\ \omega_{2z} &= (6.0\ \text{rad/s}^3)(5.0\ \text{s})^2 = 150\ \text{rad/s}\end{aligned}$$

EVALUAR: La velocidad angular $\omega_z = (6.0\ \text{rad/s}^3)t^2$ aumenta con el tiempo. Nuestros resultados son congruentes con esto; la velocidad angular instantánea al final del intervalo ($\omega_{2z} = 150$ rad/s) es mayor que la inicial ($\omega_{1z} = 24$ rad/s), y la velocidad angular media $\omega_{\text{med-}z} = 78$ rad/s para el intervalo está entre estos dos valores.

Velocidad angular como un vector

Como hemos visto, la notación para la velocidad angular ω_z en torno al eje z recuerda la notación v_x, para la velocidad ordinaria a lo largo del eje x (véase la sección 2.2). Así como v_x es la componente x del vector velocidad $\vec{v}$, ω_z es la componente z del *vector* velocidad angular $\vec{\omega}$ dirigido a lo largo del eje de rotación. Como muestra la figura 9.5*a*, la dirección de $\vec{\omega}$ está dada por la regla de la mano derecha que empleamos





9.5 *a*) Regla de la mano derecha para determinar la dirección del vector velocidad angular $\vec{\omega}$. Si se invierte el sentido de la rotación, se invierte la dirección de $\vec{\omega}$. *b*) Signo de ω_z para la rotación a lo largo del eje z.

al definir el producto vectorial en la sección 1.10. Si la rotación es alrededor del eje z, $\vec{\omega}$ solo tiene componente z, la cual es positiva si $\vec{\omega}$ se encuentra a lo largo del eje z positivo, y negativa si $\vec{\omega}$ se encuentra a lo largo del eje z negativo (figura 9.5*b*).

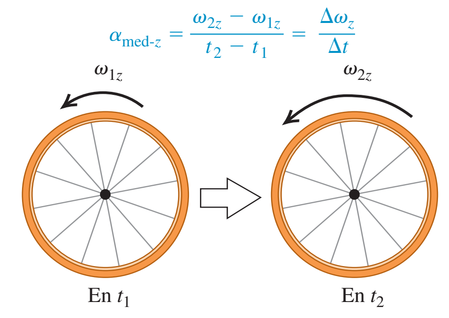
La formulación vectorial tiene especial utilidad en situaciones donde *cambia* la dirección del eje de rotación. Examinaremos brevemente estas situaciones al final del capítulo 10. Sin embargo, en el presente capítulo, solo consideraremos situaciones en las que el eje de rotación es fijo. Por lo que, en este capítulo, usaremos el término "velocidad angular" para referirnos a ω_z, la componente del vector velocidad angular $\vec{\omega}$ a lo largo del eje.

Aceleración angular

Si cambia la velocidad angular de un cuerpo rígido, se produce una *aceleración angular*. Cuando una persona pedalea una bicicleta con más intensidad para hacer que las ruedas giren más rápidamente, o aplica los frenos para detener las ruedas, genera una aceleración angular sobre estas. También se produce una aceleración angular cuando se modifica la rapidez de rotación de una pieza giratoria de una maquinaria, como el cigüeñal del motor de un automóvil.

Si ω_{1z} y ω_{2z} son las velocidades angulares instantáneas en t_1 y t_2, definimos la **aceleración angular media** $\alpha_{\text{med-}z}$ en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ como el cambio de la velocidad angular dividido entre Δt (figura 9.6):

9.6 Cálculo de la aceleración angular media de un cuerpo rígido que gira.



$$\alpha_{\text{med-}z} = \frac{\omega_{2z} - \omega_{1z}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} \tag{9.4}$$

La **aceleración angular instantánea** α_z es el límite de $\alpha_{\text{med-}z}$ cuando $\Delta t \to 0$:

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} \qquad \text{(definición de aceleración angular)} \tag{9.5}$$

La unidad usual de la aceleración angular es el radián por segundo por segundo, es decir, rad/s^2. De ahora en adelante, emplearemos el término "aceleración angular" para referirnos a la aceleración angular instantánea, no a la aceleración angular media.

Dado que $\omega_z = d\theta/dt$, también podemos expresar la aceleración angular como la segunda derivada de la coordenada angular:

$$\alpha_z = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{9.6}$$

Probablemente el lector ya se percató de que estamos usando letras griegas para las variables de la cinemática angular: θ para la posición, ω_z para la velocidad angular, y α_z para la aceleración angular. Estas son análogas a x para la posición, v_x para la velocidad y a_x para la aceleración, respectivamente, en el movimiento rectilíneo. En ambos casos, la velocidad es la tasa de cambio de la posición con respecto al tiempo; en tanto que la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. Algunas veces, usaremos los términos "velocidad *lineal*" y "aceleración *lineal*" para referirnos a las cantidades conocidas que ya definimos en los capítulos 2 y 3, con la finalidad de distinguir claramente entre estas y las cantidades *angulares* presentadas en este capítulo.

En el movimiento de rotación, si la aceleración angular α_z es positiva, aumenta la velocidad angular ω_z; si α_z es negativa, ω_z disminuye. La rotación se está acelerando si α_z y ω_z tienen el mismo signo, y frenándose si tienen signos opuestos. (Estas relaciones son idénticas a las que existen entre la aceleración *lineal* a_x y la velocidad *lineal* v_x en el movimiento rectilíneo; véase la sección 2.3).



Ejemplo 9.2 Cálculo de la aceleración angular

Para el volante del ejemplo 9.1, *a*) calcule la aceleración angular media entre $t_1 = 2.0$ s y $t_2 = 5.0$ s. *b*) Calcule las aceleraciones angulares instantáneas en $t_1 = 2.0$ s y $t_2 = 5.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usamos la ecuación (9.4) para la aceleración angular media $\alpha_{\text{med-}z}$ y la ecuación (9.5) para la aceleración angular instantánea α_z.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con el ejemplo 9.1, los valores de ω_z en los dos instantes son

$$\omega_{1z} = 24 \text{ rad/s} \qquad \omega_{2z} = 150 \text{ rad/s}$$

Según la ecuación (9.4), la aceleración angular media es

$$\alpha_{\text{med-}z} = \frac{150 \text{ rad/s} - 24 \text{ rad/s}}{5.0 \text{ s} - 2.0 \text{ s}} = 42 \text{ rad/s}^2$$

b) Según la ecuación (9.5), el valor de α_z en cualquier instante t es

$$\alpha_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d}{dt}[(6.0 \text{ rad/s}^3)(t^2)] = (6.0 \text{ rad/s}^3)(2t) = (12 \text{ rad/s}^3)t$$

Por lo que

$$\alpha_{1z} = (12 \text{ rad/s}^3)(2.0 \text{ s}) = 24 \text{ rad/s}^2$$

$$\alpha_{2z} = (12 \text{ rad/s}^3)(5.0 \text{ s}) = 60 \text{ rad/s}^2$$

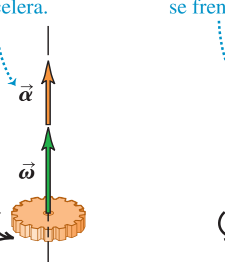
EVALUAR: Observe que la aceleración angular *no* es constante en esta situación. La velocidad angular ω_z siempre aumenta porque α_z siempre es positiva; además, la razón a la que aumenta la velocidad angular también está creciendo, ya que α_z aumenta con el tiempo.

Aceleración angular como un vector

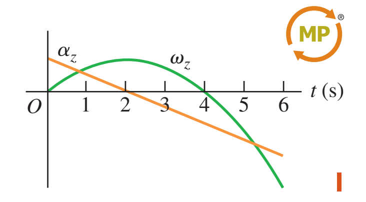
Al igual que en el caso de la velocidad angular, resulta útil definir un *vector* aceleración angular $\vec{\alpha}$. Matemáticamente, $\vec{\alpha}$ es la derivada con respecto al tiempo del vector velocidad angular $\vec{\omega}$. Si el objeto gira en torno al eje z fijo, $\vec{\alpha}$ solo tiene componente z; la cantidad α_z es precisamente esa componente. En este caso, $\vec{\alpha}$ está en la misma dirección que $\vec{\omega}$ si la rotación se está acelerando, y es opuesta a $\vec{\omega}$ si se está frenando (figura 9.7).

El vector aceleración angular será especialmente útil en el capítulo 10 cuando veamos lo que sucede cuando el eje de rotación cambia de dirección. Sin embargo, en este capítulo el eje de rotación siempre estará fijo y solo necesitaremos usar la componente z: α_z.

9.7 Cuando el eje de rotación es fijo, los vectores aceleración angular y velocidad angular están sobre ese eje.



Evalúe su comprensión de la sección 9.1 La figura muestra una gráfica de ω_z y α_z contra el tiempo, para un cuerpo rígido en rotación. *a*) ¿En qué intervalos de tiempo la rotación se acelera? **i.** $0 < t < 2$ s; **ii.** $2 \text{ s} < t < 4$ s; **iii.** $4 \text{ s} < t < 6$ s. *b*) ¿En qué intervalos de tiempo la rotación se frena? **i.** $0 < t < 2$ s; **ii.** $2 \text{ s} < t < 4$ s; **iii.** $4 \text{ s} < t < 6$ s.



9.2 Rotación con aceleración angular constante

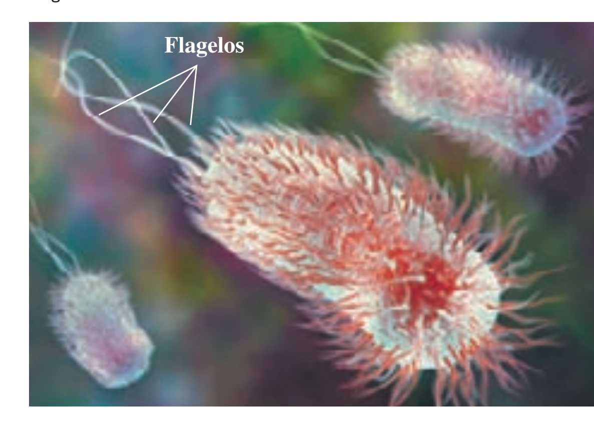
En el capítulo 2, vimos que el movimiento rectilíneo es muy sencillo cuando la aceleración es constante. Lo mismo sucede con el movimiento de rotación alrededor de un eje fijo. Si la aceleración angular es constante, podemos deducir ecuaciones para la velocidad y la posición angulares siguiendo el mismo procedimiento que usamos para el movimiento rectilíneo en la sección 2.4. De hecho, las ecuaciones que vamos a deducir son idénticas a las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) si sustituimos x por θ, v_x por ω_z, y a_x por α_z. Sugerimos repasar la sección 2.4 antes de continuar.

Sea ω_{0z} la velocidad angular de un cuerpo rígido en $t = 0$, y sea ω_z su velocidad angular en cualquier instante posterior t. La aceleración angular α_z es constante e igual al valor medio en cualquier intervalo. Usando la ecuación (9.4) en el intervalo de 0 a t, tenemos

$$\alpha_z = \frac{\omega_z - \omega_{0z}}{t - 0} \qquad \text{o bien,}$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t \qquad \text{(solo aceleración angular constante)} \qquad (9.7)$$

Aplicación Movimiento de rotación de las bacterias
La bacteria *Escherichia coli* (de aproximadamente 2 μm por 0.5 μm) se encuentra en el intestino grueso de los seres humanos y de otros animales de sangre caliente. La bacteria nada haciendo girar sus flagelos largos en forma de tirabuzón, los cuales actúan como las aspas de una hélice. Cada flagelo es impulsado por un notable motor proteínico en su base. El motor hace girar al flagelo a rapideces angulares de 200 a 1000 rev/min (aproximadamente de 20 a 100 rad/s) y puede variar su rapidez para dar al flagelo una aceleración angular.



El producto $\alpha_z t$ es el cambio total de ω_z entre $t = 0$ y el instante posterior t; la velocidad angular ω_z en el instante t es la suma del valor inicial ω_{0z} y este cambio total.

Con aceleración angular constante, la velocidad angular cambia a una tasa uniforme, así que su valor medio entre 0 y t es la media de los valores inicial y final:

$$\omega_{\text{med-}z} = \frac{\omega_{0z} + \omega_z}{2} \tag{9.8}$$

También sabemos que $\omega_{\text{med-}z}$ es el desplazamiento angular total $(\theta - \theta_0)$ dividido entre el intervalo de tiempo $(t - 0)$:

$$\omega_{\text{med-}z} = \frac{\theta - \theta_0}{t - 0} \tag{9.9}$$

Si igualamos las ecuaciones (9.8) y (9.9), y multiplicamos el resultado por t, obtenemos

$$\theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t \quad \text{(solo aceleración angular constante)} \tag{9.10}$$

Para obtener una relación entre θ y t que no incluya a ω_z, sustituimos la ecuación (9.7) en la ecuación (9.10):

$$\theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}[\omega_{0z} + (\omega_{0z} + \alpha_z t)]t \qquad \text{o bien,}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \tfrac{1}{2}\alpha_z t^2 \quad \text{(solo aceleración angular constante)} \tag{9.11}$$

Es decir, si en el tiempo inicial $t = 0$ el cuerpo tiene una posición angular θ_0 y una velocidad angular ω_{0z}, entonces su posición angular θ en cualquier instante posterior t será la suma de tres términos: su posición angular inicial θ_0, más la rotación $\omega_{0z}t$ que tendría si la velocidad angular fuera constante, más una rotación adicional $\frac{1}{2}\alpha_z t^2$ causada por el cambio en la velocidad angular.

Siguiendo el mismo procedimiento que para el movimiento rectilíneo de la sección 2.4, combinamos las ecuaciones (9.7) y (9.11) para obtener una relación entre θ y ω_z que no contenga t. Lo invitamos a efectuarlo, siguiendo el procedimiento que empleamos para obtener la ecuación (2.13). (Véase el ejercicio 9.12). De hecho, dada la analogía perfecta entre las cantidades rectilíneas y rotacionales, simplemente podemos tomar la ecuación (2.13) y sustituir cada cantidad rectilínea por su contraparte rotacional. Obtenemos

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0) \quad \text{(solo aceleración angular constante)} \tag{9.12}$$

CUIDADO **Aceleración angular constante** Tenga presente que estos resultados son válidos *solo* si la aceleración angular α_z es *constante*; no trate de aplicarlos a problemas donde α_z *no* sea constante. En la tabla 9.1 se muestra la analogía entre las ecuaciones (9.7), (9.10), (9.11) y (9.12), para rotación sobre un eje fijo y aceleración angular constante, y las ecuaciones correspondientes para el movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante.

Tabla 9.1 Comparación del movimiento lineal y angular con aceleración constante

Movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante		Rotación sobre un eje fijo con aceleración angular constante	
$a_x = \text{constante}$		$\alpha_z = \text{constante}$	
$v_x = v_{0x} + a_x t$	(2.8)	$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$	(9.7)
$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	(2.12)	$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$	(9.11)
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	(2.13)	$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$	(9.12)
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$	(2.14)	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t$	(9.10)

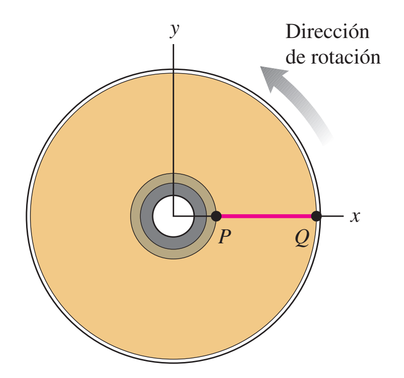
Ejemplo 9.3 Rotación con aceleración angular constante

Imagine que usted acaba de ver una película en Blu-ray y el disco se está deteniendo. La velocidad angular del disco en $t = 0$ es de 27.5 rad/s y su aceleración angular constante es de -10.0 rad/s^2. En la superficie del disco se encuentra una línea PQ a lo largo del eje $+x$ en $t = 0$ (figura 9.8). *a*) ¿Qué velocidad angular tiene el disco en $t = 0.300$ s? *b*) ¿Qué ángulo forma la línea PQ con el eje $+x$ en ese instante?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La aceleración angular del disco es constante, así que podemos usar cualquiera de las ecuaciones que dedujimos en esta sección (tabla 9.1). Las incógnitas son la velocidad angular ω_z y el desplazamiento angular θ en $t = 0.300$ s. Puesto que se conocen $\omega_{0z} = 27.5$ rad/s, $\theta_0 = 0$ y $\alpha_z = -10.0$ rad/s^2, lo más fácil es usar las ecuaciones (9.7) y (9.11) para obtener las incógnitas.

9.8 La línea PQ sobre un disco de Blu-ray que gira en $t = 0$.



EJECUTAR: *a*) Por la ecuación (9.7), en $t = 0.300$ s tenemos

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t = 27.5 \text{ rad/s} + (-10.0 \text{ rad/s}^2)(0.300 \text{ s}) = 24.5 \text{ rad/s}$$

b) Por la ecuación (9.11),

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \tfrac{1}{2}\alpha_z t^2$$

$$= 0 + (27.5 \text{ rad/s})(0.300 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-10.0 \text{ rad/s}^2)(0.300 \text{ s})^2$$

$$= 7.80 \text{ rad} = 7.80 \text{ rad}\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right) = 1.24 \text{ rev}$$

El disco ha girado una revolución completa más 0.24 de revolución, es decir, 360° más un ángulo adicional de (0.24 rev) (360°/rev) = 87°. Por lo tanto, la línea PQ forma un ángulo de 87° con el eje $+x$.

EVALUAR: La respuesta al inciso *a*) nos indica que disminuyó la velocidad angular del disco, como debe ser, dado que $\alpha_z < 0$. También podemos usar el valor de ω_z del inciso *a*) con la ecuación (9.12) para comprobar el resultado de θ del inciso *b*). Para hacerlo, despejamos θ de la ecuación (9.12):

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$$

$$\theta = \theta_0 + \left(\frac{\omega_z^2 - \omega_{0z}^2}{2\alpha_z}\right)$$

$$= 0 + \frac{(24.5 \text{ rad/s})^2 - (27.5 \text{ rad/s})^2}{2(-10.0 \text{ rad/s}^2)} = 7.80 \text{ rad}$$

Esto coincide con el resultado previo del inciso *b*).

Evalúe su comprensión de la sección 9.2 Suponga que el disco del ejemplo 9.3 originalmente estaba girando al doble de la tasa (55.0 rad/s en lugar de 27.5 rad/s) y que frenó al doble de la tasa (-20.0 rad/s^2 en vez de -10.0 rad/s^2). *a*) En comparación con la situación del ejemplo 9.3, ¿cuánto tiempo le tomaría al disco llegar al reposo? **i.** La misma cantidad de tiempo; **ii.** el doble de tiempo; **iii.** 4 veces más tiempo; **iv.** $\frac{1}{2}$ del tiempo; **v.** $\frac{1}{4}$ del tiempo. *b*) En comparación con la situación del ejemplo 9.3, ¿cuántas revoluciones giraría el disco antes de detenerse? **i.** El mismo número de revoluciones; **ii.** el doble de revoluciones; **iii.** 4 veces más revoluciones; **iv.** $\frac{1}{2}$ de las revoluciones; **v.** $\frac{1}{4}$ de las revoluciones.

9.3 Relación entre cinemática lineal y angular

¿Cómo obtenemos la velocidad y aceleración lineales de un punto dado en un cuerpo rígido en rotación? Se necesita la respuesta para continuar con nuestro estudio de la rotación. Por ejemplo, si deseamos obtener la energía cinética de un cuerpo en rotación, debemos partir de $K = \frac{1}{2}mv^2$ para una partícula, y esto requiere conocer la rapidez v de cada partícula del cuerpo. Entonces, vale la pena deducir relaciones generales entre la rapidez y la aceleración *angulares* de un cuerpo rígido que gira sobre un eje fijo, y la rapidez y la aceleración *lineales* de un punto o de una partícula específicos del cuerpo.

Rapidez lineal en la rotación de un cuerpo rígido

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, todas sus partículas se mueven en una trayectoria circular. El círculo se encuentra en un plano perpendicular al eje y está centrado en este último. La rapidez de una partícula es directamente proporcio-

9.9 Cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo que pasa por el punto O.

Distancia que recorre el punto P del cuerpo (el ángulo θ está en radianes)

Rapidez lineal del punto P (la rapidez angular ω está en rad/s)

nal a la velocidad angular del cuerpo; cuanto más rápidamente gira el cuerpo, mayor es la rapidez de cada partícula. En la figura 9.9, el punto P está a una distancia constante r del eje de rotación, así que se mueve en un círculo de radio r. En cualquier instante, el ángulo θ (en radianes) y la longitud del arco s están relacionados por

$$s = r\theta$$

Al derivar con respecto al tiempo, se observa que r es constante para una partícula específica, y se toma el valor absoluto de ambos lados:

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = r\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$$

Ahora, $|ds/dt|$ es el valor absoluto de la tasa de cambio de la longitud de arco, que es igual a la rapidez *lineal* instantánea v de la partícula. De manera análoga, $|d\theta/dt|$ es el valor absoluto de la razón de cambio del ángulo, que es la **rapidez angular** instantánea ω, es decir, la magnitud de la velocidad angular instantánea en rad/s. Así,

$$v = r\omega \quad \text{(relación entre las rapideces lineal y angular)} \qquad (9.13)$$

Cuanto más lejos está un punto del eje, mayor será su rapidez lineal. La *dirección* del *vector* velocidad lineal es tangente a la trayectoria circular en todos los puntos (figura 9.9).



PhET: Ladybug Revolution

CUIDADO **Rapidez contra velocidad** Tenga presente la distinción entre las *rapideces* lineal y angular v y ω, que aparecen en la ecuación (9.13), y las *velocidades* lineal y angular v_x y ω_z. Las cantidades sin subíndices, v y ω, nunca son negativas; son las magnitudes de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{\omega}$, respectivamente, y sus valores indican con qué rapidez (v) se está moviendo la partícula o qué tan rápido está girando (ω). Las cantidades correspondientes con subíndice, v_x y ω_z, pueden ser positivas o negativas; su signo indica la dirección del movimiento.

Aceleración lineal en la rotación de un cuerpo rígido

Podemos representar la aceleración de una partícula que se mueve en círculo en términos de sus componentes centrípeta y tangencial, a_{rad} y a_{tan} (figura 9.10), como hicimos en la sección 3.4. Le recomendamos repasar esa sección ahora. Vimos que la **componente tangencial de aceleración** a_{tan}, o componente paralela a la velocidad instantánea, actúa cambiando la *magnitud* de la velocidad de la partícula (su rapidez) y es igual a la tasa de cambio de la rapidez. Derivando la ecuación (9.13), obtenemos

$$a_{tan} = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \quad \text{(aceleración tangencial de un punto en un cuerpo en rotación)} \qquad (9.14)$$

Esta componente de la aceleración de una partícula siempre es tangente a la trayectoria circular de la partícula.

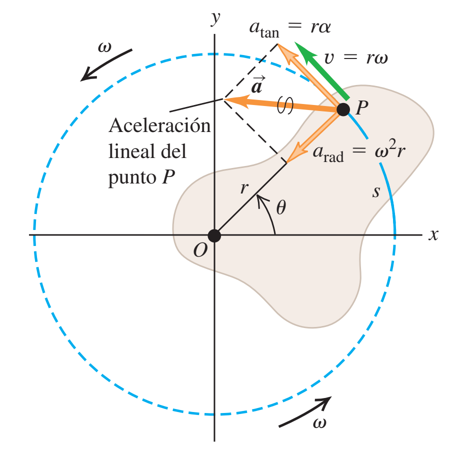
La cantidad $\alpha = d\omega/dt$ de la ecuación (9.14) es la tasa de cambio de la *rapidez* angular. No es la misma que $\alpha_z = d\omega_z/dt$, que es la tasa de cambio de la *velocidad* angular. Por ejemplo, consideremos un cuerpo que gira de modo que su vector velocidad angular apunta en la dirección $-z$ (véase la figura 9.5*b*). Si la rapidez angular del cuerpo está aumentando a una tasa de 10 rad/s por segundo, entonces $\alpha = 10\ \text{rad/s}^2$. Sin embargo, ω_z es negativa y se hace más negativa a medida que la rotación aumenta, así que $\alpha_z = -10\ \text{rad/s}^2$. La regla para la rotación en torno a un eje fijo es que α es igual a α_z si ω_z es positiva e igual a $-\alpha_z$ si ω_z es negativa.

La componente de la aceleración de la partícula que está dirigida hacia el eje de rotación, la **componente centrípeta de aceleración** a_{rad}, está asociada con el



9.10 Cuerpo rígido cuya rotación está acelerando. La aceleración del punto P tiene una componente a_{rad} hacia el eje de rotación (perpendicular a $\vec{v}$) y una componente a_{tan} a lo largo del círculo que sigue el punto P (paralela a $\vec{v}$).

Componentes de aceleración radial y tangencial:
- $a_{rad} = \omega^2 r$ es la aceleración centrípeta del punto P.
- $a_{tan} = r\alpha$ significa que la rotación de P está aumentando (el cuerpo tiene aceleración angular).



cambio de *dirección* de la velocidad de la partícula. En la sección 3.4 dedujimos la relación $a_{rad} = v^2/r$. Podemos expresar esto en términos de ω usando la ecuación (9.13):

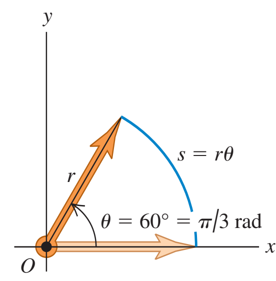
$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad \text{(aceleración centrípeta de un punto en un cuerpo en rotación)} \tag{9.15}$$

Esto se cumple en todo instante *aun si ω y v no son constantes*. La componente centrípeta siempre apunta hacia el eje de rotación.

La suma vectorial de las componentes centrípeta y tangencial de la aceleración de una partícula en un cuerpo en rotación es la aceleración lineal $\vec{a}$ (figura 9.10).

CUIDADO **Utilice ángulos en radianes en todas las ecuaciones** Es importante recordar que la ecuación (9.1), $s = r\theta$, es válida *solo* si θ se mide en radianes. Lo mismo sucede con todas las ecuaciones obtenidas a partir de ella, incluidas las ecuaciones (9.13), (9.14) y (9.15). Al usar estas ecuaciones, los ángulos *se deben* expresar en radianes, no en revoluciones ni en grados (figura 9.11).

9.11 Al relacionar cantidades lineales y angulares, utilice siempre radianes.



Las ecuaciones (9.1), (9.13) y (9.14) también son válidas para cualquier partícula que tenga la misma velocidad tangencial de un punto en un cuerpo rígido en rotación. Por ejemplo, si una cuerda enrollada en un cilindro se desenrolla sin estirarse ni resbalarse, su rapidez y aceleración en cualquier instante son iguales a la rapidez y aceleración tangencial del punto en el cual es tangente al cilindro. El mismo principio se cumple en las cadenas y ruedas dentadas de una bicicleta, en correas y poleas que giran sin deslizarse, etcétera. Más adelante en este capítulo y en el capítulo 10, tendremos varias oportunidades de usar estas relaciones. Observe que la ecuación (9.15) para la componente centrípeta a_{rad} es aplicable a la cuerda o cadena *solo* en los puntos de contacto con el cilindro o la rueda dentada. Los demás puntos no tienen la misma aceleración hacia el centro del círculo que tienen los puntos sobre el cilindro o la rueda dentada.

Ejemplo 9.4 Lanzamiento de disco



Un lanzador de disco gira el disco en un círculo con radio de 80.0 cm. En cierto instante, el lanzador gira a 10.0 rad/s y la rapidez angular está aumentando a 50.0 rad/s^2. Calcule las componentes de aceleración tangencial y centrípeta del disco en ese instante, y la magnitud de la aceleración en ese instante.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Tratamos el disco como una partícula que sigue una trayectoria circular (figura 9.12*a*), así que podemos usar los conceptos que desarrollamos en esta sección. Conocemos el radio $r = 0.800$ m, $\omega = 10.0$ rad/s y $\alpha = 50.0$ rad/s^2 (figura 9.12*b*). Usaremos las ecuaciones (9.14) y (9.15), respectivamente, para obtener las componentes de aceleración a_{tan} y a_{rad}; luego calcularemos la magnitud de a aplicando el teorema de Pitágoras.

EJECUTAR: De acuerdo con las ecuaciones (9.14) y (9.15):

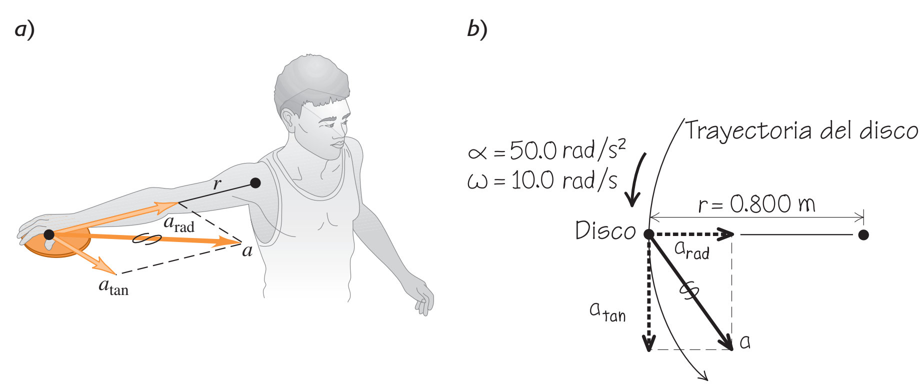
$$a_{tan} = r\alpha = (0.800\ \text{m})(50.0\ \text{rad/s}^2) = 40.0\ \text{m/s}^2$$
$$a_{rad} = \omega^2 r = (10.0\ \text{rad/s})^2(0.800\ \text{m}) = 80.0\ \text{m/s}^2$$

Entonces,

$$a = \sqrt{a_{tan}^2 + a_{rad}^2} = 89.4\ \text{m/s}^2$$

EVALUAR: Observe que omitimos la unidad “radián” de los resultados para a_{tan}, a_{rad} y a. Podemos hacerlo porque el “radián” es una cantidad adimensional. ¿Puede usted demostrar que, si la rapidez angular se duplica a 20.0 rad/s mientras α permanece constante, la magnitud de la aceleración, a, aumenta a 322 m/s^2?

9.12 *a*) Lanzamiento de disco con giro circular. *b*) El diagrama muestra las componentes de la aceleración para el disco.



Ejemplo 9.5 Diseño de una hélice



Imagine que le piden diseñar la hélice de un avión que va a girar a 2400 rpm (figura 9.13*a*). La rapidez de avance del avión en el aire debe ser de 75.0 m/s, y la rapidez de las puntas de las aspas de la hélice en el aire no debe exceder 270 m/s. (Esto es cerca del 80% de la rapidez del sonido en el aire. Si la rapidez de las puntas de la hélice fuera mayor, producirían un ruido ensordecedor). *a*) ¿Qué radio máximo puede tener la hélice? *b*) Con este radio, ¿qué aceleración tiene la punta de la hélice?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Consideremos una partícula en la punta de la hélice; las incógnitas son la distancia entre esa partícula y el eje, y su aceleración. La rapidez de esta partícula con respecto al aire, debida *tanto* a la rotación de la hélice *como* al movimiento hacia adelante del avión, no puede exceder 270 m/s. La figura 9.13*b* muestra que la velocidad $\vec{v}_{punta}$ de una partícula en la punta de la hélice es la suma vectorial de su velocidad tangencial debida a la rotación de la hélice de magnitud $v_{tan} = \omega r$, dada por la ecuación (9.13), y la velocidad hacia adelante del avión, de magnitud $v_{avión} = 75.0$ m/s. El plano de rotación de la hélice es perpendicular a la dirección del vuelo, así que $\vec{v}_{tan}$ y $\vec{v}_{avión}$ son perpendiculares entre sí; de manera que podemos usar el teorema de Pitágoras para obtener una expresión para v_{punta}, a partir de v_{tan} y $v_{avión}$. Entonces, obtenemos v_{punta} igual a 270 m/s y despejamos el radio r. La rapidez angular de la hélice es constante, de manera que la aceleración de la punta de la hélice solo tiene una componente radial, la cual obtendremos con la ecuación (9.15).

EJECUTAR: Primero convertimos ω a rad/s (véase la figura 9.11):

$$\omega = 2400 \text{ rpm} = \left(2400\frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 251 \text{ rad/s}$$

a) Según la figura 9.13*b* y la ecuación (9.13),

$$v_{punta}{}^2 = v_{avión}{}^2 + v_{tan}{}^2 = v_{avión}{}^2 + r^2\omega^2 \quad \text{o}$$

$$r^2 = \frac{v_{punta}{}^2 - v_{avión}{}^2}{\omega^2} \quad \text{y} \quad r = \frac{\sqrt{v_{punta}{}^2 - v_{avión}{}^2}}{\omega}$$

Si $v_{punta} = 270$ m/s, el radio máximo de la hélice es

$$r = \frac{\sqrt{(270 \text{ m/s})^2 - (75.0 \text{ m/s})^2}}{251 \text{ rad/s}} = 1.03 \text{ m}$$

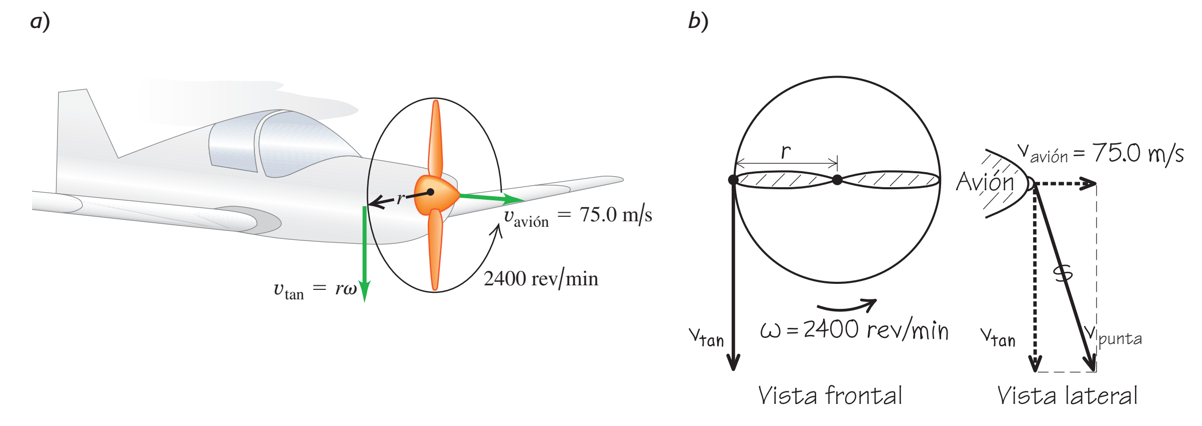
b) La aceleración centrípeta de la partícula es

$$a_{tan} = \omega^2 r = (251 \text{ rad/s})^2(1.03 \text{ m}) = 6.5 \times 10^4 \text{ m/s}^2 = 6600g$$

La aceleración *tangencial* a_{tan} es cero porque la rapidez angular es constante.

EVALUAR: De acuerdo con $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, ¡la hélice debe ejercer una fuerza de 6.5×10^4 N sobre cada kilogramo de material en la punta! Por eso, las hélices se fabrican con materiales resistentes; por lo general, se utiliza una aleación de aluminio.

9.13 *a*) Avión impulsado en el aire por una hélice. *b*) Diagrama que muestra las componentes de la velocidad en la punta de la hélice.



Evalúe su comprensión de la sección 9.3 En un disco (véase la figura 9.8), la información se almacena en un patrón codificado de agujeros diminutos, los cuales están dispuestos en una pista que forma una espiral del centro al borde del disco. Cuando el disco gira dentro de un reproductor, la pista se escanea con rapidez *lineal* constante. ¿Cómo debe cambiar la rapidez de rotación del disco mientras la cabeza lectora del reproductor se mueve a lo largo de la pista? **i.** La rapidez de rotación debe aumentar. **ii.** La rapidez de rotación debe disminuir. **iii.** La rapidez de rotación debe permanecer constante.

9.4 Energía en el movimiento de rotación

Un cuerpo rígido en rotación es una masa en movimiento, así que tiene energía cinética. Como veremos, podemos expresar esta energía cinética en términos de la rapidez angular del cuerpo y una nueva cantidad, llamada *momento de inercia*, que depende de la masa del cuerpo y de la forma en que se distribuye.



ActivPhysics 7.7: Rotational Inertia

Para empezar, visualicemos un cuerpo formado por un gran número de partículas, con masas $m_1, m_2, \dots$ a distancias $r_1, r_2, \dots$ del eje de rotación. Identificamos las partículas con el subíndice i: la masa de la i-ésima partícula es m_i y su distancia con respecto al eje de rotación es r_i. Las partículas no tienen que estar todas en el mismo plano, así que especificamos que r_i es la distancia *perpendicular* de la i-ésima partícula al eje.

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, la rapidez v_i de la i-ésima partícula está dada por la ecuación (9.13), $v_i = r_i\omega$, donde ω es la rapidez angular del cuerpo. Diferentes partículas tienen distintos valores de r, pero ω es igual para todas (de otra forma, el cuerpo no sería rígido). La energía cinética de la i-ésima partícula se expresa como

$$\tfrac{1}{2}m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$$

La energía cinética *total* del cuerpo es la suma de las energías cinéticas de todas sus partículas:

$$K = \tfrac{1}{2}m_1 r_1^2\omega^2 + \tfrac{1}{2}m_2 r_2^2\omega^2 + \cdots = \sum_i \tfrac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2$$

Sacando el factor común $\omega^2/2$ de esta expresión, obtenemos

$$K = \tfrac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots)\omega^2 = \tfrac{1}{2}\Big(\sum_i m_i r_i^2\Big)\omega^2$$

La cantidad entre paréntesis, que se obtiene multiplicando la masa de cada partícula por el cuadrado de su distancia al eje de rotación y sumando los productos, se denota con I y es el **momento de inercia** del cuerpo para este eje de rotación:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots = \sum_i m_i r_i^2 \qquad \text{(definición de momento de inercia)} \qquad (9.16)$$



Video Tutor Demo

La palabra "momento" significa que I depende de la distribución espacial de la masa del cuerpo; nada tiene que ver con un "momento" de tiempo. Para un cuerpo con un eje de rotación dado y una masa total determinada, cuanto mayor sea la distancia del eje a las partículas que constituyen el cuerpo, mayor será el momento de inercia. En un cuerpo rígido, las distancias r_i son constantes, e I es independiente de cómo gira el cuerpo en torno al eje dado. La unidad del momento de inercia en el SI es el kilogramo-metro^2 ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$).

En términos del momento de inercia I, la **energía cinética de rotación** K de un cuerpo rígido es

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad \text{(energía cinética de rotación de un cuerpo rígido)} \qquad (9.17)$$

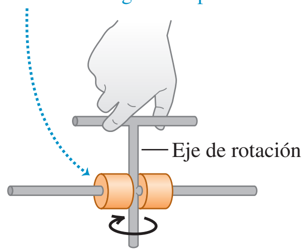
La energía cinética dada por la ecuación (9.17) *no* es una nueva forma de energía; es simplemente la suma de las energías cinéticas de las partículas individuales que forman al cuerpo rígido en rotación. Al usar la ecuación (9.17), ω *debe* medirse en radianes por segundo, no en revoluciones ni en grados por segundo, para obtener K en joules; la razón es que usamos $v_i = r_i\omega$ en la deducción.

La ecuación (9.17) ofrece una interpretación física sencilla del momento de inercia: *cuanto mayor sea el momento de inercia, mayor será la energía cinética de un cuerpo rígido que gira con una rapidez angular* ω. En el capítulo 6 vimos que la energía cinética de un cuerpo es igual al trabajo efectuado para acelerar ese cuerpo desde el reposo. De modo que, cuanto mayor sea el momento de inercia de un cuerpo, más difícil será ponerlo a girar si está en reposo, y más difícil será detener su rotación si ya está girando (figura 9.14). Por esta razón, I también se denomina *inercia rotacional*.

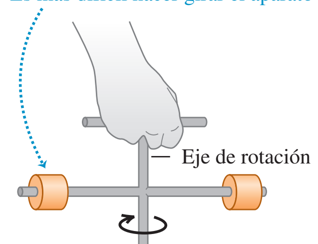
El siguiente ejemplo muestra cómo afecta al valor de I el *cambio* del eje de rotación.

9.14 Aparato que gira libremente en torno a un eje vertical. El momento de inercia se puede variar fijando los dos cilindros de igual masa en diferentes posiciones sobre la varilla horizontal.

- Masa cercana al eje
- Momento de inercia pequeño
- Es fácil hacer girar el aparato



- Masa más lejos del eje
- Mayor momento de inercia
- Es más difícil hacer girar el aparato





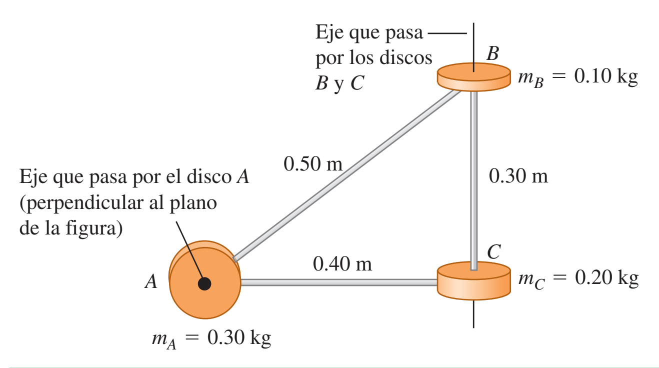
Ejemplo 9.6 Momentos de inercia para diferentes ejes de rotación

La pieza de una máquina (figura 9.15) está formada por tres discos unidos por puntales ligeros. *a*) ¿Qué momento de inercia tiene este cuerpo con respecto a un eje que pasa por el centro del disco *A* y es perpendicular al plano del diagrama? *b*) ¿Qué momento de inercia tiene con respecto a un eje que pasa por el centro de los discos *B* y *C*? *c*) Si el cuerpo gira alrededor del eje que pasa por *A* con rapidez angular $\omega = 4.0$ rad/s, ¿qué energía cinética tiene?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Consideraremos los discos como partículas masivas ubicadas en los centros de los discos, y a los puntales ligeros carentes de masa. En los incisos *a*) y *b*), usaremos la ecuación (9.16) para calcular los momentos de inercia. Conocido el momento de inercia con respecto al eje *A*, usaremos la ecuación (9.17) en el inciso *c*) para calcular la energía cinética de rotación.

9.15 Pieza mecánica de forma inusual.



EJECUTAR: *a*) La partícula en el punto *A* está *sobre* el eje que pasa por *A*, de modo que su distancia *r* al eje es cero, así que no contribuye al momento de inercia. De modo que solo *B* y *C* contribuyen, y de la ecuación (9.16) se obtiene

$$I_A = \sum m_i r_i^2 = (0.10 \text{ kg})(0.50 \text{ m})^2 + (0.20 \text{ kg})(0.40 \text{ m})^2$$
$$= 0.057 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

b) Las partículas en *B* y *C* están sobre el eje *BC*, así que ninguna contribuye al momento de inercia. Solo *A* contribuye, y tenemos

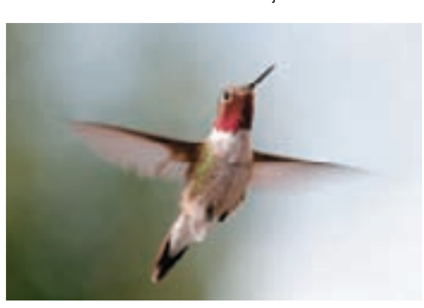
$$I_{BC} = \sum m_i r_i^2 = (0.30 \text{ kg})(0.40 \text{ m})^2 = 0.048 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

c) De acuerdo con la ecuación (9.17),

$$K_A = \tfrac{1}{2} I_A \omega^2 = \tfrac{1}{2}(0.057 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(4.0 \text{ rad/s})^2 = 0.46 \text{ J}$$

EVALUAR: El momento de inercia con respecto al eje que pasa por *A* es mayor que el momento de inercia con respecto al eje *BC*. Por lo tanto, considerando los dos ejes, es más fácil hacer girar la pieza alrededor del eje *BC*.

Aplicación Momento de inercia del ala de un ave
Cuando un ave aletea, hace girar sus alas arriba y abajo alrededor del hombro. Un colibrí tiene alas pequeñas con un momento de inercia pequeño, de modo que puede hacer que sus alas se muevan rápidamente (hasta 70 aleteos por segundo). En contraste, el cóndor de Los Andes (*Vultur gryphus*) tiene alas muy grandes que son difíciles de mover debido a su gran momento de inercia. Los cóndores efectúan un aleteo por segundo aproximadamente en el despegue, pero la mayoría de las veces prefieren planear mientras mantienen sus alas fijas.





CUIDADO **El momento de inercia depende de la elección del eje** Los resultados de los incisos *a*) y *b*) del ejemplo 9.6 demuestran que el momento de inercia de un cuerpo depende de la ubicación y orientación del eje. No basta con decir: “El momento de inercia de este cuerpo es de 0.048 kg·m²”. Debemos ser específicos y decir: “El momento de inercia de este cuerpo *con respecto al eje que pasa por B y C* es de 0.048 kg·m²”.

En el ejemplo 9.6, representamos el cuerpo como varias masas puntuales, y evaluamos la sumatoria directamente con la ecuación (9.16). Si el cuerpo es una distribución *continua* de masa, como un cilindro o una placa sólidos, la sumatoria se convierte en una integral y necesitamos usar el cálculo integral para determinar el momento de inercia. Daremos varios ejemplos de estos cálculos en la sección 9.6; mientras tanto, en la tabla 9.2 se dan los momentos de inercia de varias formas comunes en términos de sus masas y dimensiones. Todos los cuerpos mostrados en la tabla 9.2 son *uniformes*; es decir, la densidad tiene el mismo valor en todos los puntos dentro de las partes sólidas del cuerpo..

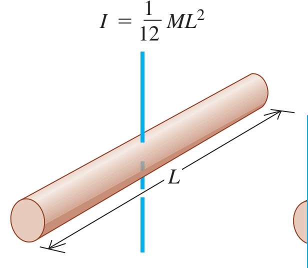
CUIDADO **Cálculo del momento de inercia** Es posible que el lector se sienta tentado a calcular el momento de inercia de un cuerpo suponiendo que toda la masa está concentrada en el centro de masa, multiplicando después la masa total por el cuadrado de la distancia del centro de masa al eje. Resista la tentación, ¡sería un error hacerlo! Por ejemplo, si una varilla delgada y uniforme de longitud L y masa M pivota sobre un eje que pasa por un extremo, perpendicular a la varilla, el momento de inercia es $I = ML^2/3$ [caso *b*) en la tabla 9.2]. Si tomáramos la masa como si estuviera concentrada en el centro, a una distancia $L/2$ del eje, obtendríamos el resultado *incorrecto* $I = M(L/2)^2 = ML^2/4$.

Ahora que sabemos calcular la energía cinética de un cuerpo rígido en rotación, podemos aplicar los principios de energía del capítulo 7 al movimiento de rotación. Veamos ciertos aspectos de la estrategia y algunos ejemplos.

Tabla 9.2 Momentos de inercia de diversos cuerpos

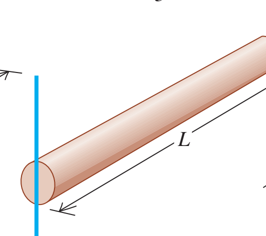
a) Varilla delgada, eje a través del centro

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$



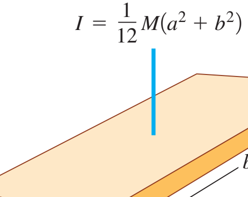
b) Varilla delgada, eje a través de un extremo

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$



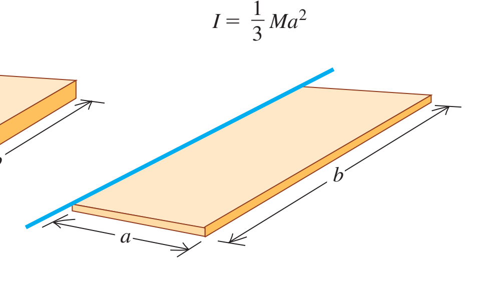
c) Placa rectangular, eje a través del centro

$$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$



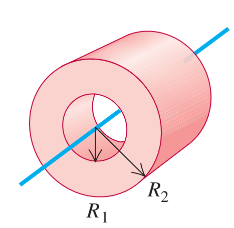
d) Placa rectangular delgada, eje a lo largo de un extremo

$$I = \frac{1}{3}Ma^2$$



e) Cilindro hueco de pared gruesa

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$

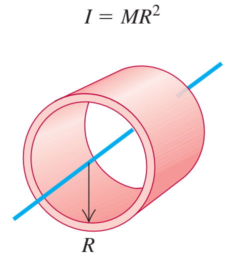


f) Cilindro sólido

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

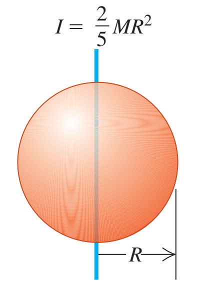
g) Cilindro hueco de pared delgada

$$I = MR^2$$



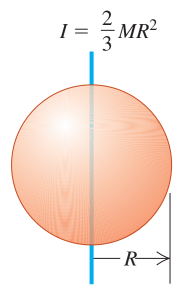
h) Esfera sólida

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$



i) Esfera hueca de pared delgada

$$I = \frac{2}{3}MR^2$$



Estrategia para resolver problemas 9.1 Energía de rotación



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Podemos usar las relaciones de trabajo-energía y la conservación de la energía, para obtener relaciones entre la posición y el movimiento de un cuerpo rígido que gira en torno a un eje fijo. El método de energía generalmente no es útil para resolver problemas en los que interviene el tiempo. En el capítulo 10 veremos cómo tratar problemas de rotación de ese tipo.

PLANTEAR *el problema* siguiendo la Estrategia para resolver problemas descrita en la sección 7.1, con las siguientes adiciones:

5. Use las ecuaciones (9.13) y (9.14) en problemas que incluyen una cuerda (o similar) enrollada en un cuerpo rígido que gira, si la cuerda no resbala. Estas ecuaciones relacionan la rapidez lineal y la aceleración tangencial de un punto de un cuerpo rígido con la velocidad y la aceleración angulares del cuerpo. (Véase los ejemplos 9.7 y 9.8).
6. Use la tabla 9.2 para calcular momentos de inercia. Aplique el teorema de los ejes paralelos, ecuación (9.19) (que se deducirá en la sección 9.5), con la finalidad de calcular momentos de inercia para rotación alrededor de un eje paralelo a los mostrados en la tabla.

EJECUTAR *la solución:* Escriba las expresiones de las energías cinética y potencial iniciales y finales K_1, K_2, U_1 y U_2 y la del trabajo no conservativo W_{otras} (si lo hay), donde K_1 y K_2 deben incluir ahora la energía cinética de rotación $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Sustituya estas expresiones en la ecuación (7.14), $K_1 + U_1 + W_{otras} = K_2 + U_2$ (si se efectúa trabajo no conservativo), o la ecuación (7.11), $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$ (si solo se efectúa trabajo conservativo), y despeje las incógnitas. Es útil dibujar gráficas de barras que muestren los valores iniciales y finales de K, U y $E = K + U$.

EVALUAR *la respuesta:* Verifique que su respuesta sea lógica desde el punto de vista físico.

Ejemplo 9.7 Cable que se desenrolla I

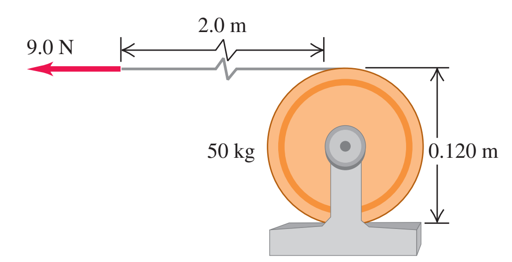


Un cable ligero, y que no se estira, se enrolla alrededor de un cilindro sólido con masa de 50 kg y 0.120 m de diámetro, que gira alrededor de un eje fijo horizontal y está montado en cojinetes sin fricción (figura 9.16). Una fuerza constante de 9.0 N tira del extremo libre del cable una distancia de 2.0 m, haciendo girar el cilindro conforme se desenrolla sin resbalar. Si el cilindro está inicialmente en reposo, calcule su rapidez angular final y la rapidez final del cable.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Resolveremos este problema empleando métodos de energía. Supondremos que el cable tiene masa despreciable, de modo que solo el cilindro tiene energía cinética. No hay cambios en la energía potencial gravitacional. Hay fricción entre el cable y el cilindro; pero como el cable no resbala, no hay movimiento del cable relativo

Continúa



9.16 Un cable se desenrolla de un cilindro (vista lateral).

al cilindro y no se pierde energía mecánica por la fricción. Puesto que el cable tiene masa despreciable, la fuerza que el cable ejerce sobre el borde del cilindro es igual a la fuerza aplicada *F*.

PLANTEAR: El punto 1 es aquel donde el cable comienza a moverse. El cilindro inicialmente está en reposo, así que $K_1 = 0$. El punto 2 se presenta cuando el cable se ha movido una distancia $s = 2.0$ m, y el cilindro tiene una energía cinética $K_2 = \frac{1}{2}I\omega^2$. Una de las incógnitas es ω; la otra es la rapidez del cable en el punto 2, que es igual a la rapidez tangencial v del cilindro en ese punto. Usaremos la ecuación (9.13) para obtener v a partir de ω.

EJECUTAR: El trabajo efectuado sobre el cilindro es $W_{\text{otras}} = Fs = (9.0\text{ N})(2.0\text{ m}) = 18$ J. Según la tabla 9.2, el momento de inercia es

$$I = \tfrac{1}{2}mR^2 = \tfrac{1}{2}(50\text{ kg})(0.060\text{ m})^2 = 0.090\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

(El radio R es la mitad del diámetro del cilindro). De acuerdo con la ecuación (7.14), $K_1 + U_1 + W_{\text{otras}} = K_2 + U_2$, así que

$$0 + 0 + W_{\text{otras}} = \tfrac{1}{2}I\omega^2 + 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2W_{\text{otras}}}{I}} = \sqrt{\frac{2(18\text{ J})}{0.090\text{ kg}\cdot\text{m}^2}} = 20\text{ rad/s}$$

Según la ecuación (9.13), la rapidez tangencial final del cilindro, y por ende la rapidez final del cable, es

$$v = R\omega = (0.060\text{ m})(20\text{ rad/s}) = 1.2\text{ m/s}$$

EVALUAR: Si la masa del cable no es despreciable, una parte de los 18 J de trabajo se convertirá en energía cinética del cable. De manera que el cilindro adquiriría menos energía cinética y tendría menor rapidez angular que las calculadas aquí.

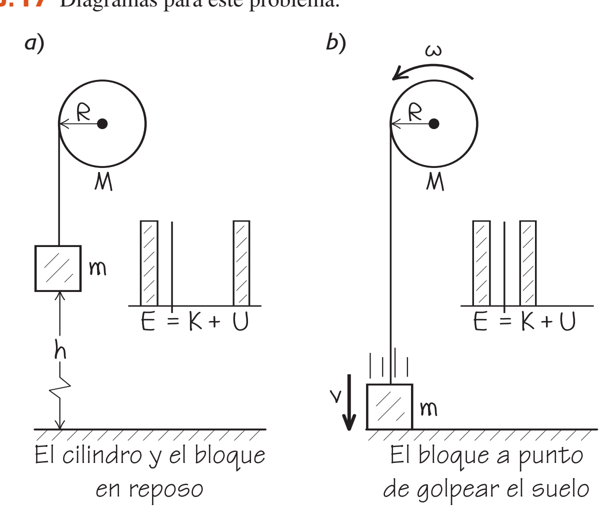
Ejemplo 9.8 Cable que se desenrolla II



Enrollamos un cable ligero y que no se estira en un cilindro sólido de masa M y radio R. El cilindro gira con fricción despreciable alrededor de un eje horizontal fijo. Atamos el extremo libre del cable a un bloque de masa m y soltamos el bloque a partir del reposo a una distancia h sobre el piso. Conforme el bloque cae, el cable se desenrolla sin estirarse ni resbalar. Obtenga las expresiones para la rapidez del bloque que cae y la rapidez angular del cilindro cuando el bloque golpea el suelo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que en el ejemplo 9.7, el cable no resbala y la fricción no efectúa trabajo. Suponemos que el cable tiene masa despreciable, de modo que las fuerzas que ejerce sobre el cilindro y sobre el bloque tienen igual magnitud. En el extremo superior, la fuerza y el desplazamiento tienen la misma dirección, y en el extremo inferior tienen direcciones opuestas, por lo que el cable no efectúa trabajo *neto* y $W_{\text{otras}} = 0$. Solo la fuerza de gravedad realiza trabajo, y la energía mecánica se conserva.



9.17 Diagramas para este problema.

PLANTEAR: La figura 9.17*a* muestra la situación antes de que el bloque comience a caer (punto 1). La energía cinética es $K_1 = 0$. Tomamos la energía potencial gravitacional como cero cuando el bloque está en el piso (punto 2), por lo que $U_1 = mgh$ y $U_2 = 0$. (Se ignora la energía potencial gravitacional del cilindro que gira, ya que su altura no cambia). Justo antes de que el bloque golpee el piso (figura 9.17*b*), tanto el bloque como el cilindro tienen energía cinética, por lo que

$$K_2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

El momento de inercia del cilindro es $I = \frac{1}{2}MR^2$. Además, $v = R\omega$ ya que la rapidez del bloque que cae debe ser igual a la rapidez tangencial en la superficie exterior del cilindro.

EJECUTAR: Utilizamos las expresiones para K_1, U_1, K_2 y U_2, y la relación $\omega = v/R$ en la ecuación (7.4), $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$, y despejamos v:

$$0 + mgh = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + 0 = \tfrac{1}{2}\left(m + \tfrac{1}{2}M\right)v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

La rapidez angular final ω del cilindro es $\omega = v/R$.

EVALUAR: Si M es mucho mayor que m, v es muy pequeña; si M es mucho menor que m, v es casi igual a $\sqrt{2gh}$, que es la rapidez de un cuerpo en caída libre desde una altura h. Ambos resultados son los esperados.

Energía potencial gravitacional de un cuerpo extenso

En el ejemplo 9.8, el cable tenía masa despreciable y podíamos ignorar su energía cinética y la energía potencial gravitacional asociada a él. Si la masa *no* es despreciable, necesitamos saber cómo calcular la *energía potencial gravitacional* asociada con dicho cuerpo extenso. Si la aceleración de la gravedad g es la misma en todos los puntos del cuerpo, la energía potencial gravitacional es igual que si toda la masa estuviera concentrada en el centro de masa del cuerpo. Tomemos el eje y vertical hacia arriba. Entonces, para un cuerpo de masa total M, la energía potencial gravitacional U es simplemente

$$U = Mgy_{cm} \quad \text{(energía potencial gravitacional de un cuerpo extenso)} \qquad (9.18)$$

donde y_{cm} es la coordenada y del centro de masa. Esta expresión es válida para cualquier cuerpo extenso, sea rígido o no (figura 9.18).

Para demostrar la ecuación (9.18), representamos otra vez el cuerpo como un conjunto de elementos de masa m_i. La energía potencial del elemento m_i es $m_i g y_i$, y la energía potencial total es

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \cdots = (m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots)g$$

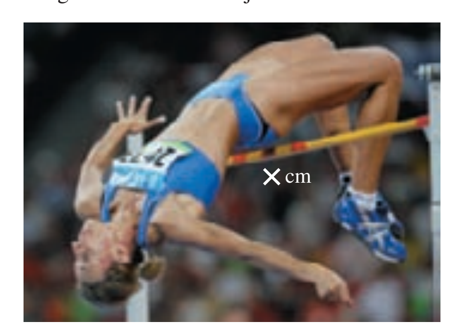
Pero, según la ecuación (8.28), que define las coordenadas del centro de masa,

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots = (m_1 + m_2 + \cdots)y_{cm} = My_{cm}$$

donde $M = m_1 + m_2 + \cdots$ es la masa total. Al combinar esto con la expresión anterior para U, tenemos que $U = Mgy_{cm}$, lo que coincide con la ecuación (9.18).

Aplicaremos la ecuación (9.18) en los problemas. Usaremos esta relación en el capítulo 10 al analizar problemas de cuerpo rígido cuando el eje de rotación se mueve.

9.18 En la técnica de salto de altura llamada "caída Fosbury", en honor de su inventor, el atleta arquea el cuerpo al pasar sobre la barra. Como resultado, su centro de masa realmente pasa *bajo* la barra. Esta técnica requiere de un menor aumento en la energía potencial gravitacional [ecuación (9.18)], que el método antiguo de saltar a horcajadas sobre la barra.



Evalúe su comprensión de la sección 9.4 Suponga que el cilindro y el bloque del ejemplo 9.8 tienen la misma masa, de manera que $m = M$. Justo antes de que el objeto golpee el piso, ¿qué enunciado es correcto acerca de la relación entre la energía cinética del bloque que cae y la energía cinética de rotación del cilindro? **i.** El bloque tiene más energía cinética que el cilindro. **ii.** El bloque tiene menos energía cinética que el cilindro. **iii.** El bloque y el cilindro tienen cantidades iguales de energía cinética.

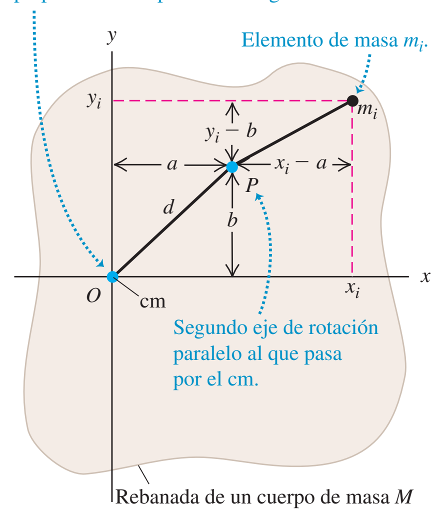
MP

9.5 Teorema de los ejes paralelos

En la sección 9.4 se señaló que un cuerpo no tiene un momento de inercia único. De hecho, tiene un número infinito, porque el número de ejes sobre los que podría girar es infinito. No obstante, hay una relación sencilla entre el momento de inercia I_{cm} de un cuerpo de masa M alrededor de un eje que pasa por su centro de masa y el momento de inercia I_P alrededor de cualquier otro eje paralelo al original pero desplazado una distancia d. Esta relación, llamada **teorema de los ejes paralelos**, establece que

$$I_P = I_{cm} + Md^2 \quad \text{(teorema de los ejes paralelos)} \qquad (9.19)$$

Para demostrar este teorema, consideramos dos ejes paralelos al eje z: uno pasa por el centro de masa, y el otro por un punto P (figura 9.19). Primero tomamos una rebanada muy delgada del cuerpo, paralela al plano xy y perpendicular al eje z. Tomamos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el centro de masa del cuerpo; así, las coordenadas del centro de masa son $x_{cm} = y_{cm} = z_{cm} = 0$. El eje que pasa por el centro de masa atraviesa esta rebanada delgada en el punto O, y el eje paralelo la atraviesa en el punto P, cuyas coordenadas x y y son (a, b). La distancia entre este eje y el que pasa por el centro de masa es d, donde $d^2 = a^2 + b^2$.



9.19 El elemento de masa m_i tiene coordenadas (x_i, y_i) con respecto a un eje de rotación que pasa por el centro de masa (cm), y coordenadas $(x_i - a, y_i - b)$ con respecto al eje paralelo que pasa por el punto P.

Podemos escribir una expresión para el momento de inercia I_P alrededor del eje que pasa por P. Sea m_i un elemento de masa de la rebanada, con coordenadas (x_i, y_i, z_i). Entonces, el momento de inercia I_{cm} de la rebanada alrededor del eje que pasa por el centro de masa (en O) es

$$I_{cm} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

El momento de inercia de la rebanada alrededor del eje que pasa por P es

$$I_P = \sum_i m_i[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2]$$

En estas expresiones no intervienen las coordenadas z_i, medidas perpendicularmente a las rebanadas, de manera que podemos ampliar las sumatorias para incluir *todas* las partículas de *todas* las rebanadas. Así, I_P se convierte en el momento de inercia de *todo* el cuerpo para un eje que pasa por P. Expandiendo los cuadrados y reagrupando, se obtiene

$$I_P = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) - 2a\sum_i m_i x_i - 2b\sum_i m_i y_i + (a^2 + b^2)\sum_i m_i$$

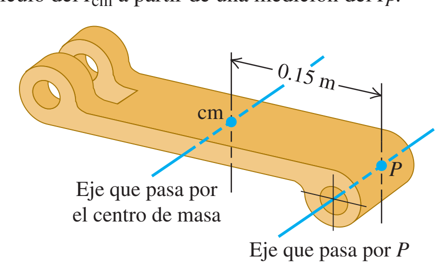
La primera sumatoria es I_{cm}. De acuerdo con la ecuación (8.28), la definición de centro de masa, la segunda y la tercera sumatorias son proporcionales a x_{cm} y y_{cm}, que son cero porque tomamos el origen en el centro de masa. El último término es d^2 multiplicado por la masa total, es decir, Md^2. Queda demostrado que $I_P = I_{cm} + Md^2$.

Como muestra la ecuación (9.19), un cuerpo rígido tiene menor momento de inercia con respecto a un eje que pasa por su centro de masa que con respecto a cualquier otro eje paralelo. Por ello, es más fácil poner a girar un cuerpo si el eje de rotación pasa por el centro de masa. Esto sugiere que, de algún modo, es más natural que un cuerpo en rotación gire sobre un eje que pasa por su centro de masa; haremos más cuantitativa esta idea en el capítulo 10.

Ejemplo 9.9 Uso del teorema de ejes paralelos

La pieza de un acoplamiento mecánico (figura 9.20) tiene una masa de 3.6 kg. Su momento de inercia I_P alrededor de un eje que pasa a 0.15 m de su centro de masa es $I_P = 0.132\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Calcule el momento de inercia I_{cm} alrededor de un eje paralelo que pasa por el centro de masa.

9.20 Cálculo del I_{cm} a partir de una medición del I_P.





SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: Determinaremos la incógnita I_{cm} usando el teorema de ejes paralelos, ecuación (9.19). Reacomodamos la ecuación y obtenemos

$$I_{cm} = I_P - Md^2 = 0.132\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 - (3.6\ \text{kg})(0.15\ \text{m})^2$$
$$= 0.051\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

EVALUAR: Como se esperaba, I_{cm} es menor que I_P; el momento de inercia para un eje que pasa por el centro de masa es menor que para cualquier otro eje paralelo.

Evalúe su comprensión de la sección 9.5 Un taco de billar es una varilla de madera con una composición uniforme; uno de sus extremos tiene un diámetro más grande que el otro, ya que la estructura se va afinando a lo largo de la varilla. Utilice el teorema de los ejes paralelos para determinar si un taco de billar tiene un momento de inercia mayor **i.** para un eje que pasa por el extremo más grueso de la varilla y es perpendicular a la longitud de esta, o **ii.** para un eje que pasa por el extremo más delgado de la varilla y es perpendicular a la longitud de esta. ❙

9.6 Cálculos de momento de inercia

Si un cuerpo rígido es una distribución continua de masa, como un cilindro o una esfera sólidos, no puede representarse con unas cuantas masas puntuales. En este caso, la *sumatoria* de masas y distancias que define el momento de inercia [ecuación (9.16)] se

vuelve una *integral*. Imagine que divide el cuerpo en elementos muy pequeños de masa dm, de modo que todos los puntos de un elemento estén prácticamente a la misma distancia perpendicular del eje de rotación. Llamamos r a esta distancia, como antes. El momento de inercia es, entonces,

$$I = \int r^2\,dm \tag{9.20}$$

Para evaluar la integral, debemos representar r y dm en términos de la misma variable de integración. Si tenemos un objeto prácticamente unidimensional, como las varillas delgadas *a*) y *b*) de la tabla 9.2, podemos usar una coordenada x a lo largo y relacionar dm con un incremento dx. Si el objeto es tridimensional, suele ser más fácil expresar dm en términos de un elemento de volumen dV y la *densidad* ρ del cuerpo. La densidad es la masa por unidad de volumen, es decir, $\rho = dm/dV$, así que también podemos escribir la ecuación (9.20) como

$$I = \int r^2 \rho\,dV$$

Esta expresión nos dice que el momento de inercia de un cuerpo depende de la forma en que su densidad varía dentro de su volumen (figura 9.21). Si la densidad del cuerpo es uniforme, podemos sacar ρ de la integral:

$$I = \rho \int r^2\,dV \tag{9.21}$$

Para usar esta ecuación, debemos expresar el elemento de volumen dV en términos de las diferenciales de las variables de integración, tales como $dV = dx\,dy\,dz$. Siempre debemos elegir dV de modo que todos sus puntos estén casi a la misma distancia del eje de rotación. Los límites de la integral se determinan por la forma y las dimensiones del cuerpo. En el caso de cuerpos de forma regular, la integración suele ser sencilla.

9.21 Al medir las pequeñas variaciones en las órbitas de los satélites, los geofísicos pueden calcular el momento de inercia de la Tierra. Esto nos dice cómo está distribuida la masa de nuestro planeta en su interior. Los datos indican que la Tierra es mucho más densa en el núcleo que en sus capas exteriores.



Ejemplo 9.10 Cilindro hueco o sólido que gira alrededor del eje de simetría

La figura 9.22 muestra un cilindro hueco con densidad uniforme de masa ρ, longitud L, radio interior R_1 y radio exterior R_2. (Podría ser el cilindro de acero de una imprenta). Usando integración, calcule el momento de inercia alrededor del eje de simetría del cilindro.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Elegimos como elemento de volumen una capa cilíndrica delgada de radio r, espesor dr y longitud L; todas sus partes están prácticamente a la misma distancia r del eje. El volumen de la capa es casi igual al de una lámina plana de espesor dr, longitud L y anchura $2\pi r$ (la circunferencia de la capa). La masa de la capa es

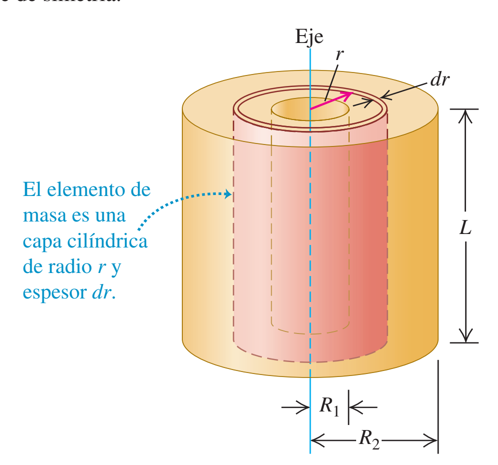
$$dm = \rho\,dV = \rho(2\pi rL\,dr)$$

Usaremos esta expresión en la ecuación (9.20) e integraremos de $r = R_1$ a $r = R_2$.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (9.20), el momento de inercia es

$$I = \int r^2\,dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho(2\pi rL\,dr)$$
$$= 2\pi\rho L \int_{R_1}^{R_2} r^3\,dr$$
$$= \frac{2\pi\rho L}{4}(R_2^4 - R_1^4)$$
$$= \frac{\pi\rho L}{2}(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$$

9.22 Cálculo del momento de inercia de un cilindro hueco alrededor de su eje de simetría.



[En el último paso usamos la identidad $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$]. Expresamos este resultado en términos de la masa total M del cuerpo, que es su densidad ρ multiplicada por el volumen total V. El volumen del cilindro es

$$V = \pi L(R_2^2 - R_1^2)$$

así que la masa total M es

$$M = \rho V = \pi L\rho(R_2^2 - R_1^2)$$

Continúa

Comparando con la expresión anterior de I, vemos que

$$I = \tfrac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$

EVALUAR: Esto concuerda con el caso *e*) de la tabla 9.2. Si el cilindro es sólido, con radio exterior $R_2 = R$ y radio interior $R_1 = 0$, su momento de inercia es

$$I = \tfrac{1}{2}MR^2$$

de acuerdo con el caso *f*). Si la pared del cilindro es muy delgada, tenemos que $R_1 \approx R_2 = R$ y el momento de inercia es

$$I = MR^2$$

de acuerdo con el caso *g*). Podríamos haber predicho este último resultado sin efectuar cálculos; en un cilindro de pared delgada, toda la masa está a la misma distancia $r = R$ del eje, por lo que $I = \int r^2\, dm = R^2 \int dm = MR^2$.

Ejemplo 9.11 Esfera uniforme de radio R, eje a través del centro

Calcule el momento de inercia de una esfera sólida con densidad uniforme de masa (como una bola de billar), alrededor de un eje que pasa por su centro.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Dividimos la esfera en discos sólidos delgados de espesor dx (figura 9.23), cuyo momento de inercia conocemos por el caso *f*) de la tabla 9.2. Integraremos sobre ellos para calcular el momento de inercia total.

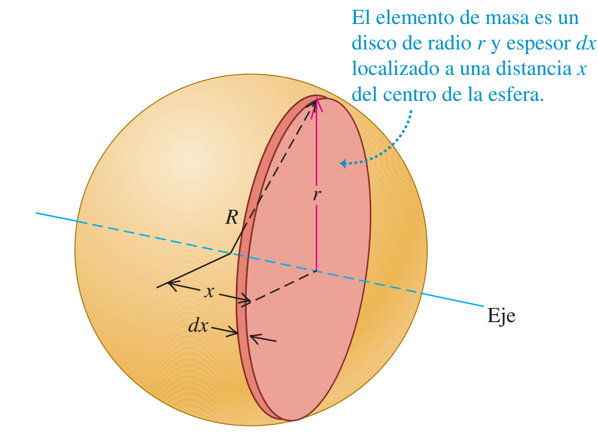
EJECUTAR: El radio y, por lo tanto, el volumen y la masa del disco dependen de su distancia x al centro de la esfera. El radio r del disco que se muestra en la figura 9.23 es

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Su volumen es

$$dV = \pi r^2\, dx = \pi(R^2 - x^2)\, dx$$

9.23 Cálculo del momento de inercia de una esfera alrededor de un eje que pasa por su centro.



y su masa es

$$dm = \rho\, dV = \pi\rho(R^2 - x^2)\, dx$$

De acuerdo con el caso *f*) de la tabla 9.2, el momento de inercia de un disco de radio r y masa dm es

$$dI = \tfrac{1}{2}r^2\, dm = \tfrac{1}{2}(R^2 - x^2)[\pi\rho(R^2 - x^2)\, dx]$$
$$= \frac{\pi\rho}{2}(R^2 - x^2)^2\, dx$$

Integrando esta expresión de $x = 0$ a $x = R$, obtenemos el momento de inercia del hemisferio derecho. Por simetría, el I total de la esfera completa es el doble de esto:

$$I = (2)\frac{\pi\rho}{2}\int_0^R (R^2 - x^2)^2\, dx$$

Realizando la integración, obtenemos

$$I = \frac{8\pi\rho R^5}{15}$$

El volumen de la esfera es $V = 4\pi R^3/3$, por lo que, en términos de su masa M, su densidad es

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Aquí, la expresión para I se convierte en

$$I = \left(\frac{8\pi R^5}{15}\right)\left(\frac{3M}{4\pi R^3}\right) = \tfrac{2}{5}MR^2$$

EVALUAR: Este resultado concuerda con el caso *h*) de la tabla 9.2. Observe que el momento de inercia $I = \frac{2}{5}MR^2$ de una esfera sólida de masa M y radio R es menor que el momento de inercia $I = \frac{1}{2}MR^2$ de un *cilindro* sólido con los mismos valores de masa y radio, porque la mayor parte de la masa de la esfera está cerca del eje.

Evalúe su comprensión de la sección 9.6 Dos cilindros huecos tienen los mismos radios interno y externo, así como la misma masa; sin embargo, tienen longitudes diferentes. Uno está hecho de madera de baja densidad y el otro de plomo de alta densidad. ¿Cuál cilindro tiene el mayor momento de inercia alrededor de su eje de simetría? **i.** El cilindro de madera; **ii.** el cilindro de plomo; **iii.** los dos momentos de inercia son iguales.

RESUMEN



Cinemática rotacional: Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo (que por lo general se llama eje z), su posición está descrita por una coordenada angular θ. La velocidad angular ω_z es la derivada de θ con respecto al tiempo, y la aceleración angular α_z es la derivada de ω_z con respecto al tiempo, es decir, la segunda derivada de θ. (Véase los ejemplos 9.1 y 9.2). Si la aceleración angular es constante, entonces θ, ω_z y α_z están relacionadas por ecuaciones sencillas de cinemática análogas a las del movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante. (Véase el ejemplo 9.3).

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (9.3)$$

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (9.5),\ (9.6)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \tfrac{1}{2}\alpha_z t^2 \quad (9.11)$$

(solo para α_z constante)

$$\theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t \quad (9.10)$$

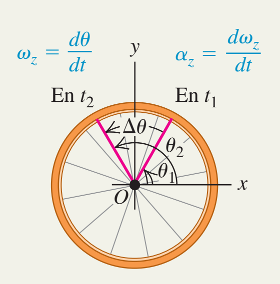
(solo para α_z constante)

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t \quad (9.7)$$

(solo para α_z constante)

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0) \quad (9.12)$$

(solo para α_z constante)

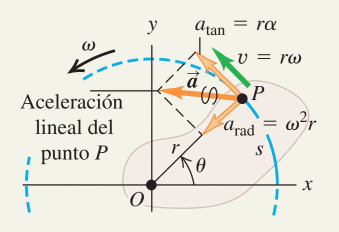


Relación entre cinemática angular y lineal: La rapidez angular ω de un cuerpo rígido es la magnitud de su velocidad angular. La razón de cambio de ω es $\alpha = d\omega/dt$. En el caso de una partícula de un cuerpo que está a una distancia r del eje de rotación, la rapidez v y las componentes de la aceleración $\vec{a}$ están relacionadas con ω y α. (Véase los ejemplos 9.4 y 9.5).

$$v = r\omega \quad (9.13)$$

$$a_{\text{tan}} = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \quad (9.14)$$

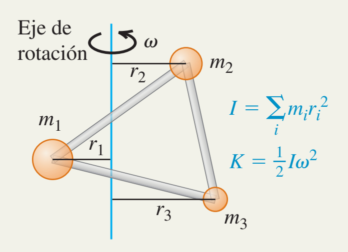
$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (9.15)$$



Momento de inercia y energía cinética de rotación: El momento de inercia I de un cuerpo alrededor de un eje dado es una medida de su inercia rotacional: cuanto mayor sea el valor de I, más difícil será cambiar el estado de rotación del cuerpo. El momento de inercia se expresa como una sumatoria de las partículas m_i que constituyen el cuerpo, cada una de las cuales está a una distancia perpendicular r_i del eje. La energía cinética de rotación de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo depende de la rapidez angular ω y del momento de inercia I para ese eje de rotación. (Véase los ejemplos 9.6 a 9.8).

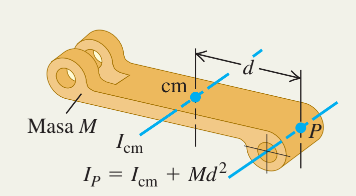
$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots = \sum_i m_i r_i^2 \quad (9.16)$$

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \quad (9.17)$$



Cálculo del momento de inercia: El teorema de los ejes paralelos relaciona los momentos de inercia de un cuerpo rígido de masa M alrededor de dos ejes paralelos: un eje que pasa por el centro de masa (momento de inercia I_{cm}) y un eje paralelo que está a una distancia d del primero (momento de inercia I_P). (Véase el ejemplo 9.9). Si el cuerpo tiene una distribución continua de masa, el momento de inercia se calcula por integración. (Véase los ejemplos 9.10 y 9.11).

$$I_P = I_{\text{cm}} + Md^2 \quad (9.19)$$

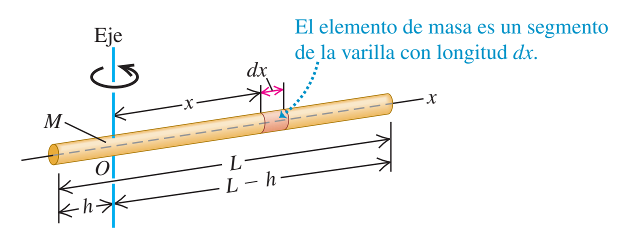




PROBLEMA PRÁCTICO Varilla delgada uniforme que gira

La figura 9.24 muestra una varilla uniforme delgada con masa M y longitud L. Podría ser el bastón (sin las tapas de hule) de una bastonera que marcha en una banda. *a*) Use integración para calcular su momento de inercia alrededor de un eje que pasa por O, a una distancia arbitraria h de un extremo. *b*) Inicialmente la varilla está en reposo. Si adquiere una aceleración angular constante de magnitud α alrededor del eje que pasa por O, calcule el trabajo realizado sobre la varilla al tiempo t. *c*) En ese instante, ¿cuál es la aceleración *lineal* del punto de la varilla más lejano de su eje?

9.24 Varilla delgada con un eje que pasa por O.



GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Elabore una lista de incógnitas de este problema.
2. Para calcular el momento de inercia de la varilla, tiene que dividirla en elementos de masa infinitesimales. Si un elemento tiene una longitud dx, ¿cuál es la masa del elemento? ¿Cuáles son los límites de integración?
3. ¿Cuál es la rapidez angular de la varilla en el instante t? ¿Cómo se compara el trabajo requerido para acelerar la varilla desde el reposo hasta esa rapidez angular con la energía cinética de la varilla en ese instante t?
4. En el instante t, ¿el punto más alejado del eje de la varilla tiene aceleración centrípeta? ¿Y aceleración tangencial? ¿Por qué?

EJECUTAR

5. Efectúe la integración requerida para calcular el momento de inercia.
6. Use el resultado del paso 5 para calcular el trabajo realizado en el tiempo t para acelerar la varilla a partir del reposo.
7. Calcule las componentes de aceleración lineal para el punto en cuestión en el instante t; con base en esa información, calcule la magnitud de la aceleración.

EVALUAR

8. Verifique sus resultados para los casos especiales en que $h = 0$ (el eje pasa por un extremo de la varilla) y $h = L/2$ (el eje pasa por el punto medio de la varilla). ¿Son congruentes estos límites con la tabla 9.2? ¿Y con el teorema de los ejes paralelos?
9. ¿La magnitud de la aceleración obtenida en el paso 7 es constante? ¿Así lo esperaba?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



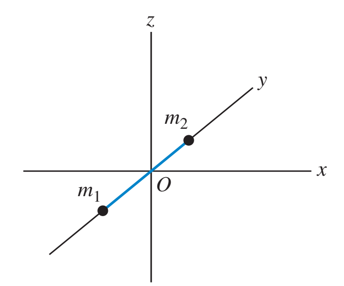
•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P9.1 ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es válida si la aceleración angular de un objeto *no* es constante? En cada caso, explique su razonamiento. *a*) $v = r\omega$; *b*) $a_{\tan} = r\alpha$; *c*) $\omega = \omega_0 + \alpha t$; *d*) $a_{\tan} = r\omega^2$; *e*) $K = \frac{1}{2}I\omega^2$.

P9.2 Una molécula diatómica puede modelarse como dos masas puntuales, m_1 y m_2, ligeramente separadas (figura P9.2). Si la molécula está orientada a lo largo del eje y, tiene energía cinética K cuando gira alrededor del eje x. ¿Cuál es su energía cinética (en términos de K) si gira con la misma rapidez angular alrededor del *a*) eje z y *b*) eje y?

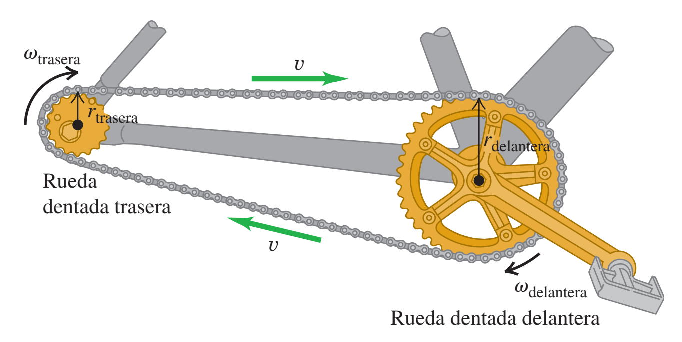
Figura **P9.2**



P9.3 ¿Qué diferencia hay entre aceleración tangencial y aceleración radial para un punto de un cuerpo que gira?

P9.4 En la figura P9.4, todos los puntos de la cadena tienen la misma rapidez lineal. ¿La magnitud de la aceleración lineal también es igual para todos esos puntos? ¿Qué relación hay entre las aceleraciones angulares de las dos ruedas dentadas? Explique su respuesta.

Figura **P9.4**



P9.5 En la figura P9.4, ¿qué relación hay entre las aceleraciones radiales de los puntos en los dientes de las dos ruedas? Justifique su respuesta.

P9.6 Un volante gira con velocidad angular constante. ¿Un punto en su borde tiene aceleración tangencial? ¿Y aceleración radial? ¿Tienen estas aceleraciones magnitud constante? ¿Y dirección constante? Justifique sus respuestas en cada caso.

P9.7 ¿Para qué sirve el ciclo de centrifugado de una lavadora? Explique en términos de las componentes de aceleración.

P9.8 Aunque la velocidad y la aceleración angulares pueden tratarse como vectores, no sucede lo mismo con el desplazamiento angular θ, a pesar de tener magnitud y dirección, porque θ no cumple la ley conmutativa de la suma de vectores (ecuación 1.3). Demuestre esto como sigue: coloque este libro sobre un escritorio con la portada hacia arriba, de modo que pueda leer las palabras. Gire el borde lejano 90° alrededor de un eje horizontal de modo que el extremo más lejano se mueva hacia usted. Llame a este desplazamiento θ_1. Ahora gire el borde izquierdo 90° hacia usted sobre un eje vertical. Llame a este desplazamiento θ_2. El lomo del libro deberá mirar ahora hacia usted con las palabras orientadas de modo que pueda leerlas. Ahora comience otra vez desde el principio, pero realice las rotaciones en orden inverso. ¿El resultado es diferente? Es decir, ¿$\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$? Ahora repita el experimento, pero con un ángulo de 1° en lugar de 90°. ¿Cree que el desplazamiento infinitesimal $d\vec{\boldsymbol{\theta}}$ cumple la ley conmutativa de la suma y, por lo tanto, puede considerarse un vector? De ser así, ¿qué relación hay entre la dirección de $d\vec{\boldsymbol{\theta}}$ y la dirección de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$?

P9.9 ¿Puede imaginar un cuerpo que tenga el mismo momento de inercia para todos los ejes posibles? Si es así, mencione un ejemplo; si no, explique por qué no es posible. ¿Puede imaginar un cuerpo que tenga el mismo momento de inercia para todos los ejes que pasan por cierto punto? Si es así, dé un ejemplo e indique dónde se ubica el punto.

P9.10 Para maximizar el momento de inercia de un volante mientras se minimiza su peso, ¿qué forma y distribución de masa debería tener? Explique su respuesta.

P9.11 ¿Cómo se podría determinar experimentalmente el momento de inercia de un cuerpo de forma irregular alrededor de un eje dado?

P9.12 Un cuerpo cilíndrico tiene masa M y radio R. ¿La masa puede estar distribuida dentro del cuerpo de modo tal que su momento de inercia alrededor de su eje de simetría sea mayor que MR^2? Explique su respuesta.

P9.13 Describa cómo podría usar el inciso *b*) de la tabla 9.2 para deducir el resultado del inciso *d*).

P9.14 Un cascarón esférico hueco de radio R que gira alrededor de un eje que pasa por su centro tiene una energía cinética de rotación K. Si usted quiere modificar esta esfera de manera que tenga tres veces más energía cinética con la misma rapidez angular manteniendo constante la masa, ¿cuál debería ser el radio en términos de R?

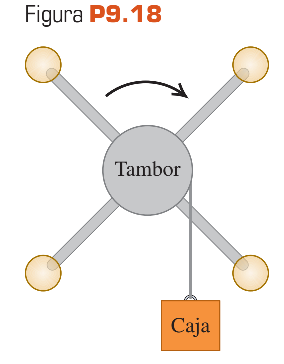
P9.15 Para que sean válidas las ecuaciones de I dadas en los incisos *a*) y *b*) de la tabla 9.2, ¿la varilla debe tener sección transversal circular? ¿Hay alguna restricción sobre el tamaño de esta sección para que las ecuaciones sean válidas? Explique su respuesta.

P9.16 En el inciso *d*) de la tabla 9.2, el espesor de la placa debe ser mucho menor que a para que la expresión de I sea válida. En el inciso *c*), en cambio, la expresión para I es válida sin importar qué espesor tenga la placa. Explique por qué.

P9.17 Dos esferas idénticas A y B están unidas cada una a una cuerda ligera, y cada cuerda se enrolla alrededor de una polea sin fricción de masa M. La única diferencia es que la polea para la esfera A es un disco sólido, mientras que la polea para la esfera B es un disco hueco, como el del inciso *e*) de la tabla 9.2. Si ambas esferas se liberan desde el reposo y descienden la misma distancia, ¿cuál tendrá mayor energía cinética? ¿O acaso tendrán la misma energía cinética? Explique su razonamiento.

P9.18 Una polea complicada consiste en cuatro esferas idénticas colocadas en los extremos de unos rayos que se prolongan desde un tambor giratorio (figura P9.18). Una caja está atada a una cuerda delgada y ligera que se enrolla alrededor del borde del tambor. Cuando se libera del reposo, la caja adquiere una rapidez V después de descender una distancia d. Después, las cuatro esferas se mueven hacia adentro más cerca del tambor, y de nuevo la caja se suelta del reposo. Después de descender una distancia d, ¿su rapidez será igual a V, mayor que V, o menor que V? Demuestre o explique por qué.

Figura **P9.18**



P9.19 Se puede usar cualquier medida angular (radianes, grados o revoluciones) en algunas de las ecuaciones del capítulo 9; sin embargo, en otras solo se pueden usar radianes. Identifique las ecuaciones en las que es necesario usar radianes y aquellas donde no. En cada caso, justifique sus respuestas.

P9.20 Al calcular el momento de inercia de un objeto, ¿podemos tratar toda su masa como si estuviera concentrada en el centro de masa del objeto? Justifique su respuesta.

P9.21 Una rueda gira en torno a un eje perpendicular al plano de la rueda y que pasa por el centro de la misma. La rapidez angular de la rueda está aumentando a tasa constante. El punto A está en el borde de la rueda; y el punto B, a la mitad de la distancia entre el borde y el centro. Para cada una de las siguientes cantidades, indique si la magnitud es mayor en el punto A, en el punto B, o si es igual en ambos puntos: *a*) rapidez angular, *b*) rapidez tangencial, *c*) aceleración angular, *d*) aceleración tangencial, *e*) aceleración radial. Justifique sus respuestas.

P9.22 Estime su propio momento de inercia respecto a un eje vertical que pasa por el centro de la parte superior de su cabeza cuando está de pie con los brazos extendidos. Realice aproximaciones razonables y mida o estime las cantidades necesarias.

EJERCICIOS

Sección 9.1 Velocidad y aceleración angulares

9.1 • *a*) ¿Qué ángulo en radianes es subtendido por un arco de 1.50 m en la circunferencia de un círculo cuyo radio mide 2.50 m? ¿Cuánto es esto en grados? *b*) Un arco de 14.0 cm de longitud en la circunferencia de un círculo subtiende un ángulo de 128°. ¿Qué radio tiene el círculo? *c*) El ángulo entre dos radios de un círculo de 1.50 m de radio mide 0.700 rad. ¿Qué longitud tiene el arco delimitado en la circunferencia por estos dos radios?

9.2 • La hélice de un avión gira a 1900 rpm (rev/min). *a*) Calcule la velocidad angular de la hélice en rad/s. *b*) ¿Cuántos segundos tarda la hélice en girar 35°?

9.3 • **PA CALC** La velocidad angular de un volante obedece la ecuación $\omega_z(t) = A + Bt^2$, donde t está en segundos, y A y B son constantes cuyos valores numéricos son 2.75 y 1.50, respectivamente. *a*) ¿Cuáles son las unidades de A y B si ω_z está en rad/s? *b*) ¿Cuál es la aceleración angular del volante en **i.** $t = 0.00$ y **ii.** $t = 5.00$ s? *c*) ¿Qué ángulo gira el volante durante los primeros 2.00 s? (*Sugerencia:* Véase la sección 2.6).

9.4 •• **CALC** El aspa de un ventilador gira con una velocidad angular dada por $\omega_z(t) = \gamma - \beta t^2$, donde $\gamma = 5.00$ rad/s y $\beta = 0.800$ rad/s^3. *a*) Calcule la aceleración angular en función del tiempo. *b*) Calcule

la aceleración angular instantánea α_z en $t = 3.00$ s y la aceleración angular media $\alpha_{\text{med-}z}$ para el intervalo de $t = 0$ a $t = 3.00$ s. ¿Qué diferencia hay entre ambas cantidades? Si son diferentes, ¿por qué lo son?

9.5 •• **CALC** Un niño está empujando un carrusel. El ángulo que describe el carrusel al girar varía con el tiempo según la ecuación $\theta(t) = \gamma t + \beta t^3$, donde $\gamma = 0.400$ rad/s y $\beta = 0.0120$ rad/s^3. *a*) Calcule la velocidad angular del carrusel en función del tiempo. *b*) ¿Qué valor inicial tiene la velocidad angular? *c*) Calcule el valor instantáneo de la velocidad angular ω_z en $t = 5.00$ s y la velocidad angular media $\omega_{\text{med-}z}$ en el intervalo de $t = 0$ a $t = 5.00$ s. Demuestre que $\omega_{\text{med-}z}$ *no* es igual al promedio de las velocidades angulares instantáneas en $t = 0$ y $t = 5.00$ s, y explique por qué.

9.6 • **CALC** En $t = 0$, se invierte la corriente de un motor eléctrico de corriente continua, causando un desplazamiento angular del eje del motor dado por $\theta(t) = (250 \text{ rad/s})t - (20.0 \text{ rad/s}^2)t^2 - (1.50 \text{ rad/s}^3)t^3$. *a*) ¿En qué instante la velocidad angular del eje del motor es cero? *b*) Calcule la aceleración angular en ese instante. *c*) ¿Cuántas revoluciones gira el eje del motor entre el momento en que se invierte la corriente y el instante en el que la velocidad angular es cero? *d*) ¿Con qué rapidez estaba girando el eje en $t = 0$, cuando se invirtió la corriente? *e*) Calcule la velocidad angular media para el periodo entre $t = 0$ y el tiempo calculado en el inciso *a*).

9.7 • **CALC** El ángulo θ que describe una unidad de disco al girar está dado por $\theta(t) = a + bt - ct^3$, donde a, b y c son constantes, t está en segundos y θ en radianes. Cuando $t = 0$, $\theta = \pi/4$ rad y la velocidad angular es de 2.00 rad/s, y cuando $t = 1.50$ s, la aceleración angular es 1.25 rad/s^2. *a*) Calcule a, b y c con sus unidades. *b*) ¿Cuál es la aceleración angular cuando $\theta = \pi/4$ rad? *c*) ¿Cuáles son θ y la velocidad angular cuando la aceleración angular es 3.50 rad/s^2?

9.8 • Una rueda gira en torno a un eje que está en la dirección z. La velocidad angular ω_z es de -6.00 rad/s en $t = 0$; esta aumenta linealmente con el tiempo y su valor es de $+8.00$ rad/s en $t = 7.00$ s. Se considera positiva la rotación en sentido antihorario. *a*) ¿La aceleración angular durante este intervalo de tiempo es positiva o negativa? *b*) ¿Durante qué intervalo está aumentando la rapidez de la rueda? ¿Y disminuyendo? *c*) Determine el desplazamiento angular de la rueda en $t = 7.00$ s.

Sección 9.2 Rotación con aceleración angular constante

9.9 • La rueda de una bicicleta tiene una velocidad angular inicial de 1.50 rad/s. *a*) Si su aceleración angular es constante e igual a 0.300 rad/s^2, ¿qué velocidad angular tiene en $t = 2.50$ s? *b*) ¿Qué ángulo gira la rueda entre $t = 0$ y $t = 2.50$ s?

9.10 •• Un ventilador eléctrico se apaga, y su velocidad angular disminuye uniformemente de 500 a 200 rev/min en 4.00 s. *a*) Calcule la aceleración angular en rev/s^2 y el número de revoluciones que efectuó el motor en el intervalo de 4.00 s. *b*) ¿Cuántos segundos más tardará el ventilador en detenerse, si la aceleración angular se mantiene constante en el valor calculado en el inciso *a*)?

9.11 •• Las aspas de una licuadora giran con aceleración angular constante de 1.50 rad/s^2. *a*) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar una velocidad angular de 36.0 rad/s, partiendo del reposo? *b*) ¿Cuántas revoluciones giran las aspas en ese tiempo?

9.12 • *a*) Deduzca la ecuación (9.12) combinando las ecuaciones (9.7) y (9.11) para eliminar t. *b*) La velocidad angular de la hélice de un avión aumenta de 12.0 a 16.0 rad/s mientras gira 7.00 rad. Calcule su aceleración angular en rad/s^2.

9.13 •• Una tornamesa gira con aceleración angular constante de 2.25 rad/s^2. Después de 4.00 s ha girado un ángulo de 60.0 rad. ¿Cuál era su velocidad angular al iniciar el intervalo de 4.00 s?

9.14 • La hoja de una sierra circular de 0.200 m de diámetro parte del reposo y acelera con aceleración angular constante hasta una velocidad angular de 140 rad/s en 6.00 s. Calcule la aceleración angular y el ángulo que ha girado la hoja.

9.15 •• El volante de alta velocidad de un motor giraba a 500 rpm cuando se interrumpió la alimentación eléctrica. El volante tiene una masa de 40.0 kg y un diámetro de 75.0 cm. El motor no recibe electricidad durante 30.0 s y, en ese lapso, el volante disminuye su velocidad por la fricción en los cojinetes de su eje, realizando 200 revoluciones completas. *a*) ¿Con qué rapidez está girando el volante cuando se restablece la alimentación eléctrica? *b*) ¿Cuánto tiempo después de la interrupción eléctrica se habría detenido el volante, si el suministro no se hubiera restablecido, y cuántas revoluciones habría girado el volante en ese tiempo?

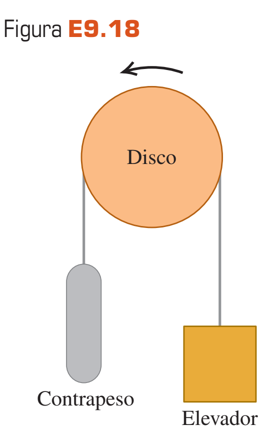
9.16 •• En $t = 0$, la velocidad angular de una rueda de afilar es de 24.0 rad/s, y tiene una aceleración angular constante de 30.0 rad/s^2, hasta que un interruptor de circuito se abre en $t = 2.00$ s. A partir de ese momento, la rueda gira 432 rad con aceleración angular constante hasta detenerse. *a*) ¿Qué ángulo total giró la rueda entre $t = 0$ y el instante en que se detiene? *b*) ¿En qué tiempo se detiene? *c*) ¿Qué aceleración tiene al irse frenando?

9.17 •• Un dispositivo de seguridad detiene la hoja de una podadora eléctrica, que tenía una rapidez angular inicial ω_1, en 1.00 revolución. Con la misma aceleración constante, ¿cuántas revoluciones efectuaría la hoja hasta detenerse, si la rapidez angular inicial ω_3 fuera el triple: $\omega_3 = 3\omega_1$?

Sección 9.3 Relación entre cinemática lineal y angular

9.18 • En un encantador hotel del siglo XIX, un elevador antiguo está conectado a un contrapeso mediante un cable que pasa por un disco giratorio de 2.50 m de diámetro (figura E9.18). El elevador sube y baja al girar el disco; el cable no resbala en el borde del disco, más bien gira con él. *a*) ¿Cuántas rpm debe girar el disco para que el elevador suba a 25.0 cm/s? *b*) Para que el elevador empiece a moverse, debe acelerarse a $\frac{1}{8}g$. ¿Cuál debe ser la aceleración angular del disco en rad/s^2? *c*) ¿Qué ángulo (en radianes y grados) gira el disco cuando este sube el elevador 3.25 m entre los pisos?

Figura **E9.18**



9.19 • Con los datos astronómicos del apéndice F, junto con el hecho de que la Tierra gira sobre su propio eje una vez al día, calcule *a*) la rapidez angular orbital de la Tierra (en rad/s) debida a su movimiento alrededor del Sol, *b*) su rapidez angular (en rad/s) debida a su giro axial, *c*) la rapidez tangencial de la Tierra alrededor del Sol (suponiendo una órbita circular), *d*) la rapidez tangencial de un punto en el ecuador terrestre debida al giro axial del planeta y *e*) las componentes de la aceleración radial y tangencial del punto descrito en el inciso *d*).

9.20 • **Disco compacto.** Un disco compacto (CD) almacena música en un patrón codificado de agujeros diminutos de 10^{-7} m de profun-

didad, dispuestos en una pista espiral que va desde el centro hasta el borde del disco; los radios interior y exterior de la espiral son de 25.0 mm y 58.0 mm, respectivamente. Dentro del reproductor de CD, mientras el disco gira, la pista es escaneada con rapidez *lineal* constante de 1.25 m/s. *a*) ¿Qué rapidez angular tiene el CD cuando se escanea la parte más interna de la pista? ¿Y cuando se escanea la parte exterior? *b*) La duración máxima de la reproducción de un CD es de 74.0 min. ¿Qué longitud tendría la pista del CD si se pudiera estirar en línea recta? *c*) ¿Qué aceleración angular media tiene un CD durante los 74.0 min que dura la reproducción? Tome la dirección de rotación del disco como positiva.

9.21 •• Una rueda con diámetro de 40.0 cm parte del reposo y gira con una aceleración angular constante de 3.00 rad/s^2. En el instante en que la rueda ha completado su segunda revolución, calcule la aceleración radial de un punto en el borde de dos maneras: *a*) usando la relación $a_{rad} = \omega^2 r$ y *b*) a partir de la relación $a_{rad} = v^2/r$.

9.22 •• Imagine que usted debe diseñar un eje cilíndrico giratorio para levantar cubetas de cemento de 800 N de peso, desde el suelo hasta una azotea a 78.0 m sobre este. Las cubetas se colgarán de un gancho en el extremo libre de un cable que se enrolla en el eje; al girar este, las cubetas ascienden. *a*) ¿Qué diámetro debe tener el eje para levantar las cubetas con una rapidez constante de 2.00 cm/s mientras gira a 7.5 rpm? *b*) Si el eje debe impartir a las cubetas una aceleración hacia arriba de 0.400 m/s^2, ¿qué aceleración angular deberá tener el eje?

9.23 • Un volante con radio de 0.300 m parte del reposo y acelera con aceleración angular constante de 0.600 rad/s^2. Calcule la magnitud de las aceleraciones tangencial y radial, así como de la aceleración resultante de un punto en su borde *a*) al principio; *b*) después de girar 60.0°; *c*) después de girar 120.0°.

9.24 •• Un plato giratorio eléctrico de 0.750 m de diámetro gira sobre un eje fijo con velocidad angular inicial de 0.250 rev/s y aceleración angular constante de 0.900 rev/s^2. *a*) Calcule la velocidad angular del plato después de 0.200 s. *b*) ¿Cuántas revoluciones giró el plato en este tiempo? *c*) ¿Qué rapidez tangencial tiene un punto en el borde del plato en $t = 0.200$ s? *d*) ¿Qué magnitud tiene la aceleración *resultante* de un punto en el borde en $t = 0.200$ s?

9.25 •• **Centrifugador.** En un anuncio se asegura que un centrifugador solo ocupa 0.127 m de espacio en una mesa de trabajo, pero que puede producir una aceleración radial de 3000*g* a 5000 rev/min. Calcule el radio que debe tener el centrifugador. ¿Es verosímil el anuncio?

9.26 • *a*) Deduzca una ecuación para la aceleración radial que incluya v y ω, pero no r. *b*) Imagine que está diseñando un carrusel, donde un punto en el borde tendrá una aceleración radial de 0.500 m/s^2 cuando la velocidad tangencial en ese punto tenga una magnitud de 2.00 m/s. ¿Qué velocidad angular se necesita para obtener estos valores?

9.27 • **Taladro eléctrico.** Según el manual del usuario, para hacer un agujero de 12.7 mm de diámetro en madera, plástico o aluminio, se recomienda que la rapidez del taladro sea de 1250 rev/min. Para una broca de 12.7 mm de diámetro, que gira con rapidez constante de 1250 rev/min, calcule *a*) la rapidez lineal máxima de cualquier punto de la broca; *b*) la aceleración radial máxima de cualquier punto de la broca.

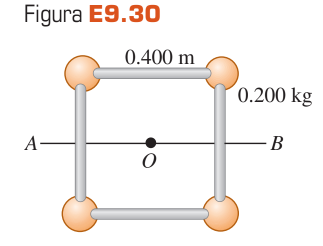
9.28 • En $t = 3.00$ s, un punto en el borde de una rueda con radio de 0.200 m tiene una rapidez tangencial de 50.0 m/s, mientras la rueda se frena con aceleración tangencial de magnitud constante igual a 10.0 m/s^2. *a*) Calcule la aceleración angular constante de la rueda. *b*) Calcule las velocidades angulares en $t = 3.00$ s y $t = 0$. *c*) ¿Qué ángulo giró la rueda entre $t = 0$ y $t = 3.00$ s? *d*) ¿En qué instante la aceleración radial es igual a *g*?

9.29 • Los ciclos de centrifugado de una lavadora tienen dos rapideces angulares, 423 y 640 rev/min. El diámetro interno del tambor es de 0.470 m. *a*) ¿Cuál es el cociente de la fuerza radial máxima de lavado entre la rapidez angular máxima y entre la rapidez mínima? *b*) ¿Cuál es el cociente de la rapidez tangencial máxima de lavado entre la rapidez angular máxima y entre la rapidez mínima? *c*) Calcule la rapidez tangencial máxima de lavado y la aceleración radial máxima en términos de *g*.

Sección 9.4 Energía en el movimiento de rotación

9.30 • Cuatro esferas pequeñas, que pueden considerarse como puntos con masa de 0.200 kg cada una, están colocadas en un cuadrado de 0.400 m de lado, conectadas por varillas muy ligeras (figura E9.30). Calcule el momento de inercia del sistema alrededor de un eje *a*) que pasa por el centro del cuadrado, perpendicular a su plano (que pasa por *O* en la figura); *b*) que biseca dos lados opuestos del cuadrado (a lo largo de la línea *AB* en la figura); *c*) que pasa por los centros de las esferas superior izquierda e inferior derecha y por el punto *O*.

Figura **E9.30**



9.31 • Calcule el momento de inercia de cada uno de los siguientes objetos uniformes en torno a los ejes indicados. Consulte la tabla 9.2 si lo requiere. *a*) Una varilla delgada de 2.50 kg con longitud de 75.0 cm, alrededor de un eje perpendicular a ella y que pasa **i.** por un extremo, **ii.** por su centro y **iii.** alrededor de un eje paralelo a la varilla y que pasa a través de ella. *b*) Una esfera de 3.00 kg con diámetro de 38.0 cm, alrededor de un eje que pasa por su centro, si la esfera **i.** es sólida y **ii.** es un cascarón hueco de pared delgada. *c*) Un cilindro de 8.00 kg con longitud de 19.5 cm y diámetro de 12.0 cm, alrededor del eje central del cilindro, si el cilindro es **i.** hueco de pared delgada y **ii.** sólido.

9.32 •• Bloques pequeños de masa *m* están sujetos en los extremos y en el centro de una varilla de longitud *L* y masa despreciable. Calcule el momento de inercia del sistema alrededor de un eje perpendicular a la varilla y que pasa por *a*) el centro de la varilla y *b*) un punto a un cuarto de su longitud a partir de un extremo.

9.33 • Dos esferas pequeñas están pegadas a los extremos de una barra uniforme de 2.00 m de longitud y masa de 4.00 kg. Las esferas tienen masa de 0.500 kg cada una y se pueden tratar como masas puntuales. Calcule el momento de inercia de esta combinación en torno a cada uno de los ejes siguientes: *a*) un eje perpendicular a la barra que pasa por su centro; *b*) un eje perpendicular a la barra que pasa por una de las esferas; *c*) un eje paralelo a la barra que pasa por ambas esferas; *d*) un eje paralelo a la barra que está a 0.500 m de ella.

9.34 • Un disco uniforme con radio *R* se corta por la mitad de manera que la mitad que queda tiene masa *M* (figura E9.34*a*). *a*) ¿Cuál es el momento de inercia de esta mitad con respecto a un eje perpendicular a su plano que pasa por el punto *A*? *b*) ¿Por qué su respuesta al inciso *a*) resultó igual que si se tratara de un disco completo de masa *M*? *c*) ¿Cuál sería el momento de inercia de un cuarto del disco de masa *M* y radio *R* con respecto a un eje perpendicular a su plano que pasa por el punto *B* (figura E9.34*b*)?

Figura **E9.34**

9.35 •• La rueda de una carreta está construida como se muestra en la figura E9.35. El radio de la rueda es de 0.300 m y la masa de su borde es de 1.40 kg. Cada uno de sus ocho rayos que se encuentran sobre un diámetro tiene 0.300 m de longitud, y una masa de 0.280 kg. ¿Qué momento de inercia tiene la rueda con respecto a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su plano? (Use las fórmulas de la tabla 9.2).

Figura **E9.35**



9.36 •• La hélice de un avión tiene 2.08 m de longitud (de punta a punta) y masa de 117 kg, y gira a 2400 rpm (rev/min) alrededor de un eje que pasa por su centro. Trate a la hélice como una varilla delgada. *a*) ¿Qué energía cinética de rotación tiene? *b*) Suponga que, debido a restricciones de peso, usted tuviera que reducir la masa de la hélice al 75.0% de su masa original, pero siguiera requiriendo el mismo tamaño y la misma energía cinética. ¿Cuál tendría que ser su rapidez angular en rpm?

9.37 •• Un disco compuesto con diámetro exterior de 140.0 cm está constituido por un disco sólido uniforme de 50.0 cm de radio y densidad de área de 3.00 g/cm^2, rodeado por un anillo concéntrico, cuyo radio interior es de 50.0 cm y radio exterior de 70.0 cm con densidad de área de 2.00 g/cm^2. Calcule el momento de inercia de este objeto alrededor de un eje perpendicular al plano del objeto y que pasa por su centro.

9.38 • Una rueda gira con aceleración angular constante alrededor de un eje que pasa por su centro. Partiendo del reposo, en $t = 0$, la rueda gira 8.20 revoluciones en 12.0 s y en este instante tiene una energía cinética de 36.0 J. ¿Cuál es el momento de inercia de la rueda alrededor de un eje que pasa por su centro?

9.39 • Una esfera uniforme con masa de 28.0 kg y radio de 0.380 m gira con velocidad angular constante alrededor de un eje fijo que se encuentra a lo largo de un diámetro de la esfera. Si la energía cinética de la esfera es de 176 J, ¿cuál es la velocidad tangencial de un punto en el borde de la esfera?

9.40 •• Un cascarón esférico hueco tiene una masa de 8.20 kg y radio de 0.220 m. Se encuentra inicialmente en reposo y luego gira con una aceleración constante de 0.890 rad/s^2 alrededor de un eje fijo que se encuentra a lo largo de un diámetro. ¿Cuál es la energía cinética del cascarón después de girar 6.00 rev?

9.41 • **¿Energía desde la Luna?** Suponga que en algún momento del futuro decidimos aprovechar la energía rotacional de la Luna para usarla en la Tierra. Además de los datos astronómicos del apéndice F, tal vez usted necesite saber que la Luna gira sobre su eje una vez cada 27.3 días. Suponga que la Luna es completamente homogénea. *a*) ¿Cuánta energía total podríamos obtener de la rotación lunar? *b*) En la actualidad el mundo consume aproximadamente 4.0×10^{20} J de energía por año. Si en el futuro la Tierra usara cinco veces más energía cada año, ¿cuántos años de rotación lunar nos abastecerían de energía? De acuerdo con su respuesta, ¿sería recomendable invertir en esta fuente de energía considerando la relación costo-beneficio?

9.42 •• Usted necesita diseñar un plato giratorio industrial de 60.0 cm de diámetro con energía cinética de 0.250 J cuando gira a 45.0 rpm (rev/min). *a*) ¿Cuál debe ser el momento de inercia del plato alrededor de su eje de rotación? *b*) Si su taller elabora dicho plato con la forma de un disco sólido uniforme, ¿cuál debe ser su masa?

9.43 •• El volante de un motor de gasolina debe ceder 500 J de energía cinética mientras su velocidad angular se reduce de 650 a 520 rev/min. ¿Qué momento de inercia se requiere?

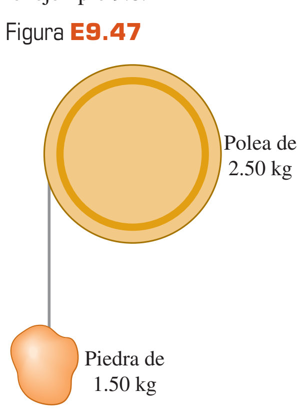
9.44 • Una cuerda ligera y flexible se enrolla varias veces alrededor de un cilindro *hueco* con peso de 40.0 N y radio de 0.25 m, que gira sin fricción alrededor de un eje horizontal fijo. El cilindro está unido al eje mediante rayos cuyo momento de inercia es despreciable, e inicialmente está en reposo. Se tira del extremo libre de la cuerda con una fuerza constante P una distancia de 5.00 m, punto en el cual la cuerda se está moviendo a 6.00 m/s. Si la cuerda no resbala sobre el cilindro, ¿cuánto vale P?

9.45 •• Se almacenará energía en un volante con forma de disco sólido uniforme con radio $R = 1.20$ m y masa de 70.0 kg. Para evitar que falle estructuralmente el volante, la aceleración radial máxima permitida de un punto en su borde es de 3500 m/s^2. ¿Qué energía cinética máxima puede almacenar el volante?

9.46 •• Suponga que el cilindro sólido del aparato del ejemplo 9.8 (sección 9.4) se sustituye por un cilindro hueco de paredes delgadas, con la misma masa M y radio R. El cilindro está unido al eje mediante rayos cuyo momento de inercia es despreciable. *a*) Calcule la rapidez de la masa m que cuelga justo antes de golpear el piso. *b*) Utilice los conceptos de energía para explicar por qué la respuesta al inciso *a*) es diferente de la rapidez calculada en el ejemplo 9.8.

9.47 •• Una polea sin fricción tiene la forma de un disco sólido uniforme de masa igual a 2.50 kg y radio de 20.0 cm. Una piedra de 1.50 kg se sujeta a un alambre muy ligero que se enrolla alrededor del borde de la polea (figura E9.47), y el sistema se libera del reposo. *a*) ¿Qué distancia debe descender la piedra para que la polea tenga 4.50 J de energía cinética? *b*) ¿Qué porcentaje de la energía cinética total tiene la polea?

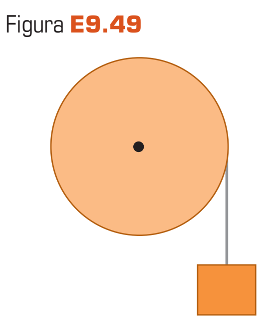
Figura **E9.47**



9.48 •• Una cubeta de masa m se ata a un cable de masa despreciable que se enrolla alrededor del borde exterior de una polea uniforme sin fricción de radio R, similar al sistema que se presenta en la figura E9.47. En términos de las variables indicadas, ¿cuál debe ser el momento de inercia de la polea, de forma que siempre tenga la mitad de la energía cinética de la cubeta?

9.49 •• PA Un alambre ligero y delgado se enrolla alrededor del borde de una rueda, como se muestra en la figura E9.49. La rueda gira sin fricción alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por su centro. La rueda es un disco uniforme de radio $R = 0.280$ m. Del extremo libre del alambre se encuentra suspendido un objeto de $m = 4.20$ kg. El sistema se libera del reposo y el objeto desciende con aceleración constante una distancia de 3.00 m en 2.00 s. ¿Cuál es la masa de la rueda?

Figura **E9.49**



9.50 •• Una escalera uniforme de 2.00 m de longitud y masa de 9.00 kg está apoyada contra un muro vertical formando un ángulo de 53.0° con el piso. Un trabajador empuja la escalera contra la pared hasta que queda vertical. ¿Cuál es el aumento de la energía potencial gravitacional de la escalera?

9.51 •• **Cómo cambia *I*.** Si multiplicamos todas las dimensiones de diseño de un objeto por un factor de escala f, su volumen y masa se multiplicarán por f^3. *a*) ¿Por qué factor se multiplicará su momento de inercia? *b*) Si un modelo a escala de $\frac{1}{48}$ tiene una energía cinética de rotación de 2.5 J, ¿cuánto valdrá la del objeto a escala normal fa-

bricado con el mismo material y que gira con la misma velocidad angular?

9.52 •• Una cuerda uniforme de 3.00 kg y 24.0 m de longitud está en el suelo en la cima de un risco vertical. Un alpinista deja caer desde la cima la mitad de la cuerda, para ayudar a su compañero a escalar el risco. ¿Cuál es el cambio en la energía potencial de la cuerda durante esta maniobra?

Sección 9.5 Teorema de los ejes paralelos

9.53 •• ¿Alrededor de qué eje el momento de inercia de una esfera uniforme de madera tendrá el mismo valor que el momento de inercia de una esfera hueca de plomo de pared delgada alrededor de un eje a lo largo de un diámetro, con los mismos valores de masa y radio?

9.54 •• Calcule el momento de inercia de un aro (anillo hueco de paredes delgadas) con masa M y radio R, alrededor de un eje perpendicular al plano del aro y que pasa por el borde.

9.55 •• Una placa metálica rectangular delgada tiene lados que miden a y b y una masa M. Use el teorema de los ejes paralelos para calcular el momento de inercia de la lámina alrededor de un eje perpendicular al plano de la placa y que pasa por una esquina de esta.

9.56 • *a*) Para la placa rectangular delgada que se muestra en el inciso *d*) de la tabla 9.2, calcule el momento de inercia en torno a un eje que está en el plano de la placa, pasa por el centro de esta y es paralelo al eje que se muestra en la figura. *b*) Calcule el momento de inercia de la placa en torno a un eje que está en el plano de la placa, pasa por el centro de esta y es perpendicular al eje del inciso *a*).

9.57 •• Una varilla delgada uniforme de masa M y longitud L se dobla por su centro de manera que los dos segmentos son ahora perpendiculares entre sí. Determine el momento de inercia alrededor de un eje perpendicular a su plano y que pasa por *a*) el punto donde se cruzan los dos segmentos y *b*) el punto medio de la recta que conecta los dos extremos.

Sección 9.6 Cálculos de momento de inercia

9.58 • **CALC** Use la ecuación (9.20) para calcular el momento de inercia de una varilla delgada uniforme con masa M y longitud L alrededor de un eje en un extremo, perpendicular a la varilla.

9.59 •• **CALC** Use la ecuación (9.20) para calcular el momento de inercia de un disco sólido uniforme de masa M y radio R con respecto a un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por el centro.

9.60 •• **CALC** La masa por unidad de longitud de una varilla delgada de longitud L varía con la distancia al extremo izquierdo, donde $x = 0$, según $dm/dx = \gamma x$, donde γ tiene unidades de kg/m^2. *a*) Calcule la masa total de la varilla en términos de γ y L. *b*) Use la ecuación (9.20) para calcular el momento de inercia de la varilla con respecto a un eje en el extremo izquierdo, perpendicular a la varilla. Use la expresión que dedujo en el inciso *a*) para expresar I en términos de M y L. Compare su resultado con el de una varilla uniforme y explique las diferencias. *c*) Repita el inciso *b*) para un eje en el extremo derecho de la varilla y compare los resultados de los incisos *b*) y *c*). Explique las diferencias.

PROBLEMAS

9.61 • **PA CALC** Un volante tiene una aceleración angular $\alpha_z(t) = 8.60 \text{ rad/s}^2 - (2.30 \text{ rad/s}^3)t$, donde la rotación antihoraria es positiva. *a*) Si el volante está en reposo en $t = 0$, ¿cuál es la velocidad angular en 5.00 s? *b*) ¿Qué ángulo (en radianes) gira el volante en el intervalo de $t = 0$ a $t = 5.00$ s?

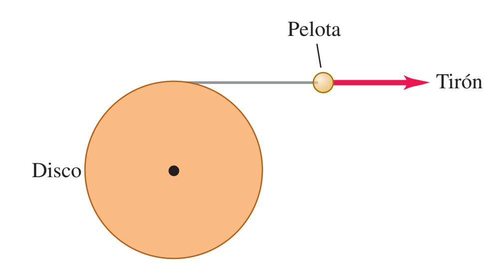
9.62 •• **CALC** Un disco uniforme con radio $R = 0.400$ m y masa de 30.0 kg gira en un plano horizontal alrededor de un eje vertical sin fricción que pasa por el centro del disco. El ángulo que gira el disco varía con el tiempo de acuerdo con $\theta(t) = (1.10 \text{ rad/s})t + (8.60 \text{ rad/s}^2)t^2$. ¿Cuál es la aceleración lineal resultante en un punto sobre el borde del disco en el instante en que este ha girado 0.100 rev?

9.63 •• **PA** La cuchilla de una sierra circular con radio de 0.120 m parte del reposo y gira en un plano vertical con una aceleración angular constante de 3.00 rev/s^2. Después de que la cuchilla ha girado 155 rev, una pequeña pieza se rompe de la parte superior de la misma. Después de que la pieza se rompe, viaja inicialmente con una velocidad horizontal e igual a la velocidad tangencial del borde de la cuchilla. La pieza recorre una distancia vertical de 0.820 m para llegar al piso. ¿Qué distancia recorre horizontalmente la pieza desde donde se desprendió hasta que llega al suelo?

9.64 • **CALC** El rodillo de una imprenta gira un ángulo $\theta(t)$ dado por $\theta(t) = \gamma t^2 - \beta t^3$, donde $\gamma = 3.20 \text{ rad/s}^2$ y $\beta = 0.500 \text{ rad/s}^3$. *a*) Calcule la velocidad angular del rodillo en función del tiempo. *b*) Calcule la aceleración angular del rodillo en función del tiempo. *c*) ¿Cuál es la máxima velocidad angular positiva que alcanza, y en qué instante t ocurre?

9.65 •• **PA CALC** Un disco con radio de 25.0 cm tiene libertad para girar en torno a un eje perpendicular a él que pasa por su centro. Tiene una cuerda muy delgada, pero fuerte, enrollada alrededor de su borde, y la cuerda está unida a una pelota de la que se tira tangencialmente para alejarla del borde del disco (figura P9.65). El tirón aumenta en magnitud y produce una aceleración de la pelota que obedece la ecuación $a(t) = At$, donde t está en segundos y A es una constante. El disco parte del reposo y, al final del tercer segundo, la aceleración de la pelota es de 1.80 m/s^2. *a*) Calcule A. *b*) Exprese la aceleración angular del disco en función del tiempo. *c*) ¿Cuánto tiempo después de que el disco comenzó a girar alcanzará una rapidez angular de 15.0 rad/s? *d*) ¿Qué ángulo ha girado el disco justo cuando alcanza 15.0 rad/s? (*Sugerencia:* Véase la sección 2.6).

Figura **P9.65**



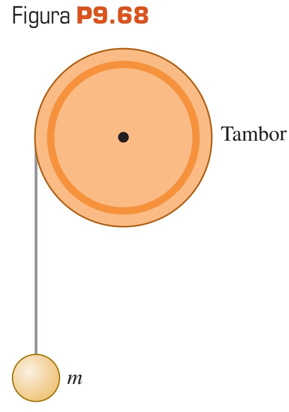
9.66 •• Cuando un automóvil de juguete es empujado rápidamente por el piso, almacena energía en un volante. El automóvil tiene una masa de 0.180 kg y el volante tiene un momento de inercia de $4.00 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. El automóvil tiene 15.0 cm de longitud. La publicidad asegura que el automóvil puede viajar con una rapidez a escala de hasta 700 km/h (440 mi/h). La rapidez a escala es la rapidez del automóvil de juguete multiplicada por el cociente de la la longitud de un automóvil real entre la longitud del juguete. Suponga que un automóvil real mide 3.0 m. *a*) Con una rapidez a escala de 700 km/h, ¿qué rapidez de traslación real tiene el automóvil? *b*) Si toda la energía cinética que está inicialmente en el volante se convierte en energía cinética de traslación del juguete, ¿cuánta energía se almacenó originalmente en el volante? *c*) ¿Qué velocidad angular inicial del volante se necesitó para almacenar la energía calculada en el inciso *b*)?

9.67 • Un automóvil Chevrolet Corvette clásico modelo 1957, con masa de 1240 kg, parte del reposo y tiene una aceleración tangencial constante de 2.00 m/s^2 en una pista circular de prueba con radio de 60.0 m. Trate el automóvil como partícula. *a*) ¿Qué aceleración angular tiene? *b*) ¿Qué rapidez angular tiene 6.00 s después de arrancar? *c*) ¿Qué aceleración radial tiene en ese instante? *d*) Dibuje una vista superior mostrando la pista circular, el automóvil, el vector velocidad y las componentes del vector aceleración a los 6.00 s después de que el auto arranca. *e*) ¿Qué magnitudes tienen la aceleración total y la

fuerza neta del automóvil en ese instante? *f*) ¿Qué ángulo forman estos vectores con la velocidad del automóvil a los 6.00 s?

9.68 •• Unos ingenieros están diseñando un sistema en el que una masa *m*, al caer, imparte energía cinética a un tambor uniforme giratorio, al cual está unida con un alambre delgado y muy ligero que está enrollado alrededor del borde del tambor (figura P9.68). No hay fricción considerable en el eje del tambor y todo el sistema parte del reposo. Este sistema se probó en la Tierra, pero debe utilizarse en Marte, donde la aceleración debida a la gravedad es de 3.71 m/s^2. En las pruebas en la Tierra, cuando *m* es de 15.0 kg y se le permite descender una distancia de 5.00 m, imparte 250.0 J de energía cinética al tambor. *a*) Si el sistema se opera en Marte, ¿qué distancia tendría que descender la masa de 15.0 kg para impartir la misma cantidad de energía cinética al tambor? *b*) ¿Con qué rapidez se moverá la masa de 15.0 kg en Marte justo cuando el tambor gane 250.0 J de energía cinética?

Figura **P9.68**



9.69 • La banda de una aspiradora pasa sobre una flecha de 0.45 cm de radio y una rueda de 1.80 cm de radio. La disposición de estas piezas es similar a la de la cadena y las ruedas dentadas de la figura P9.4. El motor hace girar la flecha a 60.0 rev/s, y la banda hace girar la rueda, que se conecta mediante otra flecha al rodillo que saca el polvo de la alfombra que se está limpiando. Suponga que la banda no resbala en el eje ni en la rueda. *a*) ¿Qué rapidez tiene un punto en la banda? *b*) ¿Qué velocidad angular tiene la rueda en rad/s?

9.70 •• El motor de una sierra de banco gira a 3450 rev/min. Una polea conectada al eje del motor impulsa una segunda polea con la mitad del diámetro mediante una correa en “V”. La sierra circular de 0.208 m de diámetro está montada en el mismo eje giratorio de la segunda polea. *a*) El operador se descuida y la sierra atrapa y lanza hacia atrás un trocito de madera, el cual se mueve con rapidez lineal igual a la rapidez tangencial del borde de la cuchilla. Calcule dicha rapidez. *b*) Calcule la aceleración radial de los puntos en el borde exterior de la cuchilla para saber por qué el aserrín no se adhiere a los dientes.

9.71 ••• Al conducir una bicicleta de varias velocidades, el ciclista puede seleccionar el radio de la rueda dentada trasera, que está fija al eje posterior. La rueda dentada delantera tiene 12.0 cm de radio. Si la rapidez angular de la rueda dentada delantera es de 0.600 rev/s, ¿cuál es el radio de la rueda dentada trasera para el cual la rapidez tangencial de un punto en el borde de la rueda trasera es de 5.00 m/s? La rueda trasera tiene 0.330 m de radio.

9.72 ••• Una unidad de disco de computadora se enciende partiendo del reposo y tiene aceleración angular constante. Si la unidad tardó 0.750 s en realizar su *segunda* revolución completa, *a*) ¿cuánto tiempo le tomó efectuar su primera revolución completa?, y *b*) ¿cuál es su aceleración angular en rad/s^2?

9.73 • Una rueda cambia su velocidad angular con una aceleración angular constante, al girar sobre un eje fijo que pasa por su centro. *a*) Demuestre que el cambio en la magnitud de la aceleración radial de un punto de la rueda, durante cualquier lapso, es el doble del producto de la aceleración angular, el desplazamiento angular y la distancia perpendicular del punto al eje. *b*) La aceleración radial de un punto de la rueda a 0.250 m del eje cambia de 25.0 a 85.0 m/s^2 mientras la rueda gira 20.0 rad. Calcule la aceleración tangencial de este punto. *c*) Demuestre que el cambio de energía cinética de la rueda durante cualquier lapso es el producto del momento de inercia alrededor del eje, la aceleración angular y el desplazamiento angular. *d*) Durante el desplazamiento angular de 20.0 rad del inciso *b*), la energía cinética de la rueda aumenta de 20.0 a 45.0 J. ¿Qué momento de inercia tiene la rueda en torno al eje de rotación?

9.74 •• Una esfera está formada por un centro esférico sólido de madera con densidad de 800 kg/m^3 y radio de 0.30 m, cubierto por una capa delgada de plomo con densidad de área de 20 kg/m^2. Calcule el momento de inercia de esta esfera en torno a un eje que pasa por su centro.

9.75 ••• Se ha sugerido que las plantas eléctricas deberían aprovechar las horas de bajo consumo (por ejemplo, después de medianoche) para generar energía mecánica y almacenarla hasta que se necesite durante los periodos de carga máxima, como a mediodía. Una propuesta consiste en almacenar la energía en enormes volantes que giren sobre cojinetes casi sin fricción. Considere un volante de hierro (con densidad de 7800 kg/m^3) en forma de disco uniforme de 10.0 cm de espesor. *a*) ¿Qué diámetro debería tener este disco para almacenar 10.0 megajoules de energía cinética al girar a 90.0 rpm en torno a un eje perpendicular al disco y que pasa por su centro? *b*) ¿Qué aceleración centrípeta tendría un punto en su borde al girar con esta rapidez?

9.76 •• Al rediseñar el motor para un cohete, usted desea reducir su peso reemplazando una pieza esférica sólida con un cascarón esférico hueco del mismo tamaño. Las piezas giran alrededor de un eje que pasa por su centro. Usted necesita asegurarse de que la pieza nueva siempre tenga la misma energía cinética de rotación que tenía la pieza original a cualquier tasa de rotación dada. Si la pieza original tenía una masa *M*, ¿cuál debe ser la masa de la pieza nueva?

9.77 • La Tierra, que no es una esfera uniforme, tiene un momento de inercia de $0.3308MR^2$ alrededor de un eje que pasa por sus polos. La Tierra tarda 86,164 s en dar una revolución. Use el apéndice F para calcular *a*) la energía cinética de la Tierra debida a esta rotación y *b*) la energía cinética de la Tierra debida a su movimiento orbital en torno al Sol. *c*) Explique cómo sabemos, por el valor del momento de inercia de la Tierra, que su masa está concentrada en su centro.

9.78 ••• Un disco sólido uniforme de masa *m* y radio *R* pivota sobre un eje horizontal que pasa por su centro, y un objeto pequeño con la misma masa *m* se sujeta al borde del disco. Si el disco se suelta del reposo con el objeto en el extremo de un radio horizontal, calcule la rapidez angular cuando el objeto esté directamente abajo del eje.

9.79 •• CALC Un anuncio metálico de una concesionaria automotriz es un triángulo rectángulo delgado y uniforme con base de longitud *b* y altura *h*. La masa del anuncio es *M*. *a*) Calcule su momento de inercia para la rotación en torno al cateto de longitud *h*. *b*) Si $M = 5.40$ kg, $b = 1.60$ m y $h = 1.20$ m, ¿qué energía cinética tiene el letrero cuando está girando a 2.00 rev/s en torno a un eje que coincide con el cateto de 1.20 m?

9.80 •• Medición de *I*. Imagine que trabaja como pasante en una empresa de ingenieros y le piden que mida el momento de inercia de una rueda grande, que gira en torno a un eje que pasa por su centro. Como usted fue buen estudiante de física, sabe lo que debe hacer. Mide la rueda y determina que su diámetro es de 0.740 m y que tiene un peso de 280 N. Luego monta la rueda, empleando cojinetes sin fricción, en un eje horizontal que pasa por el centro de la rueda. Enrolla una cuerda ligera en el borde de la rueda y cuelga una masa de 8.00 kg del extremo libre, como se muestra en la figura 9.17. Ahora suelta la masa desde el reposo; la masa desciende y la rueda gira mientras la cuerda se desenrolla. Usted determina que la masa tiene una rapidez de 5.00 m/s después de haber descendido 2.00 m. *a*) ¿Qué momento de inercia tiene la rueda para un eje perpendicular que pasa por su centro? *b*) Su jefe le dice que se requiere un *I* más grande y le pide diseñar una rueda con la misma masa y radio que tenga $I = 19.0\ kg \cdot m^2$. ¿Qué le contesta usted?

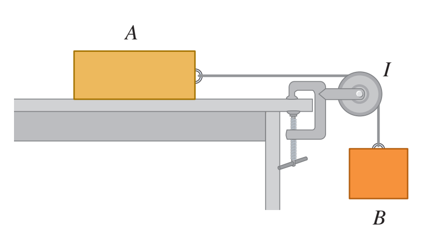
9.81 •• PA Un metro de madera de 0.180 kg pivota sobre un extremo, de manera que puede girar sin fricción alrededor de un eje horizontal.

El metro se sostiene en posición horizontal y se suelta. Conforme gira, al pasar por la vertical, calcule *a*) el cambio de energía potencial gravitacional que haya ocurrido; *b*) la rapidez angular del metro; *c*) la rapidez lineal del extremo opuesto al eje. *d*) Compare la respuesta del inciso *c*) con la rapidez de una partícula que ha caído 1.00 m desde el reposo.

9.82 •• Exactamente una vuelta de una cuerda flexible de masa m está enrollada en un cilindro uniforme de masa M y radio R, que gira sin fricción alrededor de un eje horizontal a lo largo del eje del cilindro. Un extremo de la cuerda está sujeto al cilindro, el cual inicia con rapidez angular ω_0. Después de una revolución del cilindro, la cuerda se ha desenrollado y, en ese instante, cuelga verticalmente, tangente al cilindro. Calcule la rapidez angular del cilindro y la rapidez lineal del extremo inferior de la cuerda en ese instante. Puede ignorar el espesor de la cuerda. [*Sugerencia:* Use la ecuación (9.18)].

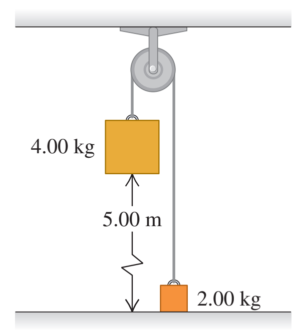
9.83 • La polea de la figura P9.83 tiene radio R y momento de inercia I. La cuerda no resbala sobre la polea y esta gira sobre un eje sin fricción. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque A y la mesa es μ_k. El sistema se suelta del reposo y el bloque B desciende. El bloque A tiene masa m_A; y la de B es m_B. Use métodos de energía para calcular la rapidez de B en función de la distancia d que ha descendido.

Figura **P9.83**



9.84 •• La polea de la figura P9.84 tiene 0.160 m de radio y su momento de inercia es de 0.560 kg·m^2. La cuerda no resbala en la polea. Use métodos de energía para calcular la rapidez del bloque de 4.00 kg justo antes de golpear el piso.

Figura **P9.84**

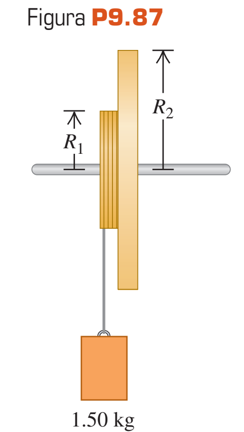


9.85 •• Se cuelga un aro delgado de radio R de un clavo. El aro se desplaza lateralmente (dentro de su plano) un ángulo β con respecto a su posición de equilibrio y se suelta. ¿Qué rapidez angular tiene al volver a su posición de equilibrio? [*Sugerencia:* Use la ecuación (9.18)].

9.86 •• Un autobús de pasajeros en Zurich, Suiza, obtenía su fuerza motriz a partir de la energía almacenada en un volante grande. La rapidez del volante se aumentaba periódicamente (cuando el autobús hacía una parada) con un motor eléctrico que entonces podía conectarse a las líneas eléctricas. El volante era un cilindro sólido con masa de 1000 kg y 1.80 m de diámetro; su rapidez angular máxima era de 3000 rev/min. *a*) Con esta rapidez angular, ¿qué energía cinética tiene el volante? *b*) Si la potencia media que requería el autobús era de 1.86×10^4 W, ¿cuánto tiempo podía operar entre paradas?

9.87 •• Dos discos metálicos, con radios $R_1 = 2.50$ cm y $R_2 = 5.00$ cm, y masas $M_1 = 0.80$ kg y $M_2 = 1.60$ kg, se sueldan y se montan en un eje sin fricción que pasa por el centro común (figura P9.87). *a*) ¿Qué momento de inercia total tienen los discos? *b*) Una cuerda ligera se enrolla en el extremo del disco más chico y del extremo libre de la cuerda se cuelga un bloque de 1.50 kg. Si el bloque se suelta del reposo a una altura de 2.00 m sobre el piso, ¿qué rapidez tiene justo antes de golpear el piso? *c*) Repita el inciso *b*), pero ahora con la cuerda enrollada en el borde del disco grande. ¿En qué caso el bloque alcanza mayor rapidez? Explique su respuesta.

Figura **P9.87**

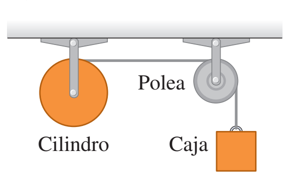


9.88 •• Un alambre ligero y delgado se enrolla alrededor del borde de una rueda, como se muestra en la figura E9.49. La rueda gira alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por su centro. La rueda tiene un radio de 0.180 m y un momento de inercia alrededor de su eje de $I = 0.480$ kg·m^2. Del extremo libre del alambre se encuentra suspendido un pequeño bloque de masa igual a 0.340 kg. Cuando el sistema se libera del reposo, el bloque desciende con aceleración constante. Los cojinetes de la rueda en el eje están oxidados, de modo que la fricción realiza −6.00 J de trabajo conforme el bloque desciende 3.00 m. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad angular de la rueda después de que el bloque ha descendido 3.00 m?

9.89 ••• En el sistema que se ilustra en la figura 9.17, una masa de 12.0 kg se suelta desde el reposo y cae, haciendo que el cilindro uniforme con masa de 10.0 kg y diámetro de 30.0 cm gire en torno a un eje sin fricción que pasa por su centro. ¿Qué distancia deberá descender la masa para impartir al cilindro 480 J de energía cinética?

9.90 • En la figura P9.90, el cilindro y la polea giran sin fricción en torno a ejes horizontales estacionarios que pasan por sus respectivos centros. Se enrolla una cuerda ligera en el cilindro, la cual pasa por la polea y tiene una caja de 3.00 kg suspendida de su extremo libre. No hay deslizamiento entre la cuerda y la superficie de la polea. El cilindro uniforme tiene masa de 5.00 kg y radio de 40.0 cm. La polea es un disco uniforme con masa de 2.00 kg y radio de 20.0 cm. La caja se suelta desde el reposo y desciende mientras la cuerda se desenrolla del cilindro. Calcule la rapidez que tiene la caja cuando ha descendido 2.50 m.

Figura **P9.90**



9.91 •• Un disco plano uniforme tiene masa M y radio R. Se perfora en él un agujero circular de radio $R/4$, con centro en un punto a $R/2$ del centro del disco. *a*) Calcule el momento de inercia del disco agujerado alrededor de un eje que pasa por su centro, perpendicular al plano del disco. (*Sugerencia:* Calcule el momento de inercia de la pieza que se quitó al disco). *b*) Calcule el momento de inercia del disco agujerado en torno a un eje que pasa por el centro del agujero, perpendicular al plano del disco.

9.92 •• BIO **Energía rotacional del ser humano.** Una bailarina gira a 72 rpm alrededor de un eje que pasa por su centro con los brazos extendidos, como se muestra en la figura P9.92. Mediciones biomédicas indican que la distribución de la masa del cuerpo humano es como sigue:

Figura **P9.92**



Cabeza: 7.0%
Brazos: 13% (para ambos)
Tronco y piernas: 80.0%

Suponga que usted es esta bailarina. Usando esta información, más mediciones de longitud de su propio cuerpo, calcule *a*) su momento de inercia alrededor de su eje de giro y *b*) su energía cinética de rotación. Use las figuras de la tabla 9.2 para modelar aproximaciones razonables de las partes pertinentes de su cuerpo.

9.93 •• BIO Energía cinética en una caminata. Si una persona de masa M simplemente se mueve hacia adelante con rapidez V, su energía cinética sería $\frac{1}{2}MV^2$. Sin embargo, además de tener movimiento hacia adelante, varias partes de su cuerpo (como los brazos y las piernas) experimentan una rotación. Por lo tanto, su energía cinética total es la suma de la energía de su cuerpo por el movimiento hacia adelante, más la energía cinética de rotación de sus brazos y piernas. El objetivo de este problema es ver cuánto contribuye el movimiento de rotación a la energía cinética de la persona. Mediciones biomédicas indican que los brazos y las manos, en conjunto, normalmente contribuyen con un 13% a la masa de la persona, mientras que las piernas y los pies, en conjunto, contribuyen con un 37%. Para un cálculo burdo (pero razonable), se pueden modelar brazos y piernas como barras uniformes delgadas girando alrededor de los hombros y las caderas, respectivamente. Con paso ligero, los brazos y las piernas se pueden mover un ángulo de ±30° (un total de 60°) a partir de la vertical en aproximadamente 1 segundo. Supondremos que se mantienen rectos en lugar de doblados, lo cual no es completamente cierto. Consideremos a una persona de 75 kg caminando a 5.0 km/h, que tiene brazos de 70 cm de largo y piernas de 90 cm. *a*) ¿Cuál es la velocidad angular media de sus brazos y piernas? *b*) Usando la velocidad angular media del inciso *a*), calcule la cantidad de energía cinética de rotación en los brazos y las piernas de esta persona al caminar. *c*) ¿Cuál es la energía cinética total debida tanto al movimiento hacia adelante como a la rotación? *d*) ¿Qué porcentaje de esta energía cinética se debe a la rotación de las piernas y los brazos?

9.94 •• BIO La energía cinética en una carrera. Usando como guía el problema 9.93, aplíquelo a una persona que corre a 12 km/h, con los brazos y las piernas girando ±30° en $\frac{1}{2}$s. Como antes, suponga que los brazos y las piernas se mantienen rectos.

9.95 •• Teorema de los ejes perpendiculares. Considere un cuerpo rígido que es una lámina delgada plana de forma arbitraria en el plano *xy*, con el origen de coordenadas *O* situado en cualquier punto dentro o fuera del cuerpo. Sean I_x e I_y los momentos de inercia alrededor de los ejes *x* y *y*, y sea I_O el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por *O*, perpendicular al plano. *a*) Considerando elementos de masa m_i con coordenadas (x_i, y_i), demuestre que $I_x + I_y = I_O$. Este es el teorema de los ejes perpendiculares. Observe que el punto *O* no tiene que ser el centro de masa. *b*) Para una arandela delgada con masa *M* y radios interior y exterior R_1 y R_2, use el teorema de los ejes perpendiculares para calcular el momento de inercia alrededor de un eje que está en el plano de la arandela y que pasa por su centro. Puede usar la información de la tabla 9.2. *c*) Use el teorema de los ejes perpendiculares para demostrar que, en el caso de una lámina delgada cuadrada con masa *M* y longitud de lado *L*, el momento de inercia en torno *a cualquier* eje en el plano de la lámina que pase por el centro de esta es $\frac{1}{12}ML^2$. Puede usar la información de la tabla 9.2.

9.96 ••• Una varilla uniforme delgada se dobla formando un cuadrado de lado *a*. Si la masa total es *M*, calcule el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro y es perpendicular al plano del cuadrado. (*Sugerencia:* Use el teorema de los ejes paralelos).

9.97 • CALC La densidad de un cilindro de radio *R* y masa *M* aumenta linealmente con la distancia *r* al eje del cilindro, $\rho = \alpha r$, donde α es una constante positiva. *a*) Calcule el momento de inercia del cilindro alrededor de un eje longitudinal que pasa por su centro, en términos de *M* y *R*. *b*) ¿Su respuesta es mayor o menor que el momento de inercia de un cilindro con la misma masa y radio, pero con densidad uniforme? Explique por qué este resultado es lógico cualitativamente.

9.98 •• CALC Estrellas de neutrones y restos de supernovas. La Nebulosa del Cangrejo es una nube de gas brillante de unos 10 años luz de diámetro, a una distancia aproximada de 6500 años luz de la Tierra (figura P9.98). Es el residuo de una estrella que experimentó una *explosión supernova* que se vio en la Tierra en el año 1054. Esta nebulosa libera energía a razón de aproximadamente 5×10^{31} W, unas 10^5 veces la energía radiada por el Sol. El origen de esa energía es la rotación rápida de una *estrella de neutrones* en el centro de la nebulosa. Este objeto gira una vez cada 0.0331 s, y este periodo aumenta 4.22×10^{-13} s cada segundo que pasa. *a*) Si la rapidez con que la estrella de neutrones pierde energía es igual a la rapidez con que la nebulosa libera energía, calcule el momento de inercia de la estrella de neutrones. *b*) Las teorías sobre supernovas predicen que la estrella de neutrones de la Nebulosa del Cangrejo tiene una masa aproximadamente 1.4 veces mayor que la del Sol. Modelando la estrella de neutrones como una esfera sólida uniforme, calcule su radio en kilómetros. *c*) ¿Qué rapidez lineal tiene un punto en el ecuador de esa estrella? Compare esto con la rapidez de la luz. *d*) Suponga que la estrella de neutrones es uniforme y calcule su densidad, comparándola con la de una roca ordinaria (3000 kg/m^3) y la densidad de un núcleo atómico (aproximadamente 10^{17} kg/m^3). Justifique la afirmación de que una estrella de neutrones es, en esencia, un núcleo atómico grande.

Figura **P9.98**

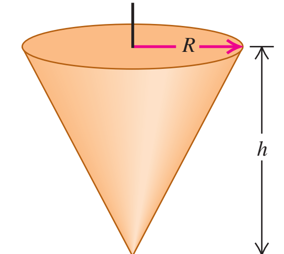


9.99 •• CALC Una esfera de radio $R = 0.200$ m tiene una densidad ρ que disminuye con la distancia *r* desde el centro de la esfera de acuerdo con $\rho = 3.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3 - (9.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^4)r$. *a*) Calcule la masa total de la esfera. *b*) Calcule el momento de inercia de la esfera con respecto a un eje a lo largo de un diámetro.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

9.100 ••• CALC Calcule el momento de inercia de un cono sólido uniforme de masa *M* y altura *h* alrededor de un eje que pasa por su centro (figura P9.100). El radio de la base circular es *R*.

Figura **P9.100**



9.101 ••• CALC En un disco compacto (CD), la música se codifica en un patrón de agujeros diminutos dispuestos en una pista que corre en espiral hacia el borde del disco. Al girar el disco dentro del reproductor, la pista es escaneada con una rapidez *lineal* constante de $v = 1.25$ m/s. Puesto que el radio de la pista varía al irse alejando del centro, la rapidez *angular* del disco debe cambiar al reproducirse el CD. (Véase el ejercicio 9.20). Veamos qué aceleración angular se necesita para mantener v constante. La ecuación de una espiral es $r(\theta) = r_0 + \beta\theta$, donde r_0 es el radio de la espiral en $\theta = 0$ y β es una constante. En un CD, r_0 es el radio interior de la pista. Si tomamos la dirección de rotación del CD como positiva, β debe ser positiva para que *r* aumente al girar el disco y aumentar θ. *a*) Al girar el disco un ángulo pequeño $d\theta$, la distancia escaneada sobre la pista es $ds = r\,d\theta$. Usando la expresión anterior para $r(\theta)$, integre ds para obtener la distancia total *s*

barrida a lo largo de la pista en función del ángulo total θ que ha girado el disco. *b*) Puesto que la pista se escanea con rapidez lineal constante v, la distancia s obtenida en el inciso *a*) es igual a vt. Use esto para obtener θ en función del tiempo. Habrá dos soluciones para θ; elija la positiva y explique por qué es la adecuada. *c*) Con su expresión para $\theta(t)$, calcule la velocidad angular ω_z y la aceleración angular α_z en función del tiempo. ¿α_z es constante? *d*) En un CD, el radio interior de la pista es de 25.0 mm, el radio aumenta 1.55 μm cada revolución y la duración de la reproducción del CD es de 74.0 min. Calcule r_0 y β y determine el número total de revoluciones del disco durante su reproducción. *e*) Con sus resultados de *c*) y *d*), grafique ω_z (en rad/s) contra t y α_z (en rad/s^2) contra t entre $t = 0$ y $t = 74.0$ min.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

Ambos segmentos del aspa rígida tienen la misma rapidez angular ω. De acuerdo con las ecuaciones (9.13) y (9.15), al duplicar la distancia r para la misma ω, se duplica la rapidez lineal $v = r\omega$ y se duplica la aceleración radial $a_{rad} = \omega^2 r$.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

9.1 Respuestas: *a*) i y iii, *b*) ii. La rotación se está acelerando cuando la aceleración y la velocidad angulares tienen el mismo signo, y se está frenando cuando tienen signos opuestos. Por lo tanto, acelera para $0 < t < 2$ s (ω_z y α_z son positivas) y para 4 s $< t <$ 6 s (ω_z y α_z son negativas); pero se está frenando para 2 s $< t <$ 4 s (ω_z es positiva y α_z es negativa). Observe que el cuerpo gira en una dirección para $t < 4$ s (ω_z es positiva) y en la dirección opuesta para $t > 4$ s (ω_z es negativa).

9.2 Respuestas: *a*) i, *b*) ii. Cuando el disco se detiene, $\omega_z = 0$. De acuerdo con la ecuación (9.7), esto sucede en el *instante* $t = (\omega_z - \omega_{0z})/\alpha_z = -\omega_{0z}/\alpha_z$ (este es un tiempo positivo porque α_z es negativa). Si duplicamos la velocidad angular inicial ω_{0z} y duplicamos también la aceleración angular α_z, su cociente no cambia y la rotación se detiene en el mismo tiempo. El *ángulo* con el que gira el disco está dado por la ecuación (9.10): $\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t = \frac{1}{2}\omega_{0z}t$ (ya que la velocidad angular final es $\omega_z = 0$). La velocidad angular inicial ω_{0z} se duplica, pero el tiempo t es el mismo, así que el desplazamiento angular $\theta - \theta_0$ (y, por ende, el numero de revoluciones) se duplica. Podemos usar la ecuación (9.12) para obtener la misma conclusión.

9.3 Respuesta: ii. De acuerdo con la ecuación (9.13), $v = r\omega$. Para mantener una rapidez lineal v constante, la rapidez angular ω debe disminuir a medida que la cabeza lectora se mueve hacia afuera (mayor r).

9.4 Respuesta: i. La energía cinética del objeto que desciende es $\frac{1}{2}mv^2$, y la del cilindro que gira, $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{4}mv^2$. Por lo tanto, la energía cinética total del sistema es $\frac{3}{4}\,mv^2$, de la cual dos tercios están en el bloque y un tercio está en el cilindro.

9.5 Respuesta: ii. Más de la masa del taco de billar está concentrada en el extremo más grueso, así que el centro de masa está más cercano a dicho extremo. El momento de inercia en un punto P en cualquiera de sus extremos es $I_P = I_{cm} + Md^2$; el extremo más delgado está más alejado del centro de masa, por lo que la distancia d y el momento de inercia I_P son mayores para el extremo más delgado.

9.6 Respuesta: iii. El resultado del ejemplo 9.10 *no* depende de la longitud del cilindro L. El momento de inercia depende solo de la distribución *radial* de la masa, no de su distribución a lo largo del eje.

Problema práctico

Respuestas: ***a*)** $I = \left[\frac{M}{L}\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_{-h}^{L-h} = \frac{1}{3}M(L^2 - 3Lh + 3h^2)$

***b*)** $W = \frac{1}{6}M(L^2 - 3Lh + 3h^2)\alpha^2 t^2$

***c*)** $a = (L - h)\alpha\sqrt{1 + \alpha^2 t^4}$

10 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN



? Si usted se encuentra en el Polo Norte, la Estrella Polar, Polaris, estará casi directamente encima de su cabeza, mientras que las demás estrellas parecerán trazar círculos alrededor de ella. Pero hace 5000 años, una estrella diferente, Thuban, se localizaba directamente encima del Polo Norte y era la Estrella del Norte. ¿Qué ocasionó este cambio?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

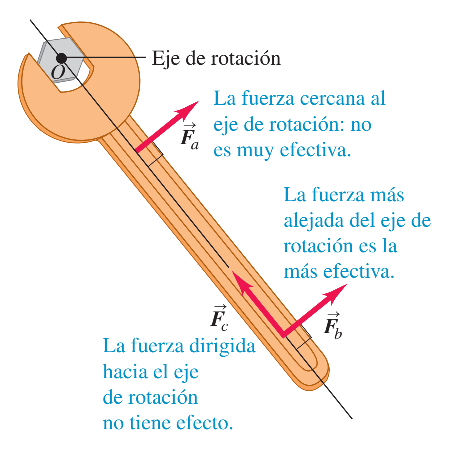
Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué significado tiene una torca producida por una fuerza.
- Cómo la torca total sobre un cuerpo afecta su movimiento de rotación.
- Cómo se analiza el movimiento de un cuerpo que gira y se mueve como un todo a través del espacio.
- Cómo resolver problemas que implican trabajo y potencia en el caso de cuerpos que giran.
- Qué se entiende por momento angular de una partícula o de un cuerpo rígido.
- Cómo cambia con el tiempo el momento angular de un sistema.
- Por qué un giróscopo en movimiento experimenta el curioso movimiento de precesión.

En los capítulos 4 y 5 aprendimos que una fuerza neta aplicada a un cuerpo le produce una aceleración. Pero, ¿qué se necesita para producir en un cuerpo una aceleración *angular*? Es decir, ¿qué se necesita para hacer girar a un cuerpo en reposo o para detener a uno que está girando? Se requiere una fuerza, pero se debe aplicar de manera que provoque una acción de torsión o un giro.

En este capítulo vamos a definir una nueva cantidad física, la *torca*, la cual describe la acción de torsión o giro producido por una fuerza. Encontraremos que la torca neta que actúa sobre un cuerpo rígido determina su aceleración angular, de la misma manera que la fuerza neta sobre un cuerpo determina su aceleración lineal. También estudiaremos el trabajo y la potencia en el movimiento de rotación para entender cómo se transmite la energía por el eje giratorio del motor de un automóvil. Por último, desarrollaremos un nuevo principio de conservación, la *conservación del momento angular*, que es sumamente útil para comprender el movimiento de rotación tanto de cuerpos rígidos como de los que no lo son. Terminaremos este capítulo con el estudio de los *giróscopos*, dispositivos giratorios que aparentemente desafían el sentido común y no se caen cuando se cree que deberían hacerlo, aunque en realidad se comportan en perfecto acuerdo con la dinámica del movimiento de rotación.

10.1 ¿Cuál de estas tres fuerzas de igual magnitud tiene la mayor probabilidad de aflojar el tornillo apretado?



10.1 Torca

Sabemos que las fuerzas que actúan sobre un cuerpo pueden afectar su **movimiento de traslación**, es decir, el movimiento del cuerpo como un todo a través del espacio. Ahora queremos aprender qué aspectos de una fuerza determinan qué tan efectiva es esta para provocar o modificar el movimiento de *rotación*. La magnitud y la dirección de la fuerza son importantes, al igual que el punto de su aplicación sobre el cuerpo. En la figura 10.1 se utiliza una llave para aflojar un tornillo apretado. La fuerza $\vec{F}_b$, aplicada cerca del extremo del mango es más eficaz que una fuerza igual $\vec{F}_a$ aplicada cerca del tornillo. La fuerza $\vec{F}_c$ no sirve de nada, ya que se aplica en el mismo punto y tiene la misma magnitud que $\vec{F}_b$, pero está dirigida a lo largo de la longitud del

mango. La medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza para provocar o modificar el movimiento de rotación de un cuerpo se llama *torca*; decimos que $\vec{F}_a$ genera una torca sobre el punto O a la llave de la figura 10.1, $\vec{F}_b$ aplica una torca mayor con respecto a O, y $\vec{F}_c$ aplica una torca nula sobre O.

La figura 10.2 muestra tres ejemplos de cómo calcular la torca. El cuerpo de la figura puede girar alrededor de un eje que es perpendicular al plano de la figura y que pasa por el punto O. Sobre el cuerpo actúan tres fuerzas, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ en el plano de la figura. La tendencia de la primera de estas fuerzas, $\vec{F}_1$, en provocar una rotación alrededor de O depende de su magnitud F_1. También depende de la distancia *perpendicular* l_1 entre el punto O y la **línea de acción** de la fuerza (es decir, la línea a lo largo de la cual se ubica el vector fuerza). Llamamos a la distancia l_1 el **brazo de palanca** (o **brazo de momento**) de la fuerza $\vec{F}_1$ con respecto a O. El esfuerzo de torsión es directamente proporcional tanto a l_1 como a F_1 así que la **torca** (o *momento*) de la fuerza $\vec{F}_1$ se define con respecto a O como el producto $F_1 l_1$. Usamos la letra griega τ (tau) para indicar la torca. En general, la torca para una fuerza de magnitud F cuya línea de acción es una distancia perpendicular l desde O es

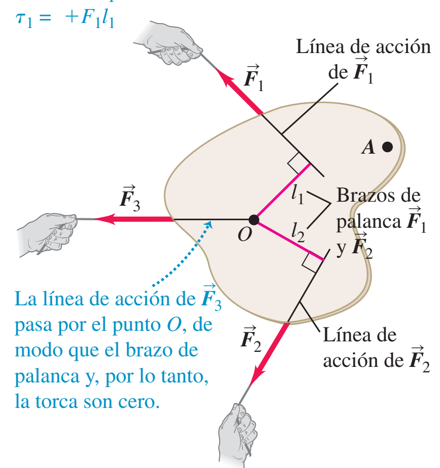
$$\tau = Fl \qquad (10.1)$$

Los físicos suelen utilizar el término "torca", mientras que los ingenieros prefieren utilizar "momento" (a menos que se trate de un eje giratorio). Unos y otros utilizan el término "brazo de palanca" o "brazo de momento" para designar la distancia l.

El brazo de palanca de $\vec{F}_1$ en la figura 10.2 es la distancia perpendicular l_1, y el brazo de palanca de $\vec{F}_2$ es la distancia perpendicular l_2. La línea de acción de $\vec{F}_3$ pasa por el punto O, de modo que el brazo de palanca para $\vec{F}_3$ es cero y su torca con respecto a O es cero. De la misma manera, la fuerza $\vec{F}_c$ en la figura 10.1 tiene una torca nula con respecto al punto O; $\vec{F}_b$ tiene una torca mayor que $\vec{F}_a$ ya que su brazo de palanca es mayor.

CUIDADO **La torca siempre se mide con respecto a un punto** Observe que la torca *siempre* se define con referencia a un punto específico. Si modificamos la posición de este punto, la torca de cada fuerza también cambia. Por ejemplo, la torca de la fuerza $\vec{F}_3$ de la figura 10.2 es cero con respecto al punto O, pero la torca $\vec{F}_3$ *no* es cero con respecto al punto A. No es suficiente referirnos a "la torca de $\vec{F}$"; se debe decir "la torca de $\vec{F}$ con respecto al punto X" o "la torca de $\vec{F}$ alrededor del punto X".

10.2 La torca de una fuerza en torno a un punto es el producto de la magnitud de la fuerza por el brazo de palanca de la fuerza.



La fuerza $\vec{F}_1$ en la figura 10.2 tiende a provocar la rotación en *sentido antihorario* con respecto a O, mientras que $\vec{F}_2$ ocasiona el giro en *sentido horario*. Para distinguir entre estas dos posibilidades, tenemos que elegir un sentido de giro positivo. Con la elección de que las *torcas en sentido antihorario son positivas y en sentido horario son negativas*, las torcas de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ con respecto a O son

$$\tau_1 = +F_1 l_1 \qquad \tau_2 = -F_2 l_2$$

La figura 10.2 muestra esta opción para el signo de la torca. A menudo se utiliza el símbolo $\circlearrowleft\!+$ para indicar nuestra elección del sentido de rotación positivo.

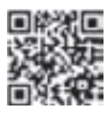
La unidad del SI de la torca es el newton-metro. En nuestro análisis acerca del trabajo y la energía llamamos joule a esta combinación. Pero la torca *no* es trabajo ni energía, y se expresa en newton-metros, *no* en joules.

La figura 10.3 muestra una fuerza $\vec{F}$ aplicada en un punto P descrito por un vector de posición $\vec{r}$ con respecto al punto elegido O. Hay tres formas de calcular la torca de esta fuerza:

1. Encontrar el brazo de palanca l y utilizar $\tau = Fl$.
2. Determinar el ángulo ϕ entre los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$; el brazo de palanca es r sen ϕ, así que $\tau = rF$ sen ϕ.
3. Representar $\vec{F}$ en términos de una componente radial F_{rad} a lo largo de la dirección de $\vec{r}$ y una componente tangencial F_{tan} en ángulos rectos, perpendiculares a $\vec{r}$. (Esto se denomina una componente tangencial porque si el cuerpo gira, el punto donde actúa la fuerza se mueve en un círculo, y esta componente es tangente a ese círculo). Entonces, $F_{tan} = F$ sen ϕ y $\tau = r(F$ sen $\phi) = F_{tan} r$.

10.3 Tres maneras de calcular la torca de la fuerza $\vec{F}$ en torno al punto O. En esta figura, $\vec{r}$ y $\vec{F}$ se encuentran en el plano de la página y el vector torca $\vec{\tau}$ apunta saliendo de la página hacia usted.

Tres maneras de calcular la torca: $\tau = Fl = rF$ sen $\phi = F_{tan} r$
$F_{tan} = F$ sen ϕ
$F_{rad} = F \cos\phi$
$\vec{\tau}$ (fuera de la página)
Línea de acción de $\vec{F}$
$l = r$ sen ϕ = brazo de palanca

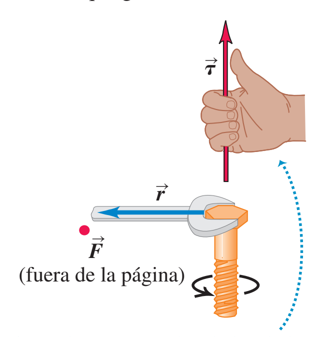


La componente F_{rad} *no* produce torca con respecto a O ya que su brazo de palanca con respecto al punto es cero (compare las fuerzas $\vec{F}_c$ en la figura 10.1 y $\vec{F}_3$ en la figura 10.2).

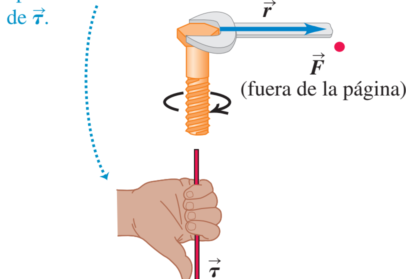
Resumiendo estas tres expresiones para la torca, tenemos

$$\tau = Fl = rF \text{ sen } \phi = F_{tan} r \qquad \text{(magnitud de la torca)} \qquad (10.2)$$

10.4 El vector torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ se dirige a lo largo del eje del tornillo, perpendicular tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{F}$. Los dedos de la mano derecha se enroscan en la dirección de la rotación que genera la torca.



Si usted apunta con los dedos de la mano derecha en la dirección de $\vec{r}$ y luego los enrosca en la dirección de $\vec{F}$, sus pulgares extendidos apuntarán en la dirección de $\vec{\tau}$.



Torca como un vector

En la sección 9.1 vimos que la velocidad angular y la aceleración angular se pueden representar como vectores; lo mismo es cierto para la torca. Para ver cómo hacerlo, observe que la cantidad rF sen ϕ en la ecuación (10.2) es la magnitud del *producto vectorial* $\vec{r} \times \vec{F}$ que se define en la sección 1.10. (Regrese y repase esa definición). Ahora se generaliza la definición de la torca de la siguiente manera: cuando una fuerza $\vec{F}$ actúa en un punto que tiene un vector de posición $\vec{r}$ con respecto a un origen O, como se muestra en la figura 10.3, la torca $\vec{\tau}$ de la fuerza con respecto a O es la cantidad *vectorial*

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{(definición del vector torca)} \qquad (10.3)$$

La torca tal como se define en la ecuación (10.2) es solo la magnitud del vector $\vec{r} \times \vec{F}$. La dirección de $\vec{\tau}$ es perpendicular tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{F}$. En particular, si tanto $\vec{r}$ como $\vec{F}$ se encuentran en un plano perpendicular al eje de rotación, como en la figura 10.3, entonces el vector torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ se dirige a lo largo del eje de rotación, con un sentido indicado por la regla de la mano derecha (figura 1.29). La figura 10.4 muestra las relaciones de dirección.

En los diagramas que implican $\vec{r}$, $\vec{F}$ y $\vec{\tau}$, es común tener uno de los vectores orientado en forma perpendicular a la página. (De hecho, por la naturaleza misma del producto cruz, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ *debe* ser perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$). Utilizaremos un punto (•) para representar un vector que apunta hacia afuera de la página (véase la figura 10.3) y una cruz (×) para representar un vector que apunta hacia adentro de la página.

En las siguientes secciones, por lo general, nos interesará la rotación de un cuerpo alrededor de un eje orientado en una dirección constante determinada. En ese caso, solo la componente de la torca a lo largo de ese eje es de interés, y con frecuencia la llamamos la componente de la torca con respecto al *eje* especificado.

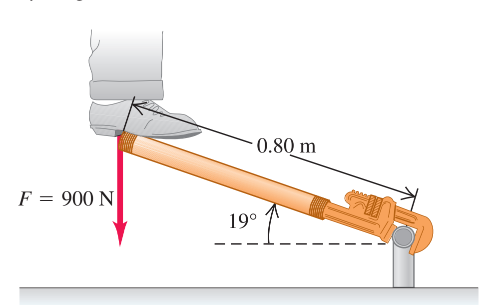
Ejemplo 10.1 Aplicación de una torca



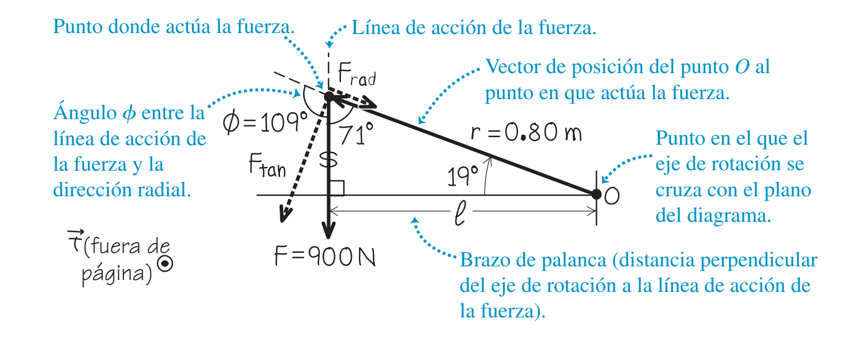
Para aflojar una junta de tubería, un plomero aficionado ensarta un pedazo de tubo (una "extensión") en el mango de su llave. Se coloca de pie en el extremo del tubo, aplicando todo su peso de 900 N en un punto a 0.80 m del centro de la junta (figura 10.5*a*). El mango de la llave y la extensión forman un ángulo de 19° con la horizontal. Encuentre la magnitud y dirección de la torca que se aplica en torno al centro de la junta.

10.5 *a*) Un plomero aficionado intenta aflojar una junta de tubería colocándose de pie sobre una "extensión". *b*) Diagrama vectorial para encontrar la torca con respecto a O.

a) Diagrama de la situación



b) Diagrama de cuerpo libre



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 10.5*b* muestra los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ y el ángulo entre ellos ($\phi = 109°$). La ecuación (10.1) o (10.2) nos indicará la magnitud de la torca. La regla de la mano derecha con la ecuación (10.3), $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, nos indica la dirección de la torca.

EJECUTAR: Para utilizar la ecuación (10.1), primero se calcula el brazo de palanca *l*. Como se muestra en la figura 10.5*b*,

$$l = r \text{ sen } \phi = (0.80 \text{ m}) \text{ sen } 109° = (0.80 \text{ m}) \text{ sen } 71° = 0.76 \text{ m}$$

Entonces, la ecuación (10.1) nos dice que la magnitud de la torca es

$$\tau = Fl = (900 \text{ N})(0.76 \text{ m}) = 680 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Se obtiene el mismo resultado de la ecuación (10.2):

$$\tau = rF \text{ sen } \phi = (0.80 \text{ m})(900 \text{ N})(\text{sen } 109°) = 680 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Alternativamente, podemos encontrar F_{tan}, la componente tangencial de $\vec{F}$ que actúa perpendicular a $\vec{r}$. La figura 10.5*b* muestra que esta componente se encuentra en un ángulo de 109° − 90° = 19° de $\vec{F}$, de modo que $F_{tan} = F \text{ sen } \phi = F(\cos 19°) = (900 \text{ N})(\cos 19°) = 851$ N. Entonces, de acuerdo con la ecuación 10.2,

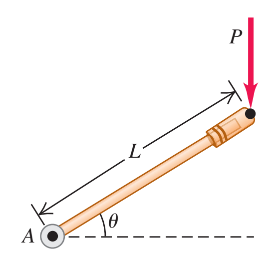
$$\tau = F_{tan}\, r = (851 \text{ N})(0.80 \text{ m}) = 680 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Doble los dedos de la mano derecha de la dirección de $\vec{r}$ (en el plano de la figura 10.5*b*, hacia la izquierda y hacia arriba) a la dirección de $\vec{F}$ (verticalmente hacia abajo). Entonces su dedo pulgar derecho apunta hacia afuera del plano de la figura: esta es la dirección de $\vec{\tau}$.

EVALUAR: Para comprobar la torca $\vec{\tau}$, observe que la fuerza en la figura 10.5 tiende a producir una rotación en sentido antihorario en torno a *O*. Si enrosca los dedos de su mano derecha en dirección antihoraria, el pulgar apunta hacia afuera del plano de la figura 10.5, que es de hecho la dirección de la torca.

Evalúe su comprensión de la sección 10.1 La figura muestra una fuerza *P* que se aplica a un extremo de una palanca de longitud *L*. ¿Cuál es la magnitud de la torca de esta fuerza con respecto al punto *A*? **i.** *PL* sen θ; **ii.** *PL* cos θ; **iii.** *PL* tan θ.





10.2 Torca y aceleración angular de un cuerpo rígido

Ahora estamos listos para desarrollar la relación fundamental de la dinámica rotacional de un cuerpo rígido. Vamos a demostrar que la aceleración angular de un cuerpo rígido que gira es directamente proporcional a la suma de las componentes de la torca a lo largo del eje de rotación. El factor de proporcionalidad es el momento de inercia.

Para desarrollar esta relación, de nuevo imagine que el cuerpo se compone de un gran número de partículas. Elegimos el eje de rotación en el eje *z*; la primer partícula tiene masa m_1 y la distancia r_1 a partir de este eje (figura 10.6). La *fuerza neta* $\vec{F}_1$ que actúa sobre esta partícula tiene una componente $F_{1,\,rad}$ a lo largo de la dirección radial, una componente $F_{1,\,tan}$ que es tangente al círculo de radio r_1 en el que la partícula se mueve conforme gira el cuerpo, y una componente F_{1z} a lo largo del eje de rotación. La segunda ley de Newton para la componente tangencial es

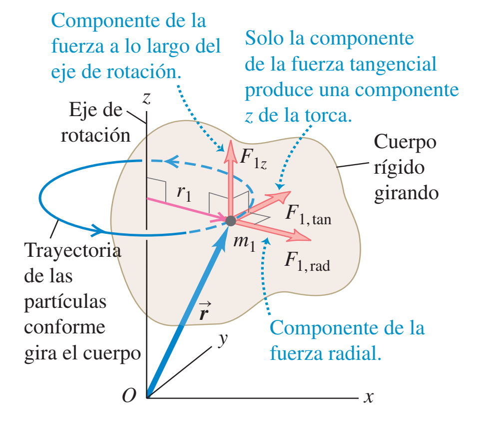
$$F_{1,\,tan} = m_1 a_{1,\,tan} \tag{10.4}$$

Podemos expresar la aceleración tangencial de la primera partícula en términos de la aceleración angular α_z del cuerpo usando la ecuación (9.14): $a_{1,\,tan} = r_1\alpha_z$. Utilizando esta relación y multiplicando ambos lados de la ecuación (10.4) por r_1 obtenemos

$$F_{1,\,tan}\, r_1 = m_1 r_1^2 \alpha_z \tag{10.5}$$

De acuerdo con la ecuación (10.2), $F_{1,\,tan}\, r_1$ es justo la *torca* de la fuerza neta con respecto al eje de rotación, igual a la componente τ_{1z} del vector torca a lo largo de dicho eje. El subíndice *z* nos recuerda que la torca afecta la rotación en torno al eje *z*, de la misma manera que el subíndice en F_{1z} nos recuerda que esta fuerza afecta el movimiento de la partícula 1 a lo largo del eje *z*.

10.6 Conforme un cuerpo rígido gira alrededor del eje *z*, una fuerza neta $\vec{F}_1$ actúa sobre una partícula del cuerpo. Solo la componente de la fuerza $F_{1,\,tan}$ puede afectar la rotación, ya que solo $F_{1,\,tan}$ ejerce una torca en torno a *O* con una componente *z* (a lo largo del eje de rotación).



Las componentes $F_{1,\,\mathrm{rad}}$ y F_{1z} no contribuyen a la torca alrededor del eje z, ya que ninguna tiende a modificar la rotación de la partícula alrededor de ese eje. Por lo tanto $\tau_{1z} = F_{1,\,\mathrm{tan}} r_1$ es la torca total que actúa sobre la partícula con respecto al eje de rotación. Además, $m_1 r_1^2$ es I_1, el momento de inercia de la partícula alrededor del eje de rotación. De esta manera, rescribimos la ecuación (10.5) como:

$$\tau_{1z} = I_1 \alpha_z = m_1 r_1^2 \alpha_z$$

Escribimos una ecuación similar para cada partícula del cuerpo y luego sumamos todas las ecuaciones:

MasteringPHYSICS

ActivPhysics 7.8: Rotoride—Dynamics Approach
ActivPhysics 7.9: Falling Ladder
ActivPhysics 7.10: Woman and Flywheel Elevator—Dynamics Approach

$$\tau_{1z} + \tau_{2z} + \cdots = I_1\alpha_z + I_2\alpha_z + \cdots = m_1 r_1^2 \alpha_z + m_2 r_2^2 \alpha_z + \cdots$$

o

$$\sum \tau_{iz} = \left(\sum m_i r_i^2\right)\alpha_z \qquad (10.6)$$

10.7 Para aflojar o apretar un tornillo, es preciso darle una aceleración angular y, así, aplicar una torca. Esto se facilita si se usa un destornillador con un mango de radio grande, pues así se aumenta el brazo de palanca de la fuerza que aplicamos con la mano.



El miembro izquierdo de la ecuación (10.6) es la suma de todas las torcas en torno al eje de rotación que actúan sobre todas las partículas. El miembro derecho es $I = \sum m_i r_i^2$, el momento de inercia total alrededor del eje de rotación, multiplicado por la aceleración angular α_z. Observe que α_z es la misma para todas las partículas, ya que este es un cuerpo *rígido*. Así, para el cuerpo rígido como un todo, la ecuación (10.6) es el *análogo rotacional de la segunda ley de Newton*:

$$\sum \tau_z = I\alpha_z \quad \text{(análogo rotacional de la segunda ley de Newton para un cuerpo rígido)} \qquad (10.7)$$

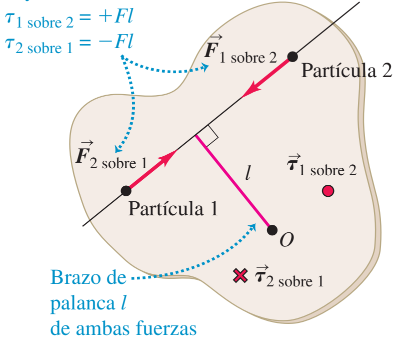
Así como la segunda ley de Newton dice que la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual a la masa de la partícula multiplicada por su aceleración, la ecuación (10.7) dice que la torca neta que actúa sobre un cuerpo rígido es igual al momento de inercia del cuerpo alrededor del eje de rotación multiplicado por su aceleración angular (figura 10.7).

Observe que como en nuestra deducción supusimos que la aceleración angular α_z es la misma para todas las partículas del cuerpo, la ecuación (10.7) *solo* es válida para cuerpos *rígidos*. Por lo que esta ecuación no se aplica a un tanque de agua que gira o a un remolino de aire, donde la aceleración angular es diferente para diferentes partes. Además, como en la deducción utilizamos la ecuación (9.14), $a_{\mathrm{tan}} = r\alpha_z$, α_z debe medirse en rad/s^2.

La torca que actúa sobre cada partícula se debe a la fuerza neta que actúa sobre esa partícula, la cual es la suma vectorial de las fuerzas externas e internas (véase la sección 8.2). De acuerdo con la tercera ley de Newton, las fuerzas *internas* que cualquier par de partículas del cuerpo rígido ejercen una sobre la otra son iguales y opuestas (figura 10.8). Si estas fuerzas actúan a lo largo de la línea que une las dos partículas, sus brazos de palanca con respecto a cualquier eje también serán iguales. Así, las torcas para estas dos partículas son iguales y opuestas, y suman cero. De hecho, *todas* las torcas internas suman cero, así que la suma $\sum \tau_z$ en la ecuación (10.7) incluye solo las torcas de las fuerzas *externas*.

Con frecuencia una fuerza externa importante que actúa sobre un cuerpo es su *peso*. Esta fuerza no se concentra en un solo punto, sino que actúa sobre todas las partículas del cuerpo. No obstante, resulta que si $\vec{g}$ tiene el mismo valor en todos los puntos, siempre obtenemos la torca correcta (con respecto a cualquier eje dado), si suponemos que todo el peso se concentra en el *centro de masa* del cuerpo. Demostraremos esto en el capítulo 11, pero mientras tanto lo usaremos en algunos problemas de este capítulo.

10.8 Dos partículas de un cuerpo rígido ejercen fuerzas iguales y opuestas una sobre la otra. Si estas fuerzas actúan a lo largo de la línea que une las partículas, los brazos de palanca de las fuerzas con respecto a un eje que pasa por O son iguales, y las torcas debidas a las dos fuerzas son iguales y opuestas. Solo las torcas *externas* afectan la rotación de un cuerpo.



Estrategia para resolver problemas 10.1 Dinámica rotacional de cuerpos rígidos



Nuestra estrategia para resolver problemas de dinámica rotacional es muy similar a la estrategia para resolver problemas 5.2, donde interviene la segunda ley de Newton.

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La ecuación (10.7), $\sum\tau_z = I\alpha_z$, es útil en todos los casos en que actúan torcas sobre un cuerpo rígido. En algunos casos, tal vez se prefiera un método de energía, como se hizo en la sección 9.4. Sin embargo, cuando la incógnita es una fuerza, una torca, una aceleración, una aceleración angular o un tiempo transcurrido, usar $\sum\tau_z = I\alpha_z$ casi es siempre mejor.

PLANTEAR *el problema* empleando estos pasos:

1. Elabore un diagrama de la situación e identifique el cuerpo o los cuerpos que va a analizar. Indique el eje de rotación.
2. Para cada cuerpo, dibuje un diagrama de cuerpo libre que muestre la *forma* de cada cuerpo, incluyendo todas las dimensiones y los ángulos que necesita para los cálculos de la torca. Etiquete las cantidades pertinentes con símbolos algebraicos.
3. Elija ejes de coordenadas para cada cuerpo e indique un sentido de rotación positivo (horario o antihorario) para cada cuerpo que gire. Si conoce el sentido de α_z, elíjalo como el sentido de rotación positivo.

EJECUTAR *la solución*:

1. Para cada cuerpo del problema, determine si experimenta movimiento de traslación, movimiento de rotación o ambos. Luego, aplique $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ (como en la sección 5.2), $\sum\tau_z = I\alpha_z$, o ambas al cuerpo.
2. Exprese en forma algebraica cualquier relación *geométrica* entre los movimientos de dos o más cuerpos. Un ejemplo es una cadena que se desenrolla, sin resbalar, de una polea o un volante que rueda sin deslizar (esto se analiza en la sección 10.3). Estas relaciones por lo general aparecen como relaciones entre aceleraciones lineal y/o angular.
3. Asegúrese de que el número de ecuaciones coincida con el número de incógnitas. Resuelva las ecuaciones para obtener la(s) incógnita(s).

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que los signos algebraicos de sus resultados sean lógicos. Por ejemplo, si está desenrollando hilo de un carrete, ¡sus respuestas no deberán decirnos que el carrete gira en el sentido en que el hilo se enrolla! Compruebe que cualquier resultado algebraico sea correcto para casos especiales o valores extremos de las cantidades.

Ejemplo 10.2 Cable que se desenrolla I



La figura 10.9*a* muestra la situación que analizamos en el ejemplo 9.7 usando métodos de energía. ¿Cuál es la aceleración del cable?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: No se puede utilizar el método de energía de la sección 9.4, que no implica aceleración. En vez de ello, vamos a aplicar la dinámica rotacional para encontrar la aceleración angular del cilindro (figura 10.9*b*). Después se encontrará una relación entre el movimiento del cable y el movimiento del borde del cilindro, y esta se utilizará para encontrar la aceleración del cable. El cilindro gira en sentido antihorario cuando se tira del cable, así que tomamos la rotación antihoraria como positiva. La fuerza neta sobre el cilindro debe ser cero debido a que su centro de masa permanece en reposo. La fuerza F ejercida por el cable produce una torca alrededor del eje de rotación. El peso (magnitud Mg) y la fuerza normal (magnitud n) ejercida por los cojinetes del cilindro *no* producen torca alrededor del eje de rotación, ya que ambos actúan a lo largo de rectas que pasan por dicho eje.

EJECUTAR: El brazo de palanca de F es igual al radio $R = 0.060$ m del cilindro, así que la torca es $\tau_z = FR$. (Esta torca es positiva porque tiende a producir una rotación antihoraria). De acuerdo con la tabla 9.2, caso f), el momento de inercia del cilindro en torno al eje de rotación es $I = \frac{1}{2}MR^2$. Por lo tanto, la ecuación (10.7) nos indica que

$$\alpha_z = \frac{\tau_z}{I} = \frac{FR}{MR^2/2} = \frac{2F}{MR} = \frac{2(9.0\text{ N})}{(50\text{ kg})(0.060\text{ m})} = 6.0\text{ rad/s}^2$$

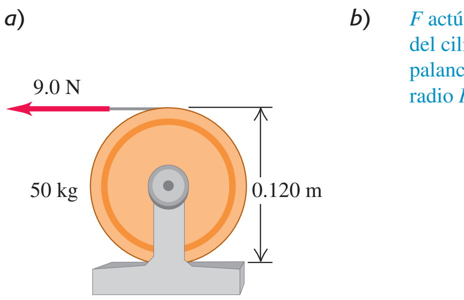
(Podemos agregar “rad” a nuestro resultado porque los radianes son cantidades adimensionales).

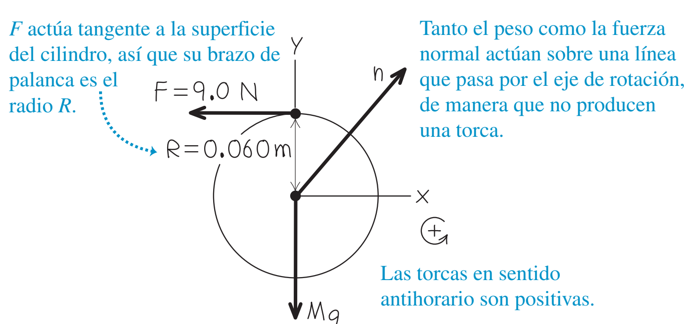
Para obtener la aceleración lineal del cable, recuerde de la sección 9.3 que la aceleración de un cable que se desenrolla de un cilindro es igual a la componente tangencial de la aceleración de un punto en la superficie del cilindro donde el cable es tangente a este. Esta aceleración tangencial está dada por la ecuación (9.14):

$$a_{\tan} = R\alpha_z = (0.060\text{ m})(6.0\text{ rad/s}^2) = 0.36\text{ m/s}^2$$

EVALUAR: ¿Puede usar este resultado, junto con una ecuación del capítulo 2, para determinar la rapidez del cable después de que se ha desenrollado 2.0 m? ¿Concuerda su resultado con el del ejemplo 9.7?

10.9 *a*) Cilindro y cable. *b*) Nuestro diagrama de cuerpo libre para el cilindro.





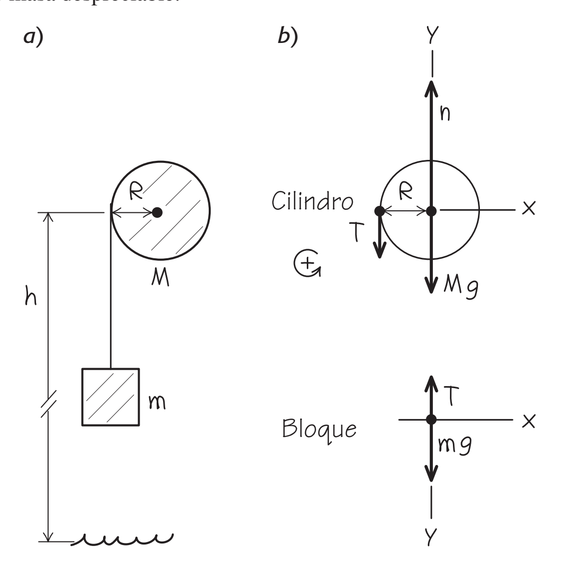


Ejemplo 10.3 Cable que se desenrolla II

En el ejemplo 9.8 (sección 9.4), ¿cuáles son la aceleración del bloque que cae y la tensión en el cable?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Aplicaremos dinámica traslacional al bloque y dinámica rotacional al cilindro. Como en el ejemplo 10.2, relacionaremos a la aceleración lineal del bloque (nuestra incógnita) con la aceleración angular del cilindro. En la figura 10.10 esbozamos la situación y dibujamos un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo. Tomamos el sentido de rotación antihorario como positivo para el cilindro, y la dirección hacia abajo de la coordenada y como positiva para el bloque.



10.10 *a*) Nuestro diagrama de la situación. *b*) Nuestros diagramas de cuerpo libre para el cilindro y el bloque. Suponemos que el cable tiene masa despreciable.

EJECUTAR: La segunda ley de Newton aplicada al bloque da

$$\sum F_y = mg + (-T) = ma_y$$

Para el cilindro, la única torca alrededor de su eje es la debida a la tensión del cable T. Por lo tanto, al aplicar la ecuación (10.7) se obtiene

$$\sum \tau_z = RT = I\alpha_z = \tfrac{1}{2}MR^2\alpha_z$$

Como en el ejemplo 10.2, la aceleración del cable es igual a la aceleración tangencial de un punto en el borde del cilindro. De acuerdo con la ecuación (9.14), es $a_y = a_{\tan} = R\alpha_z$. Usamos esto para sustituir $R\alpha_z$ con a_y en la ecuación anterior del cilindro y después dividimos entre . El resultado es $T = \frac{1}{2}Ma_y$. Ahora sustituimos esta expresión para T en la segunda ley de Newton en el caso del bloque y despejamos la aceleración a_y:

$$mg - \tfrac{1}{2}Ma_y = ma_y$$

$$a_y = \frac{g}{1 + M/2m}$$

Para encontrar la tensión del cable T, sustituimos nuestra expresión para a_y en la ecuación del bloque:

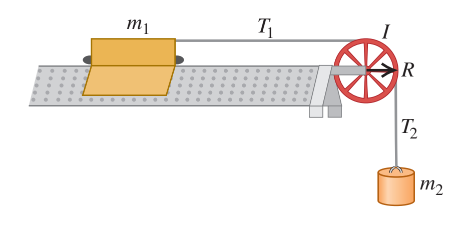
$$T = mg - ma_y = mg - m\left(\frac{g}{1 + M/2m}\right) = \frac{mg}{1 + 2m/M}$$

EVALUAR: La aceleración es positiva (en la dirección hacia abajo) y menor que g, como debería ser ya que el cable está frenando al bloque. La tensión en el cable *no* es igual al peso mg del bloque; si así fuera, el objeto no se podría acelerar.

Revisemos algunos casos específicos. Cuando M es mucho mayor que m, la tensión es casi igual a mg, y la aceleración, en consecuencia, es mucho menor que g. Cuando M es cero, $T = 0$ y $a_y = g$; el objeto cae libremente. Si el objeto parte del reposo ($v_{0y} = 0$) a una altura h sobre el piso, su velocidad en y cuando golpea al piso está dada por $v_y{}^2 = v_{0y}{}^2 + 2a_yh = 2a_yh$, así que

$$v_y = \sqrt{2a_yh} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

Este es el mismo resultado que obtuvimos usando consideraciones de energía en el ejemplo 9.8.



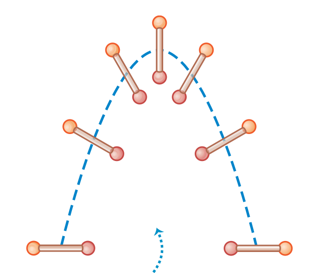
Evalúe su comprensión de la sección 10.2 La figura muestra un deslizador de masa m_1 que se mueve sin fricción sobre un riel horizontal de aire. Está sujeto a un objeto de masa m_2 con una cuerda de masa despreciable. La polea tiene radio R y momento de inercia I en torno a su eje de rotación. Cuando el objeto colgante se suelta, acelera hacia abajo, el deslizador acelera a la derecha y la cuerda hace girar la polea sin deslizarse ni estirarse. Ordene, de mayor a menor, las magnitudes de las siguientes fuerzas que actúan durante el movimiento. **i.** La fuerza de tensión (magnitud T_1) en la parte horizontal de la cuerda; **ii.** la fuerza de tensión (magnitud T_2) en la parte vertical de la cuerda; **iii.** el peso m_2g del objeto colgante.

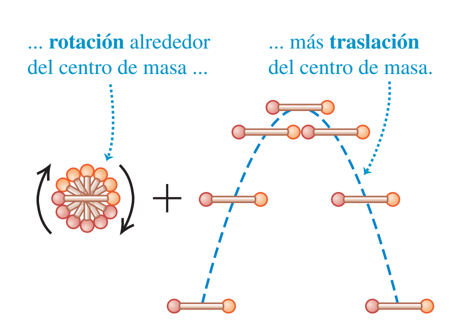
10.3 Rotación de un cuerpo rígido sobre un eje móvil

Podemos extender nuestro análisis de la dinámica del movimiento de rotación a algunos casos en los que se mueve el eje de rotación. Cuando esto ocurre, el movimiento del cuerpo es de **traslación y rotación combinados**. La clave para entender estas situaciones es la siguiente: cada posible movimiento de un cuerpo rígido puede repre-

sentarse como una combinación de *movimiento de traslación del centro de masa* y *de rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa*. Esto se cumple aun si el centro de masa se acelera, de modo que no está en reposo en ningún marco inercial. La figura 10.11 ilustra esto para el movimiento de un bastón que se lanza: el centro de masa del bastón sigue una parábola, como si el bastón fuera una partícula situada en el centro de masa. Otros ejemplos de movimientos de traslación y de rotación combinados son una pelota que rueda cuesta abajo y un yoyo que se desenrolla al final de una cuerda.

10.11 El movimiento de un cuerpo rígido es una combinación de traslación del centro de masa y rotación alrededor de ese centro.





Traslación y rotación combinadas: Relaciones de energía

Está más allá del alcance de este libro demostrar que el movimiento de un cuerpo rígido siempre puede dividirse en movimientos independientes de traslación del centro de masa y de rotación alrededor del centro de masa. Pero podemos comprobar que esto es cierto para la *energía cinética* de un cuerpo rígido con movimiento tanto de traslación como de rotación. En este caso, la energía cinética del cuerpo es la suma de una parte $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$ asociada con el movimiento del centro de masa y una parte $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$ asociada con la rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa:

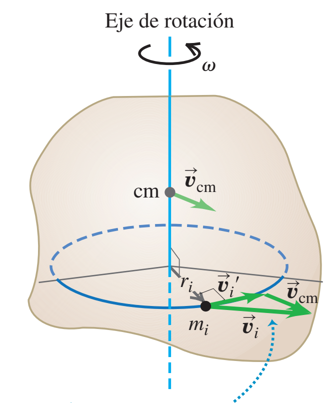
$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \qquad (10.8)$$

(cuerpo rígido con traslación y rotación)

Para demostrar esta relación, imaginamos otra vez que el cuerpo rígido se compone de partículas. Consideremos una partícula representativa de masa m_i, como se muestra en la figura 10.12. La velocidad $\vec{v}_i$ de esta partícula respecto de un marco inercial es la suma vectorial de la velocidad del centro de masa $\vec{v}_{cm}$ y la velocidad $\vec{v}_i'$ de la partícula *relativa* al centro de masa:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i' \qquad (10.9)$$

10.12 Cuerpo rígido con movimiento de traslación y de rotación.



Velocidad $\vec{v}_i$ de una partícula de un cuerpo rígido en rotación y traslación = (velocidad $\vec{v}_{cm}$ del centro de masa) + (velocidad $\vec{v}_i'$ de la partícula respecto al centro de masa).

La energía cinética K_i de esta partícula en el marco inercial es $\frac{1}{2}m_iv_i^2$, que también podemos expresar como $\frac{1}{2}m_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$. Sustituyendo la ecuación (10.9) en esto, obtenemos

$$\begin{aligned} K_i &= \tfrac{1}{2}m_i(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i') \\ &= \tfrac{1}{2}m_i(\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm} + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i' + \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_i') \\ &= \tfrac{1}{2}m_i(v_{cm}^2 + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i' + v_i'^2) \end{aligned}$$

La energía cinética total es la suma $\sum K_i$ para todas las partículas del cuerpo. Expresando los tres términos de la ecuación como sumas individuales, obtenemos

$$K = \sum K_i = \sum\left(\tfrac{1}{2}m_iv_{cm}^2\right) + \sum(m_i\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i') + \sum\left(\tfrac{1}{2}m_iv_i'^2\right)$$

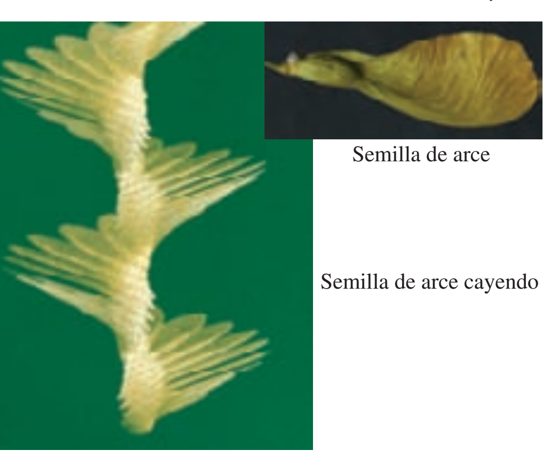
Los primeros dos términos tienen factores comunes que pueden sacarse de la sumatoria:

$$K = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_i\right)v_{cm}^2 + \vec{v}_{cm} \cdot \left(\sum m_i\vec{v}_i'\right) + \sum\left(\tfrac{1}{2}m_iv_i'^2\right) \qquad (10.10)$$

Aquí viene la recompensa a nuestro esfuerzo. En el primer término, $\sum m_i$ es la masa total M. El segundo término es cero porque $\sum m_i\vec{v}_i'$ es M multiplicada por la velocidad del centro de masa *con respecto al centro de masa*, que es cero por definición. El último término es la suma de las energías cinéticas de las partículas, calculada usando sus rapideces con respecto al centro de masa; esta es exactamente la energía cinética de rotación alrededor del centro de masa. Siguiendo los mismos pasos que nos condu-

Aplicación Combinación de movimiento de traslación y de rotación

Una semilla de arce consiste en una vaina unida a una ala aplanada, mucho más ligera. El aire alrededor del ala ralentiza la caída a aproximadamente 1 m/s y hace que la semilla gire alrededor de su centro de masa. La lenta caída de la semilla significa que una brisa puede llevar a la semilla a cierta distancia del árbol. En ausencia de viento, el centro de masa de la semilla cae directamente abajo.



jeron a la ecuación (9.17) para la energía cinética de rotación de un cuerpo rígido, podemos escribir este último término como $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$, donde I_{cm} es el momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masa, y ω es la rapidez angular. Así, la ecuación (10.10) se convierte en la ecuación (10.8):

$$K = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^{2} + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

Rodar sin resbalar

Un caso importante de traslación y rotación combinadas es el de **rodar sin resbalar**, como el movimiento de la rueda que se muestra en la figura 10.13. La rueda es simétrica, así que su centro de masa está en su centro geométrico. Visualizamos el movimiento en un marco de referencia inercial, en el cual la superficie sobre la que la rueda se desplaza está en reposo. En este marco, el punto de la rueda que toca la superficie debe estar instantáneamente *en reposo* para que no resbale. Por lo tanto, la velocidad $\vec{v}\,'_1$ del punto de contacto, con respecto al centro de masa, debe tener la misma magnitud pero dirección opuesta que la velocidad del centro de masa $\vec{v}_{cm}$. Si el radio de la rueda es R y su rapidez angular alrededor del centro de masa es ω, la magnitud de $\vec{v}\,'_1$ es $R\omega$; por lo tanto, debemos tener

$$v_{cm} = R\omega \qquad \text{(condición para rodar sin resbalar)} \qquad (10.11)$$

Como muestra la figura 10.13, la velocidad de un punto en la rueda es la suma vectorial de la velocidad del centro de masa y la velocidad del punto respecto al centro de masa. Así, mientras el punto 1 (el de contacto) está instantáneamente en reposo, el punto 3 en la parte de arriba se mueve hacia adelante con el *doble de la rapidez* del centro de masa, y los puntos 2 y 4 a los lados tienen velocidades a 45° con respecto a la horizontal.

En un instante dado, podemos pensar que la rueda gira alrededor de un "eje de rotación instantáneo" que pasa por el punto de contacto con el suelo. La velocidad angular ω es la misma para este eje que para un eje que pasa por el centro de masa; un observador en el centro de masa ve que el borde realiza el mismo número de revoluciones por segundo que el que ve un observador ubicado en el borde para el centro de masa alrededor de él. Si vemos así el movimiento de la rueda de la figura 10.13, la energía cinética de la rueda es $K = \frac{1}{2}I_1 v^2$, donde I_1 es el momento de inercia de la rueda alrededor de un eje que pasa por el punto 1. Pero, por el teorema de los ejes paralelos, ecuación (9.19), $I_1 = I_{cm} + MR^2$, donde M es la masa total de la rueda e I_{cm} es el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa. Usando la ecuación (10.11), la energía cinética de la rueda es

$$K = \tfrac{1}{2}I_1\omega^2 = \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \tfrac{1}{2}MR^2\omega^2 = \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^{2}$$

que es igual a la ecuación (10.8).

MasteringPHYSICS

ActivPhysics 7.11: Race Between a Block and a Disk

10.13 El movimiento de una rueda es la suma del movimiento de traslación del centro de masa y del movimiento de rotación de la rueda alrededor del centro de masa.

Traslación del centro de masa: masa de la rueda: velocidad $\vec{v}_{cm}$

Rotación de la rueda en torno al centro de masa: para rodar sin resbalar, la rapidez en el borde es $= v_{cm}$

Movimiento combinado

$\vec{v}_3\,' = \vec{v}_{cm}$ $\quad \vec{v}_3 = 2\vec{v}_{cm}$ $\quad \vec{v}_1\,' = -\vec{v}_{cm}$ $\quad \vec{v}_1 = 0$

La rueda está instantáneamente en reposo en el punto donde hace contacto con el suelo.

CUIDADO **Rodar sin resbalar** Observe que es importante tener en cuenta que la relación $v_{cm} = R\omega$ se cumple *únicamente* para el caso de rodar sin resbalar. Cuando un automóvil de "arrancones" comienza a moverse, los neumáticos traseros están girando con gran rapidez mientras que el vehículo casi no se mueve, así que $R\omega$ es mayor que v_{cm} (figura 10.14). Si el conductor aplica los frenos con demasiada fuerza y el coche derrapa, los neumáticos casi no girarán y $R\omega$ será menor que v_{cm}.

10.14 El humo que se eleva de los neumáticos traseros de este auto de arrancones indica que los neumáticos están resbalando sobre el pavimento, así que v_{cm} *no* es igual a $R\omega$.



Si un cuerpo rígido cambia de altura al moverse, también debemos considerar la energía potencial gravitacional. Como se analizó en la sección 9.4, la energía potencial gravitacional asociada a cualquier cuerpo extendido de masa M, rígido o no, es la misma que si sustituimos el cuerpo por una partícula de masa M situada en el centro de masa del cuerpo. Esto es,

$$U = Mgy_{cm}$$

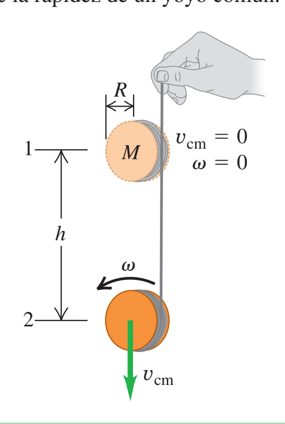
Ejemplo 10.4 Rapidez de un yoyo común

Se hace un yoyo enrollando una cuerda con masa despreciable varias veces alrededor de un cilindro sólido de masa M y radio R (figura 10.15). Se sostiene el extremo de la cuerda fija mientras se suelta el cilindro desde el reposo. La cuerda se desenrolla sin resbalar ni estirarse conforme el cilindro cae y gira. Use consideraciones de energía para calcular la rapidez v_{cm} del centro de masa del cilindro después de caer una distancia h.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El extremo superior de la cuerda está fijo, no se tira de este hacia arriba, así que su mano no efectúa trabajo sobre el sistema de la cuerda y el cilindro. Hay fricción entre la cuerda y el cilindro pero, como la cuerda no resbala sobre la superficie del cilindro, no se pierde energía mecánica. Por lo tanto, podemos usar la conservación de la energía mecánica. La energía cinética inicial del cilindro es $K_1 = 0$, y su energía cinética final K_2 está dada por la ecuación (10.8); la cuerda no tiene energía cinética porque no tiene masa. El momento de inercia es $I = \frac{1}{2}MR^2$ y, por la ecuación (9.13), $\omega = v_{cm}/R$ ya que la cuerda no resbala. Las energías potenciales son $U_1 = Mgh$ y $U_2 = 0$.

10.15 Cálculo de la rapidez de un yoyo común.



EJECUTAR: Utilizando la ecuación (10.8), la energía cinética en el punto 2 es

$$K_2 = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2$$
$$= \tfrac{3}{4}Mv_{cm}^2$$

La energía cinética es $1\frac{1}{2}$ veces mayor que si el yoyo estuviera cayendo a una rapidez v_{cm} sin girar. Dos tercios de la energía cinética total ($\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$) son de traslación y un tercio ($\frac{1}{4}Mv_{cm}^2$) es de rotación. Utilizando conservación de la energía,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$
$$0 + Mgh = \tfrac{3}{4}Mv_{cm}^2 + 0$$
$$v_{cm} = \sqrt{\tfrac{4}{3}gh}$$

EVALUAR: No se pierde ni se gana energía mecánica, así que desde el punto de vista de la energía, la cuerda no es más que una manera de convertir parte de la energía potencial gravitacional (que se libera conforme cae el cilindro) en energía cinética de rotación más que en energía cinética de traslación. Debido a que no toda la energía liberada entra en la traslación, v_{cm} es menor que la velocidad $\sqrt{2gh}$ de un objeto en caída libre desde una altura h.

Ejemplo 10.5 Carrera de cuerpos rodantes



En la demostración de una clase de física, un profesor "pone a competir" diversos cuerpos rígidos redondos, soltándolos del reposo desde arriba de un plano inclinado (figura 10.16). ¿Qué forma debe tener un cuerpo para ser el primero en llegar a la base?

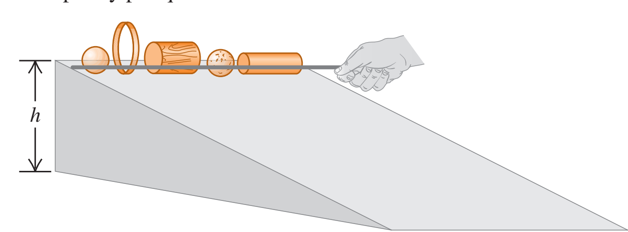
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La fricción cinética no efectúa trabajo si los cuerpos ruedan sin resbalar. También podemos despreciar los efectos de la *fricción al rodar*, introducida en la sección 5.3, si los cuerpos

Continúa

y la superficie inclinada sobre la que ruedan son rígidos. (Más adelante en esta sección explicaremos por qué). Por lo tanto, podemos utilizar conservación de la energía. Cada cuerpo parte del reposo desde arriba de una pendiente de altura h, así que $K_1 = 0$, $U_1 = Mgh$ y $U_2 = 0$. La energía cinética en la base del plano está dada por la ecuación (10.8); ya que los cuerpos ruedan sin resbalar, $\omega = v_{cm}/R$. Podemos expresar los momentos de inercia de los cuatro cuerpos redondos de la tabla 9.2, casos *f*) al *i*), como $I_{cm} = cMR^2$, donde c es un número menor que o igual a 1 que depende de la forma del cuerpo. Nuestro objetivo es hallar el valor de c que da al cuerpo la mayor rapidez v_{cm} después de que su centro de masa ha descendido una distancia vertical h.

10.16 ¿Cuál cuerpo rueda hacia abajo por la superficie inclinada más rápido y por qué?



EJECUTAR: Por la conservación de la energía,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + Mgh = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}cMR^2\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 + 0$$

$$Mgh = \tfrac{1}{2}(1 + c)Mv_{cm}^2$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + c}}$$

EVALUAR: Para un valor dado de c, la rapidez v_{cm} una vez que se ha descendido una distancia h *no depende* de la masa M del cuerpo ni de su radio R. *Todos* los cilindros sólidos uniformes $\left(c = \frac{1}{2}\right)$ tienen la misma rapidez abajo, sin importar sus masas y sus radios. Todos los valores de c nos indican que el orden de llegada para los cuerpos uniformes será el siguiente: **1.** cualquier esfera sólida $\left(c = \frac{2}{5}\right)$, **2.** cualquier cilindro sólido $\left(c = \frac{1}{2}\right)$, **3.** cualquier esfera hueca de pared delgada $\left(c = \frac{2}{3}\right)$, y **4.** cualquier cilindro hueco de pared delgada $(c = 1)$. Los cuerpos con c pequeña siempre vencen a los cuerpos con c grande porque menos de su energía cinética se dedica a la rotación y más a la traslación.

Traslación y rotación combinadas: Dinámica

También podemos analizar los movimientos de traslación y de rotación combinados de un cuerpo rígido desde la perspectiva de la dinámica. En la sección 8.5 mostramos que, para un cuerpo de masa total M, la aceleración $\vec{a}_{cm}$ del centro de masa es igual a la de una masa puntual M sobre la que actúan todas las fuerzas externas a las que está sujeto el cuerpo:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \qquad (10.12)$$

El movimiento de rotación alrededor del centro de masa se describe mediante el análogo rotacional de la segunda ley de Newton, ecuación (10.7):

$$\sum \tau_z = I_{cm}\alpha_z \qquad (10.13)$$

10.17 El eje de una rueda de bicicleta pasa por el centro de masa de la rueda y es un eje de simetría. Por lo tanto, la rotación de la rueda está descrita por la ecuación (10.13), suponiendo que la bicicleta no dé la vuelta ni se incline hacia un lado (lo que alteraría la orientación del eje).



donde I_{cm} es el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa y $\sum \tau_z$ incluye todas las torcas externas con respecto a este eje. No es evidente de inmediato que la ecuación (10.13) sea aplicable al movimiento de un cuerpo rígido en traslación; después de todo, nuestra deducción de $\sum \tau_z = I\alpha_z$ en la sección 10.2 supuso que el eje de rotación era estacionario. Pero, la ecuación (10.13) es válida *aun si el eje de rotación se mueve*, siempre y cuando se cumplan las siguientes dos condiciones:

1. El eje que pasa por el centro de masa debe ser un eje de simetría.
2. El eje no debe cambiar de dirección.

Estas condiciones se satisfacen en muchos tipos de rotación (figura 10.17). Observe que, en general, este eje de rotación móvil *no* está en reposo en un marco de referencia inercial.

Ahora podemos resolver problemas de dinámica donde intervengan cuerpos rígidos con movimientos de traslación y de rotación simultáneos, suponiendo que el eje de rotación satisface las dos condiciones anteriores. La estrategia de resolución de problemas 10.1 (sección 10.2) es igualmente útil aquí, y le recomendamos repasarla. Tenga presente que, si un cuerpo tiene movimientos de traslación y de rotación al mismo tiempo, necesitamos dos ecuaciones de movimiento independientes *para el mismo cuerpo*. Una de estas, la ecuación (10.12), describe la traslación del centro de masa. La otra, ecuación (10.13), describe la rotación alrededor del eje que pasa por el centro de masa.



Ejemplo 10.6 Aceleración de un yoyo común

Para el yoyo común del ejemplo 10.4 (figura 10.18*a*), calcule la aceleración hacia abajo del cilindro y la tensión en la cuerda.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 10.18*b* es un diagrama de cuerpo libre del yoyo, donde se indican las direcciones de las coordenadas positivas. Nuestras incógnitas son $a_{\text{cm-}y}$ y T. Usaremos la ecuación (10.12) para el movimiento de traslación del centro de masa y la ecuación (10.13) para el movimiento de rotación alrededor del centro de masa. También utilizaremos la ecuación (10.11), que indica que la cuerda se desenrolla sin resbalar. Como en el ejemplo 10.4, el momento de inercia del yoyo para un eje que pasa por su centro de masa es $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2$.

EJECUTAR: A partir de la ecuación (10.12),

$$\sum F_y = Mg + (-T) = Ma_{\text{cm-}y} \qquad (10.14)$$

De acuerdo con la ecuación (10.13),

$$\sum \tau_z = TR = I_{\text{cm}}\alpha_z = \tfrac{1}{2}MR^2\alpha_z \qquad (10.15)$$

Según la ecuación (10.11), $v_{\text{cm-}z} = R\omega_z$; la derivada de esta expresión con respecto al tiempo es

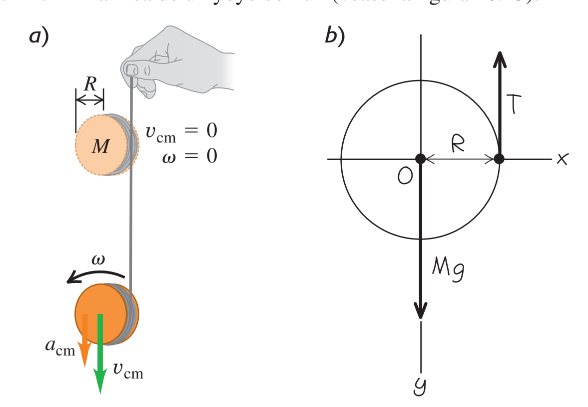
$$a_{\text{cm-}y} = R\alpha_z \qquad (10.16)$$

Ahora usamos la ecuación (10.16) para eliminar α_z de la ecuación (10.15) y resolvemos las ecuaciones (10.14) y (10.15) simultáneamente para obtener T y $a_{\text{cm-}y}$. Los resultados son

$$a_{\text{cm-}y} = \tfrac{2}{3}g \qquad T = \tfrac{1}{3}Mg$$

EVALUAR: La cuerda detiene la caída del yoyo, pero no lo suficiente para detenerlo por completo. Por lo tanto, $a_{\text{cm-}y}$ es menor que el valor de g de caída libre y T es menor que el peso Mg del yoyo.

10.18 Dinámica de un yoyo común (véase la figura 10.15).





Ejemplo 10.7 Aceleración de una esfera rodante

Una bola de bolos sólida rueda sin resbalar bajando por una rampa que está inclinada un ángulo β con la horizontal (figura 10.19*a*). ¿Qué aceleración tiene la bola y cuál es la magnitud de la fuerza de fricción sobre esta? Trate la bola como esfera sólida uniforme, despreciando los agujeros.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El diagrama de cuerpo libre de la figura 10.19*b* muestra que solo la fuerza de fricción ejerce una torca en torno al centro de masa. Nuestras incógnitas son la aceleración $a_{\text{cm-}x}$ del centro de masa de la bola y la magnitud f de la fuerza de fricción. (Ya que la bola no resbala en el punto instantáneo de contacto con la rampa, esta es una fuerza de fricción *estática*; evita el deslizamiento e imparte a la bola su aceleración angular). Usaremos las ecuaciones (10.12) y (10.13) como en el ejemplo 10.6.

EJECUTAR: El momento de inercia de una esfera sólida es $I_{\text{cm}} = \frac{2}{5}MR^2$. Las ecuaciones de movimiento son

$$\sum F_x = Mg\,\text{sen}\,\beta + (-f) = Ma_{\text{cm-}x} \qquad (10.17)$$

$$\sum \tau_z = fR = I_{\text{cm}}\alpha_z = \left(\tfrac{2}{5}MR^2\right)\alpha_z \qquad (10.18)$$

Si la bola rueda sin resbalar, como en el ejemplo 10.6, se usa $a_{\text{cm-}x} = R\alpha_z$ para eliminar α_z de la ecuación (10.18):

$$fR = \tfrac{2}{5}MRa_{\text{cm-}x}$$

Esta ecuación y la (10.17) son dos ecuaciones para dos incógnitas, $a_{\text{cm-}x}$ y f. Despejamos f de la ecuación (10.17), y la sustituimos en la ecuación anterior para eliminar f y luego despejamos $a_{\text{cm-}x}$:

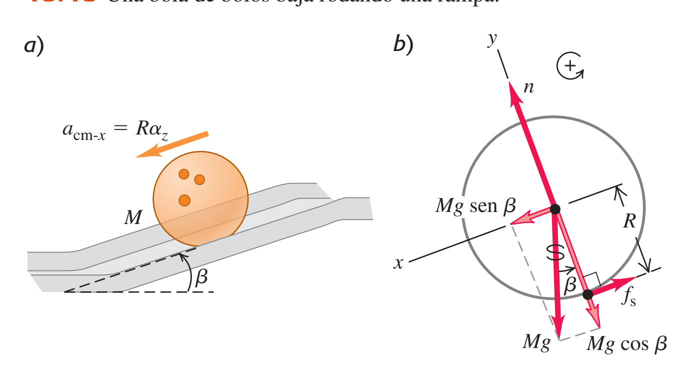
$$a_{\text{cm-}x} = \tfrac{5}{7}g\,\text{sen}\,\beta$$

Por último, sustituimos esto en la ecuación (10.17) y despejamos f:

$$f = \tfrac{2}{7}Mg\,\text{sen}\,\beta$$

Continúa

10.19 Una bola de bolos baja rodando una rampa.

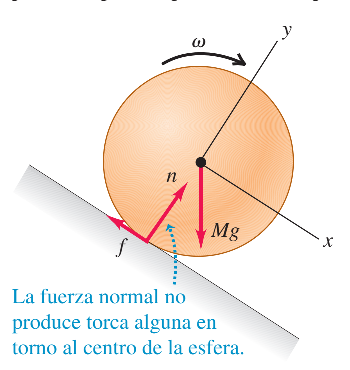


EVALUAR: La aceleración de la pelota es exactamente $\frac{5}{7}$ de la de un objeto que se *desliza* por la pendiente sin fricción. Si la bola desciende una distancia vertical h a medida que rueda por la rampa, su desplazamiento a lo largo de la rampa es $h/\text{sen}\beta$. Se puede demostrar que la velocidad de la bola en la parte inferior de la rampa es $v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$, lo mismo que nuestro resultado del ejemplo 10.5 con $c = \frac{2}{5}$.

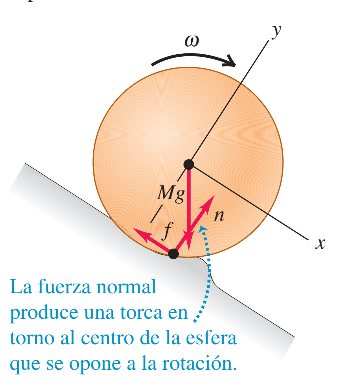
Si la bola se hiciera rodar *cuesta arriba* sin resbalar, la fuerza de fricción aún estaría dirigida hacia arriba como se muestra en la figura 10.19*b*. ¿Sabe usted por qué?

10.20 Rodamiento descendente sobre *a*) una superficie perfectamente rígida y *b*) una superficie deformable. En el inciso *b*) la deformación se muestra muy exagerada.

a) Esfera perfectamente rígida que baja rodando por una superficie perfectamente rígida



b) Esfera rígida que rueda sobre una superficie deformable



Fricción por rodamiento

En el ejemplo 10.5 dijimos que podemos despreciar la fricción por rodamiento, si tanto el cuerpo como la superficie sobre la que rueda son perfectamente rígidos. En la figura 10.20*a* una esfera perfectamente rígida baja rodando una pendiente perfectamente rígida. La línea de acción de la fuerza normal pasa por el centro de la esfera, así que la torca es cero; no hay deslizamiento en el punto de contacto, así que la fricción no efectúa trabajo. La figura 10.20*b* muestra una situación más realista donde la superficie "se amontona" delante de la esfera y esta rueda en una zanja poco profunda. Debido a estas deformaciones, las fuerzas de contacto sobre la esfera ya no actúan en un solo punto, sino en un área, concentrándose en el frente de la esfera como se indica. En consecuencia, la fuerza normal ejerce ahora una torca que se opone a la rotación. Además, hay cierto deslizamiento de la esfera en la superficie debido a la deformación, causando pérdida de energía mecánica. La combinación de estos dos efectos es el fenómeno de *fricción por rodamiento*, que también ocurre si el cuerpo que rueda es deformable, como el neumático de un automóvil. Es común que el cuerpo que rueda y la superficie tengan la suficiente rigidez como para despreciar la fricción por rodamiento, y esto es lo que hemos hecho en los ejemplos de la sección.

Evalúe su comprensión de la sección 10.3 Suponga que el cilindro sólido que utilizó como yoyo en el ejemplo 10.6 se reemplaza con un cilindro hueco de igual masa y radio. *a*) La aceleración del yoyo **i.** ¿aumentará, **ii.** disminuirá o **iii.** permanecerá igual? *b*) La tensión en la cuerda **i.** ¿aumentará, **ii.** disminuirá o **iii.** permanecerá igual?



10.4 Trabajo y potencia en movimiento de rotación

Cuando pedaleamos una bicicleta, aplicamos fuerzas a un cuerpo en rotación y efectuamos trabajo sobre él. Algo similar ocurre en otras situaciones de la vida real, como el eje de un motor que gira, e impulsa una herramienta de potencia o un vehículo. Podemos expresar el trabajo en términos de la torca y del desplazamiento angular.

Suponga que una fuerza tangencial $\vec{F}_{tan}$ actúa en el borde de un disco con eje de rotación, por ejemplo, una niña que corre empujando un carrusel común (figura 10.21*a*). El disco gira un ángulo infinitesimal $d\theta$ alrededor de un eje fijo durante un tiempo infi-

nitesimal dt (figura 10.21b). El trabajo dW efectuado por la fuerza $\vec{F}_{\tan}$ mientras que un punto del borde se mueve una distancia ds es $dW = F_{\tan}\,ds$. Si $d\theta$ se mide en radianes, entonces, $ds = R\,d\theta$ y

$$dW = F_{\tan} R\, d\theta$$

Ahora $F_{\tan}R$ es la *torca* τ_z debida a la fuerza $\vec{F}_{\tan}$, así que

$$dW = \tau_z\, d\theta \qquad (10.19)$$

El trabajo total W efectuado por la torca durante un desplazamiento angular de θ_1 a θ_2 es

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z\, d\theta \qquad \text{(trabajo efectuado por una torca)} \qquad (10.20)$$

Si la torca es *constante* y el ángulo cambia en una cantidad finita $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, entonces

$$W = \tau_z(\theta_2 - \theta_1) = \tau_z \Delta\theta \quad \text{(trabajo efectuado por una torca constante)} \qquad (10.21)$$

El trabajo efectuado por una torca *constante* es el producto de la torca y del desplazamiento angular. Si la torca se expresa en (N·m) y el desplazamiento angular en radianes, el trabajo está en joules. La ecuación (10.21) es el análogo rotacional de la ecuación (6.1), $W = Fs$, y la ecuación (10.20) es el análogo de la ecuación (6.7), $W = \int F_x\, dx$, para el trabajo realizado por una fuerza en un desplazamiento rectilíneo.

Si la fuerza de la figura 10.21 tuviera una componente axial (paralela al eje de rotación) o radial (dirigida hacia el eje o alejándose de este), dicha componente no efectuaría trabajo, porque el desplazamiento del punto de aplicación solo tiene componente tangencial. Una componente de fuerza axial o radial tampoco contribuiría a la torca alrededor del eje de rotación, por lo que las ecuaciones (10.20) y (10.21) son correctas para *cualquier* fuerza, independientemente de sus componentes.

Si una torca efectúa trabajo sobre un cuerpo rígido que gira, la energía cinética experimenta un cambio en una cantidad igual a ese trabajo. Podemos demostrar esto usando exactamente el mismo procedimiento que en las ecuaciones (6.11) a (6.13) para la energía cinética de traslación de una partícula. Sea τ_z la torca *neta* sobre el cuerpo, de modo que, de acuerdo con la ecuación (10.7), $\tau_z = I\alpha_z$, suponiendo que el cuerpo es rígido y, por lo tanto, tiene momento de inercia I constante. Transformamos el integrando de la ecuación (10.20) en una integral sobre ω_z como se muestra a continuación:

$$\tau_z\, d\theta = (I\alpha_z)\, d\theta = I\frac{d\omega_z}{dt}\, d\theta = I\frac{d\theta}{dt}\, d\omega_z = I\omega_z\, d\omega_z$$

Puesto que τ_z es la torca neta, la integral de la ecuación (10.20) es el trabajo *total* efectuado sobre el cuerpo rígido en rotación. Así, la ecuación se convierte en

$$W_{\text{tot}} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega_z\, d\omega_z = \tfrac{1}{2}I\omega_2^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_1^2 \qquad (10.22)$$

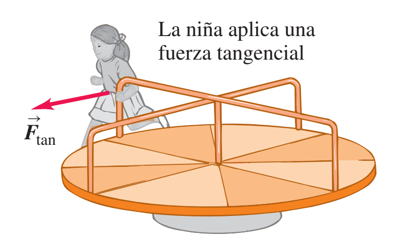
El cambio de energía cinética de rotación de un cuerpo *rígido* es igual al trabajo efectuado por fuerzas ejercidas desde afuera del cuerpo (figura 10.22). Esta ecuación es análoga a la ecuación (6.13), el teorema trabajo-energía para una partícula.

¿Qué hay con respecto a la *potencia* asociada al trabajo efectuado por una torca sobre un cuerpo en rotación? Si dividimos ambos miembros de la ecuación (10.19) entre el intervalo dt durante el que se da el desplazamiento angular:

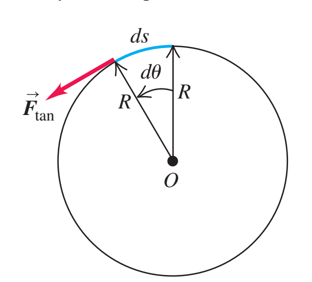
$$\frac{dW}{dt} = \tau_z \frac{d\theta}{dt}$$

10.21 Una fuerza tangencial aplicada a un cuerpo en rotación efectúa trabajo.

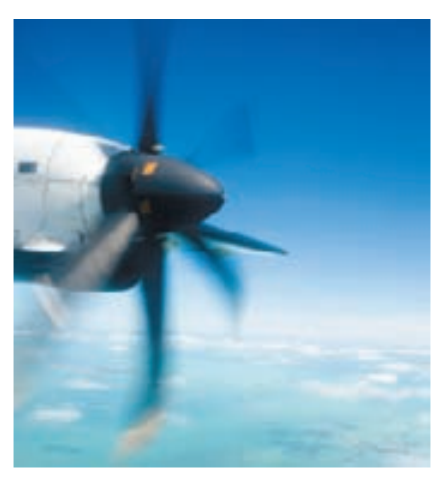
a)



b) Vista superior del carrusel



10.22 La energía cinética de rotación de una hélice de avión es igual a la suma total del trabajo realizado para que gire. Cuando está girando a una velocidad constante, el motor efectúa el trabajo positivo en la hélice y la resistencia del aire realiza trabajo negativo. Por lo tanto, el trabajo neto es cero y la energía cinética permanece constante.



Pero, dW/dt es la rapidez con que se efectúa trabajo, o *potencia* P, y $d\theta/dt$ es velocidad angular ω_z, así que

$$P = \tau_z \omega_z \tag{10.23}$$

Si una torca τ_z (con respecto al eje de rotación) actúa sobre un cuerpo que gira con velocidad angular ω_z, su potencia (rapidez con que efectúa trabajo) es el producto de τ_z y ω_z. Esto es el análogo de la relación $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ que desarrollamos en la sección 6.4 para el movimiento de partículas.



Ejemplo 10.8 Cálculo de potencia a partir de la torca

Un motor eléctrico ejerce una torca constante de 10 N·m sobre una piedra de afilar montada que tiene un momento de inercia de la piedra de 2.0 kg·m². El sistema parte del reposo. Calcule el trabajo W efectuado por el motor en 8.0 s y la energía cinética K en ese lapso. ¿Qué potencia media P_{med} desarrolló el motor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La única torca que actúa se debe al motor. Puesto que la torca es constante, la piedra de afilar tiene una aceleración angular constante α_z. Usaremos la ecuación (10.7) para calcular el valor de α_z, y luego usaremos esto en las ecuaciones cinemáticas de la sección 9.2 para calcular el ángulo $\Delta\theta$ que la piedra de afilar gira en 8.0 s y su velocidad angular final ω_z. Podemos calcular W, K y P_{med}.

EJECUTAR: Tenemos $\sum \tau_z = 10\ \text{N}\cdot\text{m}$ e $I = 2.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, de manera que $\sum \tau_z = I\alpha_z$ produce $\alpha_z = 5.0\ \text{rad/s}^2$. Según la ecuación (9.11),

$$\Delta\theta = \tfrac{1}{2}\alpha_z t^2 = \tfrac{1}{2}(5.0\ \text{rad/s}^2)(8.0\ \text{s})^2 = 160\ \text{rad}$$

$$W = \tau_z \Delta\theta = (10\ \text{N}\cdot\text{m})(160\ \text{rad}) = 1600\ \text{J}$$

De acuerdo con las ecuaciones (9.7) y (9.17),

$$\omega_z = \alpha_z t = (5.0\ \text{rad/s}^2)(8.0\ \text{s}) = 40\ \text{rad/s}$$

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega_z^2 = \tfrac{1}{2}(2.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(40\ \text{rad/s})^2 = 1600\ \text{J}$$

La potencia media es el trabajo realizado dividido entre el intervalo de tiempo:

$$P_{med} = \frac{1600\ \text{J}}{8.0\ \text{s}} = 200\ \text{J/s} = 200\ \text{W}$$

EVALUAR: La energía cinética inicial era cero, de manera que el trabajo efectuado W debe ser igual a la energía cinética final K [ecuación (10.22)]. Así es como lo calculamos. Podemos comprobar nuestro resultado $P_{med} = 200$ W considerando la potencia *instantánea*, $P = \tau_z\omega_z$. Dado que ω_z aumenta de forma continua, P también aumenta continuamente; este valor aumenta de cero en $t = 0$ a (10 N·m)(40 rad/s) = 400 W en $t = 8.0$ s. Tanto la velocidad angular como la potencia *media* aumentan *uniformemente* con el tiempo, así que la potencia *media* es la mitad de este valor máximo, es decir, 200 W.

Evalúe su comprensión de la sección 10.4 Se aplican torcas iguales a dos cilindros distintos, uno de los cuales tiene un momento de inercia dos veces mayor que el del otro. Cada cilindro está inicialmente en reposo. Después de una rotación completa, ¿cuál cilindro tiene mayor energía cinética? **i.** El cilindro con el mayor momento de inercia; **ii.** el cilindro con el menor momento de inercia; **iii.** ambos cilindros tienen la misma energía cinética.

10.5 Momento angular

Todas las cantidades rotacionales que hemos estudiado en los capítulos 9 y 10 son análogas a alguna cantidad en el movimiento de traslación de una partícula. El análogo del *momento lineal* de una partícula en el movimiento de rotación es el **momento angular**, una cantidad vectorial denotada con $\vec{L}$. Su relación con el momento $\vec{p}$ (que con frecuencia llamaremos *momento lineal* por claridad) es exactamente la misma relación que hay entre la torca y la fuerza, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$. Para una partícula de masa constante m, velocidad $\vec{v}$, momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$, y vector de posición $\vec{r}$ con respecto al origen O de un marco inercial, el momento angular $\vec{L}$ se define como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad \text{(momento angular de una partícula)} \tag{10.24}$$

El valor de $\vec{L}$ depende del origen O elegido, ya que en él interviene el vector de posición de la partícula respecto al origen. Las unidades del momento angular son $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.

En la figura 10.23, una partícula se mueve en el plano xy; se muestran su vector de posición $\vec{r}$ y su momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$. El vector momento angular $\vec{L}$ es perpendicular al plano xy. La regla de la mano derecha para productos vectoriales nos indica que su dirección está a lo largo del eje $+z$, y su magnitud es

$$L = mvr \operatorname{sen}\phi = mvl \tag{10.25}$$

donde l es la distancia perpendicular desde la línea de $\vec{v}$ a O. Esta distancia hace las veces de "brazo de palanca" para el vector momento lineal.

Si una fuerza neta $\vec{F}$ actúa sobre una partícula, cambian su velocidad y su momento lineal, y también puede cambiar su momento angular. Podemos demostrar que la *rapidez de cambio* del momento angular es igual a la torca de la fuerza neta. Derivamos la ecuación (10.24) con respecto al tiempo usando la regla de la derivada de un producto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}\right) + \left(\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = (\vec{v} \times m\vec{v}) + (\vec{r} \times m\vec{a})$$

El primer término es cero porque contiene el producto vectorial del vector $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ consigo mismo. En el segundo término sustituimos $m\vec{a}$ con la fuerza neta $\vec{F}$, para obtener

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \quad \text{(para una partícula sobre la que actúa una fuerza neta } \vec{F}\text{)} \tag{10.26}$$

La rapidez de cambio del momento angular de una partícula es igual a la torca de la fuerza neta que actúa sobre ella. Compare este resultado con la ecuación (8.4), la cual dice que la rapidez de cambio $d\vec{p}/dt$ del momento *lineal* de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre esta.

Momento angular de un cuerpo rígido

Podemos usar la ecuación (10.25) para calcular el momento angular total de un *cuerpo rígido* que gira en torno al eje z con rapidez angular ω. Consideremos primero una rebanada del cuerpo que está en el plano xy (figura 10.24). Cada partícula de la rebanada se mueve en un círculo centrado en el origen, y en cada instante su velocidad $\vec{v}_i$ es perpendicular a su vector de posición $\vec{r}_i$, como se indica. Por consiguiente, en la ecuación (10.25), $\phi = 90°$ para toda partícula. Una partícula de masa m_i que está a una distancia r_i de O tiene una rapidez v_i igual a $r_i\omega$. De acuerdo con la ecuación (10.25), la magnitud L_i de su momento angular es

$$L_i = m_i(r_i\omega)r_i = m_i r_i^2\omega \tag{10.27}$$

La dirección del momento angular de cada partícula, dada por la regla de la mano derecha para el producto vectorial, es sobre el eje $+z$.

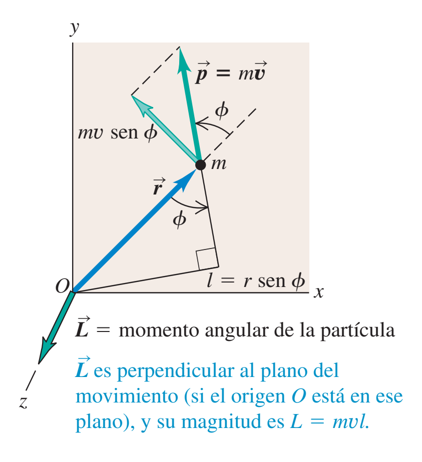
El momento angular *total* de la rebanada del cuerpo que está en el plano xy es la suma $\sum L_i$ de los momentos angulares L_i de las partículas. Haciendo la sumatoria de la ecuación (10.27), tenemos

$$L = \sum L_i = \left(\sum m_i r_i^2\right)\omega = I\omega$$

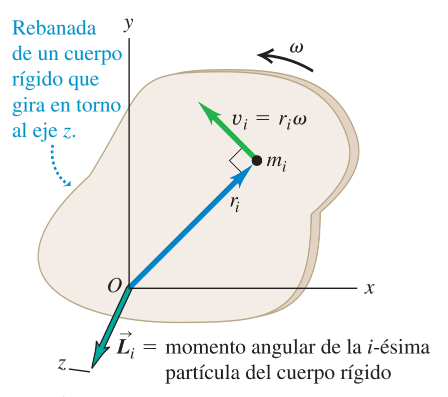
donde I es el momento de inercia de la rebanada alrededor del eje z.

Podemos efectuar este mismo cálculo para las demás rebanadas del cuerpo, todas paralelas al plano xy. Para los puntos que no están en ese plano, surge una complicación porque los vectores tienen componentes en la dirección z además de las direcciones x y y; esto da al momento angular de cada partícula una componente perpendicular al eje z. Pero *si el eje z es un eje de simetría*, las componentes perpendiculares de partículas en lados opuestos de este eje suman cero (figura 10.25). Así, cuando un cuerpo gira alrededor de un eje de simetría, su vector momento angular $\vec{L}$ queda sobre el eje de simetría y su magnitud es $L = I\omega$.

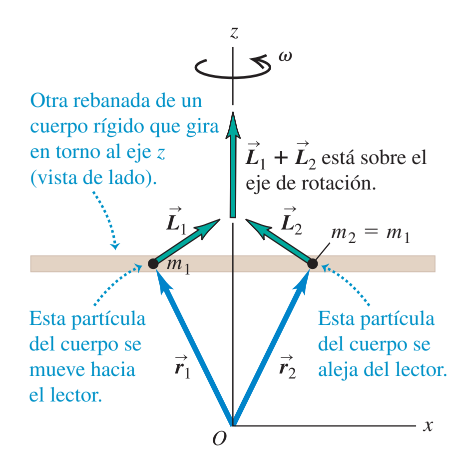
10.23 Cálculo del momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$ de una partícula de masa m que se mueve en el plano xy.



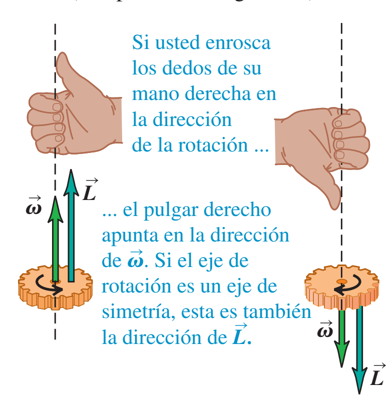
10.24 Cálculo del momento angular de una partícula de masa m_i en un cuerpo rígido que gira con rapidez angular ω. (Compare con la figura 10.23).



10.25 Dos partículas con la misma masa están situadas simétricamente a cada lado del eje de rotación de un cuerpo rígido. Aunque los vectores de momento angular $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$ de las dos partículas no están a lo largo del eje de rotación, su suma vectorial $\vec{L}_1 + \vec{L}_2$ sí lo está.



10.26 En la rotación alrededor de un eje de simetría, $\vec{\omega}$ y $\vec{L}$ on paralelos y están sobre el eje. Las direcciones de ambos vectores están dadas por la regla de la mano derecha (compare con la figura 9.5).



El vector velocidad angular $\vec{\omega}$ también está sobre el eje de rotación, como se analizó al final de la sección 9.1. Por lo tanto, para un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de simetría, $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ tienen la misma dirección (figura 10.26). Así tenemos la relación *vectorial*

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad \text{(para un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de simetría)} \qquad (10.28)$$

De acuerdo con la ecuación (10.26), la rapidez de cambio del momento angular de una partícula es igual a la torca de la fuerza neta que actúa sobre ella. Para cualquier sistema de partículas (incluidos cuerpos rígidos y no rígidos), la rapidez de cambio del momento angular *total* es igual a la suma de las torcas de todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas. Las torcas de las fuerzas *internas* suman cero si las fuerzas actúan sobre la línea que va de una partícula a otra, como en la figura 10.8, así que la suma de las torcas solo incluye las torcas de las fuerzas *externas*. (Hubo una eliminación similar cuando hablamos del movimiento del centro de masa en la sección 8.5). Si el momento angular total del sistema de partículas es $\vec{L}$ y la suma de las torcas externas es $\sum\vec{\tau}$, entonces

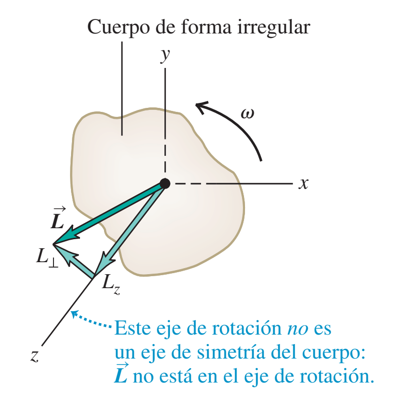
$$\sum\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \text{(para cualquier sistema de partículas)} \qquad (10.29)$$

Por último, si el sistema de partículas es un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de simetría (el eje z), entonces $L_z = I\omega_z$ e I es constante. Si el eje tiene dirección fija en el espacio, los vectores $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ solo cambian en magnitud, no de dirección. En tal caso, $dL_z/dt = I\,d\omega_z/dt = I\alpha_z$, es decir,

$$\sum \tau_z = I\alpha_z$$

que es otra vez nuestra relación básica para la dinámica de la rotación de un cuerpo rígido. Si el cuerpo *no* es rígido, I puede cambiar y, en tal caso, L cambiará aun si ω es constante. Para un cuerpo que no es rígido, la ecuación (10.29) seguirá siendo válida, pero la ecuación (10.7) no.

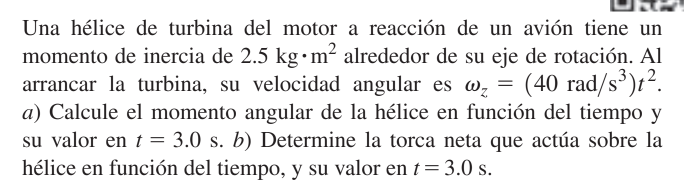
10.27 Si el eje de rotación de un cuerpo rígido no es un eje de simetría, $\vec{L}$ no está en general sobre el eje de rotación. Aun si $\vec{\omega}$ es constante, la dirección de $\vec{L}$ cambia, y se requiere una torca neta para mantener la rotación.



Si el eje de rotación *no* es un eje de simetría, el momento angular en general *no* es paralelo al eje (figura 10.27). Al girar el cuerpo, el vector momento angular $\vec{L}$ describe un cono alrededor del eje de rotación. Puesto que $\vec{L}$ cambia, debe estar actuando una torca externa neta sobre el cuerpo, aun cuando la magnitud de la velocidad angular ω sea constante. Si el cuerpo es una rueda desbalanceada de un automóvil, esta torca provendrá de la fricción en los cojinetes, que hace que estos se desgasten. "Balancear" una rueda implica distribuir la masa de modo que el eje de rotación sea un eje de simetría; entonces, $\vec{L}$ apuntará a lo largo del eje de rotación y no se requerirá una torca neta para que la rueda siga girando.

En rotación de eje fijo, solemos usar el término "momento angular del cuerpo" para referirnos solo a la *componente* de $\vec{L}$ sobre el eje de rotación del cuerpo (el eje z en la figura 10.27), con un signo positivo o negativo para indicar el sentido de rotación, igual que con la velocidad angular.

Ejemplo 10.9 Momento angular y torca



Una hélice de turbina del motor a reacción de un avión tiene un momento de inercia de 2.5 kg·m^2 alrededor de su eje de rotación. Al arrancar la turbina, su velocidad angular es $\omega_z = (40\ \text{rad/s}^3)t^2$. *a*) Calcule el momento angular de la hélice en función del tiempo y su valor en $t = 3.0$ s. *b*) Determine la torca neta que actúa sobre la hélice en función del tiempo, y su valor en $t = 3.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La hélice de una turbina gira alrededor de un eje de simetría (el eje z). Por lo tanto, el vector momento angular tiene solo una componente z, L_z, que podemos determinar a partir de la velocidad angular ω_z. Puesto que la dirección del momento angular es constante, la torca también tiene solo una componente τ_z a lo largo del eje de rotación. Usaremos la ecuación (10.28) para encontrar L_z a partir de ω_z y luego la ecuación (10.29) para calcular τ_z.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (10.28),

$$L_z = I\omega_z = (2.5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(40\ \text{rad/s}^3)t^2 = (100\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)t^2$$

(Omitimos "rad" de la respuesta porque el radián es una cantidad adimensional). En $t = 3.0$ s, $L_z = 900$ kg·m^2/s.

b) De acuerdo con la ecuación (10.29),

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = (100\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)(2t) = (200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)t$$

En $t = 3.0$ s,

$$\tau_z = (200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)(3.0\ \text{s}) = 600\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 = 600\ \text{N}\cdot\text{m}$$

EVALUAR: Para comprobar nuestro resultado de τ_z, vemos que la aceleración angular de la hélice es $\alpha_z = d\omega_z/dt = (40\ \text{rad/s}^3)(2t) = (80\ \text{rad/s}^3)t$. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (10.7), la torca que actúa sobre la hélice es $\tau_z = I\alpha_z = (2.5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(80\ \text{rad/s}^3)t = (200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)t$, lo que coincide con nuestro cálculo anterior.

Evalúe su comprensión de la sección 10.5 Una pelota está unida al extremo de una cuerda. Usted sostiene la cuerda por el otro extremo y hace girar a la pelota alrededor de su mano. *a*) Si la rapidez de la pelota es constante, ¿es constante su momento lineal $\vec{p}$? ¿Por qué? *b*) ¿Es constante su momento angular $\vec{L}$? ¿Por qué?

10.6 Conservación del momento angular

Acabamos de ver que el momento angular puede servir para expresar de otro modo el principio dinámico básico del movimiento de rotación. También es la base del **principio de conservación del momento angular**. Al igual que la conservación de la energía y del momento lineal, este principio es una ley de conservación universal, válida en todas las escalas, desde los sistemas atómicos y nucleares hasta los movimientos de las galaxias. Este principio es consecuencia directa de la ecuación (10.29): $\sum\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. Si $\sum\vec{\tau} = \mathbf{0}$, entonces $d\vec{L}/dt = \mathbf{0}$, y $\vec{L}$ es constante.

Si la torca externa neta que actúa sobre un sistema es cero, el momento angular total del sistema es constante (se conserva).

Una trapecista, un clavadista y una patinadora que realiza piruetas en la punta de un patín aprovechan este principio. Suponga que la trapecista acaba de separarse de un columpio con los brazos y las piernas extendidos, y girando en sentido antihorario alrededor de su centro de masa. Al encoger los brazos y las piernas, su momento de inercia I_{cm} con respecto a su centro de masa cambia de un valor grande I_1 a uno mucho menor I_2. La única fuerza externa que actúa sobre ella es su peso, que no tiene torca con respecto a un eje que pasa por su centro de masa. Así, su momento angular $L_z = I_{cm}\omega_z$ permanece constante, y su velocidad angular ω_z aumenta al disminuir I_{cm}. Esto es,

$$I_{1z} = I_2\omega_{2z} \qquad \text{(torca externa neta cero)} \qquad (10.30)$$

Cuando una patinadora o bailarina gira con los brazos extendidos y luego los encoge, su velocidad angular aumenta al disminuir su momento de inercia. En ambos casos, se conserva el momento angular en un sistema donde la torca externa neta es cero.

Si un sistema tiene varias partes, las fuerzas internas que esas partes ejercen entre sí provocan cambios en sus momentos angulares; pero el momento angular *total* no cambia. Por ejemplo, considere dos cuerpos A y B que interactúan entre sí pero con nadie más, como los astronautas de la sección 8.2 (véase la figura 8.8). Suponga que el cuerpo A ejerce una fuerza $\vec{F}_{A\ \text{sobre}\ B}$ sobre el cuerpo B; la torca correspondiente (con respecto al punto que elijamos) es $\vec{\tau}_{A\ \text{sobre}\ B}$. De acuerdo a la ecuación (10.29), esta torca es igual a la rapidez de cambio del momento angular de B:

$$\vec{\tau}_{A\ \text{sobre}\ B} = \frac{d\vec{L}_B}{dt}$$

Al mismo tiempo, el cuerpo B ejerce una fuerza $\vec{F}_{B\ \text{sobre}\ A}$ sobre el cuerpo A, con una torca correspondiente $\vec{\tau}_{B\ \text{sobre}\ A}$, y

$$\vec{\tau}_{B\ \text{sobre}\ A} = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$$

10.28 Un gato que cae tuerce diversas partes de su cuerpo en direcciones distintas para caer parado. En todo momento durante este proceso, el momento angular total del gato sigue siendo cero.





Video Tutor Demo



Video Tutor Demo

Por la tercera ley de Newton, $\vec{F}_{B\text{ sobre }A} = -\vec{F}_{A\text{ sobre }B}$. Además, si las fuerzas actúan en la misma línea, como en la figura 10.8, sus brazos de palanca con respecto al eje elegido son iguales. Así, las *torcas* de estas dos fuerzas son iguales y opuestas, y $\vec{\tau}_{B\text{ sobre }A} = -\vec{\tau}_{A\text{ sobre }B}$. Por lo tanto, si sumamos las dos ecuaciones anteriores, obtenemos

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} + \frac{d\vec{L}_B}{dt} = \mathbf{0}$$

o, puesto que $\vec{L}_A + \vec{L}_B$ es el momento angular *total* $\vec{L}$ del sistema,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \mathbf{0} \quad \text{(torca externa neta cero)} \tag{10.31}$$

Es decir, el momento angular total del sistema es constante. Las torcas de las fuerzas internas pueden transferir momento angular de un cuerpo al otro, pero no pueden cambiar el momento angular *total* del sistema (figura 10.28).

MasteringPHYSICS®

PhET: Torque
ActivPhysics 7.14: Ball Hits Bat

Ejemplo 10.10 Cualquiera puede bailar ballet



Un ágil profesor de física se pone de pie en el centro de una mesita giratoria y sin fricción con los brazos extendidos horizontalmente y una mancuerna de 5.0 kg en cada mano (figura 10.29). Se le pone a girar sobre un eje vertical, dando una revolución cada 2.0 s. Calcule la velocidad angular final del profesor si él pega las mancuernas a su abdomen. Su momento de inercia (sin las mancuernas) es de 3.0 kg·m^2 con los brazos extendidos, y baja a 2.2 kg·m^2 si coloca las manos en el abdomen. Las mancuernas están a 1.0 m del eje al principio y a 0.20 m al final.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: Ninguna torca externa actuará alrededor del eje vertical (z), así que L_z será constante. Utilizaremos la ecuación (10.30) para encontrar la velocidad angular final ω_{2z}. El momento de inercia del sistema es $I = I_{\text{prof}} + I_{\text{manc}}$. Tratamos a cada mancuerna como una partícula de masa m que aporta mr^2 a I_{manc}, donde r es la distancia perpendicular del eje de rotación a la mancuerna. Inicialmente, tenemos

$$I_1 = 3.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 2(5.0\ \text{kg})(1.0\ \text{m})^2 = 13\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\omega_{1z} = \frac{1\ \text{rev}}{2.0\ \text{s}} = 0.50\ \text{rev/s}$$

El momento de inercia final es

$$I_2 = 2.2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 2(5.0\ \text{kg})(0.20\ \text{m})^2 = 2.6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

De acuerdo con la ecuación (10.30), la velocidad angular final es

$$\omega_{2z} = \frac{I_1}{I_2}\omega_{1z} = \frac{13\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}{2.6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}(0.50\ \text{rev/s}) = 2.5\ \text{rev/s} = 5\omega_{1z}$$

Observe que no tuvimos que cambiar "revoluciones" a "radianes" en este cálculo. ¿Por qué?

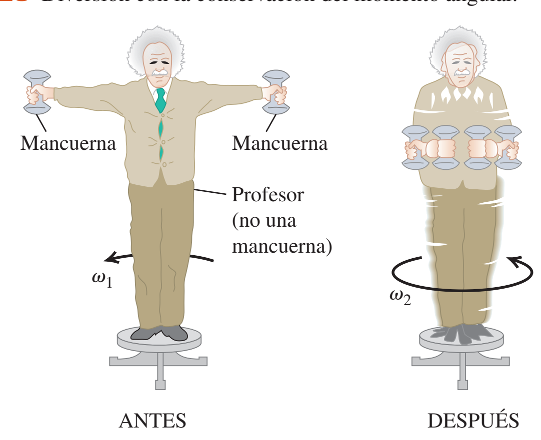
EVALUAR: El momento angular permanece constante, pero la velocidad angular aumenta por un factor de 5, de $\omega_{1z} = (0.50\ \text{rev/s})(2\pi\ \text{rad/rev}) = 3.14\ \text{rad/s}$ a $\omega_{2z} = (2.5\ \text{rev/s})(2\pi\ \text{rad/rev}) = 15.7\ \text{rad/s}$. Las energías cinéticas inicial y final son entonces

$$K_1 = \tfrac{1}{2}I_1\omega_{1z}^2 = \tfrac{1}{2}(13\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(3.14\ \text{rad/s})^2 = 64\ \text{J}$$

$$K_2 = \tfrac{1}{2}I_2\omega_{2z}^2 = \tfrac{1}{2}(2.6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(15.7\ \text{rad/s})^2 = 320\ \text{J}$$

La energía cinética quintuplicada proviene del trabajo que el profesor realizó para llevar sus brazos y las mancuernas junto al abdomen.

10.29 Diversión con la conservación del momento angular.



Ejemplo 10.11 Un "choque" rotacional

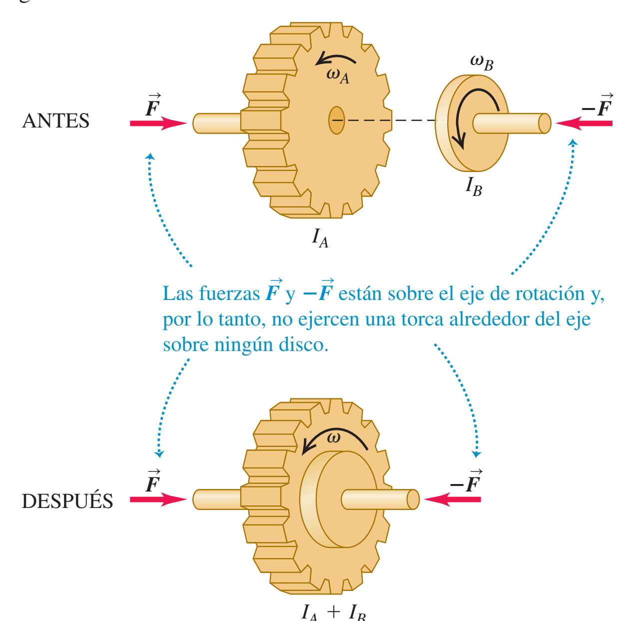


La figura 10.30 muestra dos discos. Uno (A) es un volante de motor y el otro (B), una placa de embrague sujeta a un eje de transmisión. Sus momentos de inercia son I_A e I_B; inicialmente, los discos están girando con rapideces angulares constantes ω_A y ω_B, respectivamente. Juntamos los discos con fuerzas que actúan sobre el eje, con la finalidad de no aplicar una torca a ningún disco. Los discos se frotan entre sí y finalmente alcanzan una rapidez angular final común ω. Deduzca una expresión para ω.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: No hay torcas externas, así que la única torca que actúa sobre cualquiera de los discos es la aplicada por el otro disco. Por lo tanto, el momento angular total del sistema de los dos discos se conserva. Al final, giran como un solo cuerpo con momento de inercia total $I = I_A + I_B$ y rapidez angular ω. La figura 10.30

10.30 Cuando torca externa neta es cero, se conserva el momento angular.



muestra que todas las velocidades angulares tienen la misma dirección, así que podemos considerar que ω_A, ω_B y ω son componentes de velocidad angular a lo largo del eje de rotación. La conservación del momento angular da

$$I_A\omega_A + I_B\omega_B = (I_A + I_B)\omega$$

$$\omega = \frac{I_A\omega_A + I_B\omega_B}{I_A + I_B}$$

EVALUAR: Este "choque" entre dos discos es similar a un choque totalmente inelástico (véase la sección 8.3). Cuando dos objetos en movimiento de traslación a lo largo del mismo eje se juntan y quedan adheridos, se conserva el momento lineal del sistema. En este caso, dos objetos en movimiento *de rotación* a lo largo del mismo eje "chocan" y se adhieren, y se conserva el momento *angular*.

La energía cinética de un sistema disminuye en un choque completamente inelástico. Aquí la energía cinética se pierde porque fuerzas internas no conservativas (fricción) actúan mientras se rozan los dos discos. Supongamos que un volante de inercia *A* tiene una masa de 2.0 kg, un radio de 0.20 m y una velocidad angular inicial de 50 rad/s (aproximadamente 500 rpm), y la placa de embrague *B* tiene una masa de 4.0 kg, un radio de 0.10 m y una velocidad angular inicial de 200 rad/s. ¿Puede demostrar que la energía cinética final es solo dos tercios de la energía cinética inicial?

Ejemplo 10.12 Momento angular en una acción policiaca

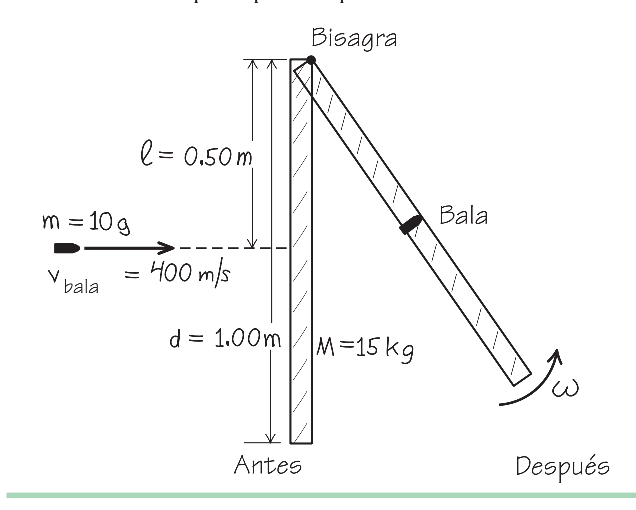


Una puerta de 1.00 m de ancho y masa de 15 kg tiene bisagras en un costado, de modo que puede girar sin fricción sobre un eje vertical. Una bala de 10 g de masa con rapidez de 400 m/s pega en el centro de la puerta, en dirección perpendicular al plano de la puerta, y se incrusta dentro de esta. Calcule la rapidez angular de la puerta. ¿Se conserva la energía cinética?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Consideramos la puerta y la bala como un sistema. No hay torca externa alrededor del eje definido por las bisagras, por lo que se conserva el momento angular con respecto a este eje. La figura 10.31 muestra nuestro esquema. El momento angular inicial está totalmente en la bala y está dado por la ecuación (10.25). El momento angular final es el de un cuerpo rígido formado por la puerta y la bala incrustada. Igualaremos estas dos cantidades y despejaremos la rapidez angular ω de la puerta y de la bala.

10.31 Nuestro esquema para este problema.



EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (10.25), el momento angular inicial de la bala es:

$$L = mvl = (0.010 \text{ kg})(400 \text{ m/s})(0.50 \text{ m}) = 2.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

El momento angular final es $I\omega$, donde $I = I_{puerta} + I_{bala}$. De la tabla 9.2, caso *d*), para una puerta de ancho $d = 1.00$ m.

$$I_{puerta} = \frac{Md^2}{3} = \frac{(15 \text{ kg})(1.00 \text{ m})^2}{3} = 5.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

El momento de inercia de la bala (con respecto al eje que pasa por las bisagras) es

$$I_{bala} = ml^2 = (0.010 \text{ kg})(0.50 \text{ m})^2 = 0.0025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

La conservación del momento angular requiere que $mvl = I\omega$, o

$$\omega = \frac{mvl}{I} = \frac{2.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}{5.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 0.0025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 0.40 \text{ rad/s}$$

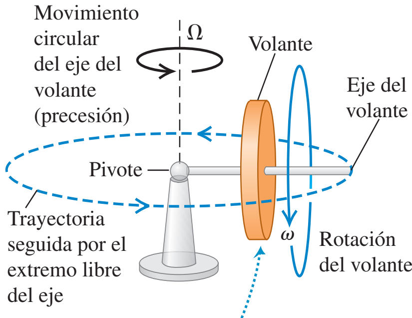
Las energías cinéticas inicial y final son

$$K_1 = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0.010 \text{ kg})(400 \text{ m/s})^2 = 800 \text{ J}$$

$$K_2 = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(5.0025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(0.40 \text{ rad/s})^2 = 0.40 \text{ J}$$

EVALUAR: ¡La energía cinética final es solo $\frac{1}{2000}$ del valor inicial! No esperábamos que la energía cinética se conservara: el choque es inelástico, ya que las fuerzas de fricción no conservativas actúan durante el impacto. La rapidez angular de la puerta es bastante baja: a 0.40 rad/s, la puerta tardará 3.9 s en oscilar 90° ($\pi/2$ radianes).

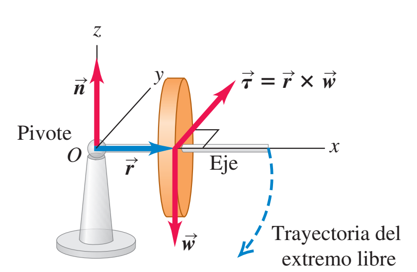
10.32 Un giróscopo apoyado en un extremo. El movimiento circular horizontal del volante y el eje se llama precesión. La rapidez angular de la precesión es Ω.



Cuando el volante y su eje están en reposo, caerán a la superficie de la mesa. Cuando el volante gira, este y su eje "flotan" en el aire mientras se mueven en círculo alrededor del pivote.

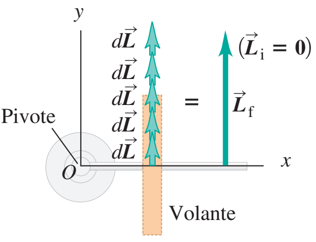
10.33 *a*) Si el volante de la figura 10.32 no está girando inicialmente, su momento angular inicial es cero. *b*) En cada intervalo sucesivo de tiempo dt, la torca produce un cambio $d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt$ en el momento angular. El volante adquiere un momento angular $\vec{L}$ con la misma dirección que $\vec{\tau}$, y el eje del volante cae.

a) El volante que no gira cae



Cuando el volante no gira, su peso crea una torca alrededor del pivote, haciendo que este caiga en una trayectoria circular hasta que su eje descanse en la superficie de la mesa.

b) Vista superior del volante que cae



Al caer, el volante gira alrededor del pivote y, por ello, adquiere un momento angular $\vec{L}$. La *dirección* de $\vec{L}$ permanece constante.

Evalúe su comprensión de la sección 10.6 Si los casquetes polares se derritieran totalmente por el calentamiento global, el hielo derretido se redistribuiría en toda la Tierra. Este cambio haría que la duración del día (el tiempo que la Tierra tarda en girar sobre su eje) **i.** aumentara; **ii.** disminuyera; **iii.** permaneciera igual. (*Sugerencia:* Use ideas relacionadas con el momento angular. Suponga que el Sol, la Luna y los planetas ejercen torcas despreciables sobre la Tierra).

10.7 Giróscopos y precesión

En todas las situaciones que hemos examinado en este capítulo, el eje de rotación se ha mantenido fijo o, si acaso se ha movido, ha mantenido su dirección (como en el caso de rodar sin resbalar). Se presentan diversos fenómenos físicos nuevos, algunos inesperados, si el eje de rotación puede cambiar de dirección. Por ejemplo, considere un giróscopo de juguete apoyado en un extremo (figura 10.32). Si lo sostenemos con el eje del volante horizontal y lo soltamos, el extremo libre del eje cae debido a la gravedad, *si* el volante no está girando. Pero si el volante *está* girando, lo que sucede es muy distinto. Una posibilidad es un movimiento circular uniforme del eje en un plano horizontal, combinado con la rotación del volante alrededor del eje. Este sorprendente movimiento del eje, no intuitivo, se denomina **precesión**. La precesión se observa en la naturaleza, no solo en máquinas giratorias como los giróscopos. En este momento la Tierra misma está en precesión: su eje de rotación (que pasa por los Polos Norte y Sur) cambia lentamente de dirección, completando un ciclo de precesión cada 26,000 años.

Para estudiar el extraño fenómeno de la precesión, debemos recordar que la velocidad angular, el momento angular y la torca son cantidades *vectoriales*. En particular, necesitamos la relación general entre la torca neta $\sum\vec{\tau}$ que actúa sobre un cuerpo y la rapidez de cambio del momento angular $\vec{L}$, del cuerpo dada por la ecuación (10.29), $\sum\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. Apliquemos primero esta ecuación al caso en que el volante *no* gira (figura 10.33*a*). Tomamos el origen O en el pivote y suponemos que el volante es simétrico, con masa M y momento de inercia I alrededor de su eje. El eje del volante inicialmente está sobre el eje x. Las únicas fuerzas externas que actúan sobre el giróscopo son la fuerza normal $\vec{n}$ que actúa en el pivote (donde suponemos que no hay fricción) y el peso $\vec{w}$ del volante que actúa en su centro de masa, a una distancia r del pivote. La fuerza normal tiene torca cero con respecto al pivote, y el peso tiene una torca $\vec{\tau}$ en la dirección y, como se muestra en la figura 10.33*a*. Al principio, no hay rotación y el momento angular inicial $\vec{L}_i$ es cero. De acuerdo con la ecuación (10.29), el *cambio* $d\vec{L}$ del momento angular en un intervalo corto dt después de este instante es

$$d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt \qquad (10.32)$$

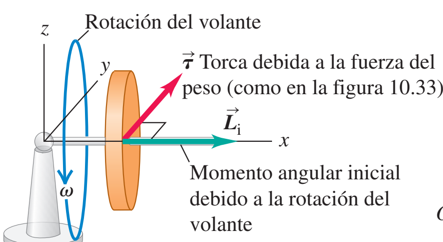
Este cambio es en la dirección y, la de $\vec{\tau}$. Al transcurrir cada intervalo adicional dt, el momento angular cambia en incrementos $d\vec{L}$ en la dirección y porque la dirección de la torca es constante (figura 10.33*b*). El aumento constante del momento angular horizontal implica que el giróscopo girará hacia abajo alrededor del eje y con rapidez creciente, hasta tirar la base o golpear la mesa en la que esta descansa.

Veamos ahora qué sucede si el volante *está* girando inicialmente, de modo que el momento angular inicial $\vec{L}_i$ no es cero (figura 10.34*a*). Puesto que el volante gira alrededor de su eje de simetría, $\vec{L}_i$ está sobre el eje. Pero cada cambio de momento angular $d\vec{L}$ es perpendicular al eje, porque la torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{w}$ también lo es (figura 10.34*b*). Esto hace que cambie la *dirección* de $\vec{L}$ pero no su magnitud. Los cambios $d\vec{L}$ siempre están en el plano horizontal xy, por lo que el vector momento angular y el eje del volante junto con el cual se mueve siempre son horizontales. En otras palabras, el eje no cae, solo tiene precesión.

Si esto todavía le parece misterioso, imagine una pelota atada a una cuerda. Si la pelota está inicialmente en reposo y tiramos de la cuerda, la pelota se moverá hacia nosotros. Pero si la bola se está moviendo inicialmente y tiramos continuamente de la cuerda en una dirección perpendicular al movimiento de la pelota, esta se moverá en

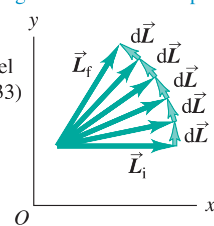
a) Volante giratorio

Cuando el volante gira, el sistema inicia con un momento angular $\vec{L}_i$ paralelo al eje de rotación del volante.



b) Vista superior

Ahora el efecto de la torca es provocar el momento angular que tiene precesión alrededor del pivote. El giróscopo gira alrededor de su pivote sin caer.



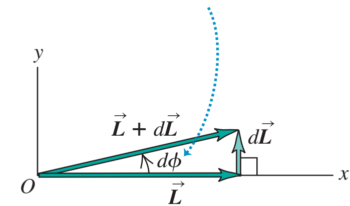
10.34 *a*) El volante está girando inicialmente con momento angular $\vec{L}_i$. Las fuerzas (que no se muestran) son las mismas que en la figura 10.33*a*. *b*) Puesto que el momento angular inicial no es cero, cada cambio $d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt$ en el momento angular es perpendicular a $\vec{L}$. El resultado es que la magnitud de $\vec{L}$ no cambia, aunque su dirección cambia continuamente.

un círculo alrededor de nuestra mano; no se acercará a ella. En el primer caso, la pelota tiene cero momento lineal $\vec{p}$ al principio; cuando aplicamos una fuerza $\vec{F}$ hacia nosotros durante un tiempo dt, la pelota adquiere un momento lineal $d\vec{p} = \vec{F}\,dt$, también hacia nosotros. No obstante, si la pelota ya tiene un momento lineal $\vec{p}$, un cambio en el momento lineal $d\vec{p}$ perpendicular a $\vec{p}$ cambiará la dirección del movimiento, no la rapidez. Sustituya $\vec{p}$ por $\vec{L}$ y $\vec{F}$ por $\vec{\tau}$ en este argumento, y verá que la precesión es simplemente el análogo rotacional del movimiento circular uniforme.

En el instante que se muestra en la figura 10.34*a*, el giróscopo tiene momento angular $\vec{L}$. Un intervalo corto dt después, el momento angular es $\vec{L} + d\vec{L}$; el cambio infinitesimal en momento angular es $d\vec{L} = \vec{\tau}dt$, que es perpendicular a $\vec{L}$. Como se muestra en el diagrama vectorial de la figura 10.35, esto implica que el eje de volante del giróscopo giró un ángulo pequeño $d\phi$ dado por $d\phi = |d\vec{L}|/|\vec{L}|$. La rapidez con que se mueve el eje, $d\phi/dt$, se denomina **rapidez angular de precesión**; denotando esta cantidad con Ω, tenemos

10.35 Vista detallada de parte de la figura 10.34*b*.

En un tiempo *dt*, el vector momento angular y el eje del volante (al que es paralelo) tienen un movimiento de precesión juntos un ángulo $d\phi$.



$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{|d\vec{L}|/|\vec{L}|}{dt} = \frac{\tau_z}{L_z} = \frac{wr}{I\omega} \tag{10.33}$$

Así, la rapidez angular de precesión es *inversamente* proporcional a la rapidez angular de giro alrededor del eje. Un giróscopo que gira rápidamente tiene precesión lenta; si la fricción en su cojinete hace que el volante se frene, ¡se *incrementa* la rapidez angular de precesión! La rapidez angular de precesión de la Tierra es muy lenta (1 rev/26,000 años), porque su momento angular L_z es grande y la torca τ_z debida a las influencias gravitacionales de la Luna y el Sol es relativamente pequeña.

?

Cuando un giróscopo tiene un movimiento de precesión, su centro de masa describe un círculo de radio r en un plano horizontal. Su componente vertical de aceleración es cero, así que la fuerza normal hacia arriba $\vec{n}$ ejercida por el pivote debe ser igual en magnitud al peso. El movimiento circular del centro de masa con rapidez angular Ω requiere una fuerza $\vec{F}$ dirigida hacia el centro del círculo, con magnitud $F = M\Omega^2 r$. Esta fuerza también debe ser proporcionada por el pivote.

Una suposición clave que hicimos en nuestro análisis del giróscopo fue que el vector momento angular $\vec{L}$ solo está asociado a la rotación del volante y es puramente horizontal. Pero también habrá una componente vertical de momento angular asociada a la precesión del giróscopo. Al ignorar esto, hemos supuesto tácitamente que la precesión es *lenta*, es decir, que la rapidez angular de precesión Ω es mucho menor que la rapidez angular de rotación ω. Como muestra la ecuación (10.33), un valor grande de ω automáticamente produce un valor pequeño de Ω, así que la aproximación es razonable. Cuando la precesión no es lenta, aparecen efectos adicionales, incluido un bamboleo vertical o *nutación* del eje del volante, superpuesto a la precesión. Podemos ver la nutación en un giróscopo cuando su rotación se hace lenta, de modo que Ω aumenta y la componente vertical de $\vec{L}$ ya no puede despreciarse.



Ejemplo 10.13 Giróscopo en precesión

La figura 10.36*a* es una vista superior de una rueda de giróscopo cilíndrica que un motor eléctrico puso a girar. El pivote está en O y la masa del eje es insignificante. *a*) Vista de arriba, ¿la precesión es en sentido horario o antihorario? *b*) Si el giróscopo en una revolución de precesión tarda 4.0 s, ¿qué rapidez angular tiene la rueda?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Determinaremos la dirección de la precesión utilizando la regla de la mano derecha de la figura 10.34, que muestra el mismo tipo de giróscopo que la figura 10.36. Utilizaremos la relación entre rapidez angular de precesión Ω y la rapidez angular de giro ω, ecuación (10.33), para obtener el valor de ω.

EJECUTAR: *a*) La regla de la mano derecha indica que $\vec{\omega}$ y $\vec{L}$ están dirigidos hacia la izquierda en la figura 10.36*b*. El peso $\vec{w}$ apunta hacia adentro de la página en esta vista superior y actúa en el centro de masa (denotado con ✕ en la figura). La torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{w}$ está dirigida hacia arriba de la página, por lo que $d\vec{L}/dt$ también está dirigido hacia arriba de la página. Sumando un pequeño $d\vec{L}$ al vector inicial $\vec{L}$ cambia la dirección de $\vec{L}$ como se muestra, así que la precesión es en sentido horario cuando se ve desde arriba.

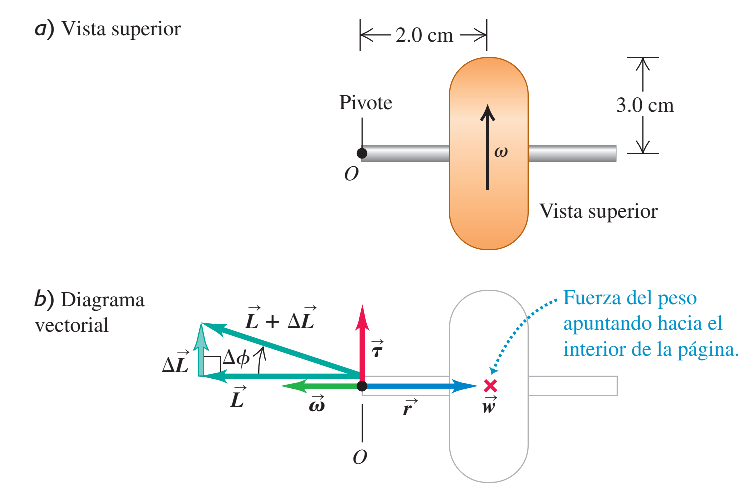
¡Tenga cuidado de no confundir ω y Ω! La rapidez de precesión angular es $\Omega = (1 \text{ rev})/(4.0 \text{ s}) = (2\pi \text{ rad})/(4.0 \text{ s}) = 1.57 \text{ rad/s}$. El peso es mg, y si la rueda es un cilindro uniforme sólido, su momento de inercia alrededor de su eje de simetría es $I = \frac{1}{2}mR^2$. De acuerdo con la ecuación (10.33),

$$\omega = \frac{wr}{I\Omega} = \frac{mgr}{(mR^2/2)\Omega} = \frac{2gr}{R^2\Omega}$$

$$= \frac{2(9.8 \text{ m/s}^2)(2.0 \times 10^{-2} \text{ m})}{(3.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2(1.57 \text{ rad/s})} = 280 \text{ rad/s} = 2600 \text{ rev/min}$$

EVALUAR: La rapidez angular de precesión Ω es solo aproximadamente el 0.6% de la rapidez angular de rotación ω, así que tenemos un ejemplo de precesión lenta.

10.36 ¿Qué dirección y qué rapidez tiene la precesión del giróscopo?



Evalúe su comprensión de la sección 10.7 Suponga que la masa del volante de la figura 10.34 se aumenta al doble, pero manteniendo constantes todas las demás dimensiones y la rapidez angular de rotación. ¿Qué efecto tendría esto sobre la rapidez angular de precesión Ω? **i.** Ω aumentaría en un factor de 4; **ii.** se duplicaría Ω; **iii.** Ω no se vería afectada; **iv.** Ω se reduciría a la mitad; **v.** Ω se reduciría a la cuarta parte.



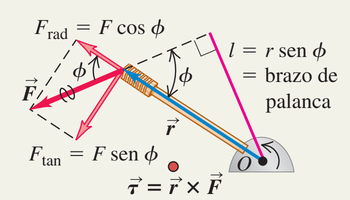
CAPÍTULO 10 RESUMEN



Torca: Cuando una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre un cuerpo, la torca de esa fuerza con respecto a un punto O tiene una magnitud dada por el producto de la magnitud de la fuerza F y el brazo de palanca l. En términos más generales, la torca es un vector $\vec{\tau}$ igual al producto vectorial de $\vec{r}$ (el vector de posición del punto donde actúa la fuerza) y $\vec{F}$. (Véase el ejemplo 10.1).

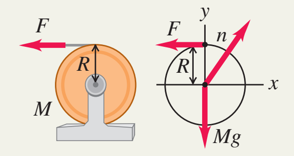
$$\tau = Fl \tag{10.2}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{10.3}$$



Dinámica rotacional: El análogo rotacional de la segunda ley de Newton dice que la torca neta que actúa sobre un cuerpo es igual al producto del momento de inercia del cuerpo y su aceleración angular. (Véase los ejemplos 10.2 y 10.3).

$$\sum \tau_z = I\alpha_z \tag{10.7}$$



Traslación y rotación combinadas: Si un cuerpo rígido se mueve en el espacio al tiempo que gira, su movimiento puede considerarse como la suma de un movimiento de traslación del centro de masa y un movimiento de rotación en torno a un eje que pasa por el centro de masa. De esta manera, la energía cinética es la suma de las energías cinéticas traslacional y rotacional. En dinámica, la segunda ley de Newton describe el movimiento del centro de masa y el equivalente rotacional de esa ley describe la rotación en torno al centro de masa. En el caso de un cuerpo que rueda sin resbalar, existe una relación especial entre el movimiento del centro de masa y el movimiento de rotación. (Véase los ejemplos 10.4 a 10.7).

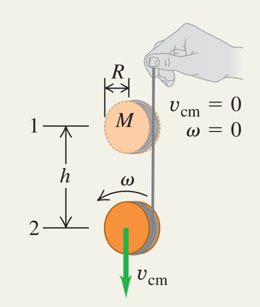
$$K = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \tag{10.8}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \tag{10.12}$$

$$\sum \tau_z = I_{cm}\alpha_z \tag{10.13}$$

$$v_{cm} = R\omega \tag{10.11}$$

(rodar sin resbalar)



Trabajo efectuado por una torca: Si una torca actúa sobre un cuerpo rígido que gira, efectúa trabajo sobre el cuerpo. Ese trabajo puede expresarse como una integral de la torca. El teorema trabajo-energía dice que el trabajo rotacional total efectuado sobre un cuerpo rígido es igual al cambio de energía cinética de rotación. La potencia, o rapidez con que la torca efectúa trabajo, es el producto de la torca y la velocidad angular. (Véase el ejemplo 10.8).

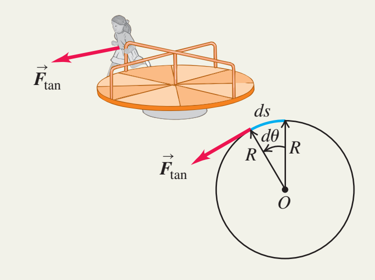
$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z \, d\theta \tag{10.20}$$

$$W = \tau_z(\theta_2 - \theta_1) = \tau_z \Delta\theta \tag{10.21}$$

(solo torca constante)

$$W_{tot} = \tfrac{1}{2}I\omega_2^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_1^2 \tag{10.22}$$

$$P = \tau_z\omega_z \tag{10.23}$$



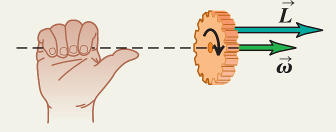
Momento angular: El momento angular de una partícula con respecto a un punto O es el producto vectorial del vector de posición $\vec{r}$ de la partícula con respecto a O y a su momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$. Si un cuerpo simétrico gira alrededor de un eje de simetría estacionario, su momento angular es el producto de su momento de inercia y su vector velocidad angular $\vec{\omega}$. Si el cuerpo no es simétrico o el eje de rotación (z) no es un eje de simetría, la componente del momento angular sobre el eje de rotación es $I\omega_z$. (Véase el ejemplo 10.9).

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \tag{10.24}$$

(partícula)

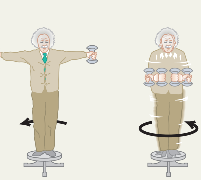
$$\vec{L} = I\vec{\omega} \tag{10.28}$$

(cuerpo rígido que gira en torno a un eje de simetría)



Dinámica rotacional y momento angular: La torca externa neta sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio de su momento angular. Si la torca externa neta que actúa sobre el sistema es cero, el momento angular total del sistema es constante (se conserva). (Véase los ejemplos del 10.10 al 10.13).

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{10.29}$$





PROBLEMA PRÁCTICO Física en el billar

Una bola blanca (una esfera maciza de masa m y radio R) se encuentra en reposo sobre una mesa de billar a nivel. Usando un taco de billar, le da un golpe fuerte a la bola, horizontal de magnitud F a una altura h arriba del centro de la pelota (figura 10.37). La fuerza del golpe es mucho mayor que la fuerza de fricción f que ejerce la superficie de la mesa sobre la bola. El impacto dura un tiempo corto Δt. *a*) ¿Para qué valor de h la pelota rodará sin resbalar? *b*) Si usted golpea el centro de la pelota ($h = 0$), la pelota se resbala sobre la mesa por un rato, pero finalmente rodará sin resbalar. ¿Cuál será entonces la velocidad de su centro de masa?

GUÍA DE SOLUCIÓN

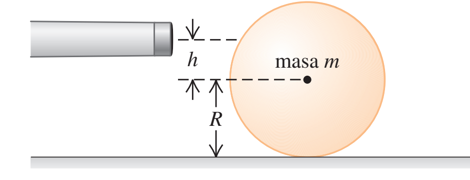
Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la bola en la situación del inciso *a*), incluyendo la elección de los ejes de coordenadas. Observe que el taco ejerce tanto una fuerza de impulso sobre la pelota como una torca alrededor del centro de masa.
2. La fuerza del taco aplicado durante un tiempo Δt da al centro de masa de la bola una rapidez v_{cm}, y la torca aplicada por el taco para ese mismo tiempo da a la bola una velocidad angular ω. ¿Cuál debe ser la relación entre v_{cm} y ω para que la bola ruede sin resbalar?

10.37



3. Dibuje dos diagramas de cuerpo libre de la bola del inciso *b*): uno que muestre las fuerzas durante el golpe y el otro que muestre las fuerzas después del golpe, pero antes de que el balón esté rodando sin resbalar.
4. ¿Cuál es la velocidad angular de la bola del inciso *b*) justo después del golpe? Mientras la pelota se resbala, ¿v_{cm} aumenta o disminuye? ¿ω aumenta o disminuye? ¿Cuál es la relación entre v_{cm} y ω cuando la pelota finalmente rueda sin resbalarse?

EJECUTAR

5. En el inciso *a*), use el teorema de impulso-momento para encontrar la velocidad del centro de masa de la bola inmediatamente después del golpe. Luego, utilice la versión rotacional del teorema impulso-momento para encontrar la velocidad angular inmediatamente después del golpe. (*Sugerencia:* Para escribir la versión rotacional del teorema impulso-momento, recuerde que la relación entre la torca y el momento angular es la misma que existe entre la fuerza y el momento lineal).
6. Utilice los resultados del paso 5 para encontrar el valor de h que hará que la bola ruede sin resbalarse inmediatamente después del golpe.
7. En el inciso *b*), de nuevo encuentre la rapidez angular del centro de masa de la bola inmediatamente después del golpe. Después, escriba la segunda ley de Newton para el movimiento de traslación y para el movimiento de rotación de la bola cuando se resbala. Utilice estas ecuaciones con la finalidad de escribir expresiones para v_{cm} y ω como funciones del tiempo t transcurrido desde el impacto.
8. Utilizando los resultados del paso 7, encuentre el tiempo t cuando v_{cm} y ω tienen la relación correcta para rodar sin resbalar. Después, encuentre el valor de v_{cm} en este tiempo.

EVALUAR

9. Si usted tiene acceso a una mesa de billar, pruebe los resultados de los incisos *a*) y *b*) ¡por sí mismo!
10. ¿Puede demostrar que si se utiliza un cilindro hueco en lugar de una bola sólida, tiene que pegar en la parte superior del cilindro para que ruede sin resbalar en el inciso *a*)?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P10.1 Al apretar los pernos de la cabeza de los cilindros de un motor de automóvil, la cantidad crítica es la *torca* aplicada a los pernos. ¿Por qué la torca es más importante que la *fuerza* real aplicada al mango de la llave?

P10.2 ¿Una sola fuerza aplicada a un cuerpo puede alterar tanto su movimiento de traslación como su movimiento de rotación? Explique por qué.

P10.3 Suponga que usted puede usar cualquier tipo de ruedas en el diseño de un carrito de cuatro ruedas, sin motor para carreras cuesta abajo, partiendo del reposo. Respetando las reglas de peso total del vehículo y el conductor, ¿conviene usar ruedas grandes y masivas, o ruedas pequeñas y ligeras? ¿Conviene usar ruedas sólidas o ruedas con la mayoría de la masa en el borde? Explique por qué.

P10.4 Un automóvil con tracción en las cuatro ruedas acelera hacia adelante partiendo del reposo. Indique la dirección en que giran las ruedas del vehículo y cómo esto origina una fuerza de fricción debida al pavimento, que acelera el auto hacia adelante.

P10.5 Los ciclistas experimentados dicen que reducir el peso de una bicicleta es más efectivo si se hace en las ruedas que en el cuadro. ¿Por qué reducir el peso en las ruedas sería más fácil para el ciclista que reducir la misma cantidad en el cuadro?

P10.6 Cuanto mayor sea la fuerza que se aplica al frenar conduciendo un auto hacia adelante, más bajará el frente del auto (y más subirá la parte de atrás). ¿Por qué? ¿Qué sucede al acelerar hacia adelante? ¿Por qué los vehículos de arrancones no usan solo tracción delantera?

P10.7 Cuando un equilibrista camina sobre la cuerda floja, extiende sus brazos hacia los lados. Esto le facilita recuperarse en caso de inclinarse hacia un lado o hacia el otro. Explique cómo funciona esto. [*Sugerencia:* Piense en la ecuación (10.7)].

P10.8 Al encenderse un motor eléctrico, tarda más en alcanzar su rapidez final si hay una rueda de afilar conectada al eje. ¿Por qué?

P10.9 Los buenos cocineros saben si un huevo está crudo o cocido haciéndolo rodar por una pendiente (y atrapándolo abajo). ¿Cómo es posible esto? ¿En qué se fijan?

P10.10 El trabajo efectuado por una fuerza es un producto de fuerza y distancia. La torca debida a una fuerza es un producto de fuerza y distancia. ¿Implica esto que la torca y el trabajo sean equivalentes? Explique por qué.

P10.11 Imagine que usted pertenece a un despacho de ingenieros y un cliente importante le lleva una esfera preciada porque quiere saber si es hueca o sólida. Él ha probado dándole golpecitos, pero eso no lo ha sacado de dudas. Diseñe un experimento sencillo y de bajo costo que pueda efectuar rápidamente, sin dañar la valiosa esfera, para averiguar si es hueca o sólida.

P10.12 Usted hace dos versiones del mismo objeto a partir del mismo material que tiene densidad uniforme. Para una versión, todas las dimensiones son exactamente del doble que la otra. Si actúa la misma torca en ambas versiones, dando a la más pequeña una aceleración angular α, ¿cuál será la aceleración angular de la versión más grande en términos de α?

P10.13 Dos masas idénticas están unidas a poleas sin fricción mediante cordeles muy delgados, enrollados alrededor del borde de la polea, y se liberan partiendo del reposo. Ambas poleas tienen la misma masa y el mismo diámetro, pero una es sólida y la otra es un aro. Conforme las masas caen, ¿en qué caso es mayor la tensión en la cuerda, o es la misma en ambos casos? Justifique su respuesta.

P10.14 La fuerza de gravedad actúa sobre el bastón de la figura 10.11. Las fuerzas producen torcas que alteran la velocidad angular de un cuerpo. Entonces, ¿por qué es constante la velocidad angular del bastón en la figura?

P10.15 Cierta esfera sólida uniforme alcanza una altura máxima h_0 cuando rueda cuesta arriba sin resbalarse. ¿Qué altura máxima (en términos de h_0) alcanzará si *a*) se duplica su diámetro, *b*) se duplica su masa, *c*) se duplican tanto su diámetro como su masa, *d*) se duplica su rapidez angular en la base de la pendiente?

P10.16 Una rueda está rodando sin resbalar por una superficie horizontal. En un marco de referencia inercial en el que la superficie está en reposo, ¿hay algún punto de la rueda con velocidad puramente vertical? ¿Hay algún punto con componente horizontal de velocidad opuesta a la velocidad del centro de masa? Explique su respuesta. ¿Cambian sus respuestas si la rueda resbala al rodar? ¿Por qué?

P10.17 Parte de la energía cinética de un automóvil que avanza está en el movimiento de rotación de sus ruedas. Al aplicarse los frenos a fondo en una calle con hielo, las ruedas se "bloquean" y el auto comienza a deslizarse. ¿Qué pasa con la energía cinética de rotación?

P10.18 Un aro, un cilindro sólido uniforme, una esfera hueca y una esfera sólida uniforme se sueltan del reposo en la parte alta de una pendiente. ¿En qué orden llegan a la base de la pendiente? ¿Importa si las masas y los radios de los objetos son iguales o no? Explique su respuesta.

P10.19 Una bola rueda con rapidez v sin resbalar sobre una superficie horizontal, cuando llega a una colina que se alza con un ángulo constante sobre la horizontal. ¿En cuál caso alcanzará mayor altura: si la colina tiene suficiente fricción para evitar deslizamientos o si la colina es perfectamente lisa? En ambos casos, justifique sus respuestas en términos de conservación de la energía y de la segunda ley de Newton.

P10.20 Imagine que, en la Casa de la Risa de una feria, usted está de pie en el centro de una mesa giratoria horizontal grande, que comienza a girar libremente sobre cojinetes sin fricción (ningún motor la impulsa). Si camina hacia el borde de la mesa giratoria, ¿qué pasa con el momento angular combinado de usted y la mesa? ¿Qué sucede con la rapidez de rotación de la mesa? Explique su respuesta.

P10.21 Un plato giratorio uniforme determinado de diámetro D_0 tiene un momento angular L_0. Si desea rediseñarlo de manera que conserve la misma masa pero su momento angular sea el doble con la misma velocidad angular igual que antes, ¿cuál debería ser su diámetro en términos de D_0?

P10.22 Una partícula puntual viaja en línea recta con rapidez constante y la distancia más cercana que parte del origen de las coordenadas es una distancia l. Con respecto a este origen, ¿la partícula tiene momento lineal diferente de cero? Conforme la partícula se mueve en línea recta, ¿cambia su momento angular con respecto al origen?

P10.23 En el ejemplo 10.10 (sección 10.6), la rapidez angular ω cambia, lo que implica una aceleración angular distinta de cero. Sin embargo, no hay torca alrededor del eje de rotación, si las fuerzas que el profesor aplica a las mancuernas se dirigen radialmente hacia adentro. Entonces, de acuerdo con la ecuación (10.7), α_z debe ser cero. Explique el error de este razonamiento que lleva a una aparente contradicción.

P10.24 En el ejemplo 10.10 (sección 10.6) la energía cinética rotacional del profesor y las mancuernas aumenta. Sin embargo, como no hay torcas externas, no se efectúa trabajo para alterar la energía cinética de rotación. Entonces, según la ecuación (10.22), ¡la energía cinética no debe cambiar! Explique el error de este razonamiento que lleva a una aparente contradicción. ¿De *dónde* sale la energía cinética adicional?

P10.25 Como vimos en la sección 10.6, el momento angular de una trapecista se conserva al dar vueltas en el aire. ¿Se conserva su momento *lineal*? ¿Por qué?

P10.26 Si usted detiene un huevo crudo en rotación durante el instante más corto que pueda y lo vuelve a soltar, el huevo comenzará a girar otra vez. Si hace lo mismo con un huevo duro, este se quedará detenido. Inténtelo y explíquelo.

P10.27 Un helicóptero tiene un rotor principal grande que gira en un plano horizontal y proporciona sustentación. También hay un rotor pequeño en la cola que gira en un plano vertical. ¿Para qué sirve? (*Sugerencia:* Considere que si no hubiera rotor de cola, ¿qué pasaría cuando el piloto alterara la rapidez angular del rotor principal?). Algunos helicópteros no tienen rotor de cola, pero tienen dos rotores principales grandes que giran en un plano horizontal. ¿Por qué es importante que los dos rotores principales giren en direcciones opuestas?

P10.28 En un diseño de giróscopo común, el volante y su eje se encierran en un marco esférico ligero con el volante en el centro. El giróscopo se equilibra entonces sobre un pivote, de modo que el volante esté directamente encima del pivote. ¿El giróscopo tiene un movimiento de precesión, si se suelta mientras el volante está girando? Explique su respuesta.

P10.29 Un giróscopo tarda 3.8 s en hacer un movimiento de precesión de 1.0 revolución alrededor de un eje vertical. Dos minutos después, solo tarda 1.9 s en hacer un movimiento de precesión de 1.0 revolución. Nadie tocó el giróscopo. Explique por qué.

P10.30 Un giróscopo hace un movimiento de precesión como en la figura 10.32. ¿Qué sucede si agregamos suavemente peso al extremo del eje del volante opuesto al pivote?

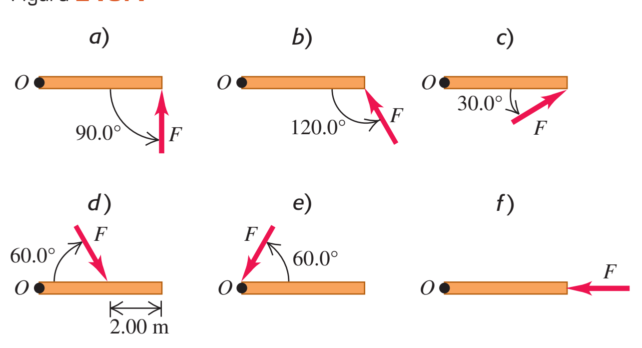
P10.31 Una bala sale de un rifle girando sobre su eje. Explique cómo esto evita que la bala dé volteretas y mantiene la punta dirigida hacia adelante.

EJERCICIOS

Sección 10.1 Torca

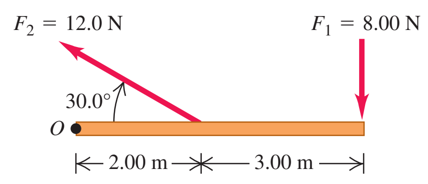
10.1 • Calcule la torca (magnitud y dirección) alrededor del punto O debida a la fuerza $\vec{F}$ en cada una de las situaciones que se representan en la figura E10.1. En todos los casos, la fuerza $\vec{F}$ y la varilla están en el plano de la página, la varilla mide 4.00 m de largo y la fuerza tiene magnitud $F = 10.0$ N.

Figura **E10.1**



10.2 • Calcule la torca alrededor del punto O para las dos fuerzas aplicadas como en la figura E10.2. La varilla y las dos fuerzas están en el plano de la página.

Figura **E10.2**



10.3 •• Una placa metálica cuadrada de 0.180 m por lado pivota sobre un eje que pasa por el punto O en su centro y es perpendicular a la placa (figura E10.3). Calcule la torca neta alrededor de este eje debida a las tres fuerzas que se muestran en la figura, si las magnitudes de las fuerzas son $F_1 = 18.0$ N, $F_2 = 26.0$ N y $F_3 = 14.0$ N. La placa y todas las fuerzas están en el plano de la página.

Figura **E10.3**

Figura **E10.4**

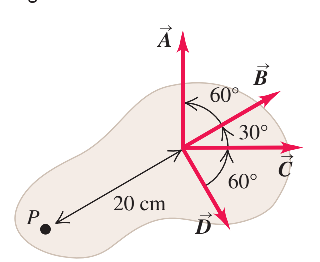
10.4 • Se aplican tres fuerzas a una rueda con radio de 0.350 m, como se indica en la figura E10.4. Una fuerza es perpendicular al borde, otra es tangente a este y la otra forma un ángulo de 40.0° con el radio. ¿Cuál es la torca neta sobre la rueda debida a estas tres fuerzas para un eje perpendicular a la rueda y que pasa por su centro?

10.5 • Una fuerza que actúa sobre una pieza mecánica es $\vec{F} = (-5.00\text{ N})\hat{\imath} + (4.00\text{ N})\hat{\jmath}$. El vector del origen al punto de aplicación de la fuerza es $\vec{r} = (-0.450\text{ m})\hat{\imath} + (0.150\text{ m})\hat{\jmath}$. *a*) Elabore un dibujo que muestre $\vec{r}$, $\vec{F}$, y el origen. *b*) Use la regla de la mano derecha para determinar la dirección de la torca. *c*) Calcule la torca vectorial producida por la fuerza para un eje en el origen. Verifique que la dirección de la torca sea la misma que obtuvo en el inciso *b*).

10.6 • Una barra de metal está en el plano xy con un extremo de la barra en el origen. Se aplica una fuerza $\vec{F} = (7.00\text{ N})\hat{\imath} + (-3.00\text{ N})\hat{\jmath}$ a la barra en el punto $x = 3.00$ m, $y = 4.00$ m. *a*) En términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$, ¿cuál es el vector de posición $\vec{r}$ para el punto donde se aplica la fuerza? *b*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la torca con respecto al origen producido por $\vec{F}$?

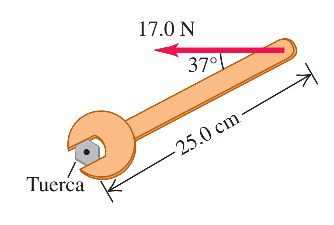
10.7 • En la figura E10.7, las fuerzas $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ y tienen cada una 50 N de magnitud y actúan en el mismo punto en el objeto. *a*) ¿Qué torca (magnitud y dirección) ejercen cada una de estas fuerzas sobre el objeto sobre el punto P? *b*) ¿Cuál es la torca total sobre el punto P?

Figura **E10.7**



10.8 • Un maquinista usa una llave inglesa para aflojar una tuerca. La llave tiene 25.0 cm de longitud y él ejerce una fuerza de 17.0 N en el extremo del mango, formando un ángulo de 37° con el mango (figura E10.8). *a*) ¿Qué torca ejerce el maquinista alrededor del centro de la tuerca? *b*) ¿Cuál es la torca máxima que el maquinista podría ejercer con esta fuerza y cómo debería orientarse la fuerza?

Figura **E10.8**



Sección 10.2 Torca y aceleración angular de un cuerpo rígido

10.9 •• El volante de un motor tiene momento de inercia de 2.50 kg · m^2 alrededor de su eje de rotación. ¿Qué torca constante se requiere para que alcance una rapidez angular de 400 rev/min en 8.00 s, partiendo del reposo?

10.10 •• Un disco uniforme con masa de 40.0 kg y radio de 0.200 m pivota en su centro alrededor de un eje horizontal, sin fricción que está en reposo. El disco está inicialmente en reposo, y luego se aplica una fuerza constante $F = 30.0$ N tangente al borde del disco. *a*) ¿Cuál es la magnitud v de la velocidad tangencial de un punto en el borde del disco después de que el disco ha girado 0.200 revoluciones? *b*) ¿Cuál es la magnitud a de la aceleración resultante de un punto en el borde del disco después de que el disco ha girado 0.200 revoluciones?

10.11 •• Una pieza de maquinaria tiene la forma de una esfera sólida uniforme con masa de 225 g y diámetro de 3.00 cm, y gira alrededor de un eje sin fricción que pasa por su centro, pero, en un punto de su ecuador roza contra un metal, lo que produce una fuerza de fricción de 0.0200 N en ese punto. *a*) Calcule su aceleración angular. *b*) ¿Cuánto tiempo requerirá para disminuir su rapidez rotacional en 22.5 rad/s?

10.12 • Una cuerda se enrolla en el borde de una rueda sólida uniforme de 0.250 m de radio y masa de 9.20 kg. Se tira de la cuerda con una fuerza horizontal constante de 40.0 N hacia la derecha, quitándola tangencialmente de la rueda, la cual está montada con cojinetes sin fricción en un eje horizontal que pasa por su centro. *a*) Calcule la aceleración angular de la rueda y la aceleración de la parte de la cuerda que ya se haya retirado de la rueda. *b*) Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza

que ejerce el eje sobre la rueda. *c*) ¿Por qué las respuestas a los incisos *a*) y *b*) cambiarían si el tirón fuera hacia arriba en vez de horizontal?

10.13 •• **PA** Un libro de texto de 2.00 kg descansa sobre una superficie horizontal sin fricción. Un cable unido al libro pasa sobre una polea, cuyo diámetro es de 0.150 m, para un libro con masa de 3.00 kg que cuelga. El sistema se libera a partir del reposo, y se observa que los libros se mueven 1.20 m en 0.800 s. *a*) ¿Cuál es la tensión en cada parte de la cuerda? *b*) ¿Cuál es el momento de inercia de la polea alrededor de su eje de rotación?

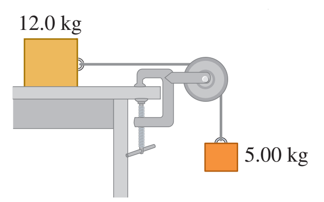
10.14 •• **PA** Una piedra cuelga del extremo libre de un cable enrollado en el borde exterior de una polea, como se muestra en la figura 10.10. La polea es un disco uniforme con masa de 10.0 kg y 50.0 cm de radio, que gira sobre cojinetes sin fricción. Se determina que la piedra recorre 12.6 m en los primeros 3.00 s partiendo del reposo. Calcule *a*) la masa de la piedra y *b*) la tensión en el cable.

10.15 • Una rueda gira sin fricción alrededor de un eje horizontal estacionario en el centro de la rueda. Una fuerza constante tangencial igual a 80.0 N se aplica al borde de la rueda; esta última tiene un radio de 0.120 m. Partiendo del reposo, la rueda tiene una rapidez angular de 12.0 rev/s después de 2.00 s. ¿Cuál es el momento de inercia de la rueda?

10.16 •• **PA** Una cubeta con agua de 15.0 kg se suspende de una cuerda ligera, enrollada en un cilindro sólido de 0.300 m de diámetro y masa de 12.0 kg. El cilindro pivota en un eje sin fricción que pasa por su centro. La cubeta se suelta del reposo en la parte superior de un pozo y cae 10.0 m al agua. *a*) ¿Qué tensión hay en la cuerda mientras la cubeta cae? *b*) ¿Con qué rapidez golpea la cubeta el agua? *c*) ¿Cuánto tarda en caer? *d*) Mientras la cubeta cae, ¿qué fuerza ejerce el eje sobre el cilindro?

10.17 •• Una caja de 12.0 kg que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción está unida a un peso de 5.00 kg con un alambre delgado y ligero que pasa por una polea sin fricción (figura E10.17). La polea tiene la forma de un disco sólido uniforme con masa de 2.00 kg y diámetro de 0.500 m. Después de que el sistema se libera, calcule *a*) la tensión en el alambre en ambos lados de la polea, *b*) la aceleración de la caja y *c*) las componentes horizontal y vertical de la fuerza que ejerce el eje sobre la polea.

Figura **E10.17**



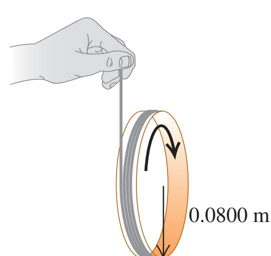
Sección 10.3 Rotación de un cuerpo rígido sobre un eje móvil

10.18 • **BIO** **Gimnasia.** A grandes rasgos, podemos modelar un equipo de gimnasia como un cilindro sólido uniforme de masa de 75 kg y diámetro de 1.0 m. Si el cilindro rueda hacia adelante a 50 rev/s, *a*) ¿cuánta energía cinética tiene, y *b*) qué porcentaje de su energía cinética total es rotacional?

10.19 • Un aro de 2.20 kg y de 1.20 m de diámetro rueda hacia la derecha sin resbalar sobre un piso horizontal a 3.00 rad/s constantes. *a*) ¿Qué tan rápido se mueve su centro? *b*) ¿Cuál es la energía cinética total del aro? *c*) Calcule el vector velocidad de cada uno de los siguientes puntos, vistos por una persona en reposo en el suelo: **i.** el punto más alto del aro; **ii.** el punto más bajo del aro; **iii.** un punto al lado derecho del aro, a la mitad de la distancia entre la parte superior y la parte inferior. *d*) Calcule el vector velocidad de cada uno de los puntos del inciso *c*), pero esta vez como se ve por alguien que se mueve con la misma velocidad que el aro.

10.20 •• Se enrolla una cuerda varias veces en el borde de un aro pequeño de 8.00 cm de radio y masa de 0.180 kg. El extremo libre de la cuerda se sostiene fijo y el aro se suelta a partir del reposo (figura E10.20). Después de que el aro ha descendido 75.0 cm, calcule: *a*) la rapidez angular del aro al girar y *b*) la rapidez de su centro.





10.21 • ¿Qué fracción de la energía cinética total es rotacional para los siguientes objetos que ruedan sin resbalar por una superficie horizontal? *a*) Un cilindro sólido uniforme, *b*) una esfera uniforme, *c*) una esfera hueca de paredes delgadas, *d*) un cilindro hueco con radio exterior R y radio interior $R/2$.

10.22 •• Una esfera hueca con masa de 2.00 kg rueda sin resbalar bajando una pendiente de 38.0°. *a*) Calcule la aceleración, la fuerza de fricción y el coeficiente de fricción mínimo para que no resbale. *b*) ¿Cómo cambiarían sus respuestas al inciso *a*) si la masa se duplicara a 4.00 kg?

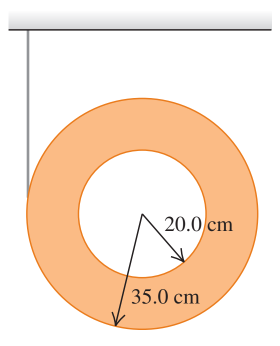
10.23 •• Una esfera sólida se libera a partir del reposo y baja por una ladera que forma un ángulo de 65.0° abajo de la horizontal. *a*) ¿Qué valor mínimo debe tener el coeficiente de fricción estática entre la ladera y la esfera para que no haya deslizamiento? *b*) ¿El coeficiente de fricción calculado en el inciso *a*) bastaría para evitar que una esfera hueca (como un balón de fútbol) resbale? Justifique su respuesta. *c*) En el inciso *a*), ¿por qué usamos el coeficiente de fricción estática y no el coeficiente de fricción cinética?

10.24 •• Una canica uniforme baja rodando por un tazón simétrico, partiendo del reposo en el borde izquierdo. El borde está una distancia h arriba del fondo del tazón. La mitad izquierda del tazón es lo bastante áspera como para que la canica ruede sin resbalar, pero la mitad derecha no tiene fricción porque está lubricada con aceite. *a*) ¿Qué altura alcanzará la canica en el lado resbaloso, medida verticalmente desde el fondo? *b*) ¿Qué altura alcanzaría la canica si el lado derecho fuera tan áspero como el izquierdo? *c*) ¿Cómo explica el hecho de que la canica alcance *más altura* en el lado derecho con fricción que sin fricción?

10.25 •• Una rueda de 392 N se desprende de un camión en movimiento, rueda sin resbalar por una carretera y, al llegar al pie de una colina, gira a 25.0 rad/s. El radio de la rueda es de 0.600 m y su momento de inercia alrededor de su eje de rotación es de $0.800MR^2$. La fricción efectúa trabajo sobre la rueda mientras esta sube la colina hasta que se detiene a una altura h sobre el pie de la colina; ese trabajo tiene valor absoluto de 3500 J. Calcule h.

10.26 •• **Bola que rueda cuesta arriba**. Una bola de bolos sube rodando sin resbalar por una rampa que forma un ángulo b con la horizontal. (Véase el ejemplo 10.7 de la sección 10.3). Trate la bola como una esfera sólida uniforme, sin tomar en cuenta los agujeros. *a*) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la bola. Explique por qué la fricción debe tener dirección *cuesta arriba*. *b*) ¿Qué aceleración tiene el centro de masa de la bola? *c*) ¿Qué coeficiente mínimo de fricción estática se necesita para que la bola no resbale?

Figura **E10.27**



10.27 •• Una cuerda delgada ligera se envuelve alrededor del borde exterior de un cilindro hueco uniforme de masa 4.75 kg que tiene radios interno y externo como se muestra en la figura E10.27. El cilindro se libera a partir del reposo. *a*) ¿Qué distancia

debe haber caído el cilindro antes de que su centro se mueva a 6.66 m/s? *b*) Si usted suelta este cilindro sin cuerda, ¿con qué rapidez se mueve su centro cuando ha caído la distancia del inciso *a*)? *c*) ¿Por qué se obtienen dos respuestas diferentes cuando el cilindro cae la misma distancia en ambos casos?

10.28 •• Un ciclista va cuesta abajo a 11.0 m/s cuando, para su horror, se sale una de sus ruedas de 2.25 kg cuando él está a 75.0 m arriba del pie de la colina. Podemos modelar la rueda como un cilindro de pared delgada, de 85.0 cm de diámetro y se desprecia la pequeña masa de los radios. *a*) ¿Qué tan rápido se mueve la rueda cuando alcanza el pie de la colina si rodó sin resbalarse en la bajada? *b*) ¿Cuánta energía cinética total tiene la rueda cuando llega a la parte inferior de la colina?

10.29 •• Una pelota de fútbol, de tamaño 5, con diámetro de 22.6 cm y masa de 426 g rueda hacia arriba por una colina sin resbalar, alcanzando una altura máxima de 5.00 m sobre la base de la colina. Podemos modelar esta pelota como una esfera hueca de paredes delgadas. *a*) ¿Con qué rapidez gira en la base de la colina? *b*) ¿Cuánta energía cinética de rotación tenía entonces?

Sección 10.4 Trabajo y potencia en movimiento de rotación

10.30 • El motor proporciona 175 hp a la hélice de un avión a 2400 rev/min. *a*) ¿Qué valor de la torca proporciona el motor del avión? *b*) ¿Cuánto trabajo realiza el motor en una revolución de la hélice?

10.31 • Un carrusel con 2.40 m de radio tiene momento de inercia de 2100 $kg \cdot m^2$ alrededor de un eje vertical que pasa por su centro y gira con fricción despreciable. *a*) Un niño aplica una fuerza de 18.0 N tangencialmente al borde durante 15.0 s. Si el carrusel estaba inicialmente en reposo, ¿qué rapidez angular tiene al final de los 15.0 s? *b*) ¿Cuánto trabajo efectuó el niño sobre el carrusel? c) ¿Qué potencia media le suministró el niño?

10.32 •• Un motor eléctrico consume 9.00 kJ de energía eléctrica en 1.00 min. Si un tercio de la energía se pierde en forma de calor y otras formas de energía interna del motor, y el resto se da como potencia al motor, ¿cuál será el valor de la torca que desarrollará este motor si usted lo pone a 2500 rpm?

10.33 • Una rueda de afilar de 1.50 kg con forma de cilindro sólido tiene 0.100 m de radio. *a*) ¿Qué torca constante la llevará del reposo a una rapidez angular de 1200 rev/min en 2.5 s? *b*) ¿Qué ángulo habrá girado en ese tiempo? *c*) Use la ecuación (10.21) para calcular el trabajo efectuado por la torca. *d*) ¿Qué energía cinética tiene la rueda al girar a 1200 rev/min? Compare esto con el resultado del inciso *c*).

10.34 •• La hélice de un avión tiene longitud de 2.08 m (de punta a punta) y masa de 117 kg. Al arrancarse, el motor del avión aplica una torca constante de 1950 $N \cdot m$ a la hélice, que parte del reposo. *a*) Calcule la aceleración angular de la hélice, tratándola como varilla delgada y vea la tabla 9.2. *b*) Calcule la rapidez angular de la hélice después de 5.00 revoluciones. *c*) ¿Cuánto trabajo efectúa el motor durante las primeras 5.00 revoluciones? *d*) ¿Qué potencia media desarrolla el motor durante las primeras 5.00 revoluciones? *e*) ¿Qué potencia instantánea desarrolla el motor en el instante en que la hélice ha girado 5.00 revoluciones?

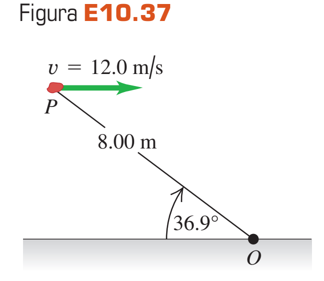
10.35 • *a*) Calcule la torca producida por un motor industrial que desarrolla 150 kW a una rapidez angular de 4000 rev/min. *b*) Un tambor de 0.400 m de diámetro y masa despreciable se conecta al eje del motor, y la potencia del motor se utiliza para levantar un peso que cuelga de una cuerda enrollada en el tambor. ¿Qué peso máximo puede levantar el motor, con rapidez constante? *c*) ¿Con qué rapidez subirá el peso?

Sección 10.5 Momento angular

10.36 •• Una mujer con masa de 50 kg está de pie en el borde de un disco grande, el cual gira a 0.50 rev/s alrededor de un eje que pasa por su centro. El disco tiene una masa de 110 kg y radio de 4.0 m. Calcule la magnitud del momento angular total del sistema mujer-disco. (Suponga que la mujer puede tratarse como punto).

10.37 • Una piedra de 2.00 kg tiene una velocidad horizontal con magnitud de 12.0 m/s cuando está en el punto *P* de la figura E10.37. *a*) En ese instante, ¿qué momento angular (magnitud y dirección) tiene con respecto a *O*? *b*) Suponiendo que la única fuerza que actúa sobre la piedra es su peso, calcule la rapidez del cambio (magnitud y dirección) de su momento angular en ese instante.

Figura **E10.37**



10.38 •• *a*) Calcule la magnitud del momento angular de la Tierra en órbita alrededor del Sol. ¿Es razonable considerar a la Tierra como partícula? *b*) Calcule la magnitud del momento angular de la Tierra debido a su rotación en torno a un eje que pasa por los Polos Norte y Sur, tratando a la Tierra como una esfera uniforme. Consulte el apéndice E y los datos astronómicos del apéndice F.

10.39 •• Calcule la magnitud del momento angular del segundero de un reloj alrededor de un eje que pasa por el centro de la carátula. La manecilla tiene una longitud de 15.0 cm y masa de 6.00 g. Trate la manecilla como una varilla delgada que gira con velocidad angular constante alrededor de un extremo.

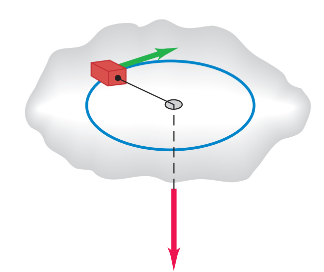
10.40 •• **CALC** Una esfera hueca de pared delgada con masa de 12.0 kg y diámetro de 48.0 cm gira alrededor de un eje que pasa por su centro. El ángulo (en radianes) con el que gira en función del tiempo (en segundos) está dado por $\theta(t) = At^2 + Bt^4$, donde *A* tiene valor numérico de 1.50 y *B* tiene valor numérico de 1.10. *a*) ¿Cuáles son las unidades de las constantes *A* y *B*? *b*) En el instante $t = 3.00$ s, calcule **i.** el momento angular de la esfera y **ii.** la torca neta de la esfera.

Sección 10.6 Conservación del momento angular

10.41 •• En ciertas circunstancias, una estrella puede colapsar formando un objeto extremadamente denso constituido principalmente por neutrones y al que se conoce como *estrella de neutrones*. La densidad de tales estrellas es unas 10^{14} veces mayor que la de la materia sólida ordinaria. Suponga que representamos la estrella como esfera sólida, rígida y uniforme, tanto antes como después del colapso. El radio inicial era de 7.0×10^5 km (comparable al del Sol); y el radio final, de 16 km. Si la estrella original giraba una vez cada 30 días, calcule la rapidez angular de la estrella de neutrones.

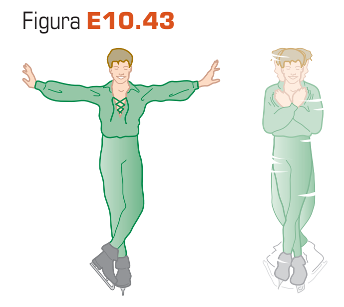
10.42 • **PA** Un bloque pequeño de 0.0250 kg en una superficie horizontal sin fricción está atado a una cuerda de masa despreciable que pasa por un agujero en la superficie (figura E10.42). El bloque inicialmente está girando a una distancia de 0.300 m del agujero, con rapidez angular de 1.75 rad/s. Ahora se tira de la cuerda desde abajo, acortando el radio del círculo que describe el bloque a 0.150 m. El bloque puede tratarse como partícula. *a*) ¿Se conserva el momento angular del bloque? ¿Por qué? *b*) ¿Qué valor tiene ahora la rapidez angular? *c*) Calcule el cambio de energía cinética del bloque. *d*) ¿Cuánto trabajo se efectuó al tirar de la cuerda?

Figura **E10.42**



10.43 •• **Patinador que gira.** Los brazos extendidos de un patinador que prepara un giro pueden considerarse como una varilla delgada que pivota sobre un eje que pasa por su centro (figura E10.43). Cuando los brazos se juntan al cuerpo para ejecutar el giro, se pueden considerar como un cilindro hueco de pared delgada. Los brazos y las manos tienen una masa combinada de 8.0 kg. Cuando se extienden, abarcan 1.8 m; y encogidos, forman un cilindro con 25 cm de radio. El momento de inercia del resto del cuerpo alrededor del eje de rotación es constante e igual a 0.40 kg·m^2. Si la rapidez angular original del patinador es de 0.40 rev/s, ¿cuál es la rapidez angular final?

Figura **E10.43**



10.44 •• Una clavadista salta del trampolín con los brazos hacia arriba y las piernas hacia abajo, lo que le confiere un momento de inercia alrededor de su eje de rotación de 18 kg·m^2. Luego, ella encoge su cuerpo para formar una pequeña esfera, reduciendo su momento de inercia a 3.6 kg·m^2, y gira dos revoluciones completas en 1.0 s. Si no se hubiera encogido, ¿cuántas revoluciones habría girado en los 1.5 s que tarda en caer desde el trampolín al agua?

10.45 •• Una tornamesa de madera de 120 kg con forma de disco plano tiene 2.00 m de radio y gira inicialmente alrededor de un eje vertical, que pasa por su centro, a 3.00 rad/s. De repente, un paracaidista de 70.0 kg se posa suavemente sobre la tornamesa en un punto cerca del borde. *a*) Calcule la rapidez angular de la tornamesa después de que el paracaidista se posa en ella. (Suponga que puede tratarse al paracaidista como partícula). *b*) Calcule la energía cinética del sistema antes y después de la llegada del paracaidista. ¿Por qué no son iguales estas energías?

10.46 •• Una puerta de madera sólida de 1.00 m de ancho y 2.00 m de alto tiene las bisagras en un lado y una masa total de 40.0 kg. La puerta, que inicialmente está abierta y en reposo, es golpeada en su centro por un puñado de lodo pegajoso con masa de 0.500 kg, que viaja en dirección perpendicular a la puerta a 12.0 m/s justo antes del impacto. Calcule la rapidez angular final de la puerta. ¿Es apreciable la aportación del lodo al momento de inercia?

10.47 •• Un pequeño bicho de 10.0 g está parado en el extremo de una barra delgada y uniforme que inicialmente se encuentra en reposo en una mesa horizontal lisa. El otro extremo de la barra pivota en torno a un clavo incrustado en la mesa, y puede girar libremente sin fricción. La masa de la barra es de 50.0 g, y su longitud de 100 cm. El bicho salta en dirección horizontal, perpendicular a la barra, con rapidez de 20.0 cm/s con respecto a la mesa. *a*) ¿Cuál es la rapidez angular de la barra inmediatamente después del salto del insecto juguetón? *b*) Calcule la energía cinética total del sistema inmediatamente después del salto. *c*) ¿De dónde proviene la energía?

10.48 •• **¡Choque de asteroide!** Suponga que un asteroide que viaja en línea recta hacia el centro de la Tierra fuera a estrellarse contra nuestro planeta en el ecuador y se incrustara apenas por debajo de la superficie. En términos de la masa terrestre M, ¿cuál tendría que ser la masa de dicho asteroide para que el día sea un 25.0% más largo de lo que actualmente es como resultado del choque? Suponga que el asteroide es muy pequeño en comparación con la Tierra y que esta es un cuerpo uniforme.

10.49 •• Una barra metálica delgada y uniforme, de 2.00 m de longitud y con un peso de 90.0 N, cuelga verticalmente del techo en un pivote sin fricción colocado en el extremo superior. De repente, una pelota de 3.00 kg, que viaja inicialmente a 10.0 m/s en dirección horizontal, golpea la barra 1.50 m abajo del techo. La pelota rebota en dirección opuesta con rapidez de 6.00 m/s. *a*) Calcule la rapidez angular de la barra inmediatamente después del choque. *b*) Durante el choque, ¿por qué se conserva el momento angular pero no el momento lineal?

10.50 •• Una varilla delgada uniforme tiene una longitud de 0.500 m y está girando en un círculo sobre una mesa sin rozamiento. El eje de rotación es perpendicular a la longitud de la varilla en un extremo y está en reposo. La varilla tiene una velocidad angular de 0.400 rad/s y un momento de inercia sobre el eje de 3.00×10^{-3} kg·m^2. Un bicho, inicialmente parado en el extremo de la varilla en el eje de rotación, decide arrastrarse hasta el otro extremo de la varilla. Cuando el bicho ha alcanzado el extremo de la varilla y se sienta allí, su rapidez tangencial es 0.160 m/s. El bicho se puede tratar como una masa puntual. *a*) ¿Cuál es la masa de la barra? *b*) ¿Cuál es la masa del bicho?

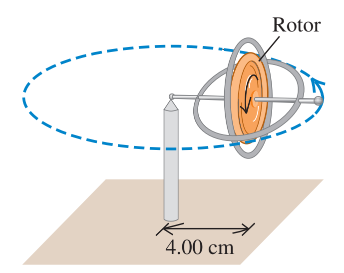
10.51 •• Un portón de madera sólida, cuadrado y uniforme, de 4.5 kg, de 1.5 m de lado cuelga verticalmente desde un pivote sin fricción en el centro de su extremo superior. Un cuervo de 1.1 kg que vuela horizontalmente a 5.0 m/s se dirige hacia el centro de la puerta y rebota en la dirección contraria 2.0 m/s. *a*) ¿Cuál es la velocidad angular de la puerta justo después de que es golpeada por el desafortunado cuervo? *b*) Durante la colisión, ¿por qué se conserva el momento angular, pero no el momento lineal?

10.52 •• **Sedna.** En noviembre de 2003, el ahora más lejano objeto conocido en el Sistema Solar fue descubierto mediante la observación con un telescopio en el Monte Palomar. Este objeto, conocido como Sedna, tiene aproximadamente 1700 km de diámetro, tarda alrededor de 10,500 años en orbitar nuestro Sol, y alcanza una rapidez máxima de 4.64 km/s. Los cálculos de su trayectoria completa, con base en varias mediciones de la posición, indican que su órbita es muy elíptica y varía desde 76 UA a 942 UA en su distancia con respecto al Sol; UA es la unidad astronómica, que es la distancia promedio de la Tierra al Sol (1.50×10^8 km). *a*) ¿Cuál es la rapidez mínima de Sedna? *b*) ¿En qué puntos de su órbita ocurren sus rapideces máxima y mínima? *c*) ¿Cuál es la razón entre la energía cinética máxima y la energía cinética mínima del Sedna?

Sección 10.7 Giróscopos y precesión

10.53 •• El rotor (volante) de un giróscopo de juguete tiene una masa de 0.140 kg. Su momento de inercia alrededor de su eje es 1.20×10^{-4} kg·m^2. La masa del marco es de 0.0250 kg. El giróscopo se apoya en un solo pivote (figura E10.53) con su centro de masa a una distancia horizontal de 4.00 cm del pivote. El giróscopo hace un movimiento de precesión en un plano horizontal a razón de una revolución cada 2.20 s. *a*) Calcule la fuerza hacia arriba ejercida por el pivote. *b*) Calcule la rapidez angular en rpm con que el rotor gira sobre su eje. *c*) Copie el diagrama e indique con vectores el momento angular del rotor y la torca que actúa sobre este.

Figura **E10.53**



10.54 • **Un giróscopo en la Luna.** Cierto giróscopo efectúa un movimiento de precesión con una rapidez de 0.50 rad/s cuando se utiliza en la Tierra. Si se transportara a una base lunar, donde la aceleración debida a la gravedad es de 0.165g, ¿cuál sería su rapidez de precesión?

10.55 • Un giróscopo realiza un movimiento de precesión alrededor de un eje vertical. Describa qué pasa con la rapidez angular de precesión si se efectúan los siguientes cambios, sin alterar las demás variables: *a*) se duplica la rapidez angular del volante; *b*) se duplica el peso total; *c*) se duplica el momento de inercia del volante alrededor de su eje; *d*) se duplica la distancia del pivote al centro de gravedad. *e*) ¿Qué

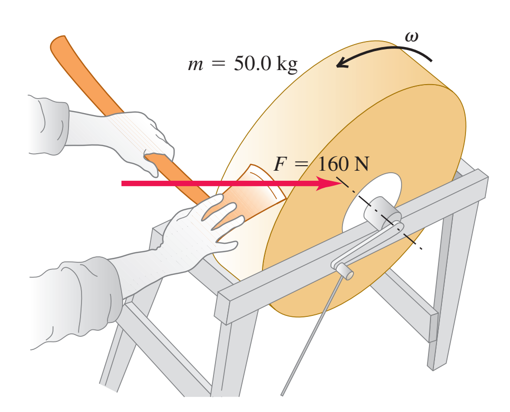
sucede si se duplican simultáneamente las cuatro variables de los incisos *a*) a *d*)?

10.56 • **Estabilización del Telescopio Espacial Hubble**. El Telescopio Espacial Hubble se estabiliza dentro de un ángulo de alrededor de 2 millonésimas de grado mediante una serie de giróscopos que giran a 19,200 rpm. Aunque la estructura de estos giróscopos es bastante compleja, podemos modelar a cada uno de ellos como un cilindro de pared delgada de 2.0 kg de masa y 5.0 cm de diámetro, girando alrededor de su eje central. ¿Qué magnitud de la torca se necesita para hacer que estos giróscopos realicen un movimiento de precesión de un ángulo de 1.0×10^{-6} grados durante una exposición de 5.0 horas de una galaxia?

PROBLEMAS

10.57 •• Una piedra de afilar de 50.0 kg es un disco sólido de 0.520 m de diámetro. Se empuja una hacha contra el borde con una fuerza normal de 160 N (figura P10.57). El coeficiente de fricción cinética entre la piedra y el hacha es de 0.60, y hay una torca por fricción constante de 6.50 N·m entre el eje de la piedra y sus cojinetes. *a*) ¿Qué fuerza debe aplicarse tangencialmente al extremo de una manivela impulsora de 0.500 m para llevar la piedra del reposo a 120 rev/min en 9.00 s? *b*) Una vez que la piedra alcanza esa rapidez angular, ¿qué fuerza tangencial se tendría que aplicar al extremo de la manivela impulsora para mantenerla con una rapidez angular constante de 120 rev/min? *c*) ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en detenerse, si solo la fricción del eje actúa sobre ella y está girando a 120 rev/min?

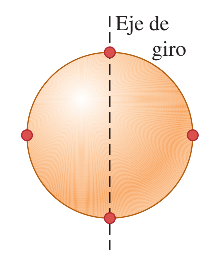
Figura **P10.57**



10.58 •• Una rueda experimental de bicicleta se coloca en un banco de pruebas, de modo que pueda girar libremente sobre su eje. Se ejerce una torca neta constante de 7.00 N·m a la rueda durante 2.00 s, aumentando la rapidez angular de la rueda de 0 a 100 rev/min. Luego, se deja de aplicar la torca externa y la fricción en los cojinetes de la rueda la detiene en 125 s. Calcule *a*) el momento de inercia de la rueda alrededor del eje de rotación; *b*) la torca por fricción; *c*) el número total de revoluciones que la rueda gira en ese lapso de 125 s.

10.59 ••• Una piedra de afilar en forma de un disco sólido con diámetro de 0.520 m y masa de 50.0 kg está girando a 850 rev/min. Se presiona un hacha contra el borde con una fuerza normal de 160 N (figura P10.57), y la piedra de afilar se detiene en 7.50 s. Encuentre el coeficiente de fricción entre el hacha y la piedra de afilar. Puede despreciar la fricción en los cojinetes.

Figura **P10.60**

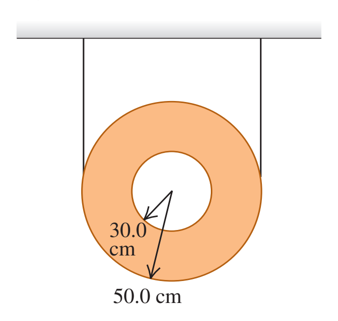


10.60 ••• Una esfera hueca uniforme de 8.40 kg y 50.0 cm de diámetro tiene cuatro masas pequeñas de 2.00 kg pegadas a su superficie exterior, a distancias iguales. Esta combinación gira en torno a un eje que pasa por el centro de la esfera y dos de las masas pequeñas (figura P10.60). ¿Qué torca por fricción se requiere para reducir la rapidez angular del sistema, de 75.0 a 50.0 rpm en 30.0 s?

10.61 ••• Un cilindro sólido uniforme con masa 8.25 kg y 15.0 cm de diámetro está girando a 220 rpm en un eje delgado, sin fricción que pasa a lo largo del eje del cilindro. Usted diseña un freno de fricción sencillo para detener el cilindro presionando el freno contra el borde exterior con una fuerza normal. El coeficiente de fricción cinética entre el freno y el borde es 0.333. ¿Cuál debe ser la fuerza aplicada normal para que el cilindro se detenga después de haber girado 5.25 revoluciones?

10.62 ••• Un disco hueco uniforme tiene dos trozos de alambre delgado ligero que se enrollan alrededor de su borde exterior y están sujetos al techo (figura P10.62). De repente, se rompe uno de los alambres, y el alambre que queda no se desliza conforme el disco rueda hacia abajo. Utilice la conservación de la energía para calcular la rapidez del centro de este disco, después de que haya caído una distancia de 2.20 m.

Figura **P10.62**



10.63 ••• Una barra delgada y uniforme de 3.80 kg y 80.0 cm de longitud tiene pegadas esferas muy pequeñas de 2.50 kg en cada uno de sus extremos (figura P10.63). La barra está apoyada horizontalmente en un eje delgado y sin fricción que pasa por su centro y es perpendicular a la barra. De repente, la esfera del lado derecho se despega y se cae, aunque la otra permanece pegada a la barra. *a*) Calcule la aceleración angular de la barra justo después de que la esfera se cae. *b*) ¿La aceleración angular permanece constante mientras la barra continua balanceándose? Si no es así, ¿aumentará o disminuirá? *c*) Obtenga la velocidad angular de la barra justo cuando se balancee por su posición vertical.

Figura **P10.63**

2.50 kg 2.50 kg
Barra Eje (visto desde un extremo)

10.64 ••• Exena la Exterminadora está explorando un castillo. Un dragón la ve y la persigue por un pasillo. Exena se introduce en una habitación y trata de cerrar la pesada puerta antes de que el dragón la atrape. Inicialmente, la puerta es perpendicular a la pared, así que debe girar 90° para cerrarse. La puerta tiene 3.00 m de altura y 1.25 m de ancho, y pesa 750 N. Puede despreciarse la fricción en las bisagras. Si Exena aplica una fuerza de 220 N al borde de la puerta, perpendicular a ella, ¿cuánto tiempo tardará en cerrarla?

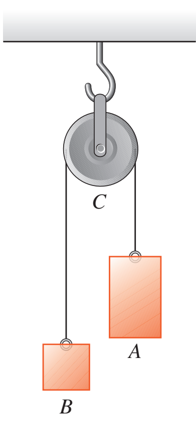
10.65 •• **CALC** Se ata una cuerda ligera a un punto en el borde de un disco vertical uniforme de radio R y masa M. El disco puede girar sin fricción alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por su centro. Inicialmente, el disco está en reposo con la cuerda atada al punto más alto del disco. Se tira de la cuerda con una fuerza horizontal constante $\vec{F}$ hasta que el disco ha girado exactamente un cuarto de revolución, y luego se suelta. *a*) Use la ecuación (10.20) para calcular el trabajo realizado por la cuerda. *b*) Use la ecuación (6.14) para calcular el trabajo realizado por la cuerda. ¿Obtiene el mismo resultado que en el inciso *a*)? *c*) Determine la rapidez angular final del disco. *d*) Determine la aceleración tangencial máxima de un punto del disco. *e*) Determine la aceleración radial (centrípeta) máxima de un punto del disco.

10.66 ••• **Equilibrismo.** Una bolita de arcilla con masa M está pegada a un extremo de una varilla larga, delgada y uniforme de la misma masa M y longitud L. *a*) Ubique la posición del centro de masa del sistema varilla-arcilla. Marque esta posición en un dibujo de la varilla. *b*) Se equilibra con cuidado la varilla en una mesa sin fricción, de

modo que quede colocada verticalmente, con el extremo que no tiene arcilla tocando la mesa. Ahora la varilla se inclina formando un ángulo pequeño q con la vertical. Determine su aceleración angular en este instante, suponiendo que el extremo sin arcilla no pierde contacto con la mesa. (*Sugerencia:* Véase la tabla 9.2). *c*) Se equilibra otra vez la varilla en la mesa sin fricción de modo que quede colocada verticalmente, pero ahora con el extremo *que tiene* la arcilla tocando la superficie. Otra vez, la varilla se inclina formando un ángulo pequeño q con la vertical. Determine su aceleración angular en ese instante, suponiendo que la arcilla permanece en contacto con la mesa. ¿Cómo se compara su resultado con el que obtuvo en el inciso *b*)? *d*) Un taco de billar es una varilla que tiene un extremo grueso y se adelgaza continuamente hasta el otro extremo. Es fácil equilibrar un taco verticalmente sobre un dedo, si el extremo delgado está en contacto con el dedo; sin embargo, resulta mucho más difícil si el extremo que está en contacto con el dedo es el grueso. Explique esta diferencia.

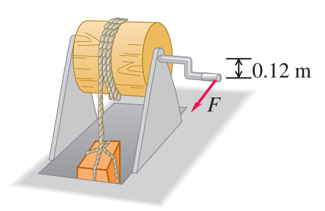
10.67 •• Máquina de Atwood. La figura P10.67 muestra una máquina de Atwood. Encuentre las aceleraciones lineales de bloques A y B, la aceleración angular de la rueda C y la tensión en cada lado del cable si no hay deslizamiento entre el cable y la superficie de la rueda. Sean las masas de los bloques A y B, 4.00 kg y 2.00 kg, respectivamente, el momento de inercia de la rueda en torno a su eje es 0.300 kg·m^2, y sea el radio de la rueda igual a 0.120 m.

Figura **P10.67**



10.68 ••• El mecanismo de la figura P10.68 sirve para sacar una caja con provisiones de la bodega de un barco. La caja tiene una masa total de 50 kg. Una cuerda está enrollada en un cilindro de madera que gira sobre un eje metálico. El cilindro tiene un radio de 0.25 m y un momento de inercia I = 2.9 kg·m^2 alrededor del eje. La caja cuelga del extremo libre de la cuerda. Un extremo del eje pivota sobre cojinetes sin fricción; una manivela está unida al otro extremo. Cuando se gira la manivela, el extremo del mango gira alrededor del eje en un círculo vertical de 0.12 m de radio, el cilindro gira y la caja sube. ¿Qué magnitud de la fuerza $\vec{F}$ aplicada tangencialmente a la manivela se necesita para levantar la caja con una aceleración de 1.40 m/s^2? (Pueden despreciarse la masa de la cuerda, así como los momentos de inercia del eje y la manivela).

Figura **P10.68**



10.69 •• Un rollo de 16.0 kg de papel con radio R = 18.0 cm descansa contra la pared sostenido por un soporte unido a una varilla que pasa por el centro del rollo (figura P10.69). La varilla gira sin fricción en el soporte, y el momento de inercia del papel y la varilla alrededor del eje es de 0.260 kg·m^2. El otro extremo del soporte está unido a la pared mediante una bisagra sin fricción, de modo que el soporte forma un ángulo de 30.0° con la pared. El peso del soporte es despreciable. El coeficiente de fricción cinética entre el papel y la pared es μ_k = 0.25. Se aplica una fuerza vertical constante F = 60.0 N al papel, que se desenrolla. *a*) ¿Qué magnitud tiene la fuerza que la varilla ejerce sobre el rollo de papel al desenrollarse este? *b*) ¿Qué aceleración angular tiene el rollo?

Figura **P10.69**

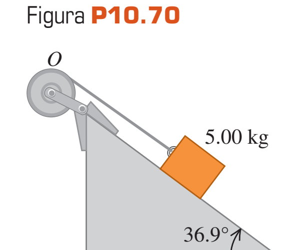
30.0°

R

60.0 N

10.70 •• Un bloque con masa m = 5.00 kg baja deslizándose por una superficie inclinada 36.9° con respecto a la horizontal (figura P10.70). El coeficiente de fricción cinética es 0.25. Una cuerda atado al bloque está enrollada en un volante con su eje fijo en O. El volante tiene una masa de 25.0 kg, y un momento de inercia con respecto al eje de 0.500 kg·m^2. La cuerda tira sin resbalar a una distancia perpendicular de 0.200 m con respecto a ese eje. *a*) ¿Qué aceleración tiene el bloque? *b*) ¿Qué tensión hay en la cuerda?

Figura **P10.70**



10.71 ••• Dos discos metálicos, uno con radio R_1 = 2.50 cm y masa M_1 = 0.80 kg y el otro con radio R_2 = 5.00 cm y masa M_2 = 1.60 kg, se sueldan entre sí y se montan en un eje sin fricción que pasa por su centro común, como en el problema 9.87. *a*) Una cuerda ligera se enrolla en el borde del disco de menor tamaño, y un bloque de 1.50 kg se cuelga del extremo libre de la cuerda. ¿Qué magnitud tiene la aceleración hacia abajo del bloque una vez que se suelta? *b*) Repita el cálculo del inciso *a*), ahora con la cuerda enrollada en el borde del disco de mayor tamaño. ¿En qué caso es mayor la aceleración del bloque? ¿Es lógica la respuesta?

10.72 •• Se tira horizontalmente de una máquina para cortar el césped, en forma de cilindro hueco con pared delgada y masa M, aplicando una fuerza horizontal constante F a un mango sujeto al eje. Si la máquina rueda sin resbalar, calcule la aceleración y la fuerza de fricción.

10.73 • Dos pesos están conectados por una cuerda flexible muy ligera, que pasa por una polea sin fricción de 80.0 N y radio de 0.300 m. La polea es un disco sólido uniforme y está apoyada de un gancho unido al techo (figura P10.73). ¿Qué fuerza ejerce el techo sobre el gancho?

Figura **P10.73**

125 N

75.0 N

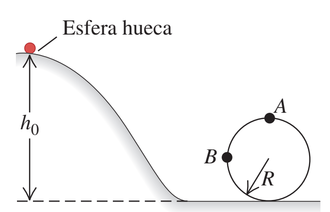
10.74 •• Un disco sólido rueda sin resbalar en una superficie plana con rapidez constante de 3.60 m/s. *a*) ¿Hasta qué altura puede subir por una rampa de 30.0° antes de detenerse? *b*) Explique por qué su respuesta del inciso *a*) no depende de la masa ni del radio del disco.

10.75 • El yoyo. Un yoyo consiste en dos discos uniformes, cada uno con masa m y radio R, conectados por un eje ligero de radio b. Una cuerda ligera se enrolla varias veces en el eje y luego se mantiene fija mientras el yoyo se libera del reposo; el yoyo cae al desenrollarse el hilo. Calcule las aceleraciones lineal y angular del yoyo, y la tensión en la cuerda.

10.76 •• PA Un cascarón esférico de pared delgada, con masa m y radio r, parte del reposo y rueda hacia abajo sin deslizarse por la pista que se muestra en la figura P10.76. Los puntos A y B están en la parte

circular de la pista, cuyo radio es R. El diámetro de la esfera es muy pequeño comparado con h_0 y R, y la fricción por rodamiento es despreciable. *a*) ¿Cuál es la altura mínima h_0 para la cual esta esfera dará una vuelta completa a la parte circular de la pista? *b*) ¿Qué tan fuerte empuja la pista sobre la esfera en el punto B, que está al mismo nivel que el centro del círculo? *c*) Suponga que la pista no tiene fricción y que la esfera se suelta desde la misma altura h_0 que usted obtuvo en el inciso *a*). ¿Daría la vuelta completa al bucle? ¿Cómo lo sabe? *d*) En el inciso *c*), ¿qué tan fuerte empuja la pista sobre la esfera en el punto A, la cima del círculo? ¿Qué tan fuerte empujó a la esfera en el inciso *a*)?

Figura **P10.76**



10.77 • Partiendo del reposo, se aplica una fuerza constante $F = 100$ N al extremo libre de un cable de 50 m, que está enrollado en el borde exterior de un cilindro sólido y uniforme de 4.00 kg con diámetro de 30.0 cm, en una situación similar a la de la figura 10.9*a*. El cilindro puede girar libremente en torno a un eje fijo, sin fricción, que pasa por su centro. *a*) ¿Cuánto tarda en desenrollarse todo el cable y con qué rapidez se está moviendo este en el instante en que termina de desenrollarse? *b*) Suponga ahora que, en vez de un cilindro, se usa un aro uniforme, pero sin alterar ninguna de las cantidades dadas. ¿Las respuestas a la pregunta del inciso *a*) serían valores más altos o más bajos en este caso? Explique su respuesta.

10.78 •• Como se muestra en la figura E10.20, una cuerda está enrollada varias vueltas en el borde de un aro con radio de 0.0800 m y masa de 0.180 kg. Se tira hacia arriba del extremo libre del aro, de forma tal que el aro no se mueve verticalmente mientras la cuerda se desenrolla. *a*) Calcule la tensión en el hilo mientras se desenrolla. *b*) Determine la aceleración angular del aro durante el desenrollado de la cuerda. *c*) Calcule la aceleración hacia arriba de la mano que tira del extremo libre de la cuerda. *d*) ¿Cómo cambiarían sus respuestas si el aro se sustituyera por un disco sólido con los mismos masa y radio?

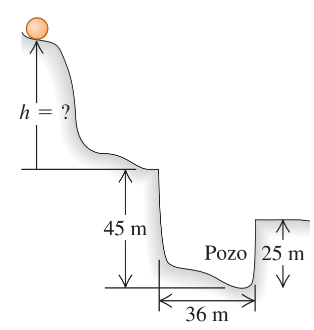
10.79 •• Una pelota de baloncesto (que se puede modelar muy bien como una esfera hueca) rueda por una ladera de la montaña en un valle y luego hasta el lado opuesto, partiendo del reposo a una altura H_0 por encima del fondo. En la figura P10.79, la parte áspera del terreno impide el deslizamiento, mientras que la parte lisa no tiene fricción. *a*) ¿Qué tan alto, en términos de H_0 subirá la pelota por el otro lado? *b*) ¿Por qué no regresa la pelota a la altura H_0? ¿Ha perdido algo de su energía potencial original?

Figura **P10.79**



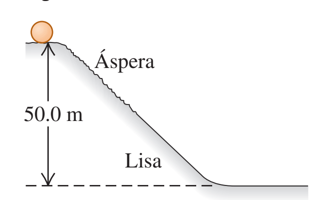
10.80 • **PA** Una canica uniforme baja rodando sin resbalar por el trayecto de la figura P10.80, partiendo del reposo. *a*) Calcule la altura mínima h que evita que la canica caiga en el foso. *b*) El momento de inercia de la canica depende de su radio. Explique por qué la respuesta al inciso *a*) no depende del radio de la canica. *c*) Resuelva el inciso *a*) para un bloque que se desliza sin fricción, en vez de una canica que rueda. ¿Cómo se compara la h mínima en este caso con la respuesta al inciso *a*)?

Figura **P10.80**



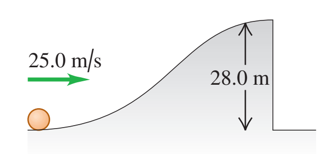
10.81 •• **Piedras rodantes.** Un peñasco esférico, sólido y uniforme parte del reposo y baja rodando por la ladera de una colina de 50.0 m de altura (figura P10.81). La mitad superior de la colina es lo bastante áspera como para que el peñasco ruede sin resbalar; sin embargo, la mitad inferior está cubierta de hielo y no hay fricción. Calcule la rapidez de traslación del peñasco al llegar al pie de la colina.

Figura **P10.81**



10.82 •• **PA** Una esfera sólida uniforme rueda sin resbalar subiendo una colina, como se muestra en la figura P10.82. En la cima, la esfera se mueve horizontalmente y después se cae por un acantilado vertical. *a*) ¿A qué distancia del pie del acantilado cae la esfera y con qué rapidez se está moviendo justo antes de tocar el suelo? *b*) Observe que, al tocar tierra, la esfera tiene mayor rapidez de traslación que cuando estaba en la base de la colina. ¿Implica esto que la esfera obtuvo energía de algún lado? ¡Explique su respuesta!

Figura **P10.82**



10.83 •• Una rueda de 42.0 cm de diámetro consiste en un borde y seis rayos; está hecha de un material plástico rígido y delgado con una densidad lineal de masa de 25.0 g/cm. Esta rueda se suelta desde el reposo en la cima de una colina de 58.0 m de altura. *a*) ¿Con qué rapidez rueda cuando llega a la base de la colina? *b*) ¿Cómo cambiaría su respuesta si la densidad lineal de masa y el diámetro de la rueda se duplicaran?

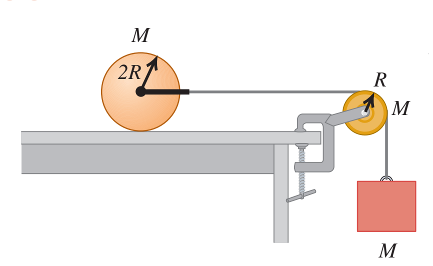
10.84 •• Una niña empuja un balón de baloncesto de 0.600 kg para que suba rodando por una rampa larga. El balón puede considerarse como esfera hueca de pared delgada. Cuando la niña suelta el balón en la base de la rampa, este tiene una rapidez de 8.0 m/s. Cuando el balón vuelve a ella después de subir por la rampa y regresar rodando, tiene una rapidez de 4.0 m/s. Suponga que el trabajo efectuado por la fricción sobre el balón es el mismo cuando sube o baja por la rampa, y que el balón rueda sin resbalar. Calcule el aumento máximo en la altura vertical del balón al subir por la rampa.

10.85 •• **PA** En un experimento, se deja que una bola sólida uniforme baje rodando por una pista curva, partiendo del reposo y rodando sin resbalar. La distancia vertical que la bola desciende es h. La base de la pista es horizontal y se extiende hasta el borde de una mesa; la bola sale de la pista viajando horizontalmente. En caída libre después de salir de la pista, la bola se mueve una distancia horizontal x y una distancia vertical y. *a*) Calcule x en términos de h y y, despreciando el trabajo de la fricción. *b*) ¿Cambiaría la respuesta al inciso *a*) en la Luna? *c*) Aunque el experimento se realice con mucho cuidado, el valor medido de x es siempre un poco menor que el calculado en el inciso *a*). ¿Por qué? *d*) ¿Cuánto valdría x con las mismas h y y del inciso *a*), si lo que rodara por la pista fuera una moneda de plata? Puede despreciarse el trabajo efectuado por la fricción.

10.86 •• Un puente levadizo uniforme de 8.00 m de longitud está unido al camino en un extremo mediante una articulación sin fricción, y puede levantarse con un cable unido al otro extremo. El puente está en reposo, suspendido 60.0° sobre la horizontal, cuando el cable se rompe repentinamente. *a*) Calcule la aceleración angular del puente inmediatamente después de romperse el cable. (La gravedad se comporta como si actuara en el centro de masa). *b*) ¿Podría usar la ecuación $\omega = \omega_0 + \alpha t$ para calcular la rapidez angular del puente levadizo en un instante posterior? Explique por qué. *c*) ¿Qué rapidez angular tiene el puente en el momento de quedar horizontal?

10.87 • Un cilindro sólido uniforme de masa M y radio $2R$ descansa en una mesa horizontal. Se ata una cuerda mediante un yugo a un eje sin fricción que pasa por el centro del cilindro, de modo que este pueda girar sobre el eje. La cuerda pasa por una polea con forma de disco de masa M y radio R, que está montada en un eje sin fricción que pasa por su centro. Un bloque de masa M se suspende del extremo libre del hilo (figura P10.87). La cuerda no resbala en la polea, y el cilindro rueda sin resbalar sobre la mesa. Si el sistema se libera del reposo, determine la magnitud de la aceleración del bloque.

Figura **P10.87**



10.88 ••• Una varilla uniforme de 0.0300 kg y 0.400 m de longitud gira en un plano horizontal alrededor de un eje fijo que pasa por su centro y es perpendicular a la varilla. Dos anillos pequeños con masa de 0.0200 kg se montan, cada uno, de modo que puedan deslizarse a lo largo de la varilla, aunque inicialmente están sujetos con broches en posiciones a 0.0500 m del centro de la varilla a cada lado, y el sistema está girando a 30.0 rev/min. Sin alterar de otro modo el sistema, los broches se sueltan y los anillos se deslizan hacia afuera por la varilla, saliendo despedidos por los extremos. *a*) ¿Qué rapidez angular tiene el sistema en el instante en que los anillos llegan a los extremos de la varilla? *b*) ¿Qué rapidez angular tiene la varilla una vez que los anillos se salen?

10.89 ••• Una esfera de 5.00 kg se deja caer desde una altura de 12.0 m arriba de un extremo de una barra uniforme que está pivotada en su centro. La masa de la barra es de 8.00 kg y su longitud es de 4.00 m. Sobre el otro extremo de la barra descansa otra esfera de 5.00 kg, no sujeta a la barra. La esfera que cae se queda pegada a la barra después del choque. ¿Qué altura alcanzará la otra esfera después del choque?

10.90 •• **Tarzán y Jane en el siglo XXI.** Tarzán tontamente se ha metido en otro lío con los animales y Jane debe rescatarlo de nuevo. Jane, de 60.0 kg, parte del reposo a una altura de 5.00 m entre los árboles y se balancea hacia abajo al suelo con una delgada liana, pero muy rígida, de 30.0 kg y de 8.00 m de largo. Llega justo a tiempo para arrebatar a Tarzán, de 72.0 kg, de las fauces de un hipopótamo furioso. ¿Cuál es la rapidez angular de Jane (y de la liana) *a*) justo antes de que ella agarre a Tarzán y *b*) justo después de que lo agarra? *c*) ¿Hasta qué altura suben Tarzán y Jane en su primer balanceo después de este audaz rescate?

10.91 •• Una varilla uniforme de longitud L descansa en una superficie horizontal sin fricción. La varilla pivota en un extremo sobre un eje fijo sin fricción y está inicialmente en reposo. Una bala que viaja paralela a la superficie horizontal y perpendicular a la varilla, con rapidez v, golpea la varilla en su centro y se incrusta en ella. La masa de la bala es un cuarto de la masa de la varilla. *a*) ¿Qué rapidez angular final tiene la varilla? *b*) ¿Qué proporción hay entre la energía cinética del sistema después del choque y la energía cinética de la bala antes del choque?

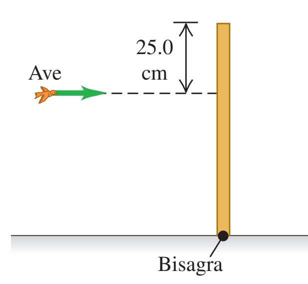
10.92 •• La puerta de madera sólida de un gimnasio tiene 1.00 m de ancho y 2.00 m de altura, bisagras en un lado y una masa total de 35.0 kg. La puerta, que está abierta y en reposo, es golpeada en su centro por un balón de baloncesto que le aplica una fuerza media de 1500 N durante 8.00 ms. Calcule la rapidez angular de la puerta después del impacto. [*Sugerencia:* Si integramos la ecuación (10.29), obtenemos $\Delta L_z = \int_{t_1}^{t_2}(\sum\tau_z)dt = (\sum\tau_z)_{\text{med}}\Delta t$. La cantidad $\int_{t_1}^{t_2}(\sum\tau_z)dt$ se denomina impulso angular].

10.93 ••• Una diana de una galería de tiro consiste en un tablero cuadrado vertical de madera de 0.750 kg y 0.250 m de lado, que pivota sobre un eje horizontal en su borde superior. Una bala de 1.90 g que viaja a 360 m/s golpea el tablero de frente en el centro y se incrusta en él. *a*) ¿Qué rapidez angular tiene el tablero justo después del impacto? *b*) ¿Qué altura máxima sobre la posición de equilibrio alcanza el centro del tablero? *c*) ¿Qué rapidez mínima tendría que tener la bala para que el tablero diera una vuelta completa después del impacto?

10.94 •• ***Glitches* de estrellas de neutrones.** A veces, una estrella de neutrones giratoria (véase el ejercicio 10.41) sufre una aceleración repentina e inesperada llamada *glitch*. Una explicación es que el *glitch* se presenta cuando la corteza de la estrella se asienta un poco, reduciendo el momento de inercia alrededor del eje de rotación. Una estrella de neutrones con rapidez angular $\omega_0 = 70.4$ rad/s sufrió un *glitch* en octubre de 1975, el cual aumentó su velocidad angular a $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, donde $\Delta\omega/\omega_0 = 2.01 \times 10^{-6}$. Si el radio de la estrella de neutrones antes del *glitch* era de 11 km, ¿en cuánto disminuyó su radio por el "sismo estelar"? Suponga que la estrella es una esfera uniforme.

10.95 ••• Un ave de 500.0 g vuela horizontal y distraídamente a 2.25 m/s, cuando de repente viaja directo hacia una barra vertical estacionaria, golpeándola a 25.0 cm debajo de la parte superior (figura P10.95). La barra es uniforme con longitud de 0.750 m y masa de 1.50 kg, y tiene una bisagra en la base. El choque aturde al ave, de modo que después simplemente cae hacia el suelo (aunque pronto se recupera para continuar volando felizmente). ¿Cuál es la velocidad angular de la barra, *a*) justo después de que es golpeada por el ave, y *b*) cuando esta llega al suelo?

Figura **P10.95**



10.96 ••• **PA** Un bloque pequeño con masa de 0.250 kg se ata a una cuerda que pasa por un agujero en una superficie horizontal sin fricción (véase la figura E10.42). El bloque originalmente gira en un círculo de 0.800 m de radio alrededor del agujero, con rapidez tangencial de 4.00 m/s. Se tira lentamente de la cuerda desde abajo, acortando el radio del círculo descrito por el bloque. La resistencia a la rotura de la cuerda es de 30.0 N. ¿Qué radio tendrá el círculo cuando la cuerda se rompa?

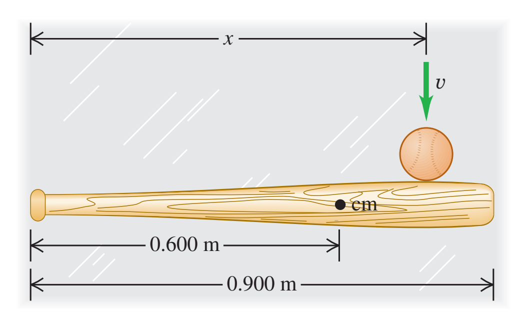
10.97 • Un disco horizontal de madera rugosa con masa de 7.00 kg y 1.00 m de diámetro pivota sobre cojinetes sin fricción, alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Se pega en él una vía circular de tren de juguete con masa insignificante y diámetro medio de 0.95 m. Un trenecito de 1.20 kg operado con baterías descansa en la vía. Para demostrar la conservación del momento angular, se enciende el motor del tren. El tren se mueve en sentido antihorario, alcanzando en poco tiempo una rapidez constante de 0.600 m/s con respecto a la vía. Calcule

la magnitud y la dirección de la velocidad angular del disco con respecto a la Tierra.

10.98 • Un hombre de 55 kg corre alrededor del borde de una tornamesa horizontal montada en un eje vertical sin fricción que pasa por su centro. La velocidad del corredor con respecto a la Tierra tiene magnitud de 2.8 m/s. La tornamesa gira en la dirección opuesta con velocidad angular de magnitud 0.20 rad/s con respecto a la Tierra. El radio de la tornamesa es de 3.0 m, y su momento de inercia alrededor del eje de rotación es de 80 kg·m^2. Calcule la velocidad angular final del sistema, si el corredor se detiene con respecto a la tornamesa. (El corredor puede tratarse como partícula).

10.99 •• **Centro de percusión.** Un bate de béisbol con masa de 0.800 kg y 0.900 m de longitud descansa en una superficie horizontal sin fricción. Su centro de masa está a 0.600 m del extremo del mango (figura P10.99). El momento de inercia del bate alrededor de su centro de masa es de 0.0530 kg·m^2. El bate es golpeado por una pelota que viaja perpendicular a él. El impacto aplica un impulso $J = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt$ en un punto a una distancia x del extremo del bate. ¿Qué x se necesita para que el extremo del mango permanezca en reposo cuando el bate comience a moverse? [*Sugerencia:* Considere el movimiento del centro de masa y la rotación alrededor del centro de masa. Calcule x de modo que estos dos movimientos se combinen dando $v = 0$ para el extremo del bate justo después del choque. Además, observe que la integración de la ecuación (10.29) da $\Delta L = \int_{t_1}^{t_2} (\sum \tau)\,dt$ (véase el problema 10.92)]. El punto que ha encontrado en el bate se denomina *centro de percusión*. Si se golpea una bola lanzada con ese punto se reduce al mínimo la "punzada" que el bateador siente en las manos.

Figura **P10.99**



PROBLEMAS DE DESAFÍO

10.100 ••• Una esfera uniforme de radio R rueda sin resbalar entre dos rieles, de modo que la distancia horizontal entre los dos puntos de contacto de los rieles con la esfera es d. *a*) Elabore un dibujo y demuestre que, en cualquier instante, $v_{cm} = \omega\sqrt{R^2 - d^2/4}$. Analice esta expresión en los límites $d = 0$ y $d = 2R$. *b*) En el caso de una esfera uniforme que parte del reposo y desciende una distancia vertical h mientras baja una rampa rodando sin resbalar, $v_{cm} = \sqrt{10gh/7}$. Sustituyendo la rampa por los dos rieles, demuestre que

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{10gh}{5 + 2/(1 - d^2/4R^2)}}$$

En ambos casos, se despreció el trabajo efectuado por la fricción. *c*) ¿Cuál rapidez del inciso *b*) es menor? ¿Por qué? Conteste en términos de la forma en que la pérdida de energía potencial se divide entre las ganancias de energías cinética de traslación y de rotación. *d*) ¿Para qué valor del cociente d/R las dos expresiones del inciso *b*) de la rapidez difieren en 5.0%? ¿Y en 0.50%?

10.101 ••• Cuando un objeto rueda sin resbalar, la fuerza de fricción por rodamiento es mucho menor que la fuerza de fricción cuando el objeto resbala; una moneda de plata rueda sobre su borde con mucho mayor rapidez que si resbala sobre su cara plana (véase la sección 5.3). Si un objeto rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal, podemos suponer que la fuerza de fricción es cero, de modo que a_x y α_z son aproximadamente cero, y v_x y ω_z son aproximadamente constantes. Rodar sin resbalar implica que $v_x = r\omega_z$ y $a_x = r\alpha_z$. Si un objeto se pone en movimiento en una superficie *sin* estas igualdades, la fricción por deslizamiento (cinética) actuará sobre el objeto mientras se desliza, hasta que se establece rueda sin resbalar. Un cilindro sólido de masa M y radio R, girando con rapidez angular ω_0 alrededor de un eje que pasa por su centro, se coloca en una superficie horizontal para la que el coeficiente de fricción cinética es μ_k. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre del cilindro en la superficie. Medite bien la dirección de la fuerza de fricción cinética que actúa sobre el cilindro. Calcule las aceleraciones a_x del centro de masa y α_z de rotación alrededor del centro de masa. *b*) Al inicio, el cilindro está resbalando totalmente, ya que $\omega_z = \omega_0$, pero $v_x = 0$. El rodamiento sin resbalar inicia cuando $v_x = R\omega_z$. Calcule la *distancia* que el cilindro rueda antes de que deje de resbalar. *c*) Calcule el trabajo efectuado por la fuerza de fricción sobre el cilindro, mientras este se movió desde el punto donde se colocó, hasta el punto donde comenzó a rodar sin resbalar.

10.102 ••• Se construye una rueda de giróscopo para demostración quitando el neumático de una rueda de bicicleta de 0.650 m de diámetro, enrollando alambre de plomo en el borde y pegándolo con cinta. El eje se proyecta 0.200 m a cada lado de la rueda y una mujer sostiene los extremos del eje en sus manos. La masa del sistema es de 8.00 kg; puede suponerse que toda la masa se encuentra en el borde. El eje es horizontal y la rueda está girando alrededor del eje a 5.00 rev/s. Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza que cada mano ejerce sobre el eje *a*) cuando el eje está en reposo; *b*) cuando el eje gira en un plano horizontal alrededor de su centro a 0.050 rev/s; *c*) cuando el eje está girando en un plano horizontal alrededor de su centro a 0.300 rev/s. *d*) ¿Con qué rapidez debe girar el eje para que pueda sostenerse solo en un extremo?

10.103 ••• **PA CALC** Un bloque con masa m gira con rapidez lineal v_1 en un círculo de radio r_1 sobre una superficie horizontal sin fricción (véase la figura E10.42). Se tira de la cuerda lentamente desde abajo, hasta que el radio del círculo descrito por el bloque se reduce a r_2. *a*) Calcule la tensión T en la cuerda en función de r, la distancia entre el bloque y el agujero. Su respuesta estará en términos de la velocidad inicial v_1 y del radio r_1. *b*) Use $W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{T}(r) \cdot d\vec{r}$ para calcular el trabajo efectuado por $\vec{T}$ cuando r cambia de r_1 a r_2. *c*) Compare los resultados del inciso *b*) con el cambio en la energía cinética del bloque.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo ?

La Tierra tiene un movimiento de precesión debido a que sobre ella se ejercen torcas debidas al Sol y la Luna. Como resultado, su eje de rotación (que pasa por los Polos Norte y Sur de la Tierra) lentamente cambia su orientación con respecto a las estrellas lejanas, y tarda 26,000 años para realizar un ciclo completo de precesión. Actualmente, el eje de rotación apunta hacia Polaris, pero hace 5000 años apuntaba hacia Thuban, y en 12,000 años a partir de ahora apuntará hacia la brillante estrella Vega.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

10.1 **Respuesta: ii.** La fuerza P actúa a lo largo de una línea vertical, de manera que el brazo de palanca es la distancia horizontal desde A hasta la línea de acción. Esta es la componente horizontal de la distancia L, que es $L\cos\theta$. Por lo tanto, la magnitud de la torca es el producto de la magnitud de la fuerza P por el brazo de palanca $L\cos\theta$ o $\tau = PL\cos\theta$.

10.2 **Respuesta: iii, ii, i.** Para que el objeto colgante de masa m_2 acelere hacia abajo, la fuerza neta sobre él debe ser hacia abajo. Por lo tanto, la magnitud m_2g de la fuerza del peso hacia abajo debe ser mayor que la magnitud T_2 de la fuerza de tensión hacia arriba. Para que la polea tenga aceleración angular en sentido horario, la torca neta sobre la polea debe ser en sentido horario. La tensión T_2 tiende a girar la polea en sentido horario, en tanto que la tensión T_1 tiende a girar la polea en sentido antihorario. Ambas fuerzas de tensión tienen el mismo brazo de palanca R, de manera que hay una torca T_2R en sentido horario y una torca T_1R en sentido antihorario. Para que la torca neta sea en sentido horario, T_2 debe ser mayor que T_1. Por consiguiente, $m_2g > T_2 > T_1$.

10.3 **Respuestas: *a*) ii, *b*) i.** Si usted vuelve a realizar los cálculos del ejemplo 10.6 con un cilindro hueco (momento de inercia $I_{cm} = MR^2$) en vez de un cilindro sólido (momento de inercia $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$), usted encontrará $a_{cm\text{-}y} = \frac{1}{2}g$ y $T = \frac{1}{2}Mg$ (en vez de $a_{cm\text{-}y} = \frac{2}{3}g$ y $T = \frac{1}{3}Mg$ para un cilindro sólido). Por lo tanto, la aceleración es menor aunque la tensión sea mayor. Usted puede llegar a la misma conclusión sin efectuar el cálculo. Mayor momento de inercia significa que el cilindro hueco girará más lentamente y, por consiguiente, rodará hacia abajo con mayor lentitud. Para hacer más lento el movimiento descendente, se requiere una mayor fuerza de tensión hacia abajo para oponerse a la fuerza de gravedad hacia abajo.

10.4 **Respuesta: iii.** Aplicamos la misma torca durante el mismo desplazamiento angular a ambos cilindros. Entonces, de acuerdo con la ecuación (10.21), efectuamos la misma cantidad de trabajo sobre los dos cilindros y les impartimos la misma energía cinética a ambos. (El que tiene menor momento de inercia desarrolla la mayor rapidez angular, aunque eso no es lo que se preguntó. Compare con el ejemplo conceptual 6.5 de la sección 6.2).

10.5 **Respuestas: *a*) no, *b*) sí** Conforme la pelota da vuelta al círculo, la magnitud de $\vec{p} = m\vec{v}$ no cambia (la rapidez es constante), pero su dirección sí lo hace, así que el vector momento lineal no es constante. Sin embargo, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ *sí* es constante: la magnitud se mantiene constante (la rapidez y la distancia perpendicular entre la mano y la pelota no cambian) y la dirección también (sobre el eje de rotación, perpendicular al plano de movimiento de la pelota). El momento lineal cambia porque una *fuerza* neta $\vec{F}$ actúa sobre la pelota (hacia el centro del círculo). El momento angular no cambia porque no hay *torca* neta; el vector $\vec{r}$ apunta de la mano a la pelota, y la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la pelota apunta hacia la mano, de modo que el producto vectorial $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ es cero.

10.6 **Respuesta: i.** En ausencia de torcas externas, el momento angular de la Tierra $L_z = I\omega_z$ permanecería constante. El hielo derretido se movería de los polos al ecuador (es decir, se alejaría del eje de rotación del planeta) y el momento de inercia I de la Tierra aumentaría un poco. Por lo tanto, la velocidad angular ω_z disminuiría ligeramente y el día duraría un poco más.

10.7 **Respuesta: iii.** Aumentar al doble la masa del volante duplicaría tanto su momento de inercia I como su peso w, así que la razón I/w no cambiaría. La ecuación (10.33) dice que la rapidez angular de precesión depende de esta razón, así que el valor de Ω. *no* cambiaría.

Problema práctico

Respuestas: ***a*)** $h = \dfrac{2R}{5}$

***b*)** $\frac{5}{7}$ de la rapidez que tenía justo después del golpe

11 EQUILIBRIO Y ELASTICIDAD

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Las condiciones que deben satisfacerse para que un cuerpo o una estructura estén en equilibrio.
- Cuál es el significado del centro de gravedad de un cuerpo, y cómo se relaciona con su estabilidad.
- Cómo resolver problemas que implican cuerpos rígidos en equilibrio.
- Cómo analizar situaciones en las que un cuerpo se deforma por tensión, compresión, presión o corte.
- Qué sucede cuando un cuerpo se estira tanto que se deforma o se rompe.



? Este acueducto romano utiliza el principio del arco para sostener el peso de la estructura y el agua que transporta. ¿Los bloques que forman el arco se comprimen, se estiran o ambas cosas?

Nos hemos esforzado mucho por entender por qué y cómo los cuerpos aceleran en respuesta a las fuerzas que actúan sobre ellos; sin embargo, con frecuencia nos interesa asegurarnos de que los cuerpos *no* aceleren. Cualquier edificio, desde los rascacielos de muchos pisos hasta la cabaña más sencilla, debe diseñarse de modo que no se derrumbe. Lo mismo sucede con un puente colgante, una escalera recargada sobre una pared o una grúa que levanta una cubeta llena de concreto.

Un cuerpo que se modela como *partícula* está en equilibrio siempre que la resultante de las fuerzas que actúan sobre él sea cero. No obstante, en las situaciones que acabamos de describir, esa condición no basta. Si actúan fuerzas en diferentes puntos de un cuerpo extenso, se debe satisfacer un requisito adicional para asegurar que el cuerpo no tenga tendencia *a girar*: la suma de *torcas* alrededor de cualquier punto debe ser cero. Este requisito se basa en los principios de la dinámica rotacional que vimos en el capítulo 10. Se puede calcular la torca debida al peso de un cuerpo usando el concepto de centro de gravedad, que presentaremos en este capítulo.

Los cuerpos rígidos no se doblan, no se estiran ni se comprimen cuando actúan fuerzas sobre ellos. Sin embargo, el cuerpo rígido es una idealización; en cierto grado, todos los materiales reales son *elásticos* y se deforman. Las propiedades elásticas de los materiales tienen enorme importancia. Se desea que las alas de un avión sean capaces de flexionarse un poco, pero que no se rompan. El armazón de acero de un edificio que resiste los terremotos debe flexionarse, aunque no demasiado. Muchas características de objetos cotidianos, desde las bandas de caucho hasta los puentes colgantes, dependen de las propiedades elásticas de los materiales. En este capítulo presentaremos los conceptos de *esfuerzo, deformación* y *módulo de elasticidad*, así como un principio sencillo, llamado *ley de Hooke*, que nos permite predecir las deformaciones que ocurrirán cuando se aplican fuerzas a un cuerpo real (que no es perfectamente rígido).

11.1 Condiciones de equilibrio

En las secciones 4.2 y 5.1, aprendimos que una partícula está en *equilibrio* (es decir, no tiene aceleración) en un marco de referencia inercial, si la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre ella es cero, de modo que $\sum \vec{F} = \mathbf{0}$. La expresión equivalente para un cuerpo *extenso* es que el centro de masa del cuerpo no tiene aceleración cuando la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo es cero, como vimos en la sección 8.5. Esta suele denominarse **primera condición de equilibrio**. En términos de vectores y componentes,

$$\sum \vec{F} = \mathbf{0}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0 \qquad \text{(primera condición de equilibrio)} \qquad (11.1)$$

Una segunda condición para que un cuerpo extenso se encuentre en equilibrio es que no debe tener tendencia a *girar*. Tal condición se basa en la dinámica del movimiento de rotación, exactamente del mismo modo que la primera condición se basa en la primera ley de Newton. Un cuerpo rígido que, en un marco de referencia inercial, no está girando alrededor de un punto tiene un momento angular cero alrededor de ese punto. Para que el cuerpo no comience a girar en torno a ese punto, la rapidez de cambio del momento angular *también* debe ser cero. Por lo que vimos en la sección 10.5, sobre todo por la ecuación (10.29), esto implica que la suma de torcas debidas a todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo debe ser cero. Un cuerpo rígido en equilibrio no debe tener tendencia a girar alrededor de *ningún* punto, por lo que la suma de las torcas externas con respecto a cualquier punto debe ser cero. Esta es la **segunda condición de equilibrio**:

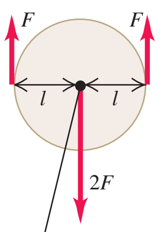
$$\sum \vec{\tau} = \mathbf{0} \text{ alrededor de cualquier punto} \quad \text{(segunda condición de equilibrio)} \qquad (11.2)$$

La suma de las torcas debidas a todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo, con respecto a cualquier punto específico, debe ser cero.

En este capítulo, aplicaremos estas dos condiciones de equilibrio a situaciones en las que un cuerpo rígido está en reposo (sin traslación ni rotación). Se dice que tal cuerpo se encuentra en **equilibrio estático** (figura 11.1). Sin embargo, las mismas condiciones son válidas para un cuerpo rígido con movimiento de *traslación* uniforme (sin rotación), como un avión que vuela con rapidez, dirección y altura constantes. Un cuerpo así está en equilibrio, pero no es estático.

11.1 Para estar en equilibrio estático, un cuerpo en reposo debe satisfacer *ambas* condiciones de equilibrio: no tener propensión a acelerar como un todo ni empezar a girar.

a) Este cuerpo está en equilibrio estático.



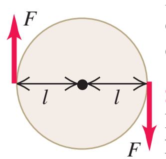
Condiciones de equilibrio:

Primera condición satisfecha: Fuerza neta = 0, así que un cuerpo en reposo no tiene tendencia a empezar a moverse como un todo.

Segunda condición satisfecha: La torca neta alrededor del eje = 0, así que el cuerpo en reposo no tiene tendencia a empezar a girar.

Eje de rotación (perpendicular a la figura)

b) Este cuerpo no tiene tendencia a acelerar como un todo, pero tiene tendencia a empezar a girar.



Primera condición satisfecha: Fuerza neta = 0, así que el cuerpo en reposo no tiene tendencia a empezar a moverse como un todo.

Segunda condición NO satisfecha: Hay una torca neta en sentido horario alrededor del eje, así que el cuerpo en reposo comenzará a girar en sentido horario.

c) Este cuerpo tiene tendencia a acelerar como un todo, pero no tiene tendencia a empezar a girar.

2F
F
l
$\frac{1}{2}l$

Primera condición NO satisfecha: Hay una fuerza neta hacia arriba, así que el cuerpo en reposo comenzará a moverse hacia arriba.

Segunda condición satisfecha: La torca neta alrededor del eje es igual a 0, así que el cuerpo en reposo no tiene tendencia a comenzar a girar.

Evalúe su comprensión de la sección 11.1 ¿Cuáles de las siguientes situaciones satisfacen las dos condiciones de equilibrio? **i.** Una gaviota que planea con un ángulo constante bajo la horizontal y mantiene su rapidez constante; **ii.** el cigüeñal del motor de un automóvil estacionado que gira con rapidez angular creciente; **iii.** una pelota de béisbol lanzada que no gira al desplazarse por el aire. ❙



11.2 Centro de gravedad

En la mayoría de los problemas de equilibrio, una de las fuerzas que actúa sobre un cuerpo es su peso. Es necesario poder calcular la *torca* de esta fuerza. El peso no actúa en un solo punto; se distribuye en todo el cuerpo. No obstante, siempre se puede calcular la torca debida al peso del cuerpo, suponiendo que toda la fuerza de gravedad (el peso) se concentra en un punto llamado **centro de gravedad** (abreviado "cg"). La aceleración debida a la gravedad disminuye con la altura; sin embargo, si esta variación a lo largo de la dimensión vertical del cuerpo es despreciable, el centro de gravedad es idéntico al *centro de masa* (cm) que definimos en la sección 8.5. Este resultado lo expresamos en la sección 10.2 sin demostrarlo; ahora lo haremos.

Repasemos primero la definición de centro de masa. Para un conjunto de partículas con masas $m_1, m_2,...$ y coordenadas (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), …, las coordenadas x_{cm}, y_{cm} y z_{cm} del centro de masa están dadas por

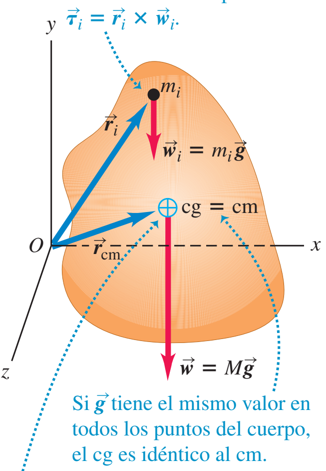
$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \quad \text{(centro de masa)} \tag{11.3}$$

$$z_{cm} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

Además, x_{cm}, y_{cm} y z_{cm} son las componentes del vector de posición $\vec{r}_{cm}$ del centro de masa, de modo que las ecuaciones (11.3) son equivalentes a la ecuación vectorial

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{11.4}$$



11.2 Centro de gravedad (cg) y centro de masa (cm) de un cuerpo extenso.

Consideremos ahora la torca gravitacional que actúa sobre un cuerpo de forma arbitraria (figura 11.2). Suponemos que la aceleración debida a la gravedad $\vec{g}$ es la misma en todos los puntos del cuerpo. Cada partícula del cuerpo experimenta una fuerza gravitacional, y el peso total es la suma vectorial de un gran número de fuerzas paralelas. Una partícula típica tiene masa m_i y peso $\vec{w}_i = m_i\vec{g}$. Si $\vec{r}_i$ es el vector de posición de la partícula con respecto a un origen arbitrario O, el vector torca $\vec{\tau}_i$ del peso $\vec{w}_i$ con respecto a O es, de acuerdo con la ecuación (10.3),

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{w}_i = \vec{r}_i \times m_i\vec{g}$$

La torca *total* debida a las fuerzas gravitacionales que actúan sobre todas las partículas es

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \sum_i \vec{\tau}_i = \vec{r}_1 \times m_1\vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2\vec{g} + \cdots \\ &= (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots) \times \vec{g} \\ &= \left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right) \times \vec{g}\end{aligned}$$

Si multiplicamos y dividimos esto por la masa total del cuerpo,

$$M = m_1 + m_2 + \cdots = \sum_i m_i$$

obtenemos

$$\vec{\tau} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} \times M\vec{g} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \times M\vec{g}$$

La fracción en esta ecuación es justamente el vector de posición $\vec{r}_{cm}$ del centro de masa, con componentes x_{cm}, y_{cm} y z_{cm} dadas por la ecuación (11.4), y $M\vec{g}$ es igual al peso total $\vec{w}$ del cuerpo. Por lo tanto,

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{cm} \times M\vec{g} = \vec{r}_{cm} \times \vec{w} \tag{11.5}$$

La torca gravitacional total, dada por la ecuación (11.5), es la misma que si el peso total $\vec{w}$ estuviera actuando en la posición $\vec{r}_{cm}$ del centro de masa, que también llamamos *centro de gravedad*. **Si $\vec{g}$ tiene el mismo valor en todos los puntos de un cuerpo, su centro de gravedad es idéntico a su centro de masa.** Observe, sin embargo, que el centro de masa se define independientemente de cualquier efecto gravitacional.

Si bien el valor de $\vec{g}$ varía un poco con la altura, la variación es pequeñísima (figura 11.3). Por ello, en este capítulo supondremos que el centro de masa y el de gravedad son idénticos, a menos que se indique explícitamente otra cosa.

11.3 La aceleración debida a la gravedad en la base de las Torres Petronas de Malasia, cuya altura es de 452 m, es solo 0.014% mayor que en la punta. El centro de gravedad de las torres está solo 2 cm abajo del centro de masa.



Obtención y uso del centro de gravedad

A menudo se usan consideraciones de simetría para obtener el centro de gravedad de un cuerpo, igual que hicimos con el centro de masa. El centro de gravedad de una esfera, un cubo, un disco o una placa circular o rectangular homogéneos está en su centro geométrico. El centro de gravedad de un cilindro o cono circulares rectos está en su eje de simetría.

En los cuerpos de forma más compleja, en ocasiones es posible obtener el centro de gravedad dividiendo el cuerpo en piezas simétricas. Podríamos aproximar el cuerpo humano, por ejemplo, como un conjunto de cilindros sólidos, con una esfera como cabeza. Luego podríamos ubicar el centro de gravedad de la combinación usando las ecuaciones (11.3), donde m_1, m_2, …, son las masas de las piezas individuales y (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), …, son las coordenadas de sus centros de gravedad.

Cuando un cuerpo sobre el que actúa la gravedad se apoya o suspende en un solo punto, el centro de gravedad siempre está en dicho punto de apoyo, o directamente arriba o abajo de este. Si estuviera en otro lugar, el peso tendría una torca con respecto al punto de suspensión, y el cuerpo no estaría en equilibrio rotacional. La figura 11.4 muestra cómo usar este hecho para determinar experimentalmente la posición del centro de gravedad en un cuerpo irregular.

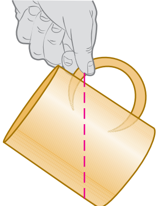
Siguiendo el mismo razonamiento, es evidente que un cuerpo apoyado en varios puntos debe tener su centro de gravedad en algún lugar dentro del área delimitada por los apoyos. Esto explica por qué un automóvil puede viajar por un camino recto pero inclinado hacia un lado, si el ángulo de inclinación es relativamente pequeño (figura 11.5*a*), pero se volcará si el ángulo es muy pronunciado (figura 11.5*b*). El camión de la figura 11.5*c* tiene un centro de gravedad más alto que el del automóvil y se volcará en una pendiente menos inclinada. Cuando un camión se vuelca en una autopista y bloquea el tráfico durante horas, la razón es su centro de gravedad tan alto.

Cuanto más bajo esté el centro de gravedad y mayor sea el área de apoyo, más difícil será volcar un cuerpo. Los cuadrúpedos como los venados y los caballos tienen un área de apoyo grande delimitada por sus patas; por lo tanto, son estables por naturaleza y solo necesitan pies pequeños o cascos. Los animales que caminan erguidos en dos piernas, como el ser humano y las aves, necesitan piernas relativamente grandes para tener un área de apoyo razonable. Si un bípedo sostiene su cuerpo aproximada-

11.4 Obtención del centro de gravedad de un objeto con forma irregular, en este caso, un tarro de café.

¿Cuál es el centro de gravedad de este tarro?

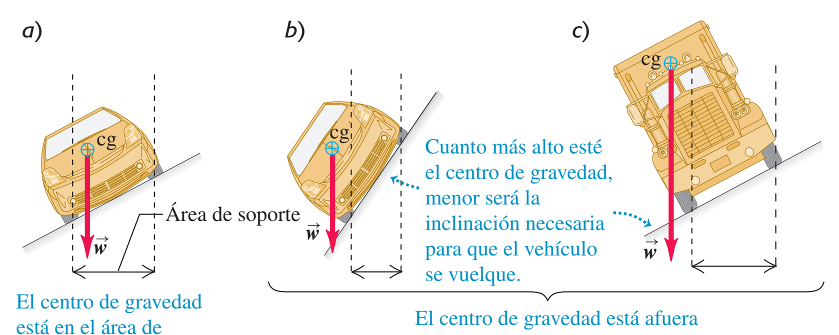
(1) Haga que el tarro cuelgue de un punto cualquiera. Una línea vertical que se extienda hacia abajo desde el punto de suspensión pasa por el centro de gravedad.



(2) Ahora cuelgue el tarro de un punto diferente. Una línea vertical que se extiende hacia abajo desde este punto interseca la primera línea del centro de gravedad (que está dentro del tarro).



11.5 En *a*) el centro de gravedad está dentro del área delimitada por los soportes y el automóvil está en equilibrio. El automóvil en *b*) y el camión en *c*) se volcarán porque sus centros de gravedad están fuera del área de soporte.





mente horizontal, como un pollo o un *Tyrannosaurus rex*, deberá balancearse delicadamente al caminar para mantener su centro de gravedad sobre la pata que está en el suelo. El pollo lo hace moviendo la cabeza; el *T. rex* probablemente lo hacía moviendo la enorme cola.

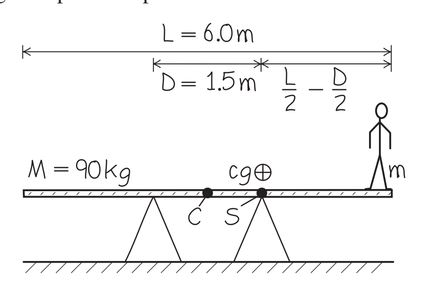
Ejemplo 11.1 Caminando por una tabla

Una tabla uniforme, de longitud $L = 6.0$ m y masa $M = 90$ kg, descansa sobre dos caballetes separados una distancia $D = 1.5$ m, y equidistantes del centro de la tabla. El primo Morton quiere ponerse de pie en el extremo derecho de la tabla. Si la tabla no debe moverse, ¿qué masa máxima puede tener Morton?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Justo para equilibrarse, la masa m de Morton debe ser tal que el centro de gravedad del sistema tabla-Morton esté directamente sobre el caballete de la derecha (figura 11.6). Tomamos el origen en C, el centro geométrico y centro de gravedad de la tabla, y tomamos el eje $+x$ horizontalmente a la derecha. Entonces los centros de gravedad de la tabla y de Morton están en $x_P = 0$ y $x_T = L/2 = 3.0$ m, respectivamente, y el caballete de la derecha está en $x_S = D/2$. Usaremos las ecuaciones (11.3) para ubicar el centro de gravedad x_{cg} del sistema tabla-Morton.

11.6 Diagrama para este problema.



EJECUTAR: De acuerdo con la primera de las ecuaciones (11.3),

$$x_{cg} = \frac{M(0) + m(L/2)}{M + m} = \frac{m}{M + m}\frac{L}{2}$$

Si hacemos $x_{cg} = x_S$ y despejamos m:

$$\frac{m}{M + m}\frac{L}{2} = \frac{D}{2}$$

$$mL = (M + m)D$$

$$m = M\frac{D}{L - D} = (90\text{ kg})\frac{1.5\text{ m}}{6.0\text{ m} - 1.5\text{ m}} = 30\text{ kg}$$

EVALUAR: Para comprobar, repitamos el cálculo con el origen en el caballete de la derecha. Ahora $x_S = 0$, $x_P = -D/2$ y $x_T = (L/2) - (D/2)$, y requerimos que $x_{cg} = x_S = 0$:

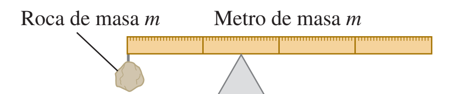
$$x_{cg} = \frac{M(-D/2) + m[(L/2) - (D/2)]}{M + m} = 0$$

$$m = \frac{MD/2}{(L/2) - (D/2)} = M\frac{D}{L - D} = 30\text{ kg}$$

El resultado no depende de la elección del origen.

Un adulto de 60 kg solo podría ponerse de pie a la mitad de la distancia entre el caballete de la derecha y el extremo de la tabla. ¿Sabe por qué?

11.7 ¿En qué punto estarán en equilibrio el metro y la roca?



Evalúe su comprensión de la sección 11.2 Una roca está sujeta al extremo izquierdo de un metro uniforme que tiene la misma masa que la roca. Para equilibrar la combinación de roca y metro en la cúspide del objeto triangular de la figura 11.7, ¿qué tan lejos del extremo izquierdo del metro debería colocarse el objeto triangular? **i.** A menos de 0.25 m; **ii.** a 0.25 m; **iii.** entre 0.25 m y 0.50 m; **iv.** a 0.50 m; **v.** a más de 0.50 m.

MasteringPHYSICS®

ActivPhysics 7.4: Two Painters on a Beam
ActivPhysics 7.5: Lecturing from a Beam



11.3 Solución de problemas de equilibrio de cuerpos rígidos

Son solo dos los principios clave del equilibrio de cuerpos rígidos: la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe ser cero, y la suma de las torcas con respecto a cualquier punto debe ser cero. Por sencillez, limitaremos nuestra atención a situaciones en las que podemos tratar a todas las fuerzas como si actuaran en un solo plano, que llamaremos *xy*. Así podemos ignorar la condición $\sum F_z = 0$ de las ecuaciones (11. 1), y en la ecuación (11.2) solo tendremos que considerar las componentes *z* de las torcas (perpendiculares al plano). Entonces, la primera y segunda condiciones de equilibrio son

$$\sum F_x = 0 \quad \text{y} \quad \sum F_y = 0 \quad \text{(primera condición de equilibrio, fuerzas en el plano } xy\text{)}$$

$$\sum \tau_z = 0 \quad \text{(segunda condición de equilibrio, fuerzas en el plano } xy\text{)} \qquad (11.6)$$

CUIDADO **Elección del punto de referencia para calcular torcas** En problemas de equilibrio, la elección del punto de referencia para calcular torcas con $\sum \tau_z$ es arbitraria por completo. No obstante, una vez que se elige un punto, se deberá usar el *mismo* punto para calcular *todas* las torcas que actúan sobre el cuerpo. Se debe elegir un punto que simplifique los cálculos tanto como sea posible.

Lo difícil es aplicar estos principios sencillos a problemas específicos. La Estrategia para resolver problemas 11.1 es muy similar a las sugerencias de la sección 5.2 para el equilibrio de una partícula; compárela con la Estrategia para resolver problemas 10.1 (sección 10.2) para problemas de dinámica rotacional.

Estrategia para resolver problemas 11.1 Equilibrio de un cuerpo rígido



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La primera y la segunda condiciones de equilibrio ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum \tau_z = 0$) son aplicables a cualquier cuerpo rígido que no gire ni tenga una aceleración en el espacio.

PLANTEAR *el problema* aplicando los siguientes pasos:

1. Elabore un diagrama de la situación física e identifique el cuerpo en equilibrio que analizará. Dibuje el cuerpo con exactitud; *no* lo represente como un punto. Incluya dimensiones.
2. Dibuje un diagrama de cuerpo libre que muestre todas las fuerzas que actúan *sobre* el cuerpo. Muestre el punto del cuerpo donde actúa cada fuerza.
3. Elija los ejes de coordenadas y especifique su dirección. Defina el sentido positivo de rotación para las torcas. Represente las fuerzas en términos de sus componentes con respecto a los ejes elegidos.
4. Elija un punto de referencia alrededor del cual se calcularán las torcas. Elija cuidadosamente; se puede eliminar de la ecuación de torcas cualquier fuerza cuya línea de acción pase por el punto que eligió. El cuerpo no necesariamente tiene que pivotar alrededor de un eje que pase por el punto elegido.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Escriba ecuaciones que expresen las condiciones de equilibrio. Recuerde que ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum \tau_z = 0$) son ecuaciones *individuales*. Se puede calcular la torca de una fuerza calculando por separado la torca de cada componente, cada una con su brazo de palanca y signo adecuados, y sumándolas.
2. Para obtener tantas ecuaciones como incógnitas haya, podría ser necesario calcular torcas con respecto a dos o más puntos de referencia; también elíjalas con cuidado.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe los resultados escribiendo $\sum \tau_z = 0$, con respecto a un punto de referencia distinto. Se deben obtener las mismas respuestas.

Ejemplo 11.2 Distribución del peso de un automóvil



Una revista especializada informa que cierto automóvil deportivo tiene el 53% de su peso sobre las ruedas delanteras y el 47% sobre las traseras. (Esto implica que las fuerzas normales sobre las ruedas delanteras y traseras son $0.53w$ y $0.47w$, respectivamente, donde w es el peso del automóvil). La distancia entre ejes de 2.46 m. ¿A qué distancia del eje trasero está el centro de gravedad del automóvil?

SOLUCIÓN

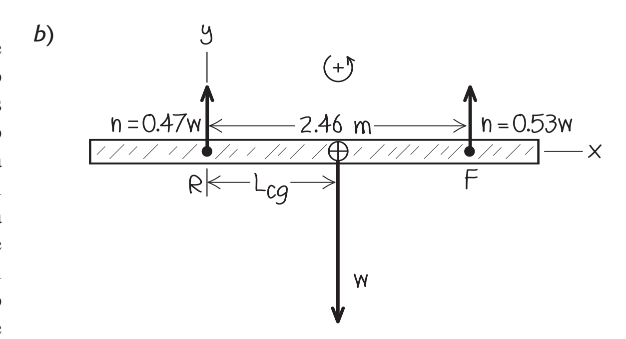
IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se pueden usar las dos condiciones de equilibrio, ecuaciones (11.6), para un automóvil en reposo (o viajando en línea recta con rapidez constante), porque la fuerza y la torca netas sobre el automóvil son iguales a cero. La figura 11.8 muestra nuestro diagrama de cuerpo libre del automóvil, junto con los ejes x y y, y la convención de que las torcas positivas van en sentido antihorario. El peso w actúa en el centro de gravedad, y la incógnita es la distancia L_{cg}, el brazo de palanca del peso con respecto al eje trasero R, así que es razonable tomar las torcas con respecto a R. La torca debida al peso es negativa porque tiende a causar una rotación en sentido horario alrededor de R. La torca debida a la fuerza normal hacia arriba que actúa sobre el eje delantero F es positiva porque tiende a causar una rotación en sentido antihorario alrededor de R.

11.8 Diagrama para este problema.

a)



b)



EJECUTAR: La primera condición de equilibrio se satisface (figura 11.8*b*): $\Sigma F_x = 0$ porque no hay componentes de fuerza x, en tanto que $\sum F_y = 0$ porque $0.47w + 0.53w + (-w) = 0$. Escribimos la ecuación de torca y despejamos L_{cg}:

$$\sum \tau_R = 0.47w(0) - wL_{cg} + 0.53w(2.46\ \text{m}) = 0$$

$$L_{cg} = 1.30\ \text{m}$$

EVALUAR: El centro de gravedad está entre los dos soportes, como debe ser (véase la sección 11.2). Se puede comprobar el resultado escribiendo la ecuación de torca alrededor del eje delantero F. Se verá que el centro de gravedad está 1.16 m atrás del eje delantero, es decir, (2.46 m) − (1.16 m) = 1.30 m adelante del eje trasero.



Ejemplo 11.3 ¿Se deslizará la escalera?

Sir Lancelot, quien pesa 800 N, está asaltando un castillo subiendo por una escalera uniforme de 5.0 m de longitud que pesa 180 N (figura 11.9*a*). La base de la escalera descansa sobre un extremo y se apoya en equilibrio a través del foso contra una pared vertical sin fricción del castillo. La escalera forma un ángulo de 53.1° con la horizontal. Lancelot descansa a un tercio del camino hacia arriba de la escalera. *a*) Calcule las fuerzas normal y de fricción que actúan sobre la base de la escalera. *b*) Obtenga el coeficiente de fricción estática mínimo que evita un deslizamiento de la base de la escalera. *c*) Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza de contacto sobre la base de la escalera.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El sistema escalera-Lancelot está en reposo, así que podemos usar las dos condiciones de equilibrio para resolver el inciso *a*). En el inciso *b*) necesitaremos la relación entre la fuerza de fricción estática, el coeficiente de fricción estática y la fuerza normal (véase la sección 5.3). En el inciso *c*), la fuerza de contacto es la suma vectorial de las fuerzas normal y de fricción que actúan en la base de la escalera, obtenidas en el inciso *a*). La figura 11.9*b* muestra el diagrama de cuerpo libre, con las direcciones x y y como se muestra y tomamos las torcas en sentido antihorario como positivas. El centro de gravedad de la escalera está en su centro geométrico. El peso de 800 N de Lancelot actúa en un punto a un tercio hacia arriba de la escalera.

La pared solo ejerce una fuerza normal n_1 en la parte superior de la escalera. Las fuerzas en la base son la fuerza normal n_2 hacia arriba y la fuerza de fricción estática f_s, que debe apuntar a la derecha para evitar un deslizamiento; las magnitudes n_2 y f_s son las incógnitas del inciso *a*). De acuerdo con la ecuación (5.6), estas magnitudes están relacionadas por $f_s \le \mu_s n_2$, donde μ_s es el coeficiente de fricción estática, la incógnita del inciso *b*).

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con las ecuaciones (11.6), la primera condición de equilibrio da

$$\sum F_x = f_s + (-n_1) = 0$$
$$\sum F_y = n_2 + (-800\text{ N}) + (-180\text{ N}) = 0$$

Tenemos dos ecuaciones para las tres incógnitas: n_1, n_2 y f_s. La segunda ecuación da $n_2 = 980$ N. Para obtener una tercera ecuación se usa la segunda condición de equilibrio. Tomamos torcas con respecto al punto B, alrededor del cual n_2 y f_s no tienen torca. El ángulo de 53.1° crea un triángulo rectángulo de lados 3-4-5, entonces, a partir de la figura 11.9*b* el brazo de palanca del peso de la escalera es 1.5 m, el brazo de palanca del peso de Lancelot es 1.0 m, y el brazo de palanca de n_1 es 4.0 m. La ecuación de torcas para B es

$$\sum \tau_B = n_1(4.0\text{ m}) - (180\text{ N})(1.5\text{ m}) - (800\text{ N})(1.0\text{ m}) + n_2(0) + f_s(0) = 0$$

Al despejar n_1, obtenemos $n_1 = 268$ N. Sustituimos esto en la ecuación de $\sum F_x = 0$ para obtener $f_s = 268$ N.

b) La fuerza de fricción estática f_s no puede exceder $\mu_s n_2$, así que el coeficiente *mínimo* de fricción estática para evitar el deslizamiento es

$$(\mu_s)_{\text{mín}} = \frac{f_s}{n_2} = \frac{268\text{ N}}{980\text{ N}} = 0.27$$

c) Las componentes de la fuerza de contacto $\vec{F}_B$ en la base son la fuerza de fricción estática f_s y la fuerza normal n_2, así que

$$\vec{F}_B = f_s\hat{\imath} + n_2\hat{\jmath} = (268\text{ N})\hat{\imath} + (980\text{ N})\hat{\jmath}$$

La magnitud y la dirección de $\vec{F}_B$ (figura 11.9*c*) son

$$F_B = \sqrt{(268\text{ N})^2 + (980\text{ N})^2} = 1020\text{ N}$$
$$\theta = \arctan\frac{980\text{ N}}{268\text{ N}} = 75°$$

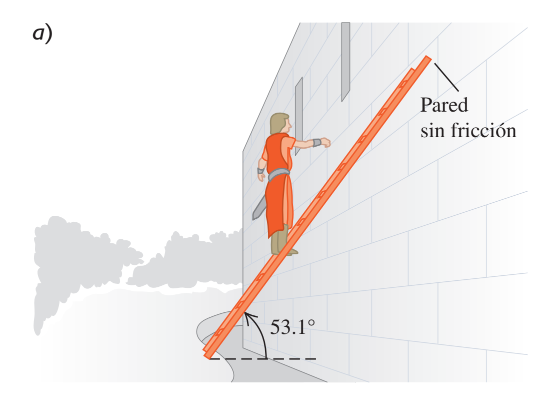
EVALUAR: Como se aprecia en la figura 11.9*c*, la fuerza de contacto $\vec{F}_B$ *no* está dirigida a lo largo de la escalera. ¿Puede el lector demostrar que si $\vec{F}_B$ estuviera dirigida a lo largo de la escalera, habría una torca neta en sentido antihorario con respecto a la parte superior de la escalera y el equilibrio sería imposible?

Conforme Lancelot sube más por la escalera, el brazo de palanca y la torca de su peso con respecto a B aumentan. Esto incrementa los valores de n_1, f_s y el coeficiente requerido de fricción $(\mu_s)_{\text{mín}}$, entonces sería cada vez más probable que la escalera se deslice conforme sube (véase el problema 11.10). Una manera sencilla de hacer menos probable el deslizamiento es usar un ángulo más grande de la escalera (digamos 75° en lugar de 53.1°). Esto reduce los brazos de palanca con respecto a B de los pesos de la escalera y Lancelot y aumenta el brazo de palanca de n_1; todo esto reduciría la fuerza de fricción requerida.

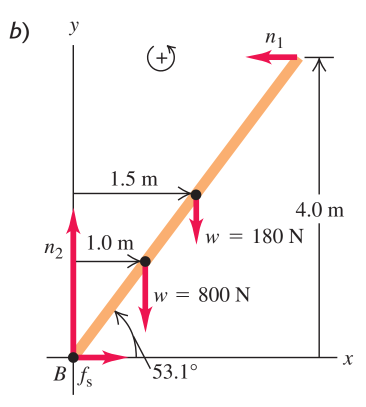
Si hubiéramos supuesto fricción en la pared además del piso, el problema no se hubiera resuelto usando solo las condiciones de equilibrio (¡Inténtelo!). La dificultad es que el cuerpo ya no puede tratarse como perfectamente rígido. Otro problema de este tipo es una mesa de cuatro patas; no podemos usar solo las condiciones de equilibrio para calcular la fuerza que actúa en cada pata.

11.9 *a*) Sir Lancelot se detiene a un tercio en su trayecto hacia arriba de la escalera, temiendo que resbalará. *b*) Diagrama de cuerpo libre del sistema escalera-Lancelot. *c*) La fuerza de contacto en B es la superposición de la fuerza normal y la fuerza de fricción estática.

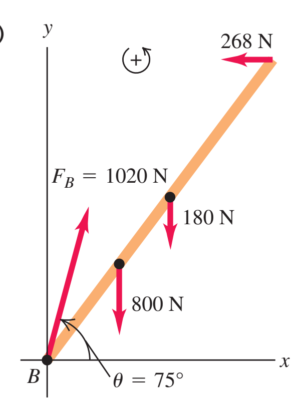
a)



b)



c)



Ejemplo 11.4 Equilibrio y ejercicio



La figura 11.10*a* muestra un brazo humano horizontal sosteniendo una mancuerna. El antebrazo está en equilibrio bajo la acción del peso $\vec{w}$ de la mancuerna, la tensión $\vec{T}$ del tendón conectado al bíceps y la fuerza $\vec{E}$ ejercida sobre el antebrazo por la parte superior del brazo, en el codo. Se desprecia el peso del antebrazo. (Por claridad, el punto A de unión del tendón se dibujó más lejos del codo que en la realidad). Dados el peso w y el ángulo θ entre la fuerza de tensión y la horizontal, obtenga T y las dos componentes de $\vec{E}$ (tres incógnitas escalares en total).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El sistema está en reposo, así que usamos las condiciones de equilibrio. Representamos $\vec{T}$ y $\vec{E}$ en términos de sus componentes (figura 11.10*b*). Suponemos que las direcciones de E_x y E_y son las que se indican; los signos de E_x y E_y dados por la solución nos dirán las direcciones reales. Las incógnitas son T, E_x y E_y.

EJECUTAR: Para obtener T, tomamos las torcas con respecto al codo de modo que la ecuación de torca resultante no tenga E_x, E_y ni T_x:

$$\sum \tau_{\text{codo}} = Lw - DT_y = 0$$

De esto obtenemos

$$T_y = \frac{Lw}{D} \qquad \text{y} \qquad T = \frac{Lw}{D\,\text{sen}\,\theta}$$

Para calcular E_x y E_y, usamos las primeras condiciones de equilibrio:

$$\sum F_x = T_x + (-E_x) = 0$$

$$E_x = T_x = T\cos\theta = \frac{Lw}{D\,\text{sen}\,\theta}\cos\theta$$

$$= \frac{Lw}{D}\cot\theta = \frac{Lw}{D}\frac{D}{h} = \frac{Lw}{h}$$

$$\sum F_y = T_y + E_y + (-w) = 0$$

$$E_y = w - \frac{Lw}{D} = -\frac{(L-D)w}{D}$$

El signo negativo de E_y indica que en realidad debe apuntar *hacia abajo* en la figura 11.10*b*.

EVALUAR: Podemos comprobar los resultados de E_x y E_y tomando las torcas con respecto a los puntos A y B, alrededor de los cuales la torca de T es cero:

$$\sum \tau_A = (L-D)w + DE_y = 0 \quad \text{así que} \quad E_y = -\frac{(L-D)w}{D}$$

$$\sum \tau_B = Lw - hE_x = 0 \quad \text{así que} \quad E_x = \frac{Lw}{h}$$

Como ejemplo realista, suponga que $w = 200$ N, $D = 0.050$ m, $L = 0.30$ m y ı = 80°, de modo que $h = D$ tan ı = (0.050 m)(5.67) = 0.28 m. Usando los resultados de T, E_x y E_y, obtenemos

$$T = \frac{Lw}{D\,\text{sen}\,\theta} = \frac{(0.30\text{ m})(200\text{ N})}{(0.050\text{ m})(0.98)} = 1220\text{ N}$$

$$E_y = -\frac{(L-D)w}{D} = -\frac{(0.30\text{ m} - 0.050\text{ m})(200\text{ N})}{0.050\text{ m}}$$

$$= -1000\text{ N}$$

$$E_x = \frac{Lw}{h} = \frac{(0.30\text{ m})(200\text{ N})}{0.28\text{ m}} = 210\text{ N}$$

La magnitud de la fuerza en el codo es

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 1020\text{ N}$$

Los valores grandes de T y E sugieren que es razonable despreciar el peso del antebrazo, el cual puede ser de 20 N más o menos.

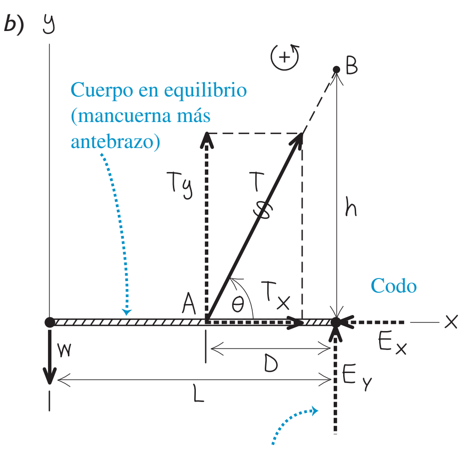
11.10 *a*) La situación. *b*) Diagrama de cuerpo libre del antebrazo. Se desprecia el peso del antebrazo y se exagera mucho la distancia D para efectos de claridad.

a)

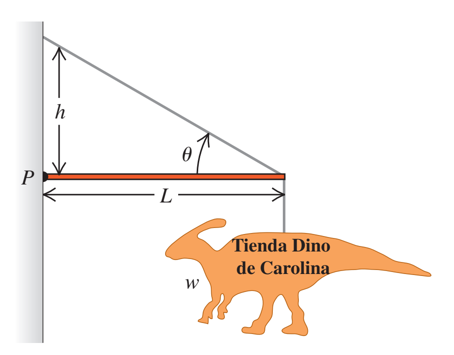
En realidad, el tendón se inserta cerca del codo (cuya ubicación se desplazó aquí por claridad)

B
T
θ
A
w
E

b)



11.11 ¿Qué tensión hay en el cable diagonal y qué fuerza ejerce la bisagra en P?



Evalúe su comprensión de la sección 11.3 El anuncio metálico (peso w) de una tienda especializada cuelga del extremo de una varilla horizontal de longitud L y masa despreciable (figura 11.11). La varilla está sostenida por un cable que forma un ángulo θ con la horizontal, y por una bisagra en el punto P. Ordene de mayor a menor las siguientes magnitudes de fuerza: **i.** el peso w del anuncio; **ii.** la tensión en el cable; **iii.** la componente vertical de la fuerza ejercida sobre la varilla por la bisagra en P.

11.4 Esfuerzo, deformación y módulos de elasticidad

El cuerpo rígido es un modelo idealizado útil, pero en muchos casos el estiramiento, la compresión y torcedura de los cuerpos reales, cuando se les aplican fuerzas, son demasiado importantes para despreciarse. La figura 11.12 muestra tres ejemplos. Nos interesa estudiar la relación entre las fuerzas y las deformaciones en cada caso.

Para cada clase de deformación, introduciremos una cantidad llamada **esfuerzo** que representa la intensidad de las fuerzas que causan la deformación, generalmente con base en la "fuerza por unidad de área". Otra cantidad, la **deformación**, describe el cambio de forma resultante. Si el esfuerzo y la deformación son pequeños, es común que sean directamente proporcionales, y llamamos a la constante de proporcionalidad **módulo de elasticidad**. Si tiramos con mayor fuerza de algo, se estirará más; si lo aplastamos con mayor fuerza, se comprimirá más. En forma de ecuación, esto es:

$$\frac{\text{Esfuerzo}}{\text{Deformación}} = \text{Módulo de elasticidad} \qquad \text{(ley de Hooke)} \qquad (11.7)$$

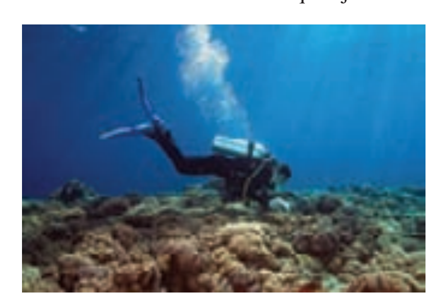
La proporcionalidad del esfuerzo y la deformación (en ciertas condiciones) se denomina **ley de Hooke**, en honor de Robert Hooke (1635-1703), un contemporáneo de Newton. Usamos una forma de la ley de Hooke en las secciones 6.3 y 7.2: el alargamiento de un resorte ideal es proporcional a la fuerza que lo estira. Recuerde que esta no es realmente una ley general; es válida solo dentro de un intervalo limitado. En la última sección del capítulo estudiaremos dicho intervalo.

Esfuerzo y deformación de tensión y compresión

El comportamiento elástico más fácil de entender es el estiramiento de una barra, una varilla o un alambre, cuando se tira de sus extremos (figura 11.12*a*). La figura 11.13 muestra un objeto que inicialmente tiene un área de sección transversal uniforme A y una longitud l_0. Al aplicar fuerzas de igual magnitud $F_\perp$ pero en sentidos opuestos en

11.12 Tres tipos de esfuerzos: *a*) Cables de un puente sometidos a *esfuerzo de tensión*, estirados por fuerzas que actúan en sus extremos. *b*) Buzo sometido a *esfuerzo volumétrico*, comprimido por todos lados por fuerzas debidas a la presión del agua. *c*) Listón sometido a *esfuerzo de corte*, que se deforma y finalmente se corta mediante la acción de las fuerzas que ejercen las tijeras.







los extremos (lo cual garantiza que el objeto no tenderá a moverse a la izquierda ni a la derecha), decimos que el objeto está en **tensión**. Ya hablamos mucho de la tensión en cuerdas y cables; se trata del mismo concepto. El subíndice $\perp$ nos recuerda que las fuerzas actúan en dirección perpendicular a la sección transversal.

Definimos el **esfuerzo de tensión** en la sección transversal como el cociente de la fuerza $F_\perp$ y el área de la sección transversal A:

$$\text{Esfuerzo de tensión} = \frac{F_\perp}{A} \qquad (11.8)$$

Esta es una cantidad *escalar* porque $F_\perp$ es la *magnitud* de la fuerza. La unidad de esfuerzo en el SI es el **pascal** (abreviado Pa y llamado así en honor del científico y filósofo francés del siglo XVII Blaise Pascal). La ecuación (11.8) indica que 1 pascal es igual a 1 newton por metro cuadrado (N/m^2):

$$1 \text{ pascal} = 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

En el sistema inglés, la unidad lógica del esfuerzo sería la libra por pie cuadrado; no obstante, es más común utilizar la libra por pulgada cuadrada (lb/in^2 o psi). Los factores de conversión son

$$1 \text{ psi} = 6895 \text{ Pa} \qquad \text{y} \qquad 1 \text{ Pa} = 1.450 \times 10^{-4} \text{ psi}$$

Las unidades de esfuerzo son las mismas que las de *presión*, que veremos a menudo en capítulos posteriores. La presión del aire en los neumáticos de un automóvil es de alrededor de 3×10^5 Pa $= 300$ kPa, y normalmente se exige que los cables de acero soporten esfuerzos de tensión del orden de 10^8 Pa.

El objeto de la figura 11.13 se estira hasta una longitud $l = l_0 + \Delta l$ cuando se le somete a tensión. El alargamiento Δl no se da solo en los extremos; todas las partes de la barra se estiran en la misma proporción. La **deformación por tensión** del objeto es igual al cambio fraccionario de longitud, que es la razón del alargamiento Δl entre la longitud original l_0:

$$\text{Deformación por tensión} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \qquad (11.9)$$

La deformación por tensión es el alargamiento por unidad de longitud; es el cociente de dos longitudes medidas siempre en las mismas unidades, de modo que es un número puro (adimensional) sin unidades.

Experimentalmente, se ha observado que si el esfuerzo de tensión es lo suficiente pequeño, el esfuerzo y la deformación son proporcionales, como en la ecuación (11.7). El módulo de elasticidad correspondiente se denomina **módulo de Young** y se denota con Y:

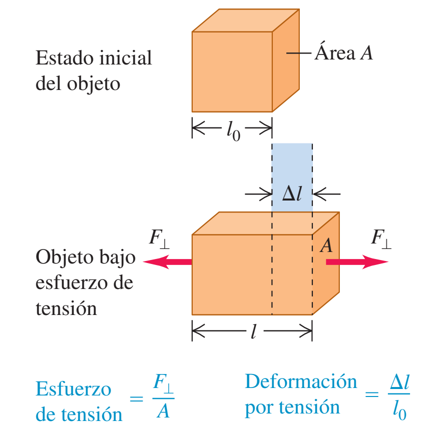
$$Y = \frac{\text{Esfuerzo de tensión}}{\text{Deformación por tensión}} = \frac{F_\perp/A}{\Delta l/l_0} = \frac{F_\perp}{A}\frac{l_0}{\Delta l} \qquad \text{(módulo de Young)} \qquad (11.10)$$

Puesto que la deformación es un número puro, las unidades del módulo de Young son las de esfuerzo: fuerza por unidad de área. En la tabla 11.1 se dan valores representativos.

Tabla 11.1 Módulos de elasticidad aproximados

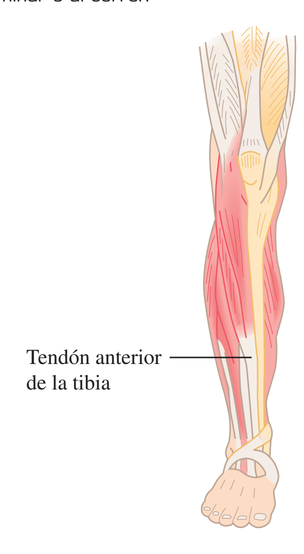
Material	Módulo de Young, Y (Pa)	Módulo volumétrico, B (Pa)	Módulo de corte, S (Pa)
Aluminio	7.0×10^{10}	7.5×10^{10}	2.5×10^{10}
Latón	9.0×10^{10}	6.0×10^{10}	3.5×10^{10}
Cobre	11×10^{10}	14×10^{10}	4.4×10^{10}
Cristal corona	6.0×10^{10}	5.0×10^{10}	2.5×10^{10}
Hierro	21×10^{10}	16×10^{10}	7.7×10^{10}
Plomo	1.6×10^{10}	4.1×10^{10}	0.6×10^{10}
Níquel	21×10^{10}	17×10^{10}	7.8×10^{10}
Acero	20×10^{10}	16×10^{10}	7.5×10^{10}

11.13 Un objeto en tensión. La fuerza neta que actúa sobre el objeto es cero, pero el objeto se deforma. El esfuerzo de tensión (la razón entre la fuerza y el área de sección transversal) produce una deformación por tensión (el alargamiento dividido entre la longitud inicial). Por claridad, se ha exagerado el alargamiento Δl.

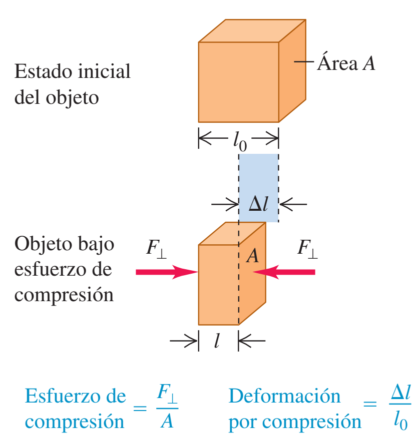


Aplicación Módulo de Young de un tendón

El tendón anterior de la tibia une el pie con el músculo grande que va a lo largo de la tibia. (Se puede sentir este tendón en la parte frontal del tobillo). Las mediciones han demostrado que este tendón tiene un módulo de Young de 1.2×10^9 Pa, mucho menor que el de los materiales sólidos mostrados en la tabla 11.1. Por lo tanto, este tendón se estira sustancialmente (hasta 2.5% de su longitud) en respuesta a los esfuerzos que se experimentan al caminar o al correr.



11.14 Objeto en compresión. El esfuerzo y la deformación por compresión se definen igual que en el caso del esfuerzo y la deformación por tensión (véase la figura 11.13), excepto que ahora Δl denota la distancia que el objeto se contrae.



Esfuerzo de compresión $= \dfrac{F_\perp}{A}$ Deformación por compresión $= \dfrac{\Delta l}{l_0}$

(Esta tabla también presenta valores de otros dos módulos de elasticidad que veremos más adelante en este capítulo). Un material con un valor grande de Y no se estira mucho; se requiere un esfuerzo grande para una deformación dada. Por ejemplo, el valor de Y para el acero colado (2×10^{11} Pa) es mucho mayor que para el caucho (5×10^{8} Pa).

Si las fuerzas en los extremos de una barra empujan en lugar de halar (figura 11.14), la barra está en **compresión**, y el esfuerzo es un **esfuerzo de compresión**. La **deformación por compresión** de un objeto en compresión se define del mismo modo que la deformación por tensión, pero Δl tiene la dirección opuesta. La ley de Hooke y la ecuación (11.10) son válidas también para la compresión si el esfuerzo no es muy grande. El módulo de Young de muchos materiales tiene el mismo valor para esfuerzos de tensión y de compresión; los materiales compuestos como el concreto o el hormigón son una excepción; pueden soportar un esfuerzo de compresión, pero fallan bajo un esfuerzo de tensión comparable. En las antiguas civilizaciones como Babilonia, Asiria y Roma, la piedra fue el principal material utilizado en sus construcciones, de modo que estas tuvieron que diseñarse para evitar esfuerzos de tensión. Esto explica por qué utilizaron los arcos en entradas y puentes, donde el peso del material que se encuentra encima comprime las piedras del arco, y no las pone en tensión.

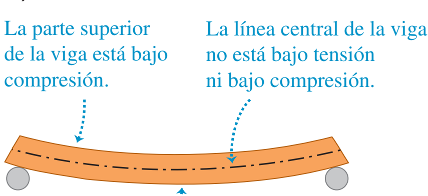
En muchas situaciones, los cuerpos experimentan esfuerzos de tensión y compresión al mismo tiempo. Por ejemplo, una viga horizontal apoyada en sus extremos se pandea por su propio peso. En consecuencia, la parte superior de la viga está en compresión, y la inferior, en tensión (figura 11.15*a*). Para reducir al mínimo el esfuerzo y, por ende, la deformación por flexión, las partes superior e inferior de la viga deben tener un área transversal grande. En la línea central de la viga no hay compresión ni tensión, así que esta parte puede tener una sección pequeña; esto ayuda a reducir al mínimo el peso de la viga y también a reducir el esfuerzo. El resultado es la conocida viga en forma de I utilizada en la construcción de edificios (figura 11.15*b*).

11.15 *a*) Una viga apoyada en sus extremos está sometida tanto a compresión como a tensión. *b*) La forma de la sección transversal de una viga en forma de I reduce al mínimo tanto el esfuerzo como el peso.

a)

La parte superior de la viga está bajo compresión.

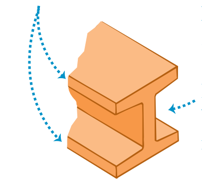
La línea central de la viga no está bajo tensión ni bajo compresión.



La parte inferior de la viga está bajo tensión.

b)

Las partes superior e inferior de una viga en I se ensanchan para minimizar los esfuerzos de compresión y de tensión.



La viga puede ser angosta cerca de su línea central, la cual no está bajo compresión ni bajo tensión.



Ejemplo 11.5 Esfuerzo y deformación por tensión

Una varilla de acero de 2.0 m de longitud tiene un área transversal de 0.30 cm^2. La varilla se cuelga por un extremo de un soporte y, después, una fresadora de 550 kg se cuelga del otro extremo. Determine el esfuerzo, la deformación y el alargamiento en la varilla.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: La varilla está bajo tensión, de modo que se usa la ecuación (11.8) para obtener el esfuerzo de tensión; la ecuación (11.9), con el valor del módulo de Young Y del acero de la tabla 11.1, para calcular la deformación correspondiente; y la ecuación (11.10) para determinar el alargamiento Δl:

$$\text{Esfuerzo de tensión} = \frac{F_\perp}{A} = \frac{(550 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{3.0 \times 10^{-5} \text{ m}^2} = 1.8 \times 10^{8} \text{ Pa}$$

$$\text{Deformación} = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\text{Esfuerzo}}{Y} = \frac{1.8 \times 10^{8} \text{ Pa}}{20 \times 10^{10} \text{ Pa}} = 9.0 \times 10^{-4}$$

$$\text{Alargamiento} = \Delta l = (\text{Deformación}) \times l0$$
$$= (9.0 \times 10^{-4})(2.0 \text{ m}) = 0.0018 \text{ m} = 1.8 \text{ mm}$$

EVALUAR: Este alargamiento tan pequeño, como resultado de una carga de más de media tonelada, pone de manifiesto la rigidez del acero.

Esfuerzo y deformación volumétrica

Cuando un buzo se sumerge a cierta profundidad en el mar, el agua ejerce una presión casi uniforme en toda su superficie y reduce un poco su volumen (véase la figura 11.12*b*). Esta situación es diferente de los esfuerzos de tensión y compresión y de las

deformaciones que hemos visto. El esfuerzo en este caso es una presión uniforme por todos lados, y la deformación resultante es un cambio de volumen. Usamos los términos **esfuerzo volumétrico** y **deformación volumétrica** para describir estas cantidades.

Si un objeto se sumerge en un fluido (líquido o gas) en reposo, el fluido ejerce una fuerza sobre todas las partes de la superficie del objeto; esta fuerza es *perpendicular* a la superficie. (Si tratáramos de hacer que el fluido ejerciera una fuerza paralela a la superficie, el fluido se deslizaría hacia los lados para contrarrestar la acción). La fuerza $F_\perp$ por unidad de área que el fluido ejerce sobre la superficie de un objeto sumergido es la **presión** p en el fluido:

$$p = \frac{F_\perp}{A} \quad \text{(presión en un fluido)} \qquad (11.11)$$

La presión dentro de un fluido aumenta con la profundidad. La presión del aire, por ejemplo, es aproximadamente 21% mayor en el nivel del mar que en Denver (altitud: 1.6 km o 1.0 mi). No obstante, si un objeto sumergido es relativamente pequeño, se pueden ignorar las diferencias de presión en el cuerpo del objeto debidas a la profundidad, al calcular el esfuerzo volumétrico. Por lo tanto, supondremos que la presión tiene el mismo valor para todos los puntos en la superficie del objeto sumergido.

La presión tiene las mismas unidades que el esfuerzo; las unidades de uso común incluyen 1 Pa (1 $\mathrm{N/m^2}$) y 1 $\mathrm{lb/in^2}$ (1 psi). También se usa comúnmente la **atmósfera**, que se abrevia como atm. Una atmósfera es la presión media aproximada de la atmósfera terrestre al nivel del mar:

$$1 \text{ atmósfera} = 1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 14.7 \text{ lb/in}^2$$

CUIDADO **Presión contra fuerza** A diferencia de la fuerza, la presión no tiene una dirección intrínseca: la presión en la superficie de un objeto sumergido es la misma, sea cual fuere la orientación de la superficie. Por lo tanto, la presión es una cantidad *escalar*, no vectorial.

La presión desempeña el papel del esfuerzo en una deformación volumétrica. La deformación correspondiente es el cambio fraccionario en el volumen (figura 11.16), es decir, la razón entre el cambio volumétrico ΔV y el volumen original V_0:

$$\text{Deformación volumétrica} = \frac{\Delta V}{V_0} \qquad (11.12)$$

La deformación volumétrica es el cambio volumétrico por unidad de volumen. Al igual que la deformación por tensión o compresión, es un número puro, sin unidades.

Si se cumple la ley de Hooke, un aumento en la presión (esfuerzo volumétrico) produce una deformación volumétrica (cambio fraccionario volumétrico) *proporcional*. El módulo de elasticidad correspondiente (relación esfuerzo-deformación) se denomina **módulo volumétrico** y se denota con B. Si la presión sobre un cuerpo cambia en una cantidad pequeña Δp, de p_0 a $p_0 + \Delta p$, y la deformación volumétrica resultante es $\Delta V/V_0$, la ley de Hooke adopta la forma

$$B = \frac{\text{Esfuerzo volumétrico}}{\text{Deformación volumétrica}} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V_0} \quad \text{(módulo volumétrico)} \qquad (11.13)$$

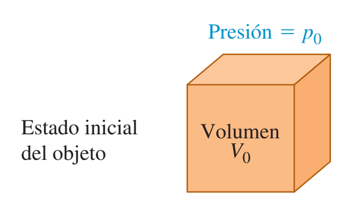
Se incluye un signo menos (−) en esta ecuación porque un *aumento* de presión siempre causa una *reducción* volumétrica. En otras palabras, si Δp es positivo, ΔV es negativo. El módulo volumétrico B en sí es una cantidad positiva.

En el caso de cambios de presión pequeños en un sólido o un líquido, se considera que B es constante. El módulo volumétrico de un *gas*, sin embargo, depende de la presión inicial p_0. La tabla 11.1 da valores del módulo volumétrico para varios materiales sólidos. Sus unidades, fuerza por unidad de área, son las mismas de la presión (y del esfuerzo de tensión o compresión).

Aplicación Esfuerzo volumétrico sobre un pez
El rape (*Melanocetus johnsoni*) se encuentra en océanos de todo el mundo a profundidades del orden de 1000 m, donde la presión (es decir, la presión volumétrica) es de aproximadamente 100 atmósferas. El rape puede soportar esa presión debido a que no tiene espacios con aire en su interior, a diferencia de los peces que se encuentran a menor profundidad donde las presiones son menores. El rape más grande mide aproximadamente 12 cm (5 in) de longitud.



11.16 Objeto sometido a un esfuerzo volumétrico. Sin el esfuerzo, el cubo ocupa un volumen V_0; cuando se aplica el esfuerzo, el cubo tiene un volumen menor, V. Por claridad, se exageró el cambio volumétrico ΔV.



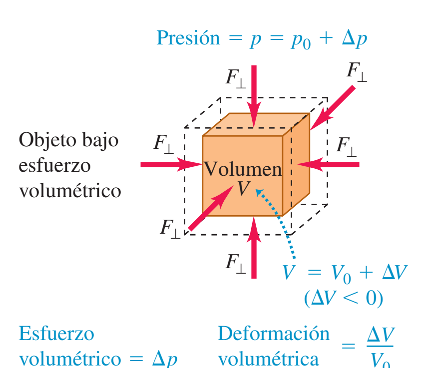


Tabla 11.2 Compresibilidades de líquidos

Líquido	Compresibilidad, k: Pa^{-1}	Compresibilidad, k: atm^{-1}
Disulfuro de carbono	93×10^{-11}	94×10^{-6}
Alcohol etílico	110×10^{-11}	111×10^{-6}
Glicerina	21×10^{-11}	21×10^{-6}
Mercurio	3.7×10^{-11}	3.8×10^{-6}
Agua	45.8×10^{-11}	46.4×10^{-6}

El recíproco del módulo volumétrico se denomina **compresibilidad** y se denota con k. De acuerdo con la ecuación (11.13),

$$k = \frac{1}{B} = -\frac{\Delta V/V_0}{\Delta p} = -\frac{1}{V_0}\frac{\Delta V}{\Delta p} \quad \text{(compresibilidad)} \tag{11.14}$$

La compresibilidad es la disminución fraccionaria volumétrica, $-\Delta V/V_0$, por unidad de aumento Δp de la presión. Las unidades de la compresibilidad son *inversas a las de presión*, Pa^{-1} o atm^{-1}.

En la tabla 11.2, se presentan valores de compresibilidad k para varios líquidos. La compresibilidad del agua, por ejemplo, es de $46.4 \times 10^{-6}\ atm^{-1}$, lo cual significa que, por cada aumento de 1 atm en la presión, el volumen del agua disminuye en 46.4 partes por millón. Los materiales con módulo volumétrico pequeño y compresibilidad grande son fáciles de comprimir.

Ejemplo 11.6 Esfuerzo y deformación volumétricos

Una prensa hidráulica contiene 0.25 m^3 (250 L) de aceite. Calcule la disminución volumétrica del aceite cuando se somete a un aumento de presión $\Delta p = 1.6 \times 10^7$ Pa (unas 160 atm o 2300 psi). El módulo volumétrico del aceite es $B = 5.0 \times 10^9$ Pa (unas 5.0×10^4 atm) y su compresibilidad es $k = 1/B = 20 \times 10^{-6}\ atm^{-1}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: Este ejemplo utiliza los conceptos de esfuerzo y deformación volumétricos. Nos dan el módulo volumétrico y la compresibilidad, la incógnita es el cambio volumétrico ΔV. Despejando ΔV de la ecuación (11.13), obtenemos

$$\Delta V = -\frac{V_0 \Delta p}{B} = -\frac{(0.25\ m^3)(1.6 \times 10^7\ Pa)}{5.0 \times 10^9\ Pa}$$
$$= -8.0 \times 10^{-4}\ m^3 = -0.80\ L$$

O bien, podemos usar la ecuación (11.14) usando las conversiones aproximadas de unidades proporcionadas anteriormente:

$$\Delta V = -kV_0 \Delta p = -(20 \times 10^{-6}\ atm^{-1})(0.25\ m^3)(160\ atm)$$
$$= -8.0 \times 10^{-4}\ m^3$$

EVALUAR: El valor negativo de ΔV indica que el volumen disminuye cuando la presión aumenta. Si bien el aumento de 160 atm de presión es grande, el cambio *fraccionario* volumétrico es muy pequeño:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{-8.0 \times 10^{-4}\ m^3}{0.25\ m^3} = -0.0032 \quad \text{o bien,} \quad -0.32\%$$

Esfuerzo y deformación por corte

El tercer tipo de situación de esfuerzo-deformación se denomina *corte*. El listón de la figura 11.12*c* está sometido a un **esfuerzo de corte**: una parte del listón se está empujando hacia arriba, mientras una parte adyacente se está empujando hacia abajo, lo que produce un cambio de forma del listón. La figura 11.17 muestra un cuerpo deformado por un esfuerzo de corte. En la figura, fuerzas de igual magnitud pero sentido opuesto actúan de forma *tangente* a las superficies de extremos opuestos del objeto. Definimos el esfuerzo de corte como la fuerza $F_\|$ que actúa de forma tangente a la superficie, dividida entre el área A sobre la que actúa:

$$\text{Esfuerzo de corte} = \frac{F_\|}{A} \tag{11.15}$$

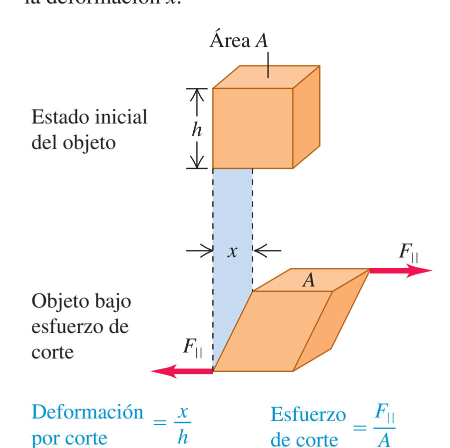
al igual que los otros dos tipos de esfuerzo, el esfuerzo de corte es una fuerza por unidad de área.

La figura 11.17 muestra que una cara del objeto sometido a esfuerzo de corte se desplaza una distancia x relativa a la cara opuesta. Definimos la **deformación por corte** como la razón entre el desplazamiento x y la dimensión transversal h:

$$\text{Deformación por corte} = \frac{x}{h} \tag{11.16}$$

En situaciones reales, x casi siempre es mucho menor que h. Como todas las deformaciones, la deformación por corte es un número adimensional: un cociente resultado de dividir dos longitudes.

11.17 Objeto sometido a un esfuerzo de corte. Se aplican fuerzas tangentes a superficies opuestas del objeto (en contraste con la situación de la figura 11.13, donde las fuerzas actúan en forma perpendicular a las superficies). Por claridad, se exagera la deformación x.



Si las fuerzas son lo suficientemente pequeñas como para que se cumpla la ley de Hooke, la deformación por corte es *proporcional* al esfuerzo de corte. El módulo de elasticidad correspondiente (la razón entre el esfuerzo de corte y la deformación por corte) se denomina **módulo de corte** y se denota con S:

$$S = \frac{\text{Esfuerzo de corte}}{\text{Deformación por corte}} = \frac{F_{\parallel}/A}{x/h} = \frac{F_{\parallel}}{A}\frac{h}{x} \quad \text{(módulo de corte)} \tag{11.17}$$

con x y h definidos como en la figura 11.17.

En la tabla 11.1 se dan varios valores de módulo de corte. Para un material dado, S suele ser de un tercio a un medio del valor del módulo de Young Y para el esfuerzo de tensión. Tenga en cuenta que los conceptos de esfuerzo de corte, deformación por corte y módulo de corte únicamente se aplican a materiales *sólidos*. La razón es que *corte* se refiere a la deformación de un objeto que tiene forma definida (véase la figura 11.17). Este concepto no se aplica a los gases y líquidos, pues no tienen formas definidas.



Ejemplo 11.7 Esfuerzo y deformación por corte

Suponga que el objeto de la figura 11.17 es una placa de latón de la base de una escultura exterior, que experimenta fuerzas de corte causadas por un terremoto. La placa cuadrada mide 0.80 m por lado y tiene un espesor de 0.50 cm. ¿Qué fuerza se ejerce en cada uno de sus extremos si el desplazamiento x resultante es de 0.16 mm?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este ejemplo utiliza la relación entre esfuerzo de corte, deformación por corte y módulo de corte. La incógnita es la fuerza $F_{\parallel}$ ejercida en forma paralela a cada extremo, como se indica en la figura 11.17. La deformación por corte se calcula empleando la ecuación (11.16); luego determinamos el esfuerzo de corte con la ecuación (11.17) y $F_{\parallel}$ con la ecuación (11.15). La tabla 11.1 indica el módulo de corte del latón. En la figura 11.17, h representa la longitud de 0.80 m de cada lado de la placa. El área A de la ecuación (11.15) es el producto de la longitud de 0.80 m por el espesor de 0.50 cm.

EJECUTAR: Según la ecuación (11.16),

$$\text{Deformación por corte} = \frac{x}{h} = \frac{1.6\times10^{-4}\ \text{m}}{0.80\ \text{m}} = 2.0\times10^{-4}$$

De acuerdo con la ecuación (11.17),

$$\begin{aligned}\text{Esfuerzo de corte} &= (\text{Deformación por corte})\times S\\ &= (2.0\times10^{-4})(3.5\times10^{10}\ \text{Pa}) = 7.0\times10^{6}\ \text{Pa}\end{aligned}$$

Finalmente, al aplicar la ecuación (11.15),

$$\begin{aligned}F_{\parallel} &= (\text{Esfuerzo de corte})\times A\\ &= (7.0\times10^{6}\ \text{Pa})(0.80\ \text{m})(0.0050\ \text{m}) = 2.8\times10^{4}\ \text{N}\end{aligned}$$

EVALUAR: ¡La fuerza de corte por el terremoto es de más de tres toneladas! El gran módulo de corte del latón lo hace difícil de deformar. Además, la placa es relativamente gruesa (0.50 cm), así que el área A es relativamente grande y se requiere una fuerza $F_{\parallel}$ grande para producir el esfuerzo necesario $F_{\parallel}/A$.

Evalúe su comprensión de la sección 11.4 Una varilla de cobre con área transversal de 0.500 cm^2 y longitud de 1.00 m se alarga 2.00×10^{-2} mm, y una varilla de acero con la misma área transversal pero longitud de 0.100 m se alarga 2.00×10^{-3} mm. *a*) ¿Qué varilla experimenta mayor *deformación* por tensión? **i.** La varilla de cobre; **ii.** la varilla de acero; **iii.** la deformación es igual en ambas. *b*) ¿Qué varilla experimenta mayor *esfuerzo* de tensión? **i.** La varilla de cobre; **ii.** la varilla de acero; **iii.** el esfuerzo es igual en ambas.

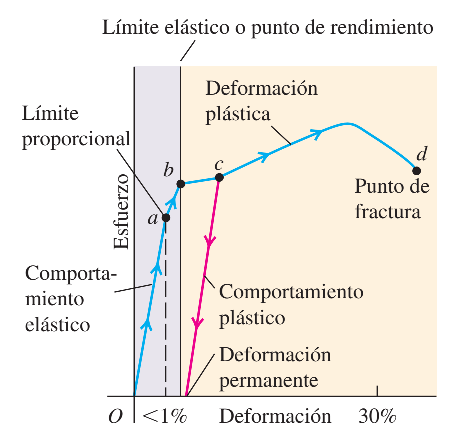


11.5 Elasticidad y plasticidad

La ley de Hooke (la proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación elástica) tiene un intervalo de validez. En las secciones anteriores usamos frases como "siempre que las fuerzas son tan pequeñas, se cumple la ley de Hooke". ¿Cuáles *son* exactamente las limitaciones de la ley de Hooke? Sabemos que si halamos *cualquier objeto*, lo comprimimos o lo torcemos lo suficiente, se doblará o se romperá. ¿Podemos ser más precisos que eso?

Examinemos de nuevo el esfuerzo y la deformación por tensión. Supongamos que graficamos el esfuerzo en función de la deformación. Si se cumple la ley de Hooke,

11.18 Diagrama de esfuerzo-deformación típico para un metal dúctil sometido a tensión.

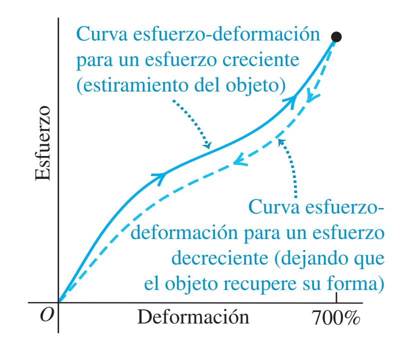


la gráfica es una recta con una pendiente igual al módulo de Young. La figura 11.18 muestra una gráfica esfuerzo-deformación típica de un metal como cobre o hierro dulce. La deformación se muestra como *porcentaje* de alargamiento; la escala horizontal no es uniforme después de la primera parte de la curva, hasta una deformación menor del 1%. La primera porción es una línea recta, lo que indica un comportamiento de la ley de Hooke con el esfuerzo directamente proporcional a la deformación. Esta porción rectilínea termina en el punto *a*; el esfuerzo en este punto se denomina *límite proporcional*.

Desde *a* hasta *b*, el esfuerzo y la deformación ya no son proporcionales, y *no* se cumple la ley de Hooke. Si la carga se retira gradualmente, partiendo de cualquier punto entre *O* y *b*, se regresa por la curva hasta que el material recupera su longitud original. La deformación es *reversible*, y las fuerzas son conservativas; la energía introducida en el material para causar la deformación se recupera cuando se elimina el esfuerzo. En la región *Ob* decimos que el material tiene *comportamiento elástico*. El punto *b*, donde termina esta región, es el *punto de rendimiento*; el esfuerzo en este punto se denomina *límite elástico*.

Si aumentamos el esfuerzo más allá del punto *b*, la deformación sigue aumentando; pero si retiramos la carga en un punto más allá de *b*, digamos *c*, el material no recupera su longitud original, sino que sigue la línea roja de la figura 11.18. La longitud sin esfuerzo ahora es mayor que la original; el material experimentó una deformación irreversible y adquirió una *deformación permanente*. Un aumento de la carga más allá de *c* produce un aumento grande en la deformación con un incremento relativamente pequeño del esfuerzo, hasta llegar a un punto *d* en el que se presenta la *fractura*. El comportamiento del material entre *b* y *d* se denomina *flujo plástico* o *deformación plástica*. Una deformación plástica es irreversible; si se elimina el esfuerzo, el material no vuelve a su estado original.

11.19 Diagrama esfuerzo-deformación típico para caucho vulcanizado. Las curvas son diferentes para un aumento y una disminución del esfuerzo; este fenómeno se denomina histéresis elástica.



En algunos materiales, se presenta una deformación plástica considerable entre el límite elástico y el punto de fractura, como el que corresponde a las propiedades que se grafican en la figura 11.18. Se dice que tales materiales son *dúctiles*. En cambio, si la fractura se presenta poco después de rebasarse el límite elástico, decimos que el material es *quebradizo*. Un alambre de hierro dulce que experimenta un estiramiento permanente considerable sin romperse es dúctil, mientras que una cuerda de piano, elaborada de acero, la cual se rompe poco después de alcanzar su límite elástico, es quebradiza.

Algo muy curioso puede ocurrir cuando un objeto se estira y luego se deja relajar. Un ejemplo se presenta en la figura 11.19, que es una curva de esfuerzo-deformación de caucho vulcanizado estirado a más de siete veces su longitud original. El esfuerzo no es proporcional a la deformación, pero el comportamiento es elástico porque, al retirarse la carga, el material recupera su longitud original. Sin embargo, el material sigue curvas *diferentes* cuando aumenta y cuando disminuye el esfuerzo. Esto se denomina *histéresis elástica*. El trabajo efectuado por el material cuando recupera su forma original es menor que el requerido para deformarlo; hay fuerzas no conservativas asociadas con la fricción interna. El caucho con histéresis elástica grande es muy útil para absorber vibraciones, como en los soportes de motores y bujes amortiguadores para automóviles.

Tabla 11.3 Esfuerzos de rotura aproximados

Material	Esfuerzo de rotura (Pa o N/m^2)
Aluminio	2.2×10^8
Latón	4.7×10^8
Vidrio	10×10^8
Hierro	3.0×10^8
Bronce fosforado	5.6×10^8
Acero	$5\text{–}20 \times 10^8$

El esfuerzo requerido para causar la fractura de un material se denomina *esfuerzo de rotura*, *resistencia límite* o (para el esfuerzo de tensión) *resistencia a la tensión*. Dos materiales, digamos dos tipos de acero, pueden tener constantes elásticas muy similares, pero esfuerzos de rotura muy distintos. La tabla 11.3 presenta valores típicos de esfuerzo de rotura para varios materiales en tensión. El factor de conversión 6.9×10^8 Pa = 100,000 psi ayuda a poner estos números en perspectiva. Por ejemplo, si el esfuerzo de rotura de cierto acero es de 6.9×10^8 Pa, entonces una barra con sección transversal de 1 in^2 tendrá una resistencia a la rotura de 100,000 lb.

Evalúe su comprensión de la sección 11.5 Imagine que, al estacionar su automóvil en una calle concurrida, golpea accidentalmente un poste de acero. Para examinar el daño, aleja un poco el auto del poste y se baja. ¿Qué aspecto tiene el parachoques trasero, si la deformación durante el impacto fue *a*) menor que el límite proporcional; *b*) mayor que el límite proporcional, pero menor que el punto de rendimiento; *c*) mayor que el punto de rendimiento, pero menor que el punto de fractura, y *d*) mayor que el punto de fractura?

RESUMEN

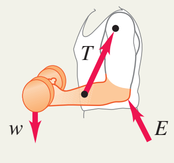


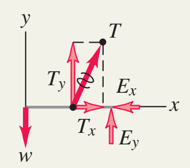
Condiciones de equilibrio: Para que un cuerpo rígido esté en equilibrio, deben cumplirse dos condiciones. Primera, la suma vectorial de las fuerzas sobre el cuerpo debe ser igual a cero. Segunda, la suma de las torcas con respecto a cualquier punto debe ser igual a cero. La torca debida al peso de un cuerpo se calcula suponiendo que todo el peso se concentra en el centro de gravedad, el cual está en el mismo punto que el centro de masa $\vec{g}$ tiene el mismo valor en todos los puntos. (Véase ejemplos 11.1 a 11.4).

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0 \tag{11.1}$$

$$\sum \vec{\tau} = \mathbf{0} \text{ alrededor de } \textit{cualquier} \text{ punto} \tag{11.2}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \tag{11.4}$$



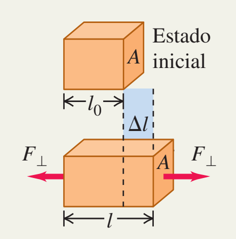


Esfuerzo, deformación y ley de Hooke: La ley de Hooke establece que, en las deformaciones elásticas, el esfuerzo (fuerza por unidad de área) es proporcional a la deformación (deformación fraccionaria). La constante de proporcionalidad se llama módulo de elasticidad.

$$\frac{\text{Esfuerzo}}{\text{Deformación}} = \text{Módulo de elasticidad} \tag{11.7}$$

Esfuerzo de tensión y de compresión: El esfuerzo de tensión es la fuerza de tensión por unidad de área, $F_\perp/A$. La deformación por tensión es el cambio fraccionario de longitud, $\Delta l/l_0$. El módulo de elasticidad se llama módulo de Young, Y. El esfuerzo y la deformación por compresión se definen de la misma forma. (Véase el ejemplo 11.5).

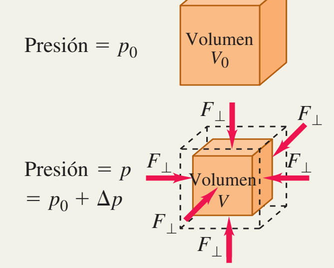
$$Y = \frac{\text{Esfuerzo de tensión}}{\text{Deformación por tensión}} = \frac{F_\perp/A}{\Delta l/l_0} = \frac{F_\perp}{A}\frac{l_0}{\Delta l} \tag{11.10}$$



Esfuerzo volumétrico: La presión ejercida por un fluido es la fuerza por unidad de área. El esfuerzo volumétrico es un cambio de presión, Δp, y la deformación volumétrica es el cambio fraccionario volumétrico $\Delta V/V_0$. El módulo de elasticidad se llama módulo volumétrico, B. La compresibilidad, k, es el recíproco del módulo volumétrico: $k = 1/B$. (Véase ejemplo 11.6).

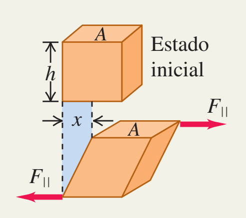
$$p = \frac{F_\perp}{A} \tag{11.11}$$

$$B = \frac{\text{Esfuerzo volumétrico}}{\text{Deformación volumétrica}} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V_0} \tag{11.13}$$



Esfuerzo de corte: El esfuerzo de corte es la fuerza por unidad de área, $F_\parallel/A$, para una fuerza aplicada en forma tangencial a una superficie. La deformación por corte es el desplazamiento x de un lado dividido entre la dimensión transversal h. El módulo de elasticidad se llama módulo de corte, S. (Véase el ejemplo 11.7).

$$S = \frac{\text{Esfuerzo de corte}}{\text{Deformación por corte}} = \frac{F_\parallel/A}{x/h} = \frac{F_\parallel}{A}\frac{h}{x} \tag{11.17}$$



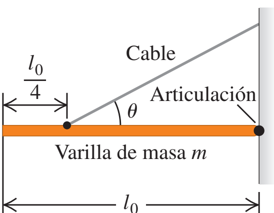
Límites de la ley de Hooke: El límite proporcional es el esfuerzo máximo para el que el esfuerzo y la deformación son proporcionales. Más allá del límite proporcional, la ley de Hooke no es válida. El límite elástico es el esfuerzo a partir del cual se presenta una deformación irreversible. El esfuerzo de rotura, o resistencia límite, es el esfuerzo en el que el material se rompe.



PROBLEMA PRÁCTICO En equilibrio y bajo esfuerzo

Una varilla sólida horizontal uniforme de cobre de longitud inicial l_0, área transversal A, módulo de Young Y, módulo volumétrico B, módulo de corte S y masa m está sostenida por una articulación sin fricción en su extremo derecho y por un cable a una distancia $l_0/4$ del extremo izquierdo (figura 11.20). Tanto la articulación como el cable se sujetan de modo que ejercen sus fuerzas uniformemente sobre la sección transversal de la varilla. El cable forma un ángulo θ con la varilla y la comprime. *a*) Calcule la tensión en el cable. *b*) Calcule la magnitud y dirección de la fuerza ejercida por la articulación en el extremo derecho de la varilla. Compare esta magnitud con la tensión del cable. Compare el ángulo calculado con θ. *c*) Determine el cambio de longitud de la varilla causado por los esfuerzos ejercidos por el cable y la articulación. *d*) ¿En qué factor aumentaría su respuesta del inciso *c*) si la varilla fuera dos veces más larga pero tuviera la misma sección transversal?

11.20 ¿Cuáles son las fuerzas que actúan sobre la varilla? ¿Cuáles son el esfuerzo y la deformación?



GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Elabore un diagrama de cuerpo libre de la varilla. Asegúrese de colocar cada fuerza en la ubicación correcta.
2. Elabore una lista de las cantidades desconocidas e identifique cuáles son las incógnitas.
3. ¿Cuáles son las condiciones que se deben cumplir para que la varilla permanezca en reposo? ¿Qué clase de esfuerzo y deformación están implicados? Use las respuestas para elegir las ecuaciones adecuadas.

EJECUTAR

4. Use las ecuaciones para obtener las incógnitas. (*Sugerencia:* La solución se facilitará si elige con cuidado el punto con respecto al cual se calculan las torcas).
5. Use sus conocimientos de trigonometría para determinar si la magnitud de la fuerza de la articulación es mayor que la de tensión en el cable y si el ángulo de la fuerza de la articulación es mayor o menor que o igual a θ.

EVALUAR

6. Compruebe si sus respuestas son lógicas. ¿Cuál de las fuerzas, la de tensión del cable o la de la articulación, soportan más peso de la varilla? ¿Es lógico?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P11.1 Un objeto rígido en rotación uniforme alrededor de un eje fijo ¿satisface las dos condiciones de equilibrio? ¿Por qué? ¿Entonces se concluye que todas las partículas del objeto están en equilibrio? Explique su respuesta.

P11.2 *a*) ¿Es posible que un objeto esté en equilibrio traslacional (la primera condición), pero *no* en equilibrio rotacional (la segunda condición)? Ilustre su respuesta con un ejemplo sencillo. *b*) ¿Puede un objeto estar en equilibrio rotacional pero *no* en equilibrio traslacional? Justifique su respuesta con un ejemplo sencillo.

P11.3 Los neumáticos de los automóviles a veces se "balancean" en una máquina que gira la rueda alrededor del centro. Se colocan pesas (plomos) en el borde de la rueda hasta que esta no se inclina con respecto al plano horizontal. Comente este procedimiento en términos del centro de gravedad.

P11.4 ¿El centro de gravedad de un cuerpo sólido siempre está dentro del material del cuerpo? Si no, dé un contraejemplo.

P11.5 En la sección 11.2, supusimos siempre que el valor de g era el mismo en todos los puntos del cuerpo. Esta aproximación *no* es válida si el cuerpo es suficientemente grande, pues el valor de g disminuye con la altitud. Tomando esto en cuenta, ¿el centro de gravedad de una varilla vertical larga está arriba de su centro de masa, debajo de este o en el mismo lugar? Explique cómo esto puede ayudar a mantener el eje longitudinal de una nave en órbita dirigido hacia la Tierra. (Esto sería útil en el caso de un satélite meteorológico, que siempre debe apuntar la lente de su cámara a la Tierra). La Luna no es exactamente esférica, sino un tanto alargada. Explique por qué este mismo efecto hace que la Luna siempre dirija la misma cara hacia la Tierra.

P11.6 Imagine que equilibra una llave de tuercas suspendiéndola de un solo punto. ¿El equilibrio es estable, inestable o neutral, si el punto está arriba del centro de gravedad de la llave, debajo de este o coincide con él? Justifique su respuesta en cada caso. (En el caso de la rotación, un cuerpo rígido se encuentra en equilibrio *estable* si una rotación pequeña genera una torca que tiende a hacer que el cuerpo regrese al equilibrio; está en equilibrio *inestable* si dicha rotación produce una torca que tiende a alejar el cuerpo aún más del equilibrio; y está en equilibrio *neutral* si dicha rotación no produce ninguna torca).

P11.7 El lector seguramente puede pararse con los pies planos y luego levantar los talones y equilibrarse sobre las puntas de los pies. ¿Por qué no puede hacerlo si los dedos de sus pies están tocando la pared? (¡Inténtelo!).

P11.8 Una herradura gira libremente sobre un clavo horizontal que atraviesa uno de sus agujeros. Luego se cuelga del mismo clavo un hilo largo con un peso en la parte inferior, de modo que el hilo quede ver-

tical frente a la herradura sin tocarla. ¿Cómo se sabe que el centro de gravedad de la herradura queda a lo largo de la línea del hilo? ¿Cómo se puede ubicar dicho centro colgando la herradura de otro agujero? ¿El centro de gravedad está dentro del material sólido de la herradura?

P11.9 Un objeto consiste en una esfera de peso W pegada al extremo de una barra uniforme también con peso W. Si usted lo libera del reposo, manteniendo la barra horizontal, ¿cuál será su comportamiento mientras cae si la resistencia del aire es despreciable? *a*) ¿Permanecerá horizontal, *b*) girará alrededor de su centro de gravedad, *c*) girará alrededor de la esfera, o *d*) girará de modo que la esfera gire hacia abajo? Explique su razonamiento.

P11.10 Suponga que el objeto de la pregunta 11.9 se libera del reposo con la barra inclinada a 60° arriba de la horizontal, con la esfera en el extremo superior. Conforme cae, *a*) ¿girará alrededor de su centro de gravedad hasta que quede horizontal, *b*) girará alrededor de su centro de gravedad hasta que quede vertical con la esfera en la base, *c*) girará alrededor de la esfera hasta que quede vertical con la esfera en la base o *d*) permanecerá a 60° arriba de la horizontal?

P11.11 ¿Por qué un esquiador acuático que avanza con velocidad constante debe inclinarse hacia atrás? ¿Qué determina qué tanto debe inclinarse? Dibuje un diagrama de cuerpo libre del esquiador para justificar sus respuestas.

P11.12 Cuando una carreta de pioneros se atascaba en el lodo, la gente sujetaba los rayos de las ruedas y trataba de hacerlas girar, en lugar de simplemente empujar la carreta. ¿Por qué?

P11.13 El poderoso Zimbo asegura tener los músculos de las piernas tan fuertes, que podría pararse erguido sobre sus pies e inclinarse hacia adelante para recoger con sus dientes una manzana colocada sobre el piso. ¿Debería usted pagar para ver su desempeño o tendría alguna sospecha acerca de su afirmación? ¿Por qué?

P11.14 ¿Por qué es más fácil sostener una mancuerna de 10 kg con la mano junto al cuerpo que con el brazo extendido horizontalmente?

P11.15 Ciertas características de una persona, como su estatura y su masa, son fijas (al menos durante periodos relativamente largos). ¿Las siguientes características también son fijas? *a*) La ubicación del centro de gravedad del cuerpo; *b*) el momento de inercia del cuerpo alrededor de un eje que pasa por el centro de masa de la persona. Explique su razonamiento.

P11.16 Durante el embarazo, con frecuencia las mujeres sufren dolores de espalda porque se tienen que inclinar hacia atrás mientras caminan. ¿Por qué tienen que caminar de esta manera?

P11.17 ¿Por qué es más fácil volcar un vaso cónico de base angosta que uno de lados rectos? ¿Importa que el vaso esté lleno o vacío?

P11.18 Si un refrigerador alto y pesado se empuja sobre un piso áspero, ¿qué factores determinan si resbala o se vuelca?

P11.19 Si un alambre metálico duplica su longitud y triplica su diámetro, ¿por cuál factor cambia su módulo de Young?

P11.20 ¿Por qué el concreto reforzado con varillas de acero incrustadas en él es más fuerte que el ordinario?

P11.21 Un alambre metálico con diámetro D se estira 0.100 mm cuando sostiene un peso W. Si se utiliza un alambre con la misma longitud para soportar un peso tres veces mayor, ¿cuál tendría que ser su diámetro (en términos de D), para aún así estirarse solamente 0.100 mm?

P11.22 Compare las propiedades mecánicas de un cable de acero fabricado con muchos alambres delgados trenzados, con las propiedades de una varilla sólida de acero del mismo diámetro. ¿Qué ventajas tiene cada uno?

P11.23 El material de los huesos humanos y el de un elefante es básicamente el mismo; sin embargo, un elefante tiene extremidades mucho más gruesas. Explique por qué, en términos del esfuerzo de rotura.

P11.24 Existe cierta histéresis elástica, pequeña pero apreciable, en el tendón grande de la parte posterior de la pata de un caballo. Explique cómo esto puede dañar el tendón, si el caballo corre con demasiado esfuerzo durante mucho tiempo.

P11.25 Si se usan monturas de caucho para absorber vibraciones de máquinas por histéresis elástica, como se mencionó en la sección 11.5, ¿qué pasa con la energía asociada a las vibraciones?

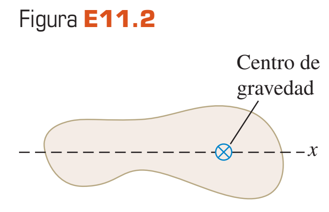
EJERCICIOS

Sección 11.2 Centro de gravedad

11.1 •• Una barra uniforme de 50.0 cm de longitud y 0.120 kg tiene pegada una masa pequeña de 0.055 kg a su extremo izquierdo, y una masa pequeña de 0.110 kg pegada al otro extremo. Las dos masas se consideran como partículas puntuales. Usted quiere equilibrar horizontalmente este sistema sobre un apoyo colocado justamente debajo de su centro de gravedad. ¿A qué distancia del extremo izquierdo debería colocarse el apoyo?

11.2 •• El centro de gravedad de un objeto irregular de 5.00 kg se muestra en la figura E11.2. Usted necesita mover el centro de gravedad 2.20 cm a la izquierda pegándole una masa de 1.50 kg, la cual se considera entonces como parte del objeto. ¿Dónde se debe ubicar el centro de gravedad de esta masa adicional?

Figura **E11.2**



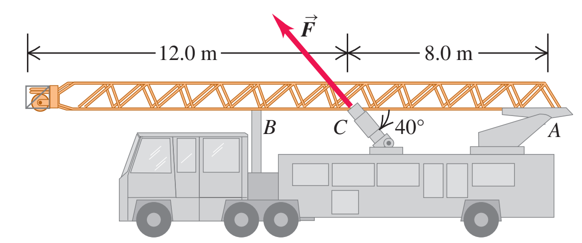
11.3 • Una varilla uniforme tiene 2.00 m de longitud y 1.80 kg de masa. La varilla está sujeta a una abrazadera de 2.40 kg. ¿A qué distancia debe estar el centro de gravedad de la abrazadera desde el extremo izquierdo de la varilla para que el centro de gravedad del objeto compuesto esté a 1.20 m del extremo izquierdo de la varilla?

Sección 11.3 Solución de problemas de equilibrio de cuerpos rígidos

11.4 • Una escotilla uniforme de 300 N está cerrada, con bisagras en un lado, sobre el piso. Calcule la fuerza total hacia arriba necesaria para comenzar a abrirla, y la fuerza total ejercida sobre la escotilla por las bisagras: *a*) si la fuerza hacia arriba se aplica en el centro de la escotilla y *b*) si la fuerza hacia arriba se aplica en el centro del borde opuesto a las bisagras.

11.5 •• **Levantamiento de una escalera.** La escalera de un camión de bomberos tiene 20.0 m de longitud, pesa 2800 N, tiene su centro de gravedad en su centro y puede girar sobre un perno en el extremo (A) (figura E11.5). Ignore la torca de la fricción en el perno. La escalera se eleva mediante una fuerza aplicada por un pistón hidráulico en el punto C, que está a 8.0 m de A, y la fuerza $\vec{F}$ ejercida por el pistón forma un ángulo de 40° con la escalera. ¿Qué magnitud mínima debe tener $\vec{F}$ para separar la escalera del apoyo en B? Inicie dibujando un diagrama de cuerpo libre de la escalera.

Figura **E11.5**



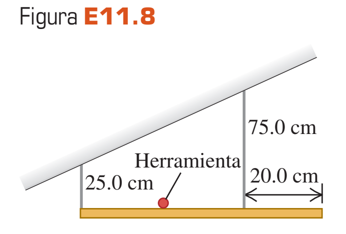
11.6 •• Dos personas llevan una tabla uniforme de madera de 3.00 m de longitud que pesa 160 N. Si una persona aplica una fuerza hacia arriba de 60 N en un extremo, ¿en qué punto sostiene la tabla la otra persona? Inicie dibujando un diagrama de cuerpo libre de la tabla.

11.7 •• Dos personas llevan un pesado motor eléctrico sobre una tabla ligera de 2.00 m de longitud. Una persona levanta un extremo con una fuerza de 400 N, y la otra levanta el extremo opuesto con una

fuerza de 600 N. *a*) ¿Cuánto pesa el motor y dónde está el centro de gravedad a lo largo de la tabla? *b*) Suponga que la tabla no es ligera sino que pesa 200 N, con su centro de gravedad en el centro, y que las dos personas ejercen la misma fuerza que antes. En este caso, ¿cuál es el peso del motor y dónde se localiza su centro de gravedad?

11.8 •• Una repisa uniforme de 60.0 cm y 50.0 N se sostiene horizontalmente mediante dos alambres verticales sujetos al techo en pendiente (figura E11.8). Una herramienta muy pequeña de 25.0 N se coloca en la repisa en medio de los puntos donde se le unen los alambres. Calcule la tensión en cada alambre. Comience dibujando un diagrama de cuerpo libre para la repisa.

Figura **E11.8**

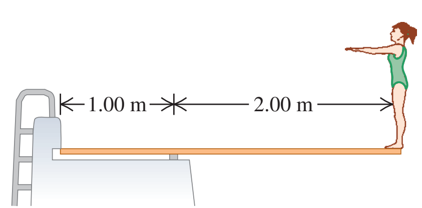


11.9 •• Una barra uniforme de 1.50 m y 350 N está suspendida horizontalmente con dos cables verticales en cada extremo. El cable *A* puede soportar una tensión máxima de 500.0 N sin romperse, y el cable *B* puede soportar hasta 400.0 N. Usted quiere colocar un peso pequeño sobre esta barra. *a*) ¿Cuál es el peso máximo que usted puede colocar sobre ella sin romper ningún cable?, y *b*) ¿dónde debería colocar este peso?

11.10 •• Una escalera uniforme de 5.0 m de longitud que pesa 160 N descansa contra una pared vertical sin fricción con su base a 3.0 m de la pared. El coeficiente de fricción estática entre la base de la escalera y el suelo es de 0.40. Un hombre de 740 N sube lentamente la escalera. Comience dibujando un diagrama de cuerpo libre de la escalera. *a*) ¿Qué fuerza de fricción máxima puede ejercer el suelo sobre la escalera en su base? *b*) ¿Cuál es la fuerza de fricción cuando el hombre ha subido 1.0 m a lo largo de la escalera? *c*) ¿Hasta dónde puede subir el hombre antes de que la escalera resbale?

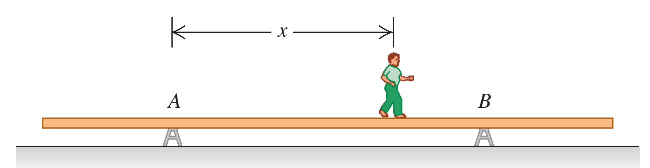
11.11 • Un trampolín de 3.00 m de longitud se apoya en un punto a 1.00 m del extremo fijo, y una clavadista que pesa 500 N se pone de pie en el extremo libre (figura E11.11). El trampolín tiene sección transversal uniforme y pesa 280 N. Calcule *a*) la fuerza en el punto de apoyo; y *b*) la fuerza en el extremo izquierdo.

Figura **E11.11**



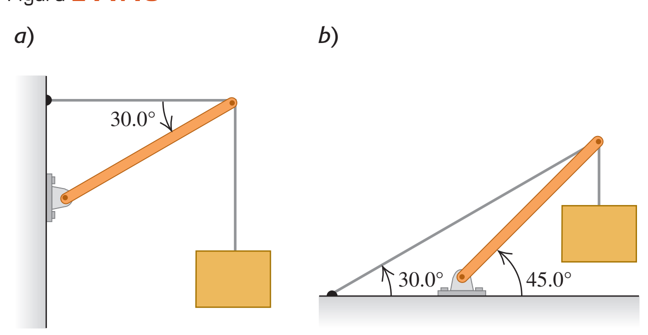
11.12 • Una viga uniforme de aluminio de 9.00 m de longitud pesa 300 N y descansa simétricamente en dos apoyos separados 5.00 m (figura E11.12). Un niño que pesa 600 N parte de *A* y camina hacia la derecha. *a*) Dibuje en la misma gráfica dos curvas que representen las fuerzas F_A y F_B ejercidas hacia arriba sobre la viga en los puntos *A* y *B*, en función de la coordenada *x* del niño. Use 1 cm = 100 N vertcalmente y 1 cm = 1.00 m horizontalmente. *b*) Según la gráfica, ¿qué tanto después de *B* puede estar el niño sin que se incline la viga? *c*) ¿A qué distancia del extremo derecho de la viga debe estar *B* para que el niño pueda caminar hasta el extremo sin inclinar la viga?

Figura **E11.12**



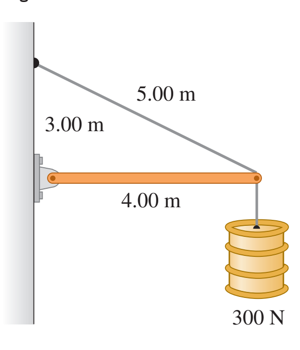
11.13 • Calcule la tensión *T* en cada cable, así como la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre la viga por la articulación en los sistemas de la figura E11.13. En cada caso, sea *w* el peso de la caja suspendida, que contiene invaluables objetos de arte. La viga es uniforme y también pesa *w*. En cada caso inicie dibujando un diagrama de cuerpo libre dela viga.

Figura **E11.13**



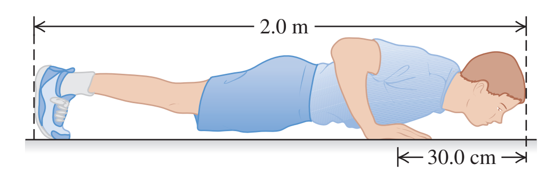
11.14 • La viga horizontal de la figura E11.14 pesa 150 N, y su centro de gravedad está en su centro. Calcule *a*) la tensión en el cable, y *b*) las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la pared sobre la viga.

Figura **E11.14**



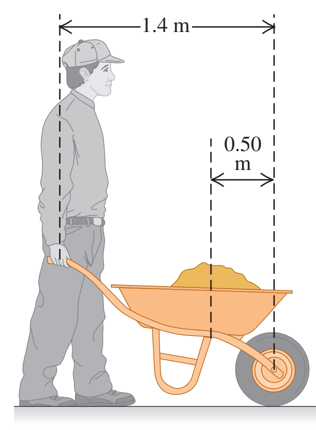
11.15 •• BIO Lagartijas. Para fortalecer los músculos de los brazos y del pecho, un deportista de 82 kg y 2.0 m de estatura hace las lagartijas, como se ilustra en la figura E11.15. Su centro de masa está a 1.15 m de las plantas de sus pies, y los centros de sus palmas están a 30 cm de la parte superior de su cabeza. Calcule la fuerza que ejerce el piso sobre cada uno de sus pies y sobre cada mano, suponiendo que ambos pies ejercen la misma fuerza al igual que ambas manos. Inicie con un diagrama de cuerpo libre del deportista.

Figura **E11.15**



11.16 •• Suponga que no puede levantar más de 650 N (aproximadamente 150 lb) sin ayuda. *a*) ¿Cuánto podrá levantar empleando una carretilla de 1.4 m de longitud que pesa 80.0 N y cuyo centro de gravedad está a 0.50 m del centro de la rueda (figura

Figura **E11.16**

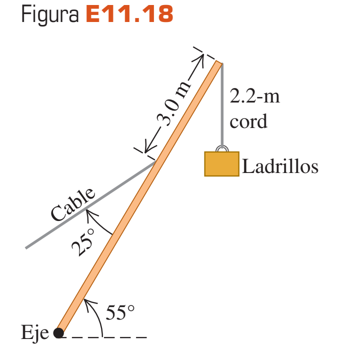


E11.16)? El centro de gravedad de la carga que lleva en la carretilla también está a 0.50 m del centro de la rueda. *b*) ¿De dónde proviene la fuerza que le permite levantar más de 650 N cuando usa la carretilla?

11.17 •• Imagine que lleva a su perrita Clea al veterinario y este decide que debe ubicar el centro de gravedad del animal. Sería cruel colgar a la perrita del techo, así que el veterinario debe idear otro método. Coloca las patas delanteras de Clea en una báscula y sus patas traseras en otra. La báscula delantera marca 157 N, y la trasera, 89 N. Luego, el veterinario mide a Clea y determina que las patas traseras están 0.95 m detrás de las delanteras. ¿Cuánto pesa Clea y dónde está su centro de gravedad?

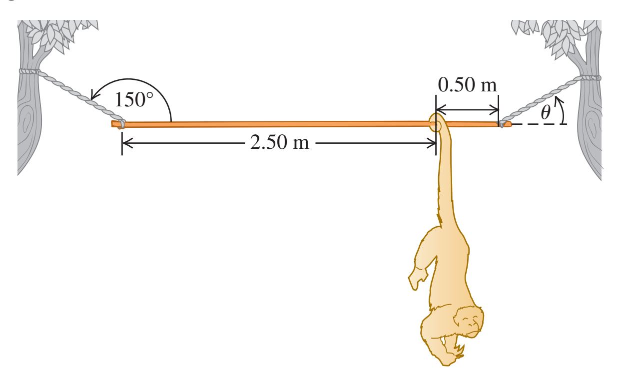
11.18 •• Una grúa de 15,000 N puede girar alrededor de un eje sin fricción en su base y está sostenida por un cable que forma un ángulo de 25° con la grúa (figura E11.18). La grúa tiene 16 m de largo y no es uniforme; su centro de gravedad está a 7.0 m del eje medidos a lo largo de la grúa. El cable está sujeto a 3.0 m del extremo superior de la grúa. La grúa se levanta a 55° por encima de la horizontal, sosteniendo un contenedor con ladrillos de 11,000 N mediante una cuerda muy ligera de 2.2 m. Calcule *a*) la tensión en el cable y *b*) las componentes vertical y horizontal de la fuerza ejercida por el eje sobre la grúa. Comience dibujando un diagrama de cuerpo libre de la grúa.

Figura **E11.18**



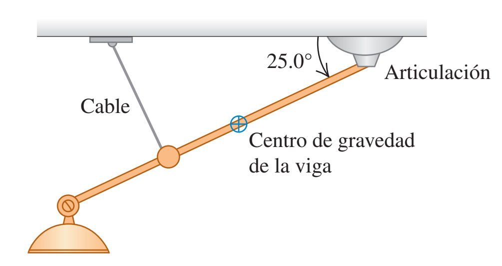
11.19 •• En un zoológico, una varilla uniforme de 240 N y 3.00 m de longitud se sostiene en posición horizontal con dos cuerdas en sus extremos (figura E11.19). La cuerda izquierda forma un ángulo de 150° con la varilla, y la derecha forma un ángulo θ con la horizontal. Un mono aullador (*Alouatta seniculus*) de 90 N cuelga inmóvil a 0.50 m del extremo derecho de la varilla y nos estudia detenidamente. Calcule θ y las tensiones en las dos cuerdas. Comience dibujando un diagrama de cuerpo libre de la varilla.

Figura **E11.19**



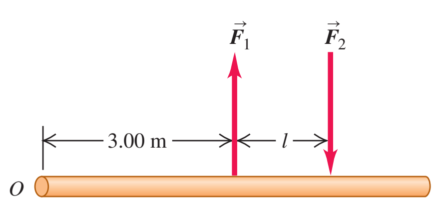
11.20 •• Una viga no uniforme de 4.50 m de longitud, que pesa 1.00 kN y forma un ángulo de 25.0° debajo de la horizontal, está sostenida por una articulación sin fricción en su extremo superior derecho y por un cable, a 3.00 m de la viga y perpendicular a esta (figura E11.20). El centro de gravedad de la viga está a 2.00 m de la articulación. Una lámpara ejerce una fuerza de 5.00 kN hacia abajo sobre el extremo inferior izquierdo de la viga. Calcule la tensión T en el cable, y las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre la viga por la articulación. Inicie dibujando un diagrama de cuerpo libre de la viga.

Figura **E11.20**



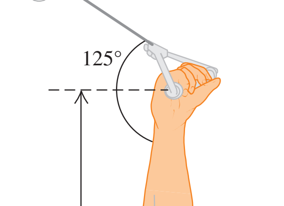
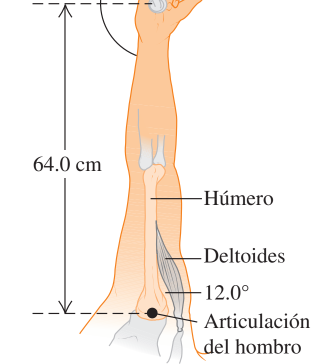
11.21 • **Un par.** Dos fuerzas de igual magnitud y dirección opuesta que actúan sobre un objeto en dos puntos distintos forman un *par de fuerzas.* Dos fuerzas antiparalelas de magnitud $F_1 = F_2 = 8.00$ N se aplican a una varilla como se muestra en la figura E11.21. *a*) ¿Qué distancia l debe haber entre las fuerzas para que produzcan una torca neta de 6.40 N·m alrededor del extremo izquierdo de la varilla? *b*) ¿El sentido de esta torca es horario o antihorario? *c*) Repita los incisos *a*) y *b*) para una articulación en el punto de la varilla donde se aplica $\vec{F}_2$.

Figura **E11.21**



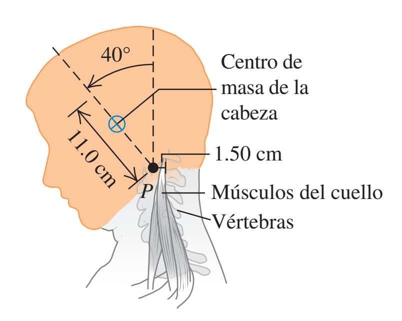
11.22 •• BIO **Un buen entrenamiento.** Usted se ejercita en un aparato Nautilus de un gimnasio para fortalecer los músculos deltoides (del hombro). Sus brazos están elevados verticalmente y pueden girar alrededor de la articulación del hombro; usted sostiene el cable de la máquina en su mano a 64.0 cm de la articulación del hombro. El deltoides está sujeto al húmero a 15.0 cm de la articulación del hombro y forma un ángulo de 12.0° con el hueso (figura E11.22). Si usted produce una tensión en el cable del aparato de 36.0 N sobre cada brazo, ¿cuál es la tensión en cada músculo deltoides si usted mantiene sus brazos estirados sin mover? (*Sugerencia:* Comience por elaborar un claro diagrama de cuerpo libre de su brazo).

Figura **E11.22**

11.23 •• BIO **Músculos del cuello.** Un estudiante flexiona su cabeza a 40° de la vertical mientras intenta leer su libro de física, girando la cabeza alrededor de una vértebra (punto P en la figura E11.23). Su cabeza tiene una masa de 4.50 kg (que es típica), y su centro de masa está a 11.0 cm del punto P. Los músculos de su cuello están a 1.50 cm del punto P, medidos de forma *perpendicular* a los músculos. *a*) Elabore un diagrama de cuerpo libre de la cabeza del estudiante. *b*) Calcule la tensión en los músculos de su cuello.

Figura **E11.23**



Sección 11.4 Esfuerzo, deformación y módulos de elasticidad

11.24 • BIO **Bíceps.** Un bíceps relajado requiere una fuerza de 25.0 N para alargarse 3.0 cm; el mismo músculo sometido a máxima tensión requiere de una fuerza de 500 N para el mismo alargamiento. Calcule el módulo de Young para el tejido muscular en ambas condiciones, si lo consideramos como un cilindro uniforme de 0.200 m de longitud y sección transversal de 50.0 cm^2.

11.25 •• Un alambre circular de acero de 2.00 m de longitud no debe estirarse más de 0.25 cm, cuando se estira con una fuerza de 400 N a cada extremo. ¿Qué diámetro mínimo debe tener?

11.26 •• Dos varillas circulares, una de acero y la otra de cobre, se unen por los extremos. Cada una tiene 0.750 m de longitud y 1.50 cm de diámetro. La combinación se somete a una fuerza que los estira con magnitud de 4000 N. Para cada varilla, determine: *a*) la deformación y *b*) el alargamiento.

11.27 •• Una varilla metálica de 4.00 m de longitud y área transversal de 0.50 cm^2 se estira 0.20 cm al someterse a una fuerza de 5000 N. ¿Qué módulo de Young tiene este metal?

11.28 •• **Esfuerzo en una cuerda de alpinista.** Una cuerda de nailon se alarga 1.10 m sometida al peso de una alpinista de 65.0 kg. Si la cuerda mide 45.0 m de longitud y 7.0 mm de diámetro, ¿qué módulo de Young tiene el nailon?

11.29 •• Para construir una escultura grande en movimiento, un artista cuelga una esfera de aluminio con masa de 6.0 kg de un alambre vertical de acero de 0.50 m de longitud y área transversal de 2.5×10^{-3} cm^2. En la parte inferior de la esfera, el artista sujeta un alambre de acero similar del que cuelga un cubo de latón de 10.0 kg. Para cada alambre, calcule *a*) la deformación por tensión y *b*) el alargamiento.

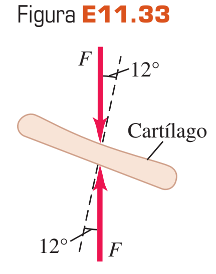
11.30 •• Un poste vertical de acero sólido de 25 cm de diámetro y 2.50 m de longitud debe soportar una carga de 8000 kg. Puede despreciarse el peso del poste. *a*) ¿A qué esfuerzo se somete el poste? *b*) ¿Qué deformación experimenta? *c*) ¿Cómo cambia su longitud al aplicarse la carga?

11.31 •• BIO **Compresión de un hueso humano.** El módulo volumétrico de un hueso es de 15 GPa. *a*) Si un buzo en entrenamiento se pone un traje presurizado, ¿cuánto tendría que aumentar la presión (en atmósferas) arriba de la presión atmosférica para comprimir sus huesos el 0.10% de su volumen original? *b*) Considerando que la presión en el océano se incrementa en 1.0×10^4 Pa por cada metro de profundidad, ¿a qué profundidad tendría que llegar este buzo para que sus huesos se comprimieran 0.10%? Al parecer, ¿la compresión es un problema por el que él debe preocuparse?

11.32 • Se saca un lingote de oro sólido de la bodega del RMS *Titanic* hundido. *a*) ¿Qué sucede con su volumen al cambiar de la presión en el barco a la presión menor de la superficie del mar? *b*) La diferencia de presión es proporcional a la profundidad. ¿Cuántas veces mayor habría sido el cambio volumétrico, si el barco hubiera estado al doble de profundidad? *c*) El módulo volumétrico del plomo es la cuarta parte del módulo del oro. Calcule la razón de cambio volumétrico de un lingote sólido de plomo y uno de oro de igual volumen, para el mismo cambio de presión.

11.33 • BIO **Caminata cuesta abajo.** Durante una caminata vigorosa cuesta abajo, la fuerza sobre el cartílago de la rodilla (los meniscos medio y lateral) puede ser de hasta ocho veces el peso del cuerpo. Dependiendo del ángulo de descenso, esta fuerza puede provocar sobre el cartílago una fuerza grande de corte y deformarlo. El cartílago tiene un área de 10 cm^2 aproximadamente y un módulo de corte de 12 MPa. Si el excursionista más su mochila tienen una masa combinada de 110 kg (razonable), y la fuerza máxima de impacto es de ocho veces el peso de su cuerpo (lo cual, por supuesto, incluye el peso de la mochila) a un ángulo de 12° con el cartílago (figura E11.33), ¿qué ángulo (en grados) se deformará el cartílago de la rodilla? (Recuerde que el hueso bajo el cartílago empuja hacia arriba con la misma intensidad que la fuerza hacia abajo).

Figura **E11.33**



11.34 •• En el abismo Challenger de la Fosa de las Marianas, la profundidad del agua es de 10.9 km y la presión es de 1.16×10^8 Pa (cerca de 1.15×10^3 atm). *a*) Si se lleva un metro cúbico de agua de la superficie a esa profundidad, ¿cuánto cambiará su volumen? (La presión atmosférica normal es del orden de 1.0×10^5 Pa. Suponga que k para el agua de mar es igual al valor para el agua dulce de la tabla 11.2). *b*) ¿Qué densidad tiene el agua de mar a esta profundidad? (En la superficie, su densidad es de 1.03×10^3 kg/m^3).

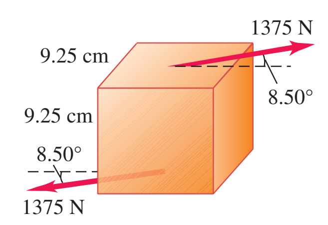
11.35 • Una muestra de aceite con un volumen inicial de 600 cm^3 se somete a un aumento de presión de 3.6×10^6 Pa, y el volumen disminuye 0.45 cm^3. ¿Qué módulo volumétrico tiene el material? ¿Y qué compresibilidad tiene?

11.36 •• Una placa cuadrada de acero mide 10.0 cm por lado y tiene un espesor de 0.500 cm. *a*) Calcule la deformación por corte que se produce al aplicarse a cada uno de los cuatro lados una fuerza de 9.0×10^5 N paralela a cada lado. *b*) Determine el desplazamiento x en centímetros.

11.37 •• Un cubo de cobre mide 6.00 cm de cada lado. Usando un pegamento muy fuerte, la base está sujeta a una superficie plana horizontal, mientras se aplica una fuerza horizontal F a la cara superior paralela a uno de los bordes. (Consulte la tabla 11.1). *a*) Demuestre que la fuerza F que el pegamento ejerce sobre la base es igual pero opuesta a la fuerza sobre la cara superior. *c*) ¿Qué tan grande debe ser F para hacer que el cubo se deforme 0.250 mm? *c*) Si se realizara el mismo experimento en un cubo de plomo del mismo tamaño que el de cobre, ¿qué distancia se deformaría al aplicarle la misma fuerza que en el inciso *b*)?

11.38 • En un laboratorio de pruebas, sobre un cubo de cierto material de 9.25 cm por lado, una fuerza de 1375 N dirigida a 8.50° en el cubo (figura E11.38) causa una deformación de 1.24° en el cubo. ¿Cuál es el módulo de corte del material?

Figura **E11.38**



Sección 11.5 Elasticidad y plasticidad

11.39 •• En un laboratorio de prueba de materiales, se determina que un alambre metálico hecho con una nueva aleación se rompe cuando se aplica una fuerza de tensión de 90.8 N perpendicular a cada extremo. Si el diámetro del alambre es de 1.84 mm, ¿cuál es el esfuerzo de rotura de la aleación?

11.40 • Un alambre de acero de 4.0 m de longitud tiene área transversal de 0.050 cm^2, y un límite proporcional igual a 0.0016 veces su módulo de Young (véase la tabla 11.1). El esfuerzo de rotura tiene un valor igual a 0.0065 veces su módulo de Young. El alambre está sujeto por arriba y cuelga verticalmente. *a*) ¿Qué peso puede colgarse del

alambre sin exceder el límite proporcional? *b*) ¿Cuánto se estira el alambre con esta carga? *c*) ¿Qué peso máximo puede soportar?

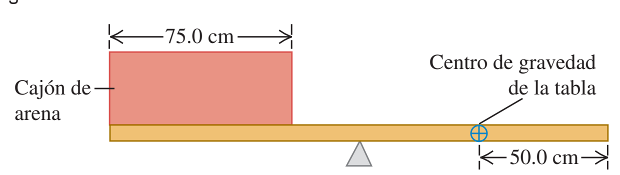
11.41 •• **PA** El límite elástico de un cable de acero es de 2.40×10^8 Pa y su área transversal es de 3.00 cm^2. Calcule la aceleración máxima hacia arriba que puede darse a un elevador de 1200 kg sostenido por el cable sin que el esfuerzo exceda un tercio del límite elástico.

11.42 •• Un alambre de latón debe resistir una fuerza de tensión de 350 N sin romperse. ¿Qué diámetro mínimo debe tener dicho alambre?

PROBLEMAS

11.43 ••• Un cajón de masa despreciable está en reposo en el extremo izquierdo de una tabla de 25.0 kg y 2.00 m de longitud (figura P11.43). El ancho del cajón es de 75.0 cm y se va a distribuir arena uniformemente en él. El centro de gravedad de la tabla no uniforme está a 50.0 cm del extremo derecho. ¿Qué masa de arena debería colocarse en el cajón para que la tabla se equilibre horizontalmente sobre el apoyo, que está colocado exactamente debajo de su punto medio?

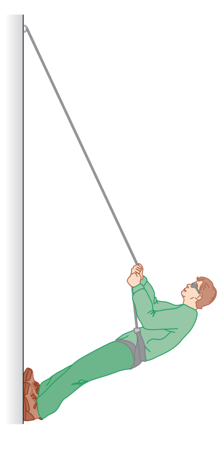
Figura **P11.43**



11.44 ••• Una puerta de 1.00 m de anchura y 2.00 m de altura pesa 280 N y se apoya en dos bisagras, una a 0.50 m debajo de la parte superior y otra a 0.50 m arriba de la parte inferior. Cada bisagra soporta la mitad del peso de la puerta. Suponiendo que el centro de gravedad de la puerta está en su centro, calcule las componentes de fuerza horizontales ejercidas sobre la puerta por cada bisagra.

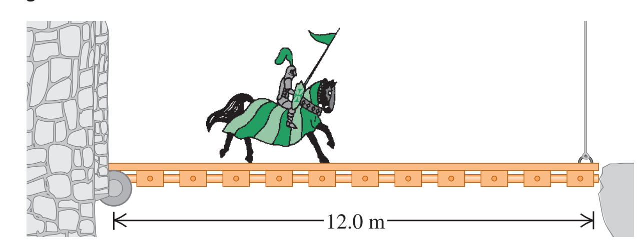
11.45 ••• **Escalar montañas.** A menudo los alpinistas utilizan una cuerda para descender por la pared de un acantilado (lo cual se conoce como *rapel*). Colocan su cuerpo casi horizontal y sus pies empujando contra el risco (figura P11.45). Suponga que un alpinista, de 82 kg y estatura de 1.90 m con centro de gravedad a 1.1 m de sus pies, desciende a rapel por un risco vertical manteniendo su cuerpo levantado a 35.0° sobre la horizontal. Él sostiene la cuerda a 1.40 m de sus pies y forma un ángulo de 25.0° con la pared del risco. *a*) ¿Qué tensión necesita soportar esta cuerda? *b*) Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que la pared del risco ejerce sobre los pies del alpinista. *c*) ¿Qué coeficiente mínimo de fricción estática se necesita para evitar que los pies del alpinista se resbalen de la pared del risco, si él tiene un pie apoyado contra el risco a la vez?

Figura **P11.45**



11.46 • Sir Lancelot sale lentamente a caballo de la fortaleza de Camelot pasando por el puente levadizo de 12.0 m que salva el foso (figura P11.46). Él no sabe que sus enemigos cortaron parcialmente el cable vertical que sostiene el frente del puente, de modo que se romperá si se somete a una tensión de 5.80×10^3 N. La masa del puente es de 200 kg y su centro de gravedad está en su centro. Lancelot, su lanza, su armadura y su caballo tienen una masa combinada de 600 kg. ¿Se romperá el cable antes de que Lancelot llegue al otro lado? Si así es, ¿a qué distancia del castillo estará el centro de gravedad del caballo más el jinete cuando se rompa el cable?

Figura **P11.46**

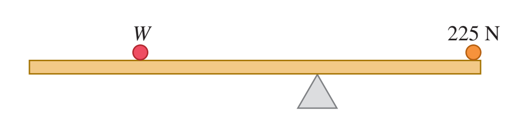


11.47 • Tres fuerzas verticales actúan sobre un avión cuando vuela con altitud y velocidad constantes. Se trata del peso del avión, una fuerza vertical aerodinámica sobre el ala y una fuerza vertical aerodinámica sobre la cola horizontal. (El aire circundante ejerce las fuerzas aerodinámicas, que son reacciones a las fuerzas que el ala y la cola ejercen sobre el aire cuando el avión lo atraviesa). En el caso específico de un avión ligero que pesa 6700 N, el centro de gravedad está 0.30 m adelante del punto donde actúa la fuerza aerodinámica vertical sobre el ala y 3.66 m adelante del punto donde actúa la fuerza aerodinámica vertical sobre la cola. Determine la magnitud y la dirección (hacia arriba o hacia abajo) de cada una de las dos fuerzas verticales aerodinámicas.

11.48 •• Una camioneta tiene una distancia entre ejes de 3.00 m. Normalmente, 10,780 N descansan sobre las ruedas delanteras y 8820 N sobre las ruedas traseras, cuando el vehículo está estacionado en pavimento horizontal. *a*) Una carga de 3600 N se coloca sobre el tirón trasero (un accesorio que se coloca en el parachoques para enganchar un remolque), 1.00 m detrás del eje trasero. ¿Cuánto peso descansa ahora en las ruedas delanteras? ¿Y en las traseras? *b*) ¿Cuánto peso tendría que colocarse en el tirón trasero para que las ruedas delanteras se levanten del suelo?

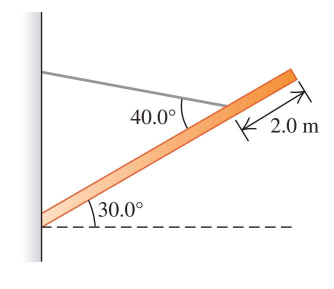
11.49 •• Una varilla uniforme de 255 N y 2.00 m de longitud carga un peso de 225 N en su extremo derecho, y un peso desconocido *W* hacia su extremo izquierdo (figura P11.49). Si *W* se coloca a 50.0 cm del extremo izquierdo de la varilla, el sistema se equilibra horizontalmente cuando el apoyo está a 75.0 cm del extremo derecho. *a*) Calcule *W*. *b*) Si *W* se mueve ahora 25.0 cm a la derecha, ¿a qué distancia y en qué dirección debe moverse el apoyo para restablecer el equilibrio?

Figura **P11.49**



11.50 •• Una viga uniforme de 8.0 m y 1500 kg está unida por una bisagra a la pared y sostenida por un cable delgado sujeto a 2.0 m del extremo libre de la viga (figura P11.50). La viga está sostenida a un ángulo de 30.0° arriba de la horizontal. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre de la viga. *b*) Calcule la tensión en el cable. *c*) ¿Con qué intensidad empuja la viga hacia la pared?

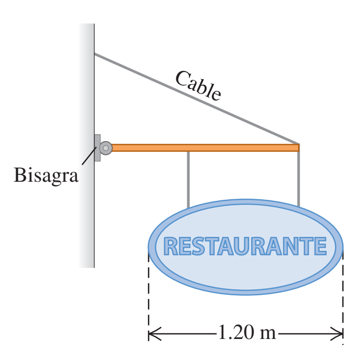
Figura **P11.50**



11.51 •• Suponga que usted inaugura un restaurante y espera atraer a sus clientes colgando un letrero en el exterior (figura P11.51). La viga horizontal uniforme que sostiene el letrero tiene 1.50 m de longitud y

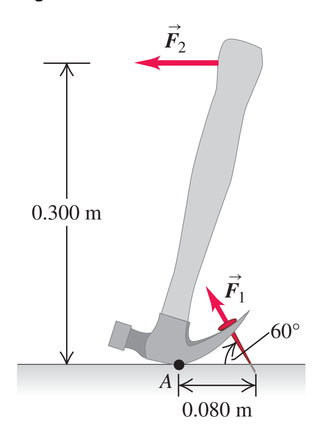
masa de 12.0 kg, y está sujeta a la pared mediante una bisagra. El letrero es uniforme con masa de 28.0 kg y longitud de 1.20 m. los dos alambres que sostienen el letrero tienen una longitud de 32.0 cm cada uno, están separados 90 cm y se encuentran igualmente espaciados con respecto al punto medio del letrero. El cable que sostiene la viga tiene 2.00 m de longitud. *a*) ¿Qué tensión mínima debe soportar el cable sin que se caiga el letrero? *b*) ¿Qué fuerza vertical mínima debe soportar la bisagra sin salirse de la pared?

Figura **P11.51**



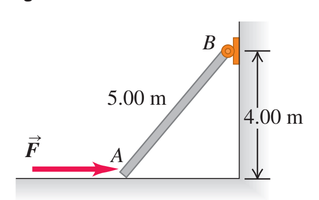
11.52 ••• Se usa un martillo de uña para sacar un clavo de una tabla (figura P11.52). El clavo forma un ángulo de 60° con la tabla, y se necesita una fuerza $\vec{F}_1$ de 400 N aplicada al clavo para sacarlo. La cabeza del martillo toca la tabla en el punto *A*, que está a 0.080 m de donde el clavo entra en la tabla. Se aplica una fuerza horizontal $\vec{F}_2$ al mango del martillo a una altura de 0.300 m sobre la tabla. ¿Qué magnitud debe tener $\vec{F}_2$ para aplicar al clavo la fuerza requerida de 400 N (F_1)? (Se puede despreciar el peso del martillo).

Figura **P11.52**



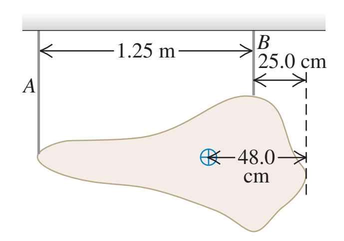
11.53 • El extremo *A* de la barra *AB* de la figura P11.53 descansa en una superficie horizontal sin fricción, y el extremo *B* tiene una bisagra. Se ejerce en *A* una fuerza horizontal $\vec{F}$ con magnitud de 160 N. Desprecie el peso de la barra. Calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la barra sobre la bisagra en *B*.

Figura **P11.53**



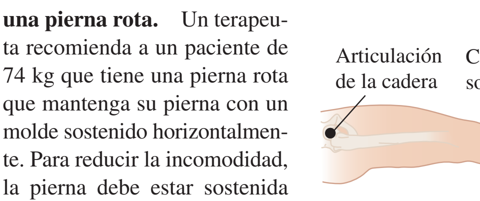
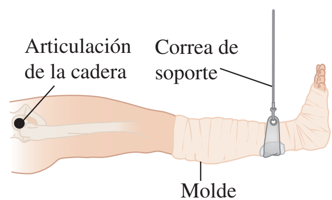
11.54 • Un museo de arte moderno está exhibiendo una escultura irregular de 426 N que cuelga de dos alambres verticales delgados, *A* y *B*, que están separados 1.25 m (figura P11.54). El centro de gravedad de esta pieza de arte se localiza a 48.0 cm de la punta del extremo derecho. Obtenga la tensión en cada alambre.

Figura **P11.54**



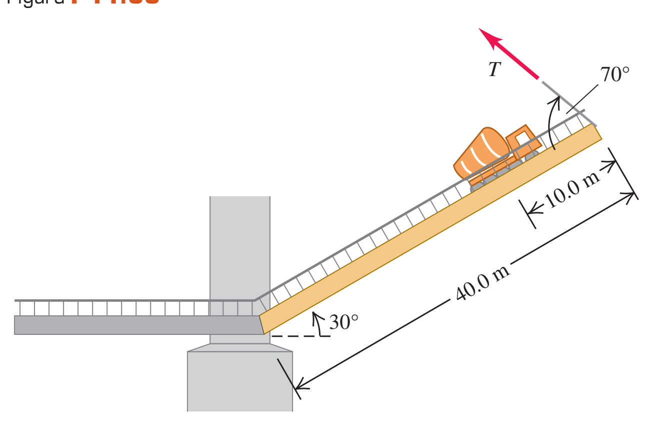
11.55 •• BIO **Sosteniendo una pierna rota.** Un terapeuta recomienda a un paciente de 74 kg que tiene una pierna rota que mantenga su pierna con un molde sostenido horizontalmente. Para reducir la incomodidad, la pierna debe estar sostenida por una correa vertical en el centro de masa del sistema pierna-molde (figura P11.55). Para cumplir estas instrucciones, el paciente consulta una tabla de distribuciones típicas de masa y encuentra que ambos muslos constituyen normalmente el 21.5% del peso del cuerpo, y que el centro de masa de cada muslo se encuentra a 18.0 cm de la articulación de la cadera. El paciente también se entera de que la parte inferior de las piernas (incluyendo los pies) forman el 14.0% del peso del cuerpo, con centro de masa a 69.0 cm de la articulación de la cadera. El molde tiene una masa de 5.50 kg y su centro de masa está a 78.0 cm de la articulación de la cadera. ¿A qué distancia de la articulación de la cadera se debe atar la correa de soporte al molde?

Figura **P11.55**

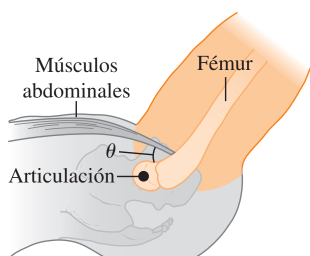
11.56 • **Camión en puente levadizo.** Una revolvedora de cemento cargada entra en un viejo puente levadizo, se descompone y se detiene con su centro de gravedad situado a tres cuartos del claro del puente. El conductor solicita ayuda por radio, pone el freno de mano y espera. Mientras tanto, se acerca un barco, así que el puente se levanta mediante un cable sujeto al extremo opuesto a la articulación (figura P11.56). El puente levadizo mide 40.0 m de largo y tiene una masa de 18,000 kg; el centro de gravedad está en su punto medio. La revolvedora, junto con su conductor, tiene una masa de 30,000 kg. Cuando el puente se eleva formando un ángulo de 30° con la horizontal, el cable forma un ángulo de 70° con la superficie del puente. *a*) ¿Qué tensión *T* hay en el cable cuando el puente se sostiene en esta posición? *b*) Calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza que la articulación ejerce sobre el puente.

Figura **P11.56**



11.57 •• BIO **Elevación de piernas.** En una versión simplificada de la acción de la musculatura para levantar las piernas, la musculatura abdominal tira del fémur (hueso del muslo) para elevar la pierna haciéndola girar alrededor de un extremo (figura P11.57). Cuando usted está en posición horizontal, estos músculos for-

Figura **P11.57**



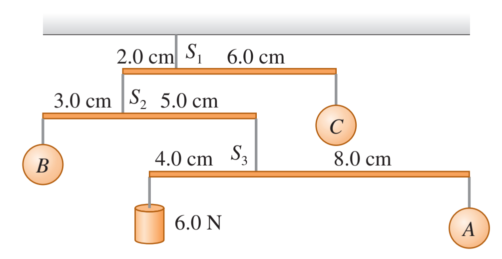
man un ángulo aproximado de 5° con el fémur y si usted eleva sus piernas, los músculos permanecen aproximadamente horizontales, de modo que θ aumenta. Por sencillez, supondremos que estos músculos sujetan al fémur solo en un punto, a 10 cm de la articulación de la cadera (aun cuando, en realidad, la situación es más complicada). Para una persona de 80 kg que tiene una pierna de 90 cm de longitud, la masa de la pierna es de 15 kg y su centro de masa está a 44 cm de su articulación de la cadera medidos a lo largo de la pierna. Si la persona eleva su pierna 60° arriba de la horizontal, el ángulo entre los músculos abdominales y su fémur es también de 60°. *a*) Con su pierna elevada 60°, calcule la tensión de los músculos abdominales sobre cada pierna. Como es usual, comience con un diagrama de cuerpo libre. *b*) ¿Cuándo es mayor la tensión en este músculo: cuando la pierna está elevada a 60° o cuando la persona inicia la elevación del suelo? ¿Por qué? (Intente comprobar la respuesta usted mismo). *c*) Si los músculos abdominales sujetos al fémur estuvieran perfectamente horizontales cuando una persona está acostada, ¿podría esa persona levantar su pierna? ¿Por qué?

11.58 • Una escalera de emergencia no uniforme tiene 6.0 m de longitud cuando se extiende en el suelo congelado de un callejón. En su parte superior, la escalera está sujeta por una articulación sin fricción, y el suelo ejerce una fuerza de fricción despreciable en la base. La escalera pesa 250 N y su centro de gravedad está a 2.0 m de la base sobre la escalera. Una madre junto con su hijo pesan juntos 750 N y están en la escalera a 1.5 m de la articulación. La escalera forma un ángulo θ con la horizontal. Calcule la magnitud y la dirección de: *a*) la fuerza ejercida por el suelo congelado sobre la escalera, *b*) la fuerza ejercida por la escalera sobre la articulación. *c*) ¿Sus respuestas a los incisos *a*) y *b*) dependen del ángulo θ?

11.59 •• Una viga uniforme de masa m forma un ángulo θ con la horizontal; está sostenido por una articulación sin fricción situada a un tercio de su longitud con respecto a su extremo inferior izquierdo, y por una cuerda horizontal en su extremo superior derecho. Un cable y un paquete con peso total w cuelgan del extremo superior derecho. *a*) Calcule las componentes vertical y horizontal V y H de la fuerza que la articulación aplica a la viga, así como la tensión T en la cuerda. *b*) Si la tensión segura máxima en la cuerda es de 700 N y la masa de la viga es de 30.0 kg, calcule el peso seguro máximo del cable y el paquete, cuando la viga forma un ángulo de 55.0° con la horizontal. *c*) ¿Con qué ángulo θ no puede suspenderse en forma segura peso del extremo derecho de la viga?

11.60 • Le piden diseñar la escultura móvil que se muestra en la figura P11.60. Los hilos y las varillas tienen peso despreciable, y las varillas deben colgar horizontales. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada varilla. *b*) Calcule los pesos de las esferas A, B y C. Calcule las tensiones en los alambres S_1, S_2 y S_3. *c*) ¿Qué puede decir acerca de la ubicación horizontal del centro de gravedad del móvil? Explique su respuesta.

Figura **P11.60**

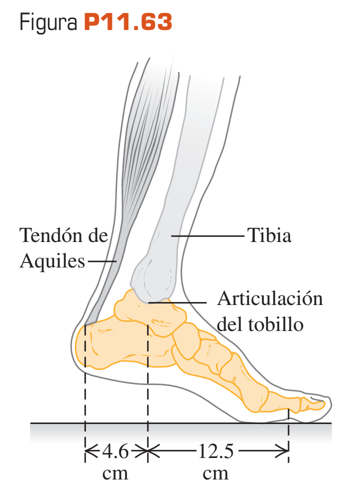


11.61 •• Una viga uniforme de 7.5 m de longitud y 5860 N de peso está unida por una bisagra a una pared y sostenida por un cable delgado, sujeto a un punto que está a 1.5 m del extremo libre de la viga. El cable corre entre la pared y la viga, y forma un ángulo de 40° con esta última. Calcule la tensión en el cable cuando la viga está 30° arriba de la horizontal.

11.62 •• **PA** Un puente levadizo uniforme debe sostenerse con un ángulo de 37° sobre la horizontal para que los barcos puedan pasar por abajo. El puente pesa 45,000 N y tiene una longitud de 14.0 m. Hay un cable conectado a un punto que está a 3.5 m de las bisagras donde el puente gira (medidos a lo largo del puente), y ejerce una tracción horizontal sobre el puente para mantenerlo fijo. *a*) Calcule la tensión en el cable. *b*) Determine la magnitud y la dirección de la fuerza que las bisagras ejercen sobre el puente. *c*) Si el cable se rompe súbitamente, ¿cuál es la magnitud de la aceleración angular del puente levadizo justo después de la rotura? *d*) ¿Cuál es la rapidez angular del puente conforme regresa a la posición horizontal?

11.63 •• **BIO** **Ejercicios de estiramiento del tendón.** Como parte de un programa de ejercicios, una persona de 75 kg eleva el peso total de su cuerpo sobre la articulación de un pie (figura P11.63). El tendón de Aquiles tira del hueso del talón del pie directamente hacia arriba. El tendón tiene 25 cm de longitud, un área de 78 mm^2 en la sección transversal y un módulo de Young de 1470 MPa. *a*) Elabore un diagrama de cuerpo libre del pie de la persona (de todas las partes por debajo del tobillo). El peso del pie es despreciable. *b*) ¿Qué fuerza ejerce el tendón de Aquiles sobre el talón durante este ejercicio? Exprese su respuesta en newtons y en múltiplos de su peso. *c*) ¿Cuántos milímetros se estira el tendón de Aquiles?

Figura **P11.63**



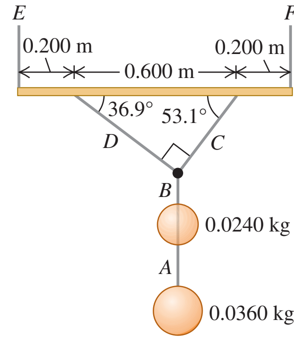
11.64 •• *a*) En la figura P11.64 una viga uniforme de 6.00 m de longitud cuelga de un punto 1.00 m a la derecha de su centro. La viga pesa 140 N y forma un ángulo de 30.0° con la vertical. Del extremo derecho de la viga cuelga un peso de 100.0 N; un peso desconocido w cuelga del otro extremo. Si el sistema está en equilibrio, ¿cuánto vale w? Puede ignorar el espesor de la viga. *b*) Si el ángulo de la viga fuera de 45.0°, ¿cuánto vale w?

Figura **P11.64**

11.65 ••• El asta horizontal y uniforme de una bandera, de 5.00 m de longitud y peso de 200 N, gira en una pared vertical en un extremo, y una acróbata de 600 N cuelga del otro extremo. El asta es sostenida por un alambre que va de su extremo exterior a un punto en la pared directamente arriba del asta. *a*) Si la tensión en el alambre no debe exceder 1000 N, ¿a qué altura mínima sobre el asta puede fijarse el alambre en la pared? *b*) Si el asta permanece horizontal, ¿cuántos newtons aumentaría la tensión si el alambre se sujetara 0.50 m debajo de ese punto?

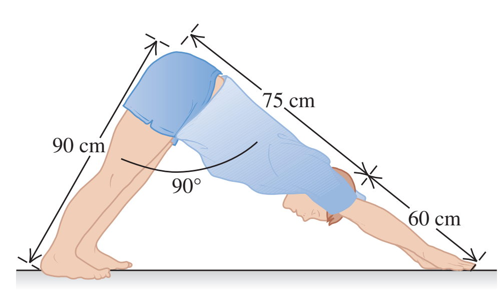
11.66 • Un adorno consiste en dos esferas de cristal relucientes con masas de 0.0240 y 0.0360 kg suspendidas de una varilla uniforme con masa de 0.120 kg y longitud de 1.00 m (figura P11.66). La varilla se cuelga del techo con una cuerda vertical en cada extremo, quedando horizontal. Calcule la tensión en cada una de las cuerdas A a F.

Figura **P11.66**



11.67 •• **BIO** **Perro boca abajo.** Un ejercicio de yoga conocido como "perro boca abajo" requiere el estiramiento recto de las manos por encima de la cabeza y flexionarse apoyándose contra el suelo. Una persona de 750 N ejecuta este ejercicio como se muestra en la figura P11.67. Cuando flexiona su cuerpo por la cadera a un ángulo de 90° entre sus piernas y el tronco, sus piernas, tronco, cabeza y brazos tienen las dimensiones que se indican. Además, sus piernas y pies pesan un total de 277 N, y su centro de masa se encuentra a 41 cm de su cadera, medidos a lo largo de sus piernas. El tronco, la cabeza y los brazos de la persona pesan 473 N, y su centro de gravedad se encuentra a 65 cm de la cadera medidos a lo largo de la parte superior del cuerpo. *a*) Calcule la fuerza normal que ejerce el piso sobre cada pie y sobre cada mano, suponiendo que la persona no favorece alguna mano o pie. *b*) Calcule la fuerza de fricción sobre cada pie y sobre cada mano, suponiendo que es la misma sobre ambos pies y sobre ambas manos (aunque no necesariamente la misma en pies y manos). [*Sugerencia:* Primero considere el cuerpo completo como un sistema, luego aísle sus piernas (o la parte superior del cuerpo)].

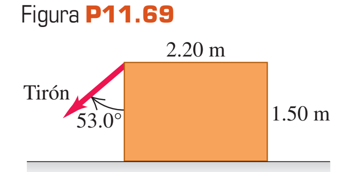
Figura **P11.67**



11.68 • Cuando se estiran un alambre, una cuerda o una banda de hule, se adelgaza además de alargarse. Si se cumple la ley de Hooke, la reducción fraccionaria de anchura es proporcional a la deformación por tensión. Si w_0 es la anchura original y Δw es el cambio de anchura, entonces $\Delta w/w_0 = -\sigma \Delta l/l_0$, donde el signo menos nos recuerda que la anchura disminuye al aumentar la longitud. La constante adimensional σ, característica del material, es la *razón de Poisson*. *a*) Si la varilla de acero del ejemplo 11.5 (sección 11.4) tiene sección transversal circular y razón de Poisson de 0.23, ¿cómo cambia su diámetro cuando la fresadora se cuelga de ella? *b*) Un cilindro hecho de níquel (razón de Poisson = 0.42) tiene 2.0 cm de radio. ¿Qué tensión $F_{\perp}$ debe aplicarse perpendicular a cada extremo del cilindro para que el radio disminuya en 0.10 mm? Suponga que el esfuerzo de rotura y el límite proporcional del metal son muy grandes y no se exceden.

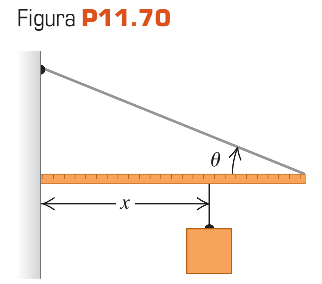
11.69 • Un trabajador quiere darle la vuelta a una caja rectangular uniforme de 1250 N halando a 53.0° sobre uno de sus lados verticales (figura P11.69). El piso es lo suficientemente áspero para evitar que la caja se deslice. *a*) ¿Qué tirón se requiere para que la caja se empiece a inclinar? *b*) ¿Qué tan fuerte empuja el piso sobre la caja? *c*) Obtenga la fuerza de fricción sobre la caja. *d*) ¿Qué coeficiente mínimo de fricción estática se necesita para evitar que la caja se deslice por el piso?

Figura **P11.69**



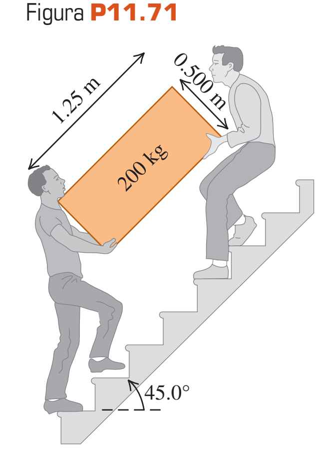
11.70 ••• Un extremo de un metro uniforme se coloca contra una pared vertical (figura P11.70); el otro extremo se sostiene con una cuerda ligera que forma un ángulo θ con el metro. El coeficiente de fricción estática entre el extremo del metro y la pared es de 0.40. *a*) ¿Qué valor máximo puede tener el ángulo θ si el metro debe permanecer en equilibrio? *b*) Sea $\theta = 15°$. Un bloque que pesa lo mismo que el metro se suspende de él, como se muestra, a una distancia x de la pared. ¿Qué valor mínimo de x permite al metro seguir en equilibrio? *c*) Si $\theta = 15°$, ¿qué valor debe tener el coeficiente de fricción estática para que el bloque pueda suspenderse a 10 cm del extremo izquierdo del metro sin que este resbale?

Figura **P11.70**



11.71 •• Dos amigos suben un tramo de las escaleras cargando una caja de 200 kg. La caja mide 1.25 m de longitud y 0.500 m de altura, y el centro de gravedad está en su centro. Las escaleras forman un ángulo de 45.0° con respecto al piso. La caja también se carga inclinada 45.0°, de modo que su base está paralela a la pendiente de las escaleras (figura P11.71). Si la fuerza que cada persona aplica es vertical, ¿qué magnitud tiene cada fuerza? ¿Es mejor ser la persona de arriba o la de abajo?

Figura **P11.71**



11.72 •• **BIO** **Antebrazo.** En el brazo humano, el antebrazo y la mano giran alrededor del apoyo articular que constituye el codo. Considere un modelo simplificado donde el músculo bíceps está unido al antebrazo a 3.80 cm del codo. Suponga que la mano y el antebrazo juntos pesan 15.0 N y que su centro de gravedad está a 15.0 cm del codo (menos de la mitad de la distancia a la mano). El antebrazo se mantiene en posición horizontal formando un ángulo recto con el brazo, y el bíceps ejerce su fuerza en dirección perpendicular al antebrazo. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el antebrazo y determine la fuerza ejercida por el bíceps cuando la mano está vacía. *b*) Ahora la persona sostiene una pesa de 80.0 N en la mano, manteniendo horizontal el antebrazo. Suponga que el centro de gravedad de esta pesa se ubica a 33.0 cm del codo. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el antebrazo y determine la fuerza que ahora ejerce el bíceps. Explique por qué el bíceps necesita ser muy fuerte. *c*) En las condiciones del inciso *b*), determine la magnitud y dirección de la fuerza que la articulación del codo ejerce sobre el antebrazo. *d*) Sosteniendo la pesa de 80.0 N, la persona levanta el antebrazo hasta que forma un ángulo de 53.0° arriba de la horizontal. Si el bíceps sigue ejerciendo su fuerza

perpendicularmente al antebrazo, ¿qué magnitud tiene la fuerza cuando el antebrazo se encuentra en esta posición? ¿La fuerza aumentó o disminuyó con respecto a su valor en el inciso *b*)? Explique esto y compruebe su respuesta haciendo la prueba con su propio brazo.

11.73 •• **BIO CALC** Repase el ejemplo 11.4 (sección 11.3) donde se sostiene una mancuerna. El peso máximo que puede sostenerse de esa manera está limitado por la tensión máxima permisible T en el tendón (determinada por la resistencia de los tendones) y por la distancia D entre el codo y el punto de sujeción del tendón al antebrazo. *a*) Representaremos con $T_{\text{máx}}$ el valor máximo de la tensión del tendón. Use los resultados del ejemplo 11.4 para expresar $w_{\text{máx}}$ (el peso máximo que se puede sostener) en términos de $T_{\text{máx}}$, L, D y h. Sus expresiones *no* deberán incluir el ángulo θ. *b*) Los tendones de diferentes primates se unen al antebrazo con diferentes valores de D. Calcule la derivada de $w_{\text{máx}}$ con respecto a D y determine si la derivada es positiva o negativa. *c*) Un tendón de chimpancé está unido al antebrazo en un punto más lejos del codo que en el ser humano. Utilice este hecho para explicar por qué el chimpancé tiene brazos más fuertes que el ser humano. (La desventaja es que los chimpancés tienen brazos menos flexibles que los humanos).

11.74 •• Una mesa uniforme de 90.0 N mide 3.6 m a lo largo, 1.0 m a lo alto y 1.2 m a lo ancho. Se coloca un peso de 1500 N a 0.50 m de un extremo de la mesa, a una distancia de 0.60 m de cada una de las patas de ese lado. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la mesa y calcule la fuerza que cada una de las cuatro patas ejerce sobre el piso.

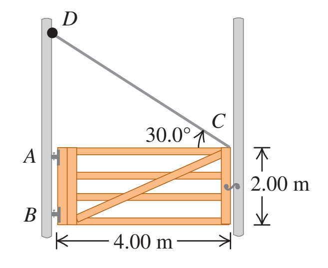
11.75 ••• **Arbotante.** *a*) El techo de un edificio simétrico tiene una pendiente de 35.0° sobre la horizontal a cada lado. Si cada lado del techo uniforme pesa 10,000 N, ¿qué fuerza horizontal ejerce el techo sobre el borde superior de la pared, la cual tiende a empujar las paredes hacia afuera? ¿Qué tipo de edificio tendría más probabilidades de derrumbarse, uno con paredes altas o uno con paredes cortas? Explique su respuesta. *b*) Como se vio en el inciso *a*), las paredes altas corren peligro de derrumbarse por el peso del techo. Los antiguos constructores de estructuras grandes enfrentaron este problema. Una solución empleada en las grandes catedrales góticas del siglo XIII fue el arbotante: un soporte de piedra que corría entre las paredes y el suelo, y ayudaba a sostener las paredes. Una iglesia gótica tiene un techo uniforme que pesa en total 20,000 N y se alza a 40° sobre la horizontal en cada pared. Las paredes tienen 40 m de altura, y un arbotante hace contacto con cada pared 10 m abajo de la base del techo. ¿Qué fuerza horizontal debe aplicar este arbotante a la pared?

11.76 •• Imagine que está tratando de subir una rueda de bicicleta de masa m y radio R a una acera de altura h; para ello, aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$ (figura P11.76). ¿Qué magnitud mínima de $\vec{F}$ logra subir la rueda, si la fuerza se aplica *a*) al centro de la rueda? *b*) ¿Y en la parte superior de la rueda? *c*) ¿En cuál caso se requiere menos fuerza?

Figura **P11.76**

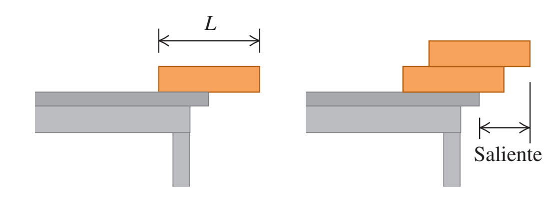
11.77 • **La puerta del corral.** Una puerta de 4.00 m de ancho y 2.00 m de altura pesa 500 N; su centro de gravedad está en su centro, y tiene bisagras en A y B. Para aliviar la deformación en la bisagra superior, se instala el alambre CD como se muestra en la figura P11.77. La tensión en CD se aumenta hasta que la fuerza horizontal en la bisagra A es cero. *a*) ¿Qué tensión hay en el alambre CD? *b*) ¿Qué magnitud tiene la componente horizontal de la fuerza en la bisagra B? *c*) ¿Qué fuerza vertical combinada ejercen las bisagras A y B?

Figura **P11.77**



11.78 • Si se coloca un bloque uniforme en el borde de una mesa, el centro del bloque debe estar sobre la mesa para que el bloque no caiga. *a*) Si apilamos dos bloques idénticos en el borde de la mesa, el centro del bloque superior debe estar sobre el bloque inferior, y el centro de gravedad de los dos bloques juntos debe estar sobre la mesa. En términos de la longitud L de cada bloque, ¿cuál es la máxima saliente posible (figura P11.78)? *b*) Repita el inciso anterior para tres y cuatro bloques idénticos. *c*) ¿Es posible apilar bloques de modo que el de arriba no esté directamente sobre la mesa? ¿Cuántos bloques serían necesarios? (Inténtelo con sus amigos, usando copias de este libro).

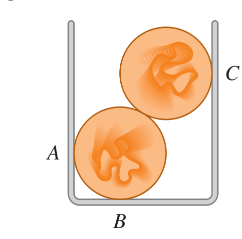
Figura **P11.78**



11.79 ••• Dos canicas uniformes de 75.0 g y 2.00 cm de diámetro se apilan como se muestra en la figura P11.79 en un recipiente de 3.00 cm de ancho. *a*) Calcule la fuerza que el recipiente ejerce sobre las canicas en los puntos de contacto A, B y C. *b*) ¿Qué fuerza ejerce cada canica sobre la otra?

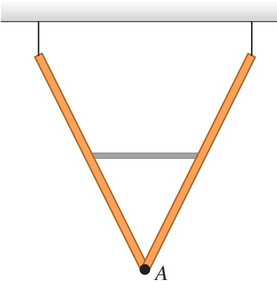


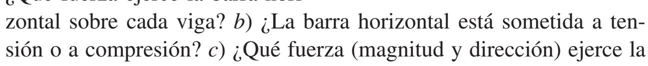
Figura **P11.79**



11.80 •• Dos vigas uniformes idénticas que pesan 260 N cada una están unidas por un extremo con una bisagra sin fricción. Una barra horizontal ligera unida a los puntos medios de las vigas mantiene un ángulo de 53.0° entre las vigas, las cuales cuelgan del techo mediante alambres verticales, formando una "V" como se muestra en la figura P11.80. *a*) ¿Qué fuerza ejerce la barra horizontal sobre cada viga? *b*) ¿La barra horizontal está sometida a tensión o a compresión? *c*) ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) ejerce la bisagra A sobre cada viga?

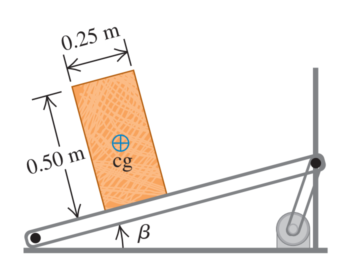
Figura **P11.80**





11.81 • Un ingeniero está diseñando un sistema transportador para cargar pacas de paja en una carreta (figura P11.81). Las pacas miden 0.25 m a lo ancho, 0.50 m a lo alto y 0.80 m a lo largo (la dimensión perpendicular al plano de la figura), con masa de 30.0 kg y su centro de gravedad en el

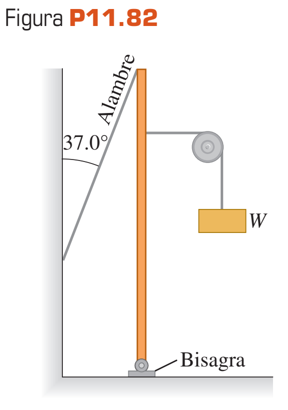
Figura **P11.81**



centro geométrico. El coeficiente de fricción estática entre una paca y la banda transportadora es de 0.60, y la banda se mueve con rapidez constante. *a*) El ángulo β del transportador se aumenta lentamente. En cierto ángulo crítico, las pacas se volcarán (si no se deslizan antes), y en otro ángulo crítico distinto resbalarán (si no se vuelcan antes). Calcule los dos ángulos críticos y determine qué sucede en el ángulo más pequeño. *b*) ¿Sería diferente el resultado del inciso *a*) si el coeficiente de fricción fuera 0.40?

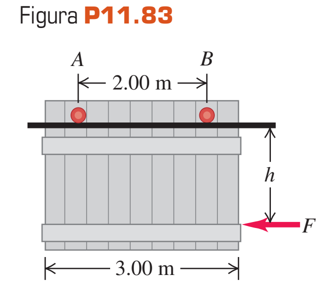
11.82 • Un peso W se sostiene unido a un poste metálico vertical y uniforme, mediante una cuerda ligera que pasa por una polea, cuya masa y fricción son despreciables. La cuerda está unida al poste 40.0 cm debajo de la parte superior y tira horizontalmente de él (figura P11.82). El poste pivota alrededor de una bisagra en su base, tiene 1.75 m de altura y pesa 55.0 N. Un alambre delgado conecta la parte superior del poste con una pared vertical. El clavo que une este alambre a la pared se saldrá si una fuerza *hacia afuera* mayor que 22.0 N actúa sobre él. *a*) ¿Cuál es el peso máximo W que puede soportarse de esta forma sin que se salga el clavo? *b*) ¿Cuál es la *magnitud* de la fuerza que la bisagra ejerce sobre el poste?

Figura **P11.82**



11.83 •• La puerta de una cochera está montada en un riel superior (figura P11.83). Las ruedas en A y B se oxidaron, de modo que no ruedan, sino que se deslizan sobre el riel. El coeficiente de fricción cinética es de 0.52. La distancia entre las ruedas es de 2.00 m, y cada una está a 0.50 m del borde vertical de la puerta. La puerta es uniforme y pesa 950 N. Una fuerza horizontal $\vec{F}$. la empuja a la izquierda con rapidez constante. *a*) Si la distancia h es de 1.60 m, ¿qué componente vertical de fuerza ejerce el riel sobre cada rueda? *b*) Calcule el valor máximo que h puede tener para que una rueda no se levante del riel.

Figura **P11.83**

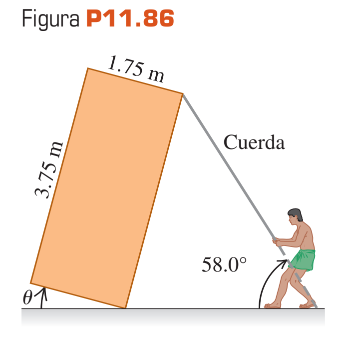


11.84 •• El brazo horizontal de una grúa se apoya en su extremo izquierdo en una articulación sin fricción y se fija con un cable unido al extremo derecho. Una cadena y una caja con peso total w cuelgan de algún punto del brazo. El peso del brazo w_b no puede despreciarse, y el brazo podría ser uniforme o no. *a*) Demuestre que la tensión en el cable es la misma si este forma un ángulo θ o uno de $180° - \theta$ con la horizontal, y que la componente de fuerza horizontal ejercida sobre el brazo por la articulación tiene la misma magnitud pero dirección opuesta con esos dos ángulos. *b*) Demuestre que el cable no puede ser horizontal. *c*) Demuestre que la tensión en el cable es mínima cuando el cable es vertical, tirando hacia arriba del extremo derecho del brazo. *d*) Demuestre que, si el cable es vertical, la fuerza ejercida por la articulación sobre el brazo es vertical.

11.85 •• Antes de colocarse en su agujero, un poste uniforme de 5700 N y 9.0 m de longitud forma cierto ángulo distinto de cero con la vertical. Un cable vertical unido 2.0 m debajo del extremo superior del poste lo mantiene fijo con su parte más baja apoyada en el suelo. *a*) Calcule la tensión en el cable, así como la magnitud y dirección de la fuerza ejercida por el suelo sobre el poste. *b*) ¿Por qué no necesitamos conocer el ángulo que el poste forma con la vertical, en tanto no sea cero?

11.86 ••• **Constructores de pirámides.** Antiguos constructores de pirámides equilibran una losa de piedra rectangular y uniforme inclinándola a un ángulo θ por encima de la horizontal y usando una cuerda (figura P11.86). Cinco trabajadores sostienen la cuerda compartiendo fuerzas iguales. *a*) Si $\theta = 20.0°$, ¿qué fuerza ejerce cada trabajador sobre la cuerda? *b*) Al aumentar θ, ¿cada trabajador tiene que ejercer más o menos fuerza que en el inciso *a*) suponiendo que no cambian el ángulo de la cuerda? ¿Por qué? *c*) ¿En qué ángulo los trabajadores ya no deben ejercer *ninguna fuerza* para equilibrar la losa? ¿Qué sucede si θ excede este valor?

Figura **P11.86**



11.87 • Usted cuelga un proyector de un alambre vertical de acero. El proyector estira el alambre 0.18 mm y el esfuerzo es proporcional a la deformación. ¿Cuánto tendría que estirarse si *a*) el alambre tuviera el doble de largo, *b*) el alambre tuviera la misma longitud pero el doble de diámetro, *c*) el alambre fuera de cobre con la longitud y el diámetro originales?

11.88 •• **La ley de Hooke para un alambre.** Un alambre de longitud l_0 y área transversal A sostiene un peso W que cuelga. *a*) Demuestre que si el cable cumple la ecuación (11.7), se comporta como un resorte de fuerza constante AY/l_0, donde Y es el módulo de Young para el material del que está hecho el cable. *b*) ¿Cuál sería la constante de fuerza para un alambre de cobre de 75.0 cm de longitud y de calibre 16 (diámetro = 1.291 mm)? Véase la tabla 11.1. *c*) ¿Cuál tendría que ser W para que el alambre del inciso *b*) se estirara 1.25 mm?

11.89 ••• **PA** Una masa de 12.0 kg sujeta al extremo de un alambre de aluminio con longitud sin estirar de 0.50 m gira en círculo vertical, con rapidez angular constante de 120 rev/min. El área transversal del alambre es de 0.014 cm^2. Calcule el alargamiento del alambre cuando la masa está *a*) en el punto más bajo de la trayectoria y *b*) en el punto más alto de la trayectoria.

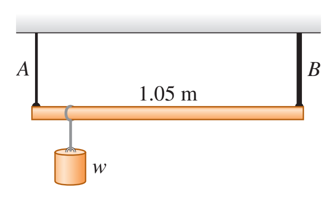
11.90 • Un alambre metálico de 3.50 m de longitud y 0.70 mm de diámetro se sometió a esta prueba: se colgó de él un peso original de 20 N para tensarlo, y se leyó en una escala la posición del extremo inferior del alambre después de agregar una carga.

Carga agregada (N)	Lectura en la escala (cm)
0	3.02
10	3.07
20	3.12
30	3.17
40	3.22
50	3.27
60	3.32
70	4.27

a) Grafique el aumento de longitud en el eje horizontal y la carga agregada en el eje vertical. *b*) Calcule el valor del módulo de Young. *c*) El límite proporcional se observó cuando la escala marcaba 3.34 cm. Determine el esfuerzo en ese punto.

11.91 ••• Una varilla de 1.05 m de longitud con peso despreciable está sostenida en sus extremos por alambres A y B de igual longitud (figura P11.91). El área transversal de A es de 2.00 mm^2, y la de B, 4.00 mm^2.

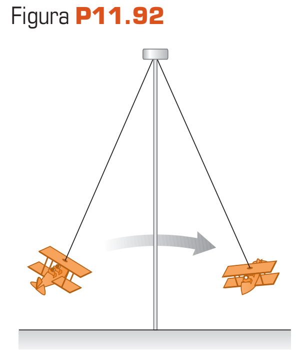
Figura **P11.91**



El módulo de Young del alambre A es de 1.80×10^{11} Pa; el de B, 1.20×10^{11} Pa. ¿En qué punto de la varilla debe colgarse un peso w con la finalidad de producir: *a*) esfuerzos iguales en A y B? *b*) ¿Y deformaciones iguales en A y B?

11.92 ••• PA Un juego de feria (figura P11.92) consiste en pequeños aviones unidos a varillas de acero de 15.0 m de longitud y área transversal de 8.00 cm². *a*) ¿Cuánto se estira la varilla cuando el juego está en reposo? (Suponga que cada avión con dos personas en él pesa 1900 newtons en total). *b*) En movimiento, el juego tiene una rapidez angular máxima de 8.0 rev/min. ¿Cuánto se estira la varilla entonces?

Figura **P11.92**



11.93 • Una varilla de latón de 1.40 m de longitud y área transversal de 2.00 cm² se sujeta por un extremo al extremo de una varilla de níquel de longitud L y área transversal de 1.00 cm². La varilla compuesta se somete a fuerzas iguales y opuestas de 4.00×10^4 N en sus extremos. *a*) Calcule la longitud L de la varilla de níquel, si el alargamiento de ambas varillas es el mismo. *b*) ¿Qué esfuerzo se aplica a cada varilla? *c*) ¿Qué deformación experimenta cada varilla?

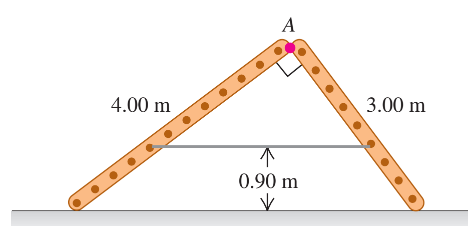
11.94 ••• PA BIO **Esfuerzo en la espinilla.** La resistencia a la compresión de nuestros huesos es importante en la vida diaria. El módulo de Young de los huesos es cerca de 1.4×10^{10} Pa. Los huesos solo pueden experimentar un cambio de longitud del 1.0% antes de romperse. *a*) ¿Qué fuerza máxima puede aplicarse a un hueso con área transversal mínima de 3.0 cm²? (Esto corresponde aproximadamente al área transversal de la tibia, o espinilla, en su punto más angosto). *b*) Estime la altura máxima desde la que puede saltar un hombre de 70 kg sin fracturarse la tibia. Suponga que el lapso entre que la persona toca el piso y que se detiene es de 0.030 s, y que el esfuerzo se distribuye igualmente entre las dos piernas.

11.95 ••• Un contrabandista produce etanol (alcohol etílico) puro durante la noche y lo almacena en un tanque de acero inoxidable cilíndrico de 0.300 m de diámetro con un pistón hermético en la parte superior. El volumen total del tanque es de 250 L (0.250 m³). En un intento por meter un poco más de etanol en el tanque, el contrabandista apila 1420 kg de lingotes de plomo sobre el pistón. ¿Qué volumen adicional de etanol puede introducir el contrabandista en el tanque? (Suponga que la pared del tanque es perfectamente rígida).

PROBLEMAS DE DESAFÍO

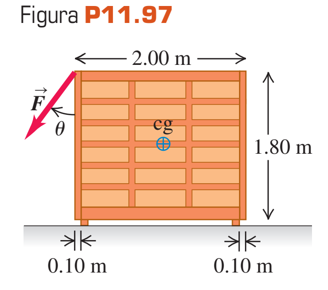
11.96 ••• Dos escaleras, de 4.00 m y 3.00 m de longitud, tienen una bisagra en el punto A y están atadas por una cuerda horizontal 0.90 m arriba del piso (figura P11.96). Las escaleras pesan 480 N y 360 N, respectivamente, y el centro de gravedad de cada una está en su centro. Suponga que el piso está recién encerado y no tiene fricción. *a*) Calcule la fuerza hacia arriba en la base de cada escalera. *b*) Determine la tensión en la cuerda. *c*) Calcule la magnitud de la fuerza que una escalera ejerce sobre la otra en A. *d*) Si un pintor de 800 N se pone de pie en A, calcule la tensión en la cuerda horizontal.

Figura **P11.96**



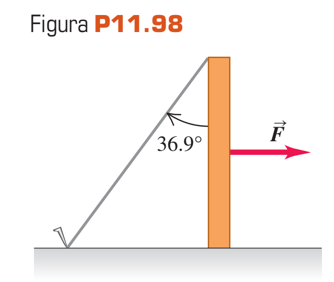
11.97 ••• Un librero que pesa 1500 N descansa en una superficie horizontal donde el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.40$. El librero tiene 1.80 m de altura y 2.00 m de anchura, con su centro de gravedad en su centro geométrico, y descansa en cuatro patas cortas que están a 0.10 m del borde del librero. Una persona tira de una cuerda atada a una esquina superior del librero con una fuerza $\vec{F}$, la cual forma un ángulo θ con el librero (figura P11.97). *a*) Si $\theta = 90°$, de modo que $\vec{F}$ sea horizontal, demuestre que, al aumentar F desde cero, el librero comenzará a resbalar antes de inclinarse, y calcule la magnitud de $\vec{F}$ que hará que el librero comience a deslizarse. *b*) Si $\theta = 0°$, de modo que $\vec{F}$ es vertical, demuestre que el librero se volcará en lugar de deslizarse, y calcule la magnitud de $\vec{F}$ que hará que el librero comience a volcarse. *c*) Calcule, en función de θ, la magnitud de $\vec{F}$ que hará que el librero comience a deslizarse y la que hará que comience a volcarse. ¿Qué valor mínimo de θ hará que el librero comience a deslizarse antes de inclinarse?

Figura **P11.97**



11.98 ••• **Tirar un poste.** El extremo de un poste de altura h, que pesa 400 N y altura h, descansa en una superficie horizontal áspera con $\mu_s = 0.30$. El extremo superior se sujeta con una cuerda fija a la superficie que forma un ángulo de 36.9° con el poste (figura P11.98). Se ejerce una fuerza horizontal $\vec{F}$ sobre el poste como se muestra. *a*) Si $\vec{F}$ se aplica en el punto medio del poste, ¿qué valor máximo puede tener sin hacer que el poste resbale? *b*) ¿Y si el punto de aplicación está a $\frac{6}{10}$ de la longitud del poste desde la base? *c*) Demuestre que si el punto de aplicación de la fuerza está a suficiente altura, no puede hacerse que el poste resbale, por más grande que sea la fuerza. Calcule esta altura crítica.

Figura **P11.98**



11.99 ••• CALC **Reducción de la tensión al mínimo.** Varios objetos cuelgan de una pesada viga horizontal de longitud L apoyada en una articulación sin fricción en su extremo izquierdo y en un cable de peso despreciable atado a la viga en I en un punto a una distancia h directamente arriba del centro de la viga. ¿Dónde debe atarse el otro extremo del cable a la viga, de modo que la tensión en el cable sea mínima? (*Sugerencia:* Al evaluar y presentar su respuesta, no olvide que la distancia máxima que puede haber entre el punto de sujeción y la articulación es la longitud L de la viga).

11.100 ••• **Módulo volumétrico de un gas ideal.** La ecuación de estado (la que relaciona la presión, el volumen y la temperatura) de un gas ideal es $pV = nRT$, donde n y R son constantes. *a*) Demuestre que si el gas se comprime mientras la temperatura T se mantiene constante, el módulo volumétrico es igual a la presión. *b*) Si un gas ideal se comprime sin que se transfiera calor desde o hacia él, la presión y el volumen están relacionados por $pV^{\gamma} =$ constante, donde γ es una constante que tiene distintos valores para diferentes gases. Demuestre que, en este caso, el módulo volumétrico está dado por $B = \gamma p$.

11.101 ••• **PA** Un pescador cuelga verticalmente un pez de 4.50 kg de un alambre de acero de 1.50 m de longitud y área transversal de 5.00×10^{-3} cm^2. El extremo superior del alambre está bien sujeto a un soporte. *a*) Calcule cuánto se estira el alambre por el peso del pez. Ahora el pescador aplica una fuerza $\vec{F}$ al pez, tirando lentamente de él hacia abajo y moviéndolo 0.500 mm con respecto a su posición de equilibrio. Para este movimiento hacia abajo, calcule *b*) el trabajo efectuado por la fuerza de gravedad; *c*) el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$; *d*) el trabajo efectuado por la fuerza que el alambre ejerce sobre el pez y *e*) el cambio de energía potencial elástica (la energía potencial asociada al esfuerzo de tensión en el alambre). Compare las respuestas de los incisos *d*) y *e*).

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

Cada piedra en el arco experimenta compresión, no tensión, que es la causa de que las fuerzas sobre las piedras tienden a empujarlas hacia el centro del arco, aplastándolas. En comparación con una pared sólida de carga, una pared con arcos es igualmente resistente, pero mucho menos costosa de construir.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

11.1 Respuesta: i. La situación **i** satisface ambas condiciones de equilibrio, ya que la gaviota tiene aceleración cero (así que $\sum \vec{F} = \mathbf{0}$) y ninguna tendencia a comenzar a girar (así que $\sum \vec{\tau} = \mathbf{0}$). La situación **ii** satisface la primera condición, pues el cigüeñal entero no acelera en el espacio, pero no satisface la segunda condición; el cigüeñal tiene una aceleración angular, así que $\sum \vec{\tau}$ no es cero. La situación **iii** satisface la segunda condición (no hay tendencia a girar), pero no la primera; la pelota se acelera en su vuelo (debido a la gravedad), así que $\sum \vec{F}$ no es cero.

11.2 Respuesta: ii. En el equilibrio, el centro de gravedad debe estar en el punto de soporte. Puesto que la roca y el metro tienen la misma masa y, por lo tanto, el mismo peso, el centro de gravedad del sistema está a medio camino entre sus centros respectivos. El centro de gravedad del metro solo está a 0.50 m del extremo izquierdo (es decir, a la mitad del metro), por lo que el centro de gravedad de la combinación de roca y metro está a 0.25 m del extremo izquierdo.

11.3 Respuesta: ii, i, iii. Esta situación es igual a la descrita en el ejemplo 11.4, sustituyendo el antebrazo por una varilla, el codo por una bisagra y el tendón por un cable. La única diferencia es que el punto de sujeción del cable está en el extremo de la varilla, así que las distancias D y L son idénticas. Del ejemplo 11.4, la tensión es

$$T = \frac{Lw}{L\,\text{sen}\,\theta} = \frac{w}{\text{sen}\,\theta}$$

Como sen θ es menor que 1, la tensión T es mayor que el peso w. La componente vertical de la fuerza ejercida por la bisagra es:

$$E_y = -\frac{(L - L)w}{L} = 0$$

En esta situación, la bisagra *no* ejerce ninguna fuerza vertical. Usted puede ver esto con facilidad, si calcula torca alrededor del extremo derecho de la varilla horizontal: la única fuerza que ejerce una torca alrededor de este punto es la componente vertical de la fuerza de la bisagra, así que la componente de fuerza debe ser cero.

11.4 Respuestas: *a*) iii, *b*) ii. En *a*) la varilla de cobre tiene 10 veces el alargamiento Δl de la varilla de acero, pero también tiene 10 veces la longitud original l_0. por lo tanto, la deformación por tensión $\Delta l / l_0$ es la misma para ambas varillas. En *b*) el esfuerzo es igual al módulo de Young Y multiplicado por la deformación. De la tabla 11.1 el acero tiene un valor de Y más grande, así que se requiere un mayor esfuerzo para producir la misma deformación.

11.5 En los casos *a*) y *b*), el parachoques habrá recuperado su forma original (aunque probablemente la pintura se haya rayado). En el caso *c*), el parachoques tendrá una abolladura o deformación permanente. En el caso *d*), el parachoques estará agrietado o roto.

Problema práctico

Respuestas:

a) $T = \dfrac{2mg}{3\,\text{sen}\,\theta}$

b) $F = \dfrac{2mg}{3\,\text{sen}\,\theta}\sqrt{\cos^2\theta + \frac{1}{4}\text{sen}^2\theta}$, $\phi = \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\theta\right)$

c) $\Delta l = \dfrac{2mgl_0}{3AY\tan\theta}$

d) 4

MECÁNICA DE FLUIDOS





? Este tiburón debe nadar constantemente para no hundirse en el fondo del océano; sin embargo, los peces tropicales anaranjados pueden permanecer en el mismo nivel del agua con poco esfuerzo. ¿Por qué existe esta diferencia?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- El significado de la densidad de un material y la densidad media de un cuerpo.
- Qué se entiende por la presión en un fluido, y cómo se mide.
- Cómo calcular la fuerza de flotación que ejerce un fluido sobre un cuerpo sumergido en este.
- La importancia de un flujo laminar contra el flujo de un fluido turbulento, y cómo la rapidez del flujo en un tubo depende del tamaño de este último.
- Cómo utilizar la ecuación de Bernoulli para relacionar la presión y la rapidez en el flujo en diferentes puntos en ciertos tipos de fluidos.

Los fluidos desempeñan un papel crucial en muchos aspectos de la vida cotidiana. Los bebemos, los respiramos y nadamos en ellos; circulan por nuestro organismo y controlan el clima. Los aviones vuelan a través de ellos y los barcos flotan en ellos. Un fluido es cualquier sustancia que puede fluir; usamos el término tanto para líquidos como para gases. En general, pensamos que los gases son fáciles de comprimir y que los líquidos son casi incompresibles, aunque hay casos excepcionales.

Comenzaremos nuestro estudio con la **estática de fluidos**, es decir, el estudio de fluidos en reposo en situaciones de equilibrio. Al igual que otras situaciones de equilibrio, esta se basa en la primera y tercera leyes de Newton. Exploraremos los conceptos clave de densidad, presión y flotación. La **dinámica de fluidos**, que es el estudio de fluidos en movimiento, es mucho más compleja; de hecho, es una de las ramas más complejas de la mecánica. Por fortuna, podemos analizar muchas situaciones importantes usando modelos idealizados sencillos y los principios que ya conocemos, como las leyes de Newton y la conservación de la energía. Aun así, estudiaremos muy superficialmente este tema tan amplio e interesante.

12.1 Densidad

Una propiedad importante de cualquier material es su **densidad**, la cual se define como su masa por unidad de volumen. Un material homogéneo, tal como el hielo o el hierro, tiene la misma densidad en todas partes. Usamos ρ (la letra griega rho) para denotar la densidad. Si la masa m de material homogéneo tiene el volumen V, la densidad ρ es

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \text{(definición de densidad)} \tag{12.1}$$

Dos objetos hechos del mismo material tienen la misma densidad, aunque pueden tener masas y volúmenes diferentes. Esto es porque la *proporción* de masa a volumen es la misma para los dos objetos (figura 12.1).

12.1 Dos objetos con diferentes masas y volúmenes, pero con la misma densidad.

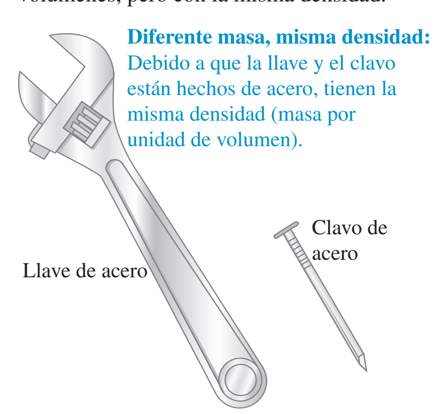


Tabla 12.1 Densidades de algunas sustancias comunes

Material	Densidad (kg/m^3)*	Material	Densidad (kg/m^3)*
Aire (1 atm, 20°C)	1.20	Hierro, acero	7.8×10^3
Etanol	0.81×10^3	Bronce	8.6×10^3
Benceno	0.90×10^3	Cobre	8.9×10^3
Hielo	0.92×10^3	Plata	10.5×10^3
Agua	1.00×10^3	Plomo	11.3×10^3
Agua de mar	1.03×10^3	Mercurio	13.6×10^3
Sangre	1.06×10^3	Oro	19.3×10^3
Glicerina	1.26×10^3	Platino	21.4×10^3
Cemento	2×10^3	Estrella enana blanca	10^{10}
Aluminio	2.7×10^3	Estrella de neutrones	10^{18}

*Para obtener la densidad en gramos por centímetro cúbico, simplemente divida entre 10^3.

La unidad del SI de la densidad es el kilogramo por metro cúbico (1 kg/m^3). La unidad cgs, el gramo por centímetro cúbico (1 g/cm^3), también se utiliza comúnmente:

$$1 \text{ g/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$$

En la tabla 12.1 se presentan las densidades de algunas sustancias comunes a temperaturas ordinarias. Observe la amplia gama de magnitudes. El material más denso que se encuentra en la Tierra es el metal osmio ($\rho = 22{,}500$ kg/m^3), pero su densidad es pequeña en comparación con las densidades de exóticos objetos astronómicos, como las estrellas enanas blancas y las estrellas de neutrones.

La **gravedad específica** de un material es la razón entre su densidad y la densidad del agua a 4.0°C, 1000 kg/m^3; es un número puro sin unidades. Por ejemplo, la gravedad específica del aluminio es 2.7. La "gravedad específica" es un término inadecuado, ya que no tiene nada que ver con la fuerza de gravedad; "densidad relativa" habría sido un mejor término.

La densidad de algunos materiales varía de un punto a otro dentro del material. Un ejemplo es el material del cuerpo humano, que incluye grasa de baja densidad (aproximadamente 940 kg/m^3) y huesos de alta densidad (de 1700 a 2500 kg/m^3). Otros dos ejemplos son la atmósfera de la Tierra (que es menos densa a grandes altitudes) y los océanos (que son más densos a mayor profundidad). Para estos materiales, la ecuación (12.1) describe la **densidad media**. En general, la densidad de un material depende de factores ambientales tales como la temperatura y la presión.

La medición de la densidad es una técnica analítica importante. Por ejemplo, se puede determinar el nivel de carga de un acumulador mediante la medición de la densidad de su electrolito, que es una disolución de ácido sulfúrico. Conforme la batería se descarga, el ácido sulfúrico (H_2SO_4) se combina con el plomo en las placas de la batería para formar sulfato de plomo ($PbSO_4$) insoluble, disminuyendo la concentración de la disolución. La densidad disminuye de aproximadamente 1.30×10^3 kg/m^3 para un acumulador completamente cargado a 1.15×10^3 kg/m^3 para un acumulador descargado.

Otro ejemplo relacionado con los automóviles es el anticongelante de tipo permanente, que normalmente es una disolución de etilenglicol ($\rho = 1.12 \times 10^3$ kg/m^3) y agua. El punto de congelación de la solución depende de la concentración del glicol, lo que puede determinarse midiendo su gravedad específica. Estas mediciones se realizan usando un dispositivo llamado hidrómetro, el cual estudiaremos en la sección 12.3.

Ejemplo 12.1 Peso de un cuarto lleno de aire



Calcule la masa y el peso del aire en una estancia a 20°C. El piso mide 4.0 m × 5.0 m, el techo se ubica a una altura de 3.0 m, y la estancia tiene la masa y el peso de un volumen igual de agua.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Suponemos que el aire es homogéneo, así que la densidad es la misma en todo el cuarto. (El aire es menos denso

a grandes alturas que cerca del nivel del mar, pero la variación de densidad a lo largo de la altura de 3.0 m del cuarto es despreciable; véase la sección 12.2). Utilizamos la ecuación (12.1) para relacionar la masa m_{aire} con el volumen V de la habitación (que vamos a calcular) y la densidad del aire ρ_{aire} (dada en la tabla 12.1).

EJECUTAR: Tenemos $V = (4.0\ m)(5.0\ m)(3.0\ m) = 60\ m^3$. De acuerdo con la ecuación (12.1),

$$m_{aire} = \rho_{aire}V = (1.20\ kg/m^3)(60\ m^3) = 72\ kg$$

$$w_{aire} = m_{aire}g = (72\ kg)(9.8\ m/s^2) = 700\ N = 160\ lb$$

La masa y el peso de un volumen igual de agua son

$$m_{agua} = \rho_{agua}V = (1000\ kg/m^3)(60\ m^3) = 6.0 \times 10^4\ kg$$

$$w_{agua} = m_{agua}g = (6.0 \times 10^4\ kg)(9.8\ m/s^2)$$
$$= 5.9 \times 10^5\ N = 1.3 \times 10^5\ lb = 66\ \text{toneladas}$$

EVALUAR: Un cuarto lleno de aire pesa aproximadamente lo mismo que un adulto promedio. El agua es casi mil veces más densa que el aire, por lo que su masa y su peso son más grandes por el mismo factor. El peso de una habitación llena de agua hundiría el piso de una casa común.

Evalúe su comprensión de la sección 12.1 Clasifique los siguientes objetos en orden decreciente de su densidad media: **i.** masa 4.00 kg, volumen $1.60 \times 10^{-3}\ m^3$; **ii.** masa 8.00 kg, volumen $1.60 \times 10^{-3}\ m^3$; **iii.** masa 8.00 kg, volumen $3.20 \times 10^{-3}\ m^3$; **iv.** masa 2560 kg, volumen $0.640\ m^3$; **v.** masa 2560 kg, volumen $1.28\ m^3$.



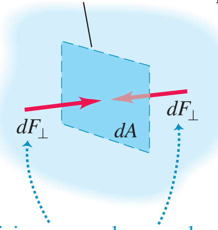
12.2 Presión en un fluido

Cuando un fluido (ya sea líquido o gas) está en reposo, ejerce una fuerza perpendicular a cualquier superficie en contacto con este, como la pared de un recipiente o un cuerpo sumergido en el fluido. Esta es la fuerza que sentimos en las piernas al introducirlas en una alberca. Aunque el fluido considerado como un todo está en reposo, las moléculas que lo componen están en movimiento; la fuerza ejercida por el fluido se debe a los choques de las moléculas con su entorno.

Si imaginamos una superficie *dentro* del fluido, el fluido a cada lado de ella ejerce fuerzas iguales y opuestas sobre la superficie. (De otra forma, la superficie se aceleraría y el fluido no permanecería en reposo). Considere una superficie pequeña de área dA centrada en un punto en el fluido; la fuerza normal que el fluido ejerce sobre cada lado es $dF_\perp$ (figura 12.2). Definimos la **presión** p en ese punto como la fuerza normal por unidad de área, es decir, la razón entre $dF_\perp$ y dA (figura 12.3):

$$p = \frac{dF_\perp}{dA} \quad \text{(definición de presión)} \tag{12.2}$$

12.2 Las fuerzas actúan sobre una pequeña superficie dentro de un fluido en reposo.



Si la presión es la misma en todos los puntos de una superficie plana finita de área A, entonces

$$p = \frac{F_\perp}{A} \tag{12.3}$$

donde $F_\perp$ es la fuerza normal neta en un lado de la superficie. La unidad del SI para la presión es el **pascal**, donde

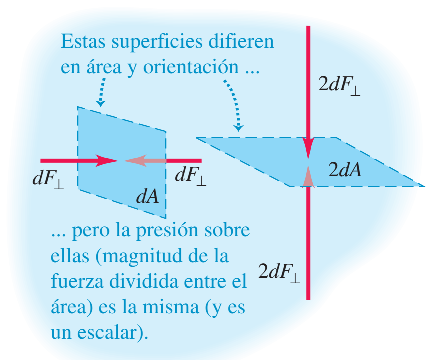
$$1\ \text{pascal} = 1\ Pa = 1\ N/m^2$$

Ya presentamos el pascal en el capítulo 11. Dos unidades relacionadas, que se emplean sobre todo en meteorología, son el *bar*, igual a 10^5 Pa, y el *milibar*, igual a 100 Pa.

La **presión atmosférica** p_a es la presión de la atmósfera terrestre, la presión en el fondo de este mar de aire en que vivimos. Esta presión varía con el cambio de clima y con la altitud. La presión atmosférica normal al nivel del mar (un valor medio) es 1 *atmósfera* (atm), definida exactamente como 101,325 Pa. Con cuatro cifras significativas,

$$(p_a)_{med} = 1\ atm = 1.013 \times 10^5\ Pa$$
$$= 1.013\ bar = 1013\ milibar = 14.70\ lb/in^2$$

12.3 La presión sobre cualquiera de los dos lados de una superficie es igual a la fuerza dividida entre el área. La presión es un escalar y sus unidades son newtons por metro cuadrado. En cambio, la fuerza es un vector y sus unidades son newtons.



CUIDADO **No confunda presión con fuerza** En el lenguaje cotidiano, las palabras "presión" y "fuerza" significan casi lo mismo, pero en mecánica de fluidos describen cantidades distintas con características diferentes. La presión de fluidos actúa en forma perpendicular a cualquier superficie en el fluido, sin importar su orientación (figura 12.3). Por lo tanto, la presión no tiene una dirección intrínseca; es un escalar. En cambio, la fuerza es un vector con dirección definida. Recuerde que la presión es fuerza por unidad de área. Como muestra la figura 12.3, una superficie con el doble de área recibe el doble de fuerza ejercida por un fluido, por lo que la presión es igual.

Ejemplo 12.2 La fuerza del aire

En la estancia descrita en el ejemplo 12.1, ¿qué fuerza total descendente actúa sobre el piso debido a una presión del aire de 1.00 atm?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este ejemplo utiliza la relación entre la presión p de un fluido (aire), el área A sujeta a esa presión y la fuerza normal resultante $F_\perp$ ejercida por el fluido. La presión es uniforme, así que usamos la ecuación (12.3), $F_\perp = pA$, para determinar la fuerza $F_\perp$. El piso es horizontal, por lo que $F_\perp$ es vertical (hacia abajo).

EJECUTAR: Tenemos $A = (4.0 \text{ m})(5.0 \text{ m}) = 20 \text{ m}^2$, así que de acuerdo con la ecuación (12.3),

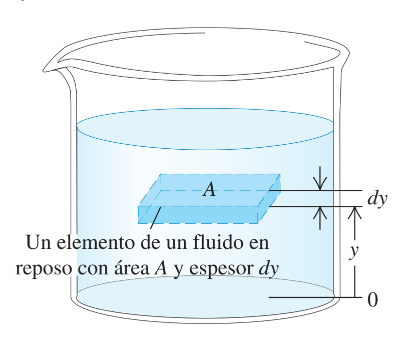
$$F_\perp = pA = (1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(20 \text{ m}^2)$$
$$= 2.0 \times 10^6 \text{ N} = 4.6 \times 10^5 \text{ lb} = 230 \text{ toneladas}$$

EVALUAR: A diferencia del agua del ejemplo 12.1, $F_\perp$ no hunde el piso aquí, porque hay una fuerza de igual magnitud *hacia arriba* en el lado de abajo del piso. Si la casa tiene sótano, esa fuerza es ejercida por el aire bajo el piso. En este caso, si despreciamos el espesor del piso, la fuerza *neta* debida a la presión del aire es cero.

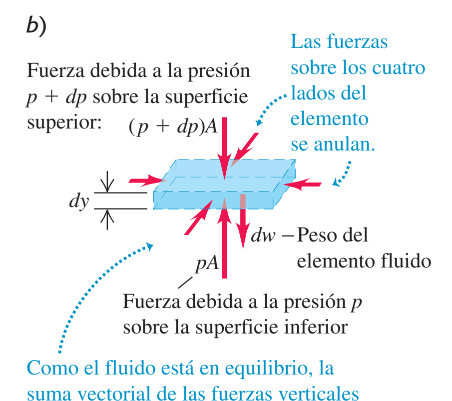
12.4 Las fuerzas sobre un elemento de fluido en equilibrio.



a)



b)




Video Tutor Demo


Video Tutor Demo

Presión, profundidad y ley de Pascal

Si podemos despreciar el peso del fluido, la presión en un fluido es la misma en todo su volumen. Usamos esta aproximación al ver el esfuerzo y la deformación de volumen en la sección 11.4. Pero con frecuencia, el peso del fluido *no* es despreciable. La presión atmosférica a gran altitud es menor que al nivel del mar, lo que obliga a presurizar la cabina de un avión que vuela a 35,000 pies. Al sumergirnos en agua profunda, los oídos nos indican que la presión se incrementa rápidamente al aumentar la profundidad.

Podemos deducir una relación general entre la presión p en cualquier punto de un fluido en reposo y la altura y del punto. Supondremos que la densidad ρ tiene el mismo valor en todo el fluido (es decir, la densidad es *uniforme*), al igual que la aceleración debida a la gravedad g. Si el fluido está en equilibrio, cada elemento de volumen está en equilibrio. Considere un elemento delgado, de espesor dy (figura 12.4*a*). Las superficies inferior y superior tienen área A, y están a distancias y y $y + dy$ por arriba de algún nivel de referencia donde $y = 0$. El volumen del elemento fluido es $dV = A\,dy$, su masa es $dm = \rho\,dV = \rho A\,dy$, y su peso es $dw = dm\,g = \rho g A\,dy$.

¿Qué otras fuerzas actúan sobre este elemento fluido (figura 12.4*b*)? Llamemos p a la presión en la superficie inferior; la componente y de fuerza total hacia arriba que actúa sobre esa superficie es pA. La presión en la superficie superior es $p + dp$, y la componente y de fuerza total (hacia abajo) sobre esta superficie superior es $-(p + dp)A$. El elemento fluido está en equilibrio, así que la componente y de fuerza total, incluyendo el peso y las fuerzas en las superficies superior e inferior, debe ser cero:

$$\sum F_y = 0 \quad \text{por lo que} \quad pA - (p + dp)A - \rho g A\,dy = 0$$

Dividiendo entre el área A y reordenando, obtenemos

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \tag{12.4}$$

Esta ecuación indica que si y aumenta, p disminuye; es decir, conforme se sube por el fluido, la presión disminuye, como esperaríamos. Si p_1 y p_2 son las presiones en las alturas y_1 y y_2, respectivamente, y si r y g son constantes, entonces

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \quad \text{(presión en un fluido de densidad uniforme)} \qquad (12.5)$$

Con frecuencia es útil expresar la ecuación (12.5) en términos de la *profundidad* bajo la superficie de un fluido (figura 12.5). Tomemos el punto 1 en cualquier nivel en el fluido y sea p la presión en ese punto. Tomemos el punto 2 en la *superficie* del fluido, donde la presión es p_0 (el subíndice indica profundidad cero). La profundidad del punto 1 bajo la superficie es $h = y_2 - y_1$, y la ecuación (12.5) se convierte en

$$p_0 - p = -\rho g(y_2 - y_1) = -\rho gh \qquad \text{o}$$

$$p = p_0 + \rho gh \qquad \text{(presión en un fluido de densidad uniforme)} \qquad (12.6)$$

La presión p a una profundidad h es mayor que la presión p_0 en la superficie, en una cantidad ρgh. Observe que la presión es la misma en dos puntos cualesquiera situados en el mismo nivel en el fluido. La *forma* del recipiente no importa (figura 12.6).

La ecuación (12.6) nos dice que si aumentamos la presión p_0 en la superficie superior, tal vez usando un pistón que embona herméticamente en el recipiente para empujar contra la superficie del fluido, la presión p a cualquier profundidad aumenta exactamente en la misma cantidad. El científico francés Blaise Pascal (1623-1662) reconoció este hecho en 1653 y lo enunció en la llamada *ley de Pascal*.

Ley de Pascal: La presión aplicada a un fluido encerrado se transmite sin disminución a todas las partes del fluido y las paredes del recipiente.

El elevador hidráulico que se representa en la figura 12.7 ilustra la ley de Pascal. Un pistón con área transversal pequeña A_1 ejerce una fuerza F_1 sobre la superficie de un líquido (aceite). La presión aplicada $p = F_1/A_1$ se transmite a través del tubo conector a un pistón mayor de área A_2. La presión aplicada es la misma en ambos cilindros, por lo que

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \qquad \text{y} \qquad F_2 = \frac{A_2}{A_1}F_1 \qquad (12.7)$$

El elevador hidráulico es un dispositivo multiplicador de la fuerza con un factor de multiplicación igual al cociente de las áreas de los dos pistones. Las sillas de los dentistas, los gatos hidráulicos para autos, muchos elevadores y los frenos hidráulicos se basan en este principio.

Para los gases, la suposición de que la densidad ρ es uniforme solo es realista en distancias verticales cortas. En un cuarto de 3.0 m de altura lleno de aire con densidad uniforme de 1.2 kg/m^3, la diferencia de presión entre el piso y el techo, dada por la ecuación (12.6), es

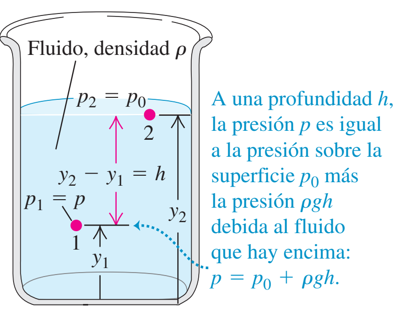
$$\rho gh = (1.2\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)(3.0\ \text{m}) = 35\ \text{Pa}$$

o aproximadamente 0.00035 atm, una diferencia muy pequeña. En cambio, entre el nivel del mar y la cumbre del Monte Everest (8882 m), la densidad del aire cambia casi en un factor de 3, y en este caso no podemos usar la ecuación (12.6). Los líquidos, por su parte, son casi incompresibles, y suele ser una buena aproximación considerar su densidad como independiente de la presión. Una presión de varios cientos de atmósferas solo causa un pequeño incremento porcentual en la densidad de la mayoría de los líquidos.

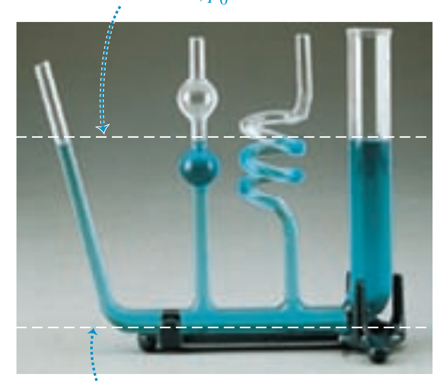
Presión absoluta y presión manométrica

Si la presión dentro de un neumático es igual a la presión atmosférica, el neumático estará desinflado. La presión debe ser *mayor* que la atmosférica para poder sostener el vehículo, así que la cantidad significativa es la *diferencia* entre las presiones interior y exterior. Cuando decimos que la presión de un neumático es de "32 libras" (en realidad 32 lb/in^2, igual a 220 kPa o 2.2×10^5 Pa), queremos decir que es *mayor* que la presión atmosférica (14.7 lb/in^2 o 1.01×10^5 Pa) en esa cantidad. La presión *total* en

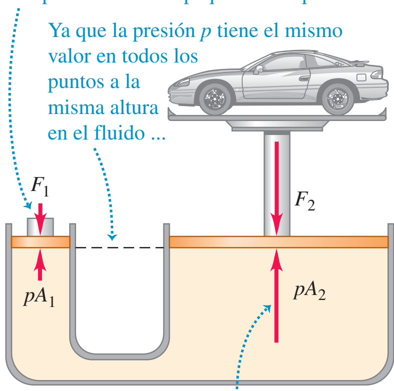
12.5 Cómo varía la presión en función de la profundidad en un fluido con densidad uniforme.



12.6 Todas las columnas de fluido tienen la misma altura, sin importar cuál sea su forma.



12.7 El elevador hidráulico es una aplicación de la ley de Pascal. El tamaño del recipiente lleno de fluido se ha exagerado por claridad.



el neumático es de 47 lb/in^2, o 320 kPa. El exceso de presión más allá de la atmosférica suele llamarse **presión manométrica**, y la presión total se llama **presión absoluta**. Los ingenieros usan las abreviaturas psig y psia para "lb/in^2 manométrica" y "lb/in^2 absoluta", respectivamente (por las siglas de *pounds per square inch gauge* y *pounds per square inch absolute*). Si la presión es *menor* que la atmosférica, como en un vacío parcial, la presión manométrica es negativa.

Ejemplo 12.3 Determinación de las presiones absoluta y manométrica

Un tanque de almacenamiento de 12.0 m de profundidad está lleno de agua. La parte superior del tanque está abierta al aire. ¿Cuál es la presión absoluta en el fondo del tanque? ¿Y la presión manométrica?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La tabla 11.2 indica que el agua es casi incompresible. Por lo tanto, consideramos que el fluido tiene densidad uniforme. El nivel de la parte superior del tanque corresponde al punto 2 de la figura 12.5, y el nivel del fondo del tanque corresponde al punto 1. La incógnita es p en la ecuación (12.6). Tenemos $h = 12.0$ m y $p_0 = 1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5$ Pa.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (12.6), las presiones son

Absoluta:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \rho g h \\ &= (1.01 \times 10^5 \text{ Pa}) + (1000 \text{ kg/m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2)(12.0 \text{ m}) \\ &= 2.19 \times 10^5 \text{ Pa} = 2.16 \text{ atm} = 31.8 \text{ lb/in}^2 \end{aligned}$$

Manométrica:

$$\begin{aligned} p - p_0 &= (2.19 - 1.01) \times 10^5 \text{ Pa} \\ &= 1.18 \times 10^5 \text{ Pa} = 1.16 \text{ atm} = 17.1 \text{ lb/in}^2 \end{aligned}$$

EVALUAR: Si un tanque en el fondo tiene un medidor de presión, seguramente estará calibrado para indicar la presión manométrica, no la presión absoluta.

Medidores de presión

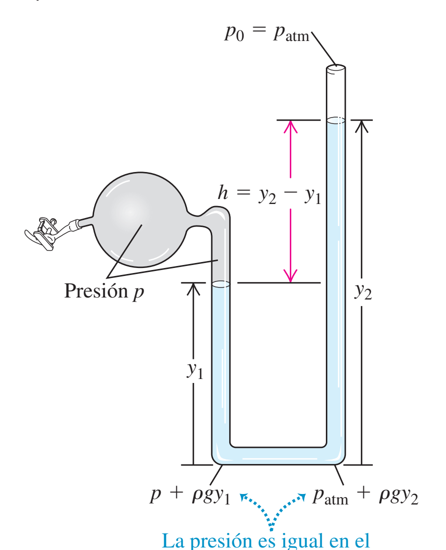
El medidor de presión más sencillo es el *manómetro* de tubo abierto (figura 12.8*a*). El tubo en forma de U contiene un líquido de densidad ρ, con frecuencia mercurio o agua. El extremo izquierdo del tubo se conecta al recipiente donde se medirá la presión p, y el extremo derecho está abierto a la atmósfera, con $p_0 = p_{atm}$. La presión en el fondo del tubo debida al fluido de la columna izquierda es $p + \rho g y_1$, y la debida al fluido de la columna derecha es $p_{atm} + \rho g y_2$. Estas presiones se miden al mismo nivel, así que deben ser iguales:

$$\begin{aligned} p + \rho g y_1 &= p_{atm} + \rho g y_2 \\ p - p_{atm} &= \rho g (y_2 - y_1) = \rho g h \end{aligned} \tag{12.8}$$

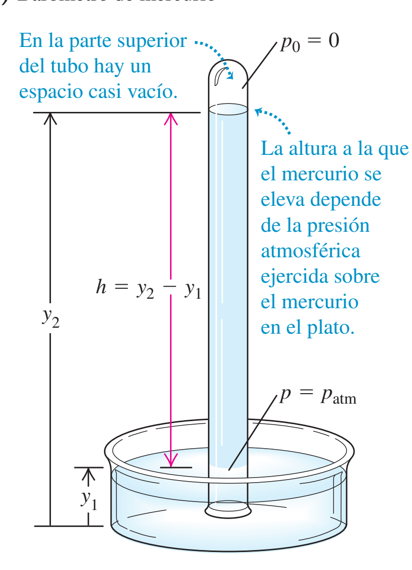
En la ecuación (12.8), p es la *presión absoluta*, y la diferencia $p - p_{atm}$ entre la presión absoluta y la atmosférica es la presión manométrica. Así, la presión manométrica es proporcional a la diferencia de altura $h = y_2 - y_1$ de las columnas de líquido.

12.8 Dos tipos de medidores de presión.

a) Manómetro de tubo abierto



b) Barómetro de mercurio



Otro medidor de presión común es el **barómetro de mercurio**, que consiste en un largo tubo de vidrio, cerrado por un extremo, que se llena con mercurio y luego se invierte sobre un plato con mercurio (figura 12.8*b*). El espacio arriba de la columna solo contiene vapor de mercurio, cuya presión es insignificante, así que la presión p_0 arriba de la columna es prácticamente cero. De acuerdo con la ecuación (12.6),

$$p_{\text{atm}} = p = 0 + \rho g(y_2 - y_1) = \rho g h \qquad (12.9)$$

Así, el barómetro de mercurio indica la presión atmosférica p_{atm} directamente a partir de la altura de la columna de mercurio.

Las presiones a menudo se describen en términos de la altura de la columna de mercurio correspondiente, como "pulgadas de mercurio" o "milímetros de mercurio" (que se abrevia mm Hg). Una presión de 1 mm Hg es *1 torr*, en honor de Evangelista Torricelli, el inventor del barómetro de mercurio. Sin embargo, estas unidades dependen de la densidad del mercurio, que varía con la temperatura, y del valor de g, que varía con el lugar, y por ello se prefiere el pascal como unidad de presión.

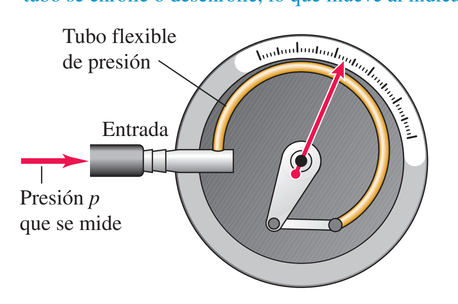
Muchos tipos de medidores de presión usan un recipiente flexible sellado (figura 12.9). Un cambio en la presión adentro o afuera del recipiente provoca un cambio en sus dimensiones, que se detecta de manera óptica, eléctrica o mecánica.

Aplicación Manómetro para medir la presión arterial
Lecturas de presión arterial, tales como el 130/80, dan las presiones manométricas máxima y mínima en las arterias, medidas en mm Hg o en torr. La presión arterial varía con la posición vertical dentro del cuerpo; el punto de referencia estándar es la parte superior del brazo, a la altura del corazón.





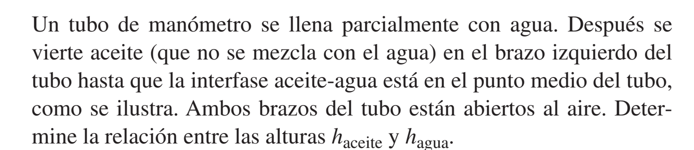
a)



b)



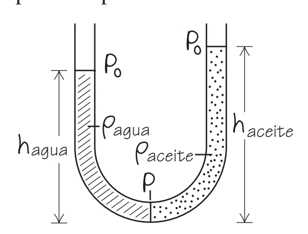
12.9 *a*) Medidor de presión de Bourdon. Al aumentar la presión dentro del tubo flexible, este se endereza un poco y desvía la aguja unida a él. *b*) Este tipo de medidor de presión tipo Bourdon se conecta a una línea de gas a alta presión. La presión manométrica indica que está casi sobre los 5 bars (1 bar = 10^5 Pa).



Ejemplo 12.4 Historia de dos fluidos

Un tubo de manómetro se llena parcialmente con agua. Después se vierte aceite (que no se mezcla con el agua) en el brazo izquierdo del tubo hasta que la interfase aceite-agua está en el punto medio del tubo, como se ilustra. Ambos brazos del tubo están abiertos al aire. Determine la relación entre las alturas h_{aceite} y h_{agua}.

12.10 Diagrama para este problema.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 12.10 muestra nuestro esquema. La relación entre presión y profundidad en un fluido dada por la ecuación (12.6) solo es válida para fluidos de densidad uniforme; tenemos dos fluidos de densidades diferentes, así que debemos escribir una relación presión-profundidad para cada fluido por separado. Ambas columnas de fluido tienen la misma presión p en la base (donde están en contacto y en equilibrio), y ambas están a la presión atmosférica p_0 en la parte superior (donde ambas están en contacto y en equilibrio con el aire).

EJECUTAR: Para los dos fluidos, la ecuación (12.6) se convierte en

$$p = p_0 + \rho_{\text{agua}} g h_{\text{agua}}$$
$$p = p_0 + \rho_{\text{aceite}} g h_{\text{aceite}}$$

Puesto que la presión p en la base del tubo es la misma para ambos fluidos, igualamos las dos expresiones y despejamos h_{aceite} en términos de h_{agua}. Se puede demostrar que el resultado es

$$h_{\text{aceite}} = \frac{\rho_{\text{agua}}}{\rho_{\text{aceite}}} h_{\text{agua}}$$

EVALUAR: El agua ($\rho_{\text{agua}} = 1000\ \text{kg/m}^3$) es más densa que el aceite ($\rho_{\text{aceite}} \approx 850\ \text{kg/m}^3$), por lo que h_{aceite} es mayor que h_{agua}, como se observa en la figura 12.10. Es decir, se necesita una mayor altura de aceite menos denso para producir la misma presión p en la base del tubo.

Evalúe su comprensión de la sección 12.2 El mercurio es menos denso a altas temperaturas que a bajas temperaturas. Suponga que saca al exterior un barómetro de mercurio que estaba dentro de un refrigerador bien sellado, en un caluroso día de verano, y observa que la columna de mercurio se mantiene a la misma altura en el tubo. En comparación con la presión del aire en el interior del refrigerador, la presión del aire en el exterior es **i.** mayor, **ii.** menor o **iii.** igual. (Ignore el pequeño cambio en las dimensiones del tubo de vidrio debido al cambio de temperatura).



12.3 Flotación



PhET: Balloons & Buoyancy



Video Tutor Demo

La **flotación** es un fenómeno muy conocido: un cuerpo sumergido en agua parece pesar menos que en el aire. Si el cuerpo es menos denso que el fluido, entonces flota. El cuerpo humano normalmente flota en el agua, y un globo lleno de helio flota en el aire.

El principio de Arquímedes establece lo siguiente: Si un cuerpo está parcial o totalmente sumergido en un fluido, este ejerce una fuerza hacia arriba sobre el cuerpo igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo.

Para demostrar este principio, consideremos un elemento arbitrario del fluido en reposo. En la figura 12.11*a*, el contorno irregular es la superficie que delimita este elemento de fluido. Las flechas representan las fuerzas que el fluido circundante ejerce sobre la superficie de frontera.

Todo el fluido está en equilibrio, así que la suma de todas las componentes y de fuerza sobre este elemento de fluido es cero. Por lo tanto, la suma de todas las componentes y de las fuerzas de *superficie* debe ser una fuerza ascendente de igual magnitud que el peso mg del fluido dentro de la superficie. Además, la suma de las torcas sobre el elemento de fluido debe ser cero, así que la línea de acción de la componente y resultante de las fuerzas de superficie debe pasar por el centro de gravedad de este elemento de fluido.

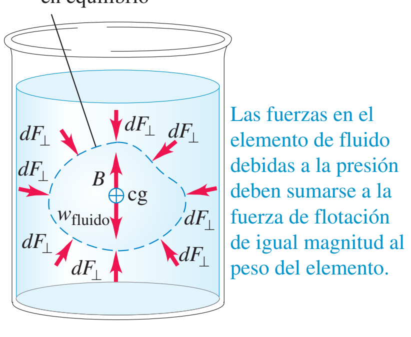
Ahora retiramos el fluido que está dentro de la superficie y lo sustituimos por un cuerpo sólido cuya forma es idéntica (figura 12.11*b*). La presión en cada punto es exactamente la misma que antes, de manera que la fuerza total hacia arriba ejercida por el fluido sobre el cuerpo también es la misma, igual en magnitud al peso mg del fluido que se desplazó para colocar el cuerpo. Llamamos a esta fuerza ascendente la **fuerza de flotación** que actúa sobre el cuerpo sólido. La línea de acción de la fuerza de flotación pasa por el centro de gravedad del fluido desplazado (que no necesariamente coincide con el centro de gravedad del cuerpo).

Si un globo flota en equilibrio en el aire, su peso (incluido el gas en su interior) debe ser igual al del aire desplazado por el globo. La carne de un pez es más densa que el agua; sin embargo, el pez puede flotar mientras está sumergido

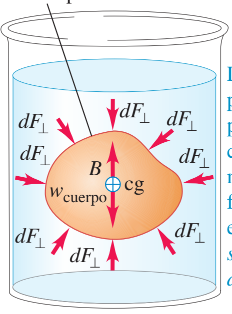


12.11 Principio de Arquímedes.

a) Elemento arbitrario de un fluido en equilibrio



b) El elemento de fluido se sustituye por un cuerpo sólido de forma y tamaño idénticos

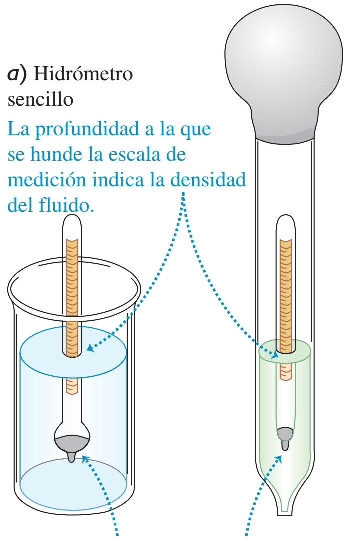


Las fuerzas debidas a la presión son iguales, por lo que sobre el cuerpo debe actuar la misma fuerza de flotación que sobre el elemento de fluido, *sin importar el peso del cuerpo.*

porque tiene una cavidad llena de gas dentro de su cuerpo. Esto hace que la densidad *media* del pez sea igual a la del agua, de manera que su peso neto es igual al peso del agua que desplaza. Un cuerpo cuya densidad media es *menor* que la de un líquido puede flotar parcialmente sumergido en la superficie superior libre del líquido. Cuanto mayor es la densidad del líquido, menor será la parte sumergida del cuerpo. Si nadamos en agua de mar (densidad 1030 kg/m^3), flotamos más que en agua dulce (1000 kg/m^3).

Otro ejemplo conocido de flotación es el hidrómetro, empleado para medir la densidad de los líquidos (figura 12.12*a*). El flotador calibrado se hunde en el fluido hasta que el peso del fluido que desplaza es exactamente igual a su propio peso. El hidrómetro flota *más alto* en los líquidos más densos que en los líquidos menos densos, y tiene una escala en el tallo superior que permite leer directamente la densidad. La figura 12.12*b* ilustra un tipo de hidrómetro de uso común para medir la densidad del ácido de un acumulador o del anticongelante. La base del tubo grande se sumerge en el líquido; se aprieta el bulbo para expulsar el aire y luego se suelta, como si fuera un gotero gigante. El líquido sube por el tubo exterior, y el hidrómetro flota en la muestra de líquido.

12.12 Medición de la densidad de un fluido.



Ejemplo 12.5 Flotación



Una estatua de oro sólido de 15.0 kg de peso está siendo levantada de un barco hundido (figura 12.13*a*). ¿Qué tensión hay en el cable (que se supone de masa despreciable) cuando la estatua está *a*) en reposo y totalmente sumergida, y *b*) en reposo y fuera del agua?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En ambos casos, la estatua se encuentra en equilibrio y experimenta tres fuerzas: su peso, la tensión en el cable y la fuerza de flotación hacia arriba igual en magnitud al peso del fluido desplazado [agua de mar en el inciso *a*), aire en el inciso *b*)]. La figura 12.13b muestra el diagrama de cuerpo libre de la estatua. Nuestras incógnitas son los valores de la tensión en agua de mar (T_{am}) y en el aire (T_{aire}). Conocemos la masa $m_{estatua}$ y podemos calcular la fuerza de flotación en agua de mar (B_{am}) y en el aire (B_{aire}) usando el principio de Arquímedes.

EJECUTAR: *a*) Para calcular la fuerza de flotación B_{am}, primero calculamos el volumen V de la estatua usando la densidad del oro de la tabla 12.1:

$$V = \frac{m_{estatua}}{\rho_{oro}} = \frac{15.0\ \text{kg}}{19.3 \times 10^3\ \text{kg/m}^3} = 7.77 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$$

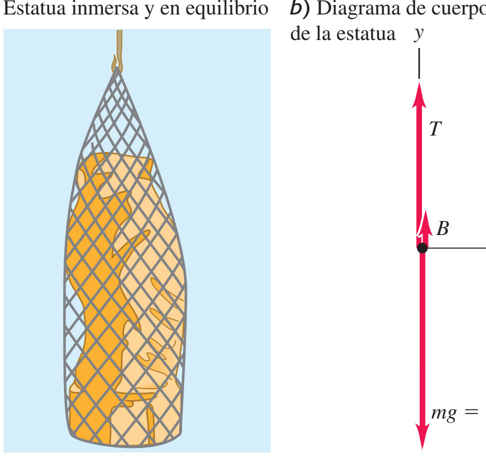
La fuerza de flotación B_{am} es igual al peso del mismo volumen de agua de mar. Usando otra vez la tabla 12.1:

$$\begin{aligned} B_{am} &= w_{am} = m_{am}\,g = \rho_{am} V g \\ &= (1.03 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)(7.77 \times 10^{-4}\ \text{m}^3)(9.80\ \text{m/s}^2) \\ &= 7.84\ \text{N} \end{aligned}$$

La estatua se encuentra en reposo, así que la fuerza externa neta que actúa sobre ella es igual a cero. A partir de la figura 12.13*b*,

$$\begin{aligned} \sum F_y &= B_{am} + T_{am} + (-m_{estatua}\,g) = 0 \\ T_{am} &= m_{estatua}\,g - B_{am} = (15.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) - 7.84\ \text{N} \\ &= 147\ \text{N} - 7.84\ \text{N} = 139\ \text{N} \end{aligned}$$

12.13 ¿Cuál es la tensión en el cable que levanta la estatua?



Si hay una balanza de resorte unida al extremo superior del cable, marcará 7.84 N menos que su peso real $m_{estatua}\,g = 147$ N.

b) La densidad del aire es de aproximadamente 1.2 kg/m^3, así que la fuerza de flotación del aire sobre la estatua es

$$\begin{aligned} B_{aire} &= \rho_{aire} V g = (1.2\ \text{kg/m}^3)(7.77 \times 10^{-4}\ \text{m}^3)(9.80\ \text{m/s}^2) \\ &= 9.1 \times 10^{-3}\ \text{N} \end{aligned}$$

Esto es despreciable comparado con el peso real de la estatua $m_{estatua}\,g = 147$ N. Por lo que dentro de la precisión de nuestros datos, la tensión en el cable con la estatua en el aire es igual al peso de la estatua, $T_{aire} = m_{estatua}\,g = 147$ N.

EVALUAR: Observe que la fuerza de flotación es proporcional a la densidad del *fluido* en el que está sumergida la estatua, *no* a la densidad de

Continúa

la estatua. Cuanto más denso es el fluido, mayor será la fuerza de flotación y menor será la tensión en el cable. Si el fluido tuviera la misma densidad que la estatua, la fuerza de flotación sería igual al peso de la estatua y la tensión sería cero (el cable se aflojaría). Si el fluido fuera más denso que la estatua, la tensión sería *negativa*: la fuerza de flotación sería mayor que el peso de la estatua, y se requeriría una fuerza hacia abajo para evitar que la estatua se elevara.

12.14 La superficie del agua actúa como membrana sometida a tensión, y permite a este insecto tejedor o zapatero de agua caminar literalmente sobre el agua.



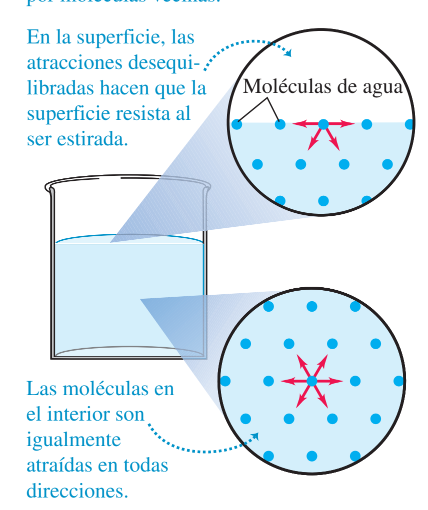
Tensión superficial

Un objeto menos denso que el agua, como una pelota de playa inflada con aire, flota con una parte de su volumen bajo la superficie. Por otra parte, un clip puede descansar *sobre* una superficie de agua aunque su densidad es varias veces mayor que la del agua. Esto es un ejemplo de **tensión superficial**: la superficie del líquido se comporta como una membrana en tensión (figura 12.14). La tensión superficial se debe a que las moléculas del líquido ejercen fuerzas de atracción entre sí. La fuerza neta sobre una molécula dentro del volumen del líquido es cero, pero una molécula en la superficie es atraída hacia el volumen (figura 12.15). Por esa razón, el líquido tiende a minimizar su área superficial, tal como lo hace una membrana estirada.

La tensión superficial explica por qué las gotas de lluvia en caída libre son esféricas (*no* con forma de lágrima): para un volumen dado, una esfera tiene menor área superficial que cualquier otra forma. También explica por qué se usa agua jabonosa caliente en el lavado de la ropa. Para lavarla bien, se debe hacer pasar el agua por los diminutos espacios entre las fibras (figura 12.16). Esto implica aumentar el área superficial del agua, lo que es difícil de lograr por la tensión superficial. La tarea se facilita aumentando la temperatura del agua y añadiendo jabón, ya que ambas cosas reducen la tensión superficial.

La tensión superficial es importante para una gota de agua de un milímetro de diámetro, que tiene un área relativamente grande en comparación con su volumen. (Una esfera de radio r tiene área $4\pi r^2$ y volumen $(4\pi/3)r^3$. La razón entre la superficie y el área es $3/r$, y aumenta al disminuir el radio). En cambio, si la cantidad de líquido es grande, la razón entre la superficie y el volumen es relativamente pequeña y la tensión superficial es insignificante en comparación con las fuerzas de presión. En el resto del capítulo, solo consideraremos volúmenes grandes de fluidos, así que ignoraremos los efectos de la tensión superficial.

12.15 Una molécula en la superficie es atraída hacia el volumen del líquido, y esto tiende a reducir el área superficial del líquido.

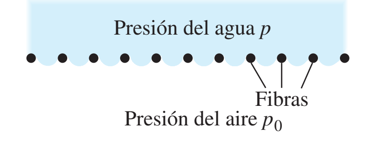


Evalúe su comprensión de la sección 12.3 Usted coloca un recipiente con agua de mar sobre una báscula y toma nota de la lectura que indica la báscula. Ahora suspende la estatua del ejemplo 12.5 en el agua (figura 12.17). ¿Cómo cambia la lectura de la báscula? **i.** Se incrementa en 7.84 N; **ii.** disminuye en 7.84 N; **iii.** permanece igual; **iv.** ninguna de las respuestas anteriores es correcta.



12.4 Flujo de fluido

12.16 La tensión superficial dificulta el paso del agua por aberturas pequeñas. La presión requerida p del agua puede reducirse usando agua caliente con jabón, lo que reduce la tensión superficial.



Ahora ya estamos preparados para considerar el *movimiento* de un fluido. El flujo de fluidos suele ser extremadamente complejo, como se aprecia en las corrientes de los rápidos de los ríos o en las llamas de una fogata. Pero algunas situaciones se pueden representar con modelos idealizados relativamente sencillos. Un **fluido ideal** es *incompresible* (es decir, su densidad no puede cambiar) y no tiene fricción interna (llamada **viscosidad**). Los líquidos son aproximadamente incompresibles en casi todas las situaciones, y también podemos tratar un gas como incompresible si las diferencias de presión de una región a otra no son muy grandes. La fricción interna en un fluido causa esfuerzos de corte cuando dos capas adyacentes de fluido se mueven una en relación con la otra, como cuando un fluido fluye dentro de un tubo o alrededor de un obstáculo. En algunos casos, podemos despreciar estas fuerzas de corte en comparación con las fuerzas debidas a la gravedad y a diferencias de presión.

La trayectoria de una partícula individual en un fluido en movimiento se llama **línea de flujo**. Si el patrón global de flujo no cambia con el tiempo, el flujo se llama **flujo estable**. En un flujo estable, cada elemento que pasa por un punto dado sigue la

misma línea de flujo. En este caso, el "mapa" de las velocidades del fluido en distintos puntos del espacio permanece constante, aunque la velocidad de una partícula específica pueda cambiar tanto en magnitud como en dirección durante su movimiento. Una **línea de corriente** es una curva cuya tangente en cualquier punto tiene la dirección de la velocidad del fluido en ese punto. Si el patrón de flujo cambia con el tiempo, las líneas de corriente no coinciden con las de flujo. Consideraremos solo situaciones de flujo estable, en las que las líneas de flujo y las de corriente son idénticas.

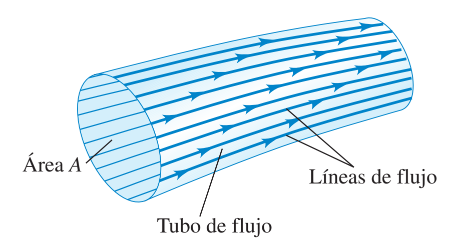
Las líneas de flujo que pasan por el borde de un elemento de área imaginario, como el área A en la figura 12.18, forman un tubo llamado **tubo de flujo**. A partir de la definición de línea de flujo, si el flujo es estable, el fluido no puede cruzar las paredes laterales de un tubo de flujo; los fluidos de diferentes tubos de flujo no pueden mezclarse.

La figura 12.19 ilustra patrones de flujo de fluidos de izquierda a derecha alrededor de varios obstáculos. Las fotografías se tomaron inyectando tinta en el agua que fluye entre dos placas de vidrio cercanas. Estos patrones son representativos del **flujo laminar**, en el que capas adyacentes de fluido se deslizan suavemente una sobre otra, y el flujo es estable. (Una *lámina* es una hoja delgada). Si la rapidez de flujo es suficientemente alta, o si las superficies de frontera causan cambios abruptos en la velocidad, el flujo puede volverse irregular y caótico. Esto se llama **flujo turbulento** (figura 12.20). En un flujo turbulento no hay un patrón de estado estable; el patrón de flujo cambia continuamente.

12.17 ¿Cómo cambia la lectura de la báscula cuando la estatua se sumerge en el agua?



12.18 Tubo de flujo delimitado por líneas de flujo. En flujo estable, el fluido no puede cruzar las paredes de un tubo de flujo.



Ecuación de continuidad

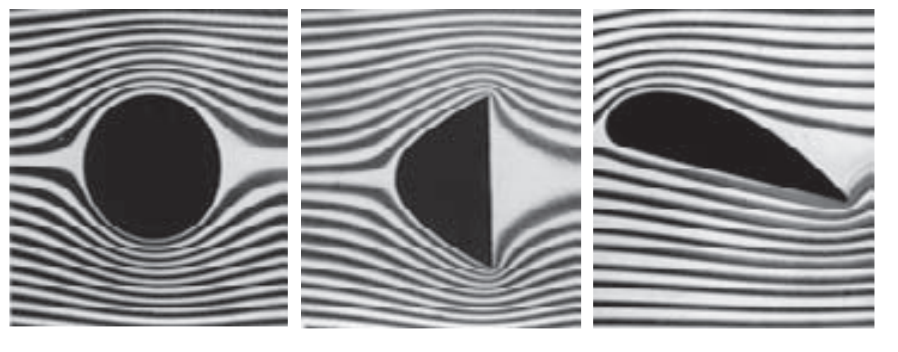
La masa de un fluido en movimiento no cambia al fluir. Esto conduce a una relación cuantitativa importante llamada **ecuación de continuidad**. Considere una parte de un tubo de flujo entre dos secciones transversales estacionarias con áreas A_1 y A_2 (figura 12.21). Los valores de la rapidez del fluido en estas secciones son v_1 y v_2, respectivamente. No fluye fluido a través de los costados del tubo porque la velocidad del fluido es tangente a la pared en todos sus puntos. Durante un breve intervalo de tiempo dt, el fluido en A_1 se mueve una distancia $v_1\,dt$, así que un cilindro de fluido de altura $v_1\,dt$ y volumen $dV_1 = A_1 v_1\,dt$ fluye hacia el tubo a través de A_1. Durante ese mismo intervalo, un cilindro de volumen $dV_2 = A_2 v_2\,dt$ sale del tubo a través de A_2.

Consideremos primero el caso de un fluido incompresible cuya densidad r tiene el mismo valor en todos los puntos. La masa dm_1 que fluye al tubo por A_1 en el tiempo dt es $dm_1 = \rho A_1 v_1\,dt$. De manera similar, la masa dm_2 que sale por A_2 en el mismo tiempo es $dm_2 = \rho A_2 v_2\,dt$. En flujo estable, la masa total en el tubo es constante, por lo que $dm_1 = dm_2$ y

$$\rho A_1 v_1\,dt = \rho A_2 v_2\,dt \qquad \text{o}$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad \text{(ecuación de continuidad, fluido incompresible)} \qquad (12.10)$$

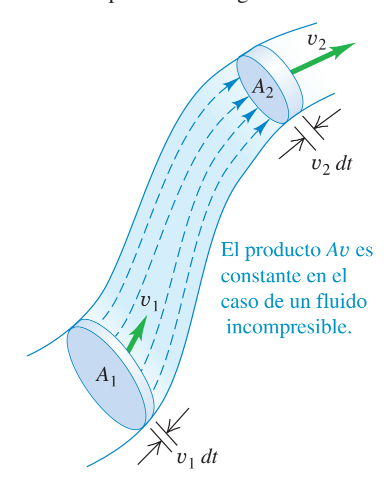
12.19 Flujo laminar alrededor de obstáculos con diferente forma.



12.20 El flujo de humo que sale de estas varas de incienso es laminar hasta cierto punto; luego se vuelve turbulento.



12.21 Tubo de flujo con área de sección transversal cambiante. Si el fluido es incompresible, el producto Av tiene el mismo valor en todos los puntos a lo largo del tubo.



El producto Av es la *rapidez del flujo de volumen* dV/dt, la rapidez con que el volumen cruza una sección del tubo:

$$\frac{dV}{dt} = Av \qquad \text{(tasa de flujo de volumen)} \qquad (12.11)$$

La rapidez de flujo de *masa* es el flujo de masa por unidad de tiempo a través de una sección transversal, y es igual a la densidad ρ multiplicada por la rapidez de flujo de volumen dV/dt.

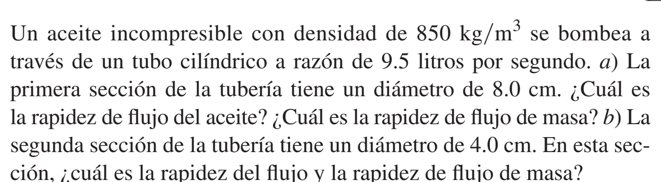
La ecuación (12.10) indica que la rapidez de flujo de volumen tiene el mismo valor en todos los puntos a lo largo de cualquier tubo de flujo. Si la sección transversal de un tubo de flujo disminuye, la rapidez aumenta, y viceversa. La parte profunda de un río tiene mayor área transversal y una corriente más lenta que la parte angosta y poco profunda, pero las rapideces de flujo de volumen son iguales en los dos puntos. Esta es la esencia de la conocida frase "Las aguas tranquilas son profundas" o "Cuídate de las aguas mansas". El chorro de agua que sale de un grifo se adelgaza al adquirir rapidez durante su caída, pero dV/dt tiene el mismo valor en todo el chorro. Si un tubo de agua de 2 cm de diámetro se conecta a un tubo de 1 cm de diámetro, la rapidez de flujo es cuatro veces mayor en el segundo tubo que en el primero.

Podemos generalizar la ecuación (12.10) para el caso en que el fluido *no* es incompresible. Si ρ_1 y ρ_2 son las densidades en las secciones 1 y 2, entonces

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \qquad \text{(ecuación de continuidad, fluido compresible)} \qquad (12.12)$$

Si el fluido es más denso en el punto 2 que en el punto 1 ($\rho_2 > \rho_1$), la rapidez de flujo de volumen en el punto 2 será menor que en el punto 1 ($A_2 v_2 < A_1 v_1$). Dejamos los detalles al lector. Si el fluido es incompresible, de manera que ρ_1 y ρ_2 siempre son iguales, la ecuación (12.12) se reduce a la ecuación (12.10).





Ejemplo 12.6 Flujo de fluido incompresible

Un aceite incompresible con densidad de 850 kg/m^3 se bombea a través de un tubo cilíndrico a razón de 9.5 litros por segundo. *a*) La primera sección de la tubería tiene un diámetro de 8.0 cm. ¿Cuál es la rapidez de flujo del aceite? ¿Cuál es la rapidez de flujo de masa? *b*) La segunda sección de la tubería tiene un diámetro de 4.0 cm. En esta sección, ¿cuál es la rapidez del flujo y la rapidez de flujo de masa?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Ya que el aceite es incompresible, la rapidez de flujo de volumen tiene el *mismo* valor (9.5 L/s) en ambas secciones de la tubería. La rapidez de flujo de masa (densidad por la rapidez del flujo del volumen) también tiene el mismo valor en ambas secciones. (Este es exactamente el enunciado de que ningún fluido se pierde o se agrega a lo largo de la tubería). Usaremos la ecuación de la rapidez de flujo de volumen, ecuación (12.11), para determinar la rapidez v_1 en la sección de 8.0 cm de diámetro y la ecuación de continuidad para flujos incompresibles, ecuación (12.10), para determinar la rapidez v_2 en la sección de 4.0 cm de diámetro.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (12.11), la rapidez de flujo de volumen en la primera sección es $dV/dt = A_1 v_1$, donde A_1 es el área de sección transversal del tubo de 8.0 cm de diámetro y radio de 4.0 cm. Por lo tanto,

$$v_1 = \frac{dV/dt}{A_1} = \frac{(9.5\ \text{L/s})(10^{-3}\ \text{m}^3/\text{L})}{\pi(4.0 \times 10^{-2}\ \text{m})^2} = 1.9\ \text{m/s}$$

La rapidez de flujo de masa es $\rho\ dV/dt = (850\ \text{kg/m}^3)(9.5 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}) = 8.1\ \text{kg/s}$.

b) De acuerdo con la ecuación de continuidad, ecuación (12.10),

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\pi(4.0 \times 10^{-2}\ \text{m})^2}{\pi(2.0 \times 10^{-2}\ \text{m})^2}(1.9\ \text{m/s}) = 7.6\ \text{m/s} = 4v_1$$

Los valores de la rapidez de flujo de volumen y de masa son los mismos que en el inciso *a*).

EVALUAR: La segunda sección del tubo tiene la mitad del diámetro y la cuarta parte del área transversal de la primera sección. Por consiguiente, la rapidez debe ser cuatro veces mayor en la segunda sección, y eso es precisamente lo que indica nuestro resultado.

Evalúe su comprensión de la sección 12.4 Una cuadrilla de mantenimiento está trabajando en una sección de una carretera de tres carriles, dejando un solo carril abierto al tránsito. El resultado es un flujo de tránsito mucho más lento (un embotellamiento). ¿Los automóviles en la carretera se comportan como **i.** moléculas de un fluido incompresible o **ii.** moléculas de un fluido compresible?



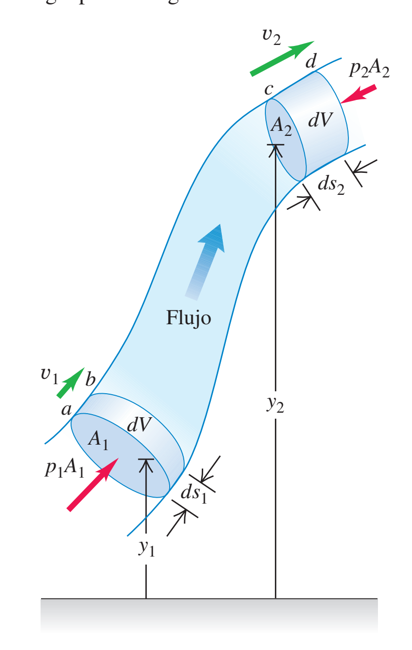
12.5 Ecuación de Bernoulli

Según la ecuación de continuidad, la rapidez de flujo de un fluido puede variar a lo largo de las trayectorias del fluido. La presión también puede variar; depende de la altura, al igual que en la situación estática (véase la sección 12.2), y también de la rapidez de flujo. Podemos deducir una relación importante, llamada *ecuación de Bernoulli*, que relaciona la presión, la rapidez de flujo y la altura para el flujo de un fluido ideal incompresible. La ecuación de Bernoulli es una herramienta indispensable para analizar los sistemas de fontanería, las plantas hidroeléctricas y el vuelo de los aviones.

La dependencia de la presión con respecto a la rapidez se deduce de la ecuación de continuidad, ecuación (12.10). Si un fluido incompresible fluye por un tubo con sección transversal variable, su rapidez *debe* cambiar, así que un elemento de fluido debe tener una aceleración. Si el tubo es horizontal, el fluido circundante debe aplicar la fuerza que causa esta aceleración. Esto implica que la presión *debe* ser distinta en regiones con diferente sección transversal; si fuera la misma en todos lados, la fuerza neta sobre cada elemento de fluido sería cero. Cuando un tubo horizontal se estrecha y un elemento de fluido se acelera, debe estarse moviendo hacia una región de menor presión para tener una fuerza neta hacia adelante que lo acelere. Si la altura también cambia, esto provoca una diferencia de presión adicional.

Deducción de la ecuación de Bernoulli

Para deducir la ecuación de Bernoulli, aplicamos el teorema del trabajo y la energía al fluido en una sección de un tubo de flujo. En la figura 12.22, consideramos el elemento de fluido que en algún instante inicial está entre las dos secciones transversales a y c. Los valores de la rapidez en los extremos inferior y superior son v_1 y v_2. En un pequeño intervalo de tiempo dt, el fluido que está inicialmente en a se mueve a b, una distancia $ds_1 = v_1\, dt$, y el fluido que está inicialmente en c se mueve a d, una distancia $ds_2 = v_2\, dt$. Las áreas transversales en los dos extremos son A_1 y A_2, como se indica. El fluido es incompresible; por lo tanto, de acuerdo con la ecuación de continuidad [ecuación (12.10)], el volumen de fluido dV que pasa por *cualquier* sección transversal durante el tiempo dt es el mismo. Es decir, $dV = A_1\, ds_1 = A_2\, ds_2$.



12.22 Deducción de la ecuación de Bernoulli. El trabajo neto realizado sobre un elemento de fluido por la presión del fluido circundante es igual al cambio en la energía cinética más el cambio en la energía potencial gravitacional.

Calculemos el *trabajo* efectuado sobre este elemento de fluido durante dt. Suponemos que la fricción interna del fluido es despreciable (es decir, no hay viscosidad), así que las únicas fuerzas no gravitacionales que efectúan trabajo sobre el elemento fluido se deben a la presión del fluido circundante. Las presiones en los dos extremos son p_1 y p_2; la fuerza sobre la sección transversal en a es p_1A_1, y la fuerza en c es p_2A_2. El trabajo neto dW efectuado sobre el elemento por el fluido circundante durante este desplazamiento es, por lo tanto,

$$dW = p_1A_1\, ds_1 - p_2A_2\, ds_2 = (p_1 - p_2)dV \qquad (12.13)$$

El segundo término tiene signo negativo porque la fuerza en c se opone al desplazamiento del fluido.

El trabajo dW se debe a fuerzas distintas de la fuerza de gravedad conservativa, así que es igual al cambio en la energía mecánica total (energía cinética más energía potencial gravitacional) asociada al elemento fluido. La energía mecánica para el fluido entre las secciones b y c no cambia. Al principio de dt, el fluido entre a y b tiene volumen $A_1\, ds_1$, masa $\rho A_1\, ds_1$ y energía cinética $\frac{1}{2}\rho(A_1\, ds_1)v_1^2$. Al final de dt, el fluido entre c y d tiene energía cinética $\frac{1}{2}\rho(A_2\, ds_2)v_2^2$. El cambio neto de energía cinética dK durante dt es

$$dK = \tfrac{1}{2}\rho\, dV(v_2^2 - v_1^2) \qquad (12.14)$$

¿Y qué hay del cambio en la energía potencial gravitacional? Al iniciar dt, la energía potencial para la masa que está entre a y b es $dm\, gy_1 = \rho\, dV\, gy_1$. Al final de dt, la

energía potencial para la masa que está entre c y d es $dm\, gy_2 = \rho\, dV\, gy_2$. El cambio neto de energía potencial dU durante dt es

$$dU = \rho\, dV\, g(y_2 - y_1) \tag{12.15}$$

Combinando las ecuaciones (12.13), (12.14) y (12.15) en la ecuación de energía $dW = dK + dU$, obtenemos

$$\begin{aligned}(p_1 - p_2)dV &= \tfrac{1}{2}\rho\, dV(v_2^2 - v_1^2) + \rho\, dV\, g(y_2 - y_1)\\ p_1 - p_2 &= \tfrac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(y_2 - y_1)\end{aligned} \tag{12.16}$$

Esta es la **ecuación de Bernoulli**, y dice que el trabajo efectuado sobre una unidad de volumen de fluido por el fluido circundante es igual a la suma de los cambios de las energías cinética y potencial por unidad de volumen que ocurren durante el flujo. También podemos interpretar la ecuación (12.16) en términos de presiones. El primer término de la derecha es la diferencia de presión asociada al cambio de rapidez del fluido; el segundo término a la derecha es la diferencia de presión adicional causada por el peso del fluido y la diferencia de altura de los dos extremos.

También podemos expresar la ecuación (12.16) en una forma más práctica:


Video Tutor Demo

$$p_1 + \rho g y_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \text{(ecuación de Bernoulli)} \tag{12.17}$$

Los subíndices 1 y 2 se refieren a dos puntos *cualesquiera* del tubo de flujo, por lo que también podemos escribir

$$p + \rho g y + \tfrac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante} \tag{12.18}$$

Observe que si el fluido *no* se mueve (de manera que $v_1 = v_2 = 0$), la ecuación (12.17) se reduce a la relación de presión que dedujimos para un fluido en reposo [ecuación (12.5)].

CUIDADO **El principio de Bernoulli se aplica solo en ciertas situaciones** Subrayamos de nuevo que la ecuación de Bernoulli solo es válida para un flujo estable de un fluido incompresible sin fricción interna (sin viscosidad). Es una ecuación sencilla y fácil de usar; ¡cuide de no aplicarla en situaciones en que no es válida!

Estrategia para resolver problemas 12.1 Ecuación de Bernoulli



La ecuación de Bernoulli se deduce del teorema del trabajo y la energía, así que no debe sorprender que gran parte de la Estrategia para resolver problemas 7.1 (sección 7.1) se aplique aquí.

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La ecuación de Bernoulli es aplicable al flujo estable de un fluido incompresible que no tiene fricción interna (véase la sección 12.6). Generalmente es aplicable a flujos que corren a lo largo de grandes tubos y a flujos dentro de grandes cantidades de fluido (por ejemplo, el aire que fluye alrededor de un avión o el agua que fluye alrededor de un pez).

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Identifique los puntos 1 y 2 a los que se refiere la ecuación de Bernoulli, ecuación (12.17).
2. Defina su sistema de coordenadas, siendo el origen $y = 0$. Tome la dirección de y hacia arriba como positiva.
3. Elabore listas de las cantidades conocidas y desconocidas de la ecuación (12.17). Determine cuáles son las incógnitas.

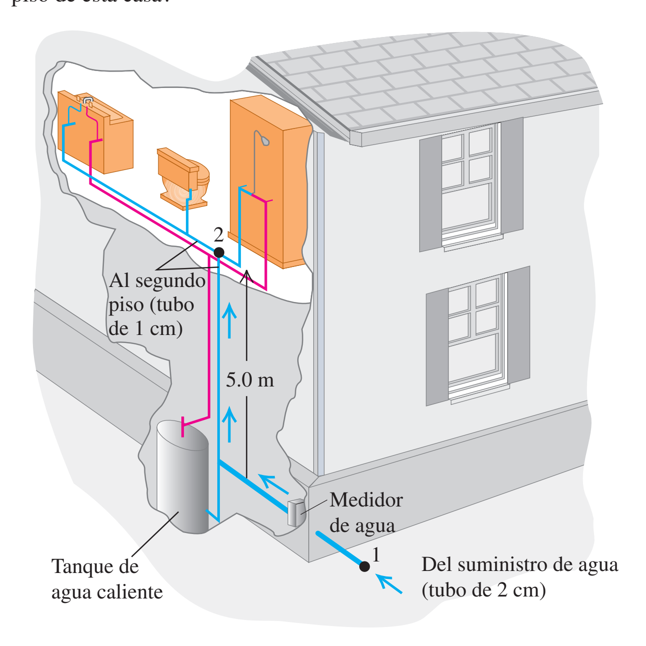
EJECUTAR *la solución* como sigue: Escriba la ecuación de Bernoulli y despeje las incógnitas. En algunos problemas, habrá que usar la ecuación de continuidad, ecuación (12.10), para obtener una relación entre los dos valores de la rapidez en términos de áreas transversales de tubos o recipientes. Tal vez necesite también la ecuación (12.11) para calcular la rapidez de flujo de volumen.

EVALUAR *la respuesta:* Verifique que los resultados sean lógicos desde el punto de vista de la física. Compruebe que las unidades sean congruentes. En el SI, la presión está en Pa, la densidad en kilogramos por metro cúbico y la rapidez en metros por segundo. Recuerde también que las presiones deben ser *todas* absolutas o *todas* manométricas.

Ejemplo 12.7 Presión de agua en el hogar

En una casa entra agua (figura 12.23) por un tubo con diámetro interior de 2.0 cm a una presión absoluta de 4.0×10^5 Pa (aproximadamente 4 atm). Un tubo de 1.0 cm de diámetro va al cuarto de baño del segundo piso, 5.0 m más arriba. Calcule la rapidez de flujo, la presión y la razón de flujo de volumen en el cuarto de baño, cuando la rapidez de flujo en el tubo de entrada es de 1.5 m/s.

12.23 ¿Qué presión tiene el agua en el cuarto de baño del segundo piso de esta casa?



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Suponemos que el agua fluye con una rapidez constante. El agua es efectivamente incompresible, por lo que es una buena aproximación utilizar la ecuación de continuidad. Es razonable despreciar los efectos de fricción ya que la tubería tiene un diámetro relativamente grande, por lo que también podemos utilizar la ecuación de Bernoulli. Tomamos los puntos 1 y 2 en el tubo de entrada y el cuarto de baño, respectivamente. Nos dan los diámetros de los tubos en los puntos 1 y 2 (con lo cual podemos calcular las áreas A_1 y A_2), así como la rapidez $v_1 = 1.5$ m/s y la presión $p_1 = 4.0 \times 10^5$ Pa en el tubo de entrada. Tomamos $y_1 = 0$ y $y_2 = 5.0$ m. Encontramos la rapidez v_2 usando la ecuación de continuidad, y la presión p_2 usando la ecuación de Bernoulli. Conociendo v_2, calcularemos la rapidez de flujo de volumen $v_2 A_2$.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación de continuidad, ecuación (12.10):

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}v_1 = \frac{\pi(1.0 \text{ cm})^2}{\pi(0.50 \text{ cm})^2}(1.5 \text{ m/s}) = 6.0 \text{ m/s}$$

Según la ecuación de Bernoulli, ecuación (12.16),

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 - \tfrac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) - \rho g(y_2 - y_1) \\ &= 4.0 \times 10^5 \text{ Pa} \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(36 \text{ m}^2/\text{s}^2 - 2.25 \text{ m}^2/\text{s}^2) \\ &\quad - (1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(5.0 \text{ m}) \\ &= 4.0 \times 10^5 \text{ Pa} - 0.17 \times 10^5 \text{ Pa} - 0.49 \times 10^5 \text{ Pa} \\ &= 3.3 \times 10^5 \text{ Pa} = 3.3 \text{ atm} = 48 \text{ lb/in}^2 \end{aligned}$$

La rapidez de flujo de volumen es

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= A_2 v_2 = \pi(0.50 \times 10^{-2} \text{ m})^2(6.0 \text{ m/s}) \\ &= 4.7 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 0.47 \text{ L/s} \end{aligned}$$

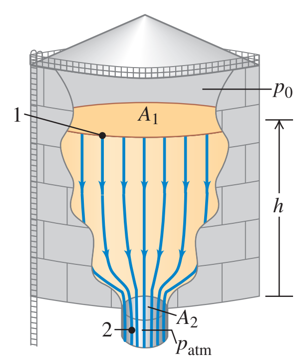
EVALUAR: Esta es una rapidez de flujo razonable para un lavabo o una ducha. Observe que, al cerrar el agua, v_1 y v_2 son cero, el término $\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$ de la ecuación de Bernoulli desaparece, y la p_2 se eleva de 3.3×10^5 Pa a 3.5×10^5 Pa.

Ejemplo 12.8 Rapidez de salida



La figura 12.24 muestra un tanque de almacenamiento de gasolina con área transversal A_1, lleno hasta una altura h. El espacio arriba de la gasolina contiene aire a p_0 y la gasolina sale por un tubo corto de área A_2, ubicado en la parte inferior del tanque. Deduzca expresiones para la rapidez de flujo en el tubo y la rapidez de flujo de volumen.

12.24 Cálculo de la rapidez de salida de gasolina por el fondo de un tanque de almacenamiento.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Podemos considerar todo el volumen de líquido en movimiento como un solo tubo de flujo de un fluido incompresible con fricción interna despreciable. Por lo tanto, podemos usar la ecuación de Bernoulli. Los puntos 1 y 2 están en la superficie de la gasolina y en el tubo de salida, respectivamente. En el punto 1, la presión es p_0, que se supone fija; en el punto 2, la presión es la atmosférica, p_{atm}. Tomamos $y = 0$ en el tubo de salida, así que $y_1 = h$ y $y_2 = 0$. Puesto que A_1 es mucho mayor que A_2, el nivel de la gasolina en el tanque bajará con mucha lentitud y podemos considerar que v_1 es esencialmente igual a cero. Encontramos v_2 a partir de la ecuación (12.17) y la rapidez de flujo de volumen con la ecuación (12.11).

EJECUTAR: Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2, tenemos

$$p_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = p_{atm} + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g(0)$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\left(\frac{p_0 - p_{atm}}{\rho}\right) + 2gh$$

Continúa

Usando $v_1 = 0$, tenemos

$$v_2 = \sqrt{2\left(\frac{p_0 - p_{atm}}{\rho}\right) + 2gh}$$

De acuerdo con la ecuación (12.11), la rapidez de flujo de volumen es $dV/dt = v_2 A_2$.

EVALUAR: La rapidez v_2, algunas veces llamada *rapidez de salida*, depende tanto de la diferencia de presión ($p_0 - p_{atm}$) como de la altura h del líquido en el tanque. Si el tanque está abierto por arriba a la atmósfera, $p_0 = p_{atm}$ y $p_0 - p_{atm} = 0$. Entonces,

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Esto es, la rapidez de salida por una abertura a una distancia h bajo la superficie del líquido es la *misma* que adquiriría un cuerpo al caer libremente una altura h. Este resultado es el *teorema de Torricelli*. Es válido no solo para una abertura en la base de un recipiente, sino también para un agujero en una pared a una profundidad h bajo la superficie. En este caso, la rapidez de flujo de volumen es

$$\frac{dV}{dt} = A_2\sqrt{2gh}$$

Ejemplo 12.9 El medidor Venturi



La figura 12.25 muestra un *medidor Venturi*, que se usa para medir la rapidez de flujo en un tubo. Deduzca una expresión para la rapidez de flujo v_1 en términos de las áreas transversales A_1 y A_2 y la diferencia de altura h del líquido en los dos tubos verticales.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El flujo es estable y suponemos que el fluido es incompresible y que tiene fricción interna despreciable. Por lo tanto, podemos utilizar la ecuación de Bernoulli. Aplicamos la ecuación de Bernoulli a las partes ancha (punto 1) y angosta (punto 2, la *garganta*) del tubo. La ecuación (12.6) relaciona a h con la diferencia de presión $p_1 - p_2$:

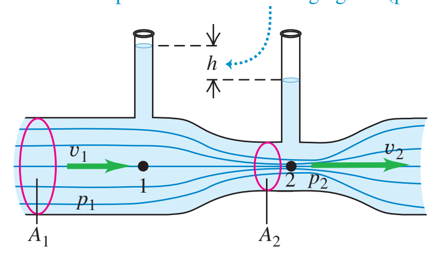
EJECUTAR: Los dos puntos tienen la misma coordenada vertical ($y_1 = y_2$), así que la ecuación (12.17) dice

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

De acuerdo con la ecuación de continuidad, $v_2 = (A_1/A_2)v_1$. Al sustituir y reordenar, obtenemos

$$p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]$$

12.25 El medidor Venturi.

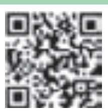


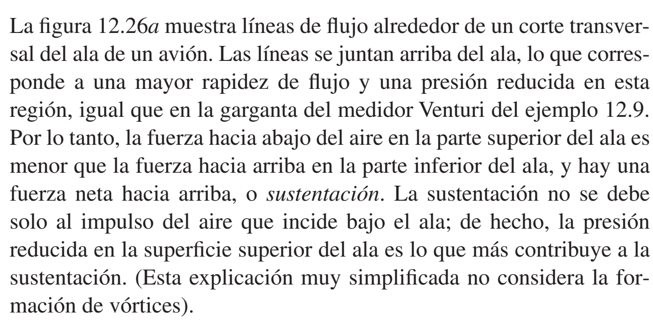
De acuerdo con la ecuación (12.6), la diferencia de presión $p_1 - p_2$ también es igual a ρgh. Al sustituir esto y despejar v_1, obtenemos

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{(A_1/A_2)^2 - 1}}$$

EVALUAR: Puesto que A_1 es mayor que A_2, v_2 es mayor que v_1 y la presión p_2 en la garganta es *menor* que p_1. Estas diferencias de presión producen una fuerza neta a la derecha que acelera el fluido al entrar en la garganta, y una fuerza neta a la izquierda que lo frena al salir.

Ejemplo conceptual 12.10 Sustentación en el ala de un avión





La figura 12.26*a* muestra líneas de flujo alrededor de un corte transversal del ala de un avión. Las líneas se juntan arriba del ala, lo que corresponde a una mayor rapidez de flujo y una presión reducida en esta región, igual que en la garganta del medidor Venturi del ejemplo 12.9. Por lo tanto, la fuerza hacia abajo del aire en la parte superior del ala es menor que la fuerza hacia arriba en la parte inferior del ala, y hay una fuerza neta hacia arriba, o *sustentación*. La sustentación no se debe solo al impulso del aire que incide bajo el ala; de hecho, la presión reducida en la superficie superior del ala es lo que más contribuye a la sustentación. (Esta explicación muy simplificada no considera la formación de vórtices).

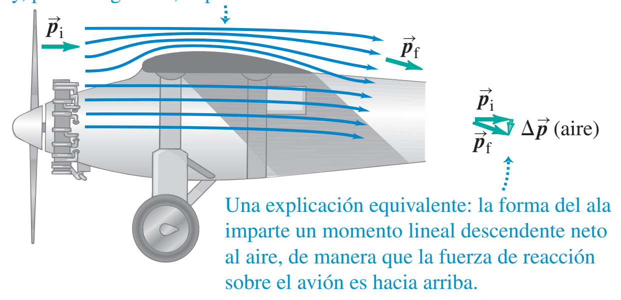
También podemos entender la fuerza de sustentación en términos de cambios en el momento lineal. El diagrama vectorial de la figura 12.26*a* indica que hay un cambio neto *hacia abajo* en la componente vertical del momento lineal del aire que fluye por el ala, correspondiente a la fuerza descendente que el ala ejerce sobre el aire. La fuerza de reacción que actúa *sobre* el ala es *hacia arriba*, como habíamos visto.

Se observan patrones de flujo y fuerzas de sustentación similares en las inmediaciones de cualquier objeto saliente cuando hace viento. Un viento moderado hace que un paraguas "flote"; cuando sopla un viento bastante intenso, la fuerza de sustentación hace que el paraguas se doble hacia arriba. A gran velocidad, la sustentación puede reducir la tracción de los neumáticos de un automóvil, y es por ello que muchos vehículos están equipados con un alerón aerodinámico (*spoiler*) en la parte trasera. El alerón tiene la forma de ala invertida y proporciona una fuerza descendente de compensación.

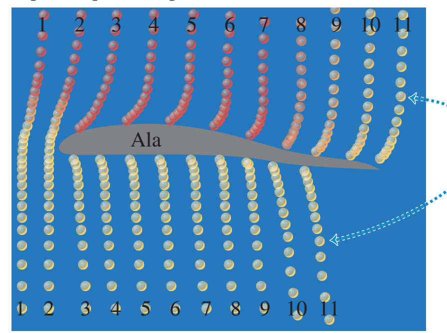
CUIDADO **Una interpretación errónea acerca de las alas** Algunas explicaciones de la sustentación afirman que el aire viaja más rápido sobre la parte superior de un ala porque "tiene que viajar una mayor distancia". Esta afirmación supone que dos moléculas adyacentes de aire que toman direcciones distintas en la parte delantera del ala (una se dirige por encima de la superficie superior del ala y la otra por debajo de la superficie inferior) deben encontrarse de nuevo en el borde de salida. ¡Pero no es así! La figura 12.26*b* presenta una simulación de computadora de placas de aire que fluyen alrededor del ala de un avión. Las placas de aire adyacentes en el frente del ala *no* se encuentran en el borde de salida; el flujo sobre la parte superior del ala es más rápido que si las placas tuvieran que encontrarse. De acuerdo con la ecuación de Bernoulli, esta mayor rapidez significa que hay una presión aún menor por encima del ala (y, por lo tanto, una mayor sustentación) que lo que sugiere la afirmación "viajar una mayor distancia".

12.26 Líneas de flujo alrededor del ala de un avión.

a) Líneas de flujo alrededor del ala de un avión



b) Simulación de computadora de las placas de aire que fluyen alrededor de un ala, donde se observa que el aire se mueve mucho más rápido en la parte superior que en la parte inferior.



Evalúe su comprensión de la sección 12.5 ¿Cuál es el enunciado más exacto del principio de Bernoulli? **i.** El aire que se desplaza rápidamente provoca presión más baja. **ii.** La presión más baja provoca que el aire se desplace rápido. **iii.** Ambas afirmaciones (**i** y **ii**) son igualmente exactas.



12.6 Viscosidad y turbulencia

Al hablar del flujo de fluidos, supusimos que el fluido no tenía fricción interna y que el flujo era laminar. Aunque en muchos casos esas suposiciones son válidas, en muchas situaciones físicas importantes, los efectos de la viscosidad (fricción interna) y la turbulencia (flujo no laminar) son extremadamente trascendentes. Examinemos superficialmente algunas de esas situaciones.

Viscosidad

La **viscosidad** es fricción interna en un fluido. Las fuerzas viscosas se oponen al movimiento de una parte de un fluido en relación con otra. La viscosidad es la razón por la que se dificulta remar una canoa en aguas tranquilas, pero también es lo que hace que funcione el remo. Los efectos de la viscosidad son importantes en el flujo de fluidos en las tuberías, en el flujo de la sangre, en la lubricación de las partes de un motor y en muchas otras situaciones.

Los fluidos que fluyen con facilidad, como el agua y la gasolina, tienen menor viscosidad que los líquidos "espesos" como la miel o el aceite para motor. Las viscosidades de todos los fluidos dependen mucho de la temperatura, aumentan para los gases y disminuyen para los líquidos al subir la temperatura (figura 12.27). Los aceites para lubricación de motores deben fluir igualmente bien en condiciones frías y calientes, por lo que están diseñados para tener una variación *tan pequeña* como sea posible de la viscosidad con la temperatura.

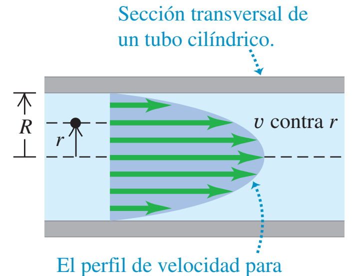
Un fluido viscoso tiende a adherirse a una superficie sólida que está en contacto con ella. Siempre hay una *capa de frontera* delgada de fluido cerca de la superficie, en la que el fluido está casi en reposo con respecto a ella. Por eso, las partículas de polvo pueden adherirse al aspa de un ventilador aun cuando esté girando rápidamente, y por eso no podemos limpiar bien un auto con solo dirigir el chorro de agua de una manguera hacia él.

La viscosidad tiene efectos importantes sobre el flujo de los líquidos a través de tuberías, y esto incluye el flujo de la sangre por el sistema circulatorio. Pensemos primero en un fluido con viscosidad nula para poder aplicar la ecuación de Bernoulli, ecuación (12.17). Si los dos extremos de un tubo cilíndrico largo están a la misma altura ($y_1 = y_2$) y la rapidez de flujo es la misma en ambos extremos (de manera que $v_1 = v_2$), la ecuación de Bernoulli nos indica que la presión es la misma en ambos extremos de la tubería. Sin embargo, este resultado simplemente no es válido si tomamos en cuenta la viscosidad. Para ver por qué, considere la figura 12.28, que muestra el perfil de

12.27 La lava es un ejemplo de fluido viscoso. La viscosidad disminuye al aumentar la temperatura: cuanto más caliente está la lava, más fácilmente fluye.



12.28 Perfil de velocidad para un fluido viscoso en un tubo cilíndrico.



Aplicación Escuchar un flujo turbulento
El flujo normal de sangre en la aorta humana es laminar, pero una leve perturbación como una patología cardiaca puede hacer que el flujo se vuelva turbulento. La turbulencia hace ruido; por eso, una técnica diagnóstica útil consiste en escuchar el flujo de sangre con un estetoscopio.



rapidez de flujo para el flujo laminar de un fluido viscoso en un tubo cilíndrico largo. Debido a la viscosidad, la rapidez es *cero* en las paredes del tubo (a las que se adhiere el fluido) y máxima en el centro del tubo. El movimiento semeja muchos tubos concéntricos que se deslizan unos en relación con otros, con el tubo central moviéndose más rápidamente y el más exterior en reposo. Las fuerzas viscosas entre los tubos se oponen a este deslizamiento, de manera que si queremos mantener el flujo, deberemos aplicar atrás del flujo una presión mayor que adelante de él. Por eso también necesitamos seguir apretando un tubo de pasta dentífrica o un envase de salsa de tomate (ambos fluidos viscosos) para que siga saliendo el fluido del interior. Los dedos aplican detrás del flujo una presión mucho mayor que la presión atmosférica al frente del flujo.

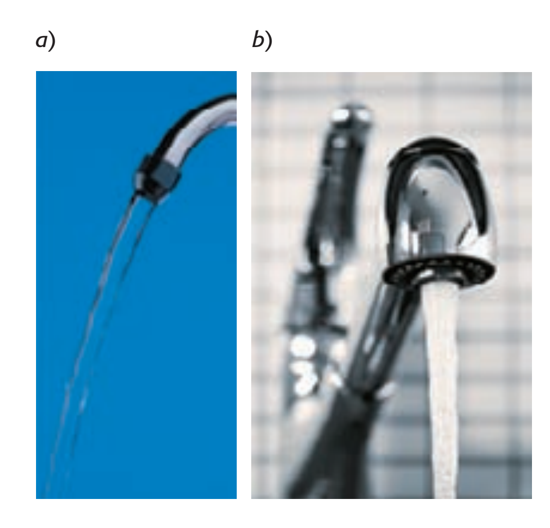
La diferencia de presión requerida para mantener una rapidez determinada de flujo de volumen a través de un tubo cilíndrico de longitud L y radio R resulta ser proporcional a L/R^4. Si disminuimos R a la mitad, la presión requerida aumenta $2^4 = 16$ veces; si disminuimos R en un factor de 0.90 (una reducción del 10%), la diferencia de presión requerida aumentará en un factor de $(1/0.90)^4 = 1.52$ (un aumento del 52%). Esta sencilla relación explica el vínculo entre una dieta alta en colesterol (que tiende a reducir el diámetro de las arterias) y una presión arterial elevada. Debido a la dependencia R^4, incluso un leve estrechamiento de las arterias puede elevar considerablemente la presión arterial y forzar el músculo cardiaco.

Turbulencia

Si la rapidez de un fluido que fluye excede cierto valor crítico, el flujo deja de ser laminar. El patrón de flujo se vuelve muy irregular y complejo, y cambia continuamente con el tiempo; no hay patrón de estado estable. Este flujo irregular y caótico se denomina **turbulencia**. La figura 12.20 muestra el contraste entre flujos laminar y turbulento para humo que asciende en el aire. La ecuación de Bernoulli *no* es aplicable a regiones de turbulencia, pues el flujo no es estable.

El hecho de que un flujo sea laminar o turbulento depende en parte de la viscosidad del fluido. Cuanto mayor es la viscosidad, mayor es la tendencia del fluido a fluir en capas y es más probable que el flujo sea laminar. (Cuando hablamos de la ecuación de Bernoulli en la sección 12.5, supusimos que el flujo era laminar y que el fluido tenía viscosidad cero. De hecho, se requiere un *poco* de viscosidad para asegurar que el flujo sea laminar).

Para un fluido de cierta viscosidad, la rapidez de flujo es un factor determinante para que exista turbulencia. Un patrón de flujo que es estable a baja velocidad se vuelve inestable de repente cuando se alcanza una rapidez crítica. Las irregularidades en el patrón de flujo pueden deberse a asperezas en la pared del tubo, variaciones en la densidad del fluido y muchos otros factores. Si la rapidez de flujo es baja, estas perturbaciones se eliminan por amortiguamiento; el patrón de flujo es *estable* y tiende a mantener su naturaleza laminar (figura 12.29*a*). Sin embargo, cuando se alcanza la rapidez crítica, el patrón de flujo se vuelve inestable. Las perturbaciones ya no se amortiguan, sino que crecen hasta destruir el patrón de flujo laminar (figura 12.29*b*).



12.29 El flujo de agua de un grifo es *a*) laminar cuando sale a baja rapidez, pero *b*) turbulento cuando tiene rapidez suficientemente alta.



Ejemplo conceptual 12.11 La bola curva

¿Un lanzamiento en forma de curva en béisbol es *realmente* una curva? Sin duda, y la razón es la turbulencia. La figura 12.30*a* ilustra una bola que se mueve en el aire de izquierda a derecha. Las líneas de flujo muestran que para un observador que se mueve junto a la bola, la corriente de aire parece moverse de derecha a izquierda. A causa de las velocidades que están usualmente implicadas (cerca de 35 m/s, o 75 mi/h), hay una región de flujo *turbulento* detrás de la bola.

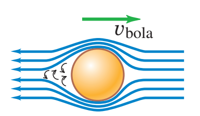
La figura 12.30*b* ilustra una bola que *gira* con "vuelta superior". Las capas de aire cerca de la superficie de la bola son llevadas en la dirección del giro por la fricción entre la bola y el aire, así como por la fricción interna (viscosidad) del aire. Por lo tanto, el aire se mueve con respecto a la superficie de la bola más lentamente en la parte de arriba de la bola que en la parte de abajo, y la turbulencia se presenta más hacia adelante en el lado de arriba que en el de abajo. Esta asimetría provoca una diferencia de presión; la presión media en la parte de arriba de la bola ahora es mayor que abajo. Como se observa en la figura 12.30*c*, la fuerza neta desvía la bola hacia abajo. Por esa razón se usa la "vuelta superior" en tenis para evitar que un servicio rápido se salga de la cancha (figura 12.30*d*).

En un lanzamiento de curva en béisbol, la bola gira alrededor de un eje casi *vertical*, y la desviación real es hacia un lado. En un caso así, la figura 12.30*c* es una vista *superior* de la situación. Una bola lanzada por un lanzador zurdo gira, como se muestra en la figura 12.30*e*, se curva *hacia* un bateador diestro, y es más difícil golpearla.

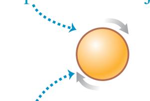
Un efecto similar se presenta con las pelotas de golf, que siempre tienen un "giro hacia atrás" por el impacto con la cara inclinada del palo. La diferencia de presión resultante entre las partes superior e inferior de la bola provoca una fuerza de *sustentación* que mantiene la bola en el aire mucho más tiempo del que sería posible sin el giro. Un golpe fuerte bien dado parece hacer que la bola "flote" o incluso se curve *hacia arriba* durante la parte inicial del vuelo. Este es un efecto real, no una ilusión. Los hoyuelos de la pelota desempeñan un papel fundamental; la viscosidad del aire hace que una bola sin hoyuelos tenga una trayectoria mucho más corta que una con hoyuelos a la que se imprimen la misma velocidad y giro iniciales.

12.30 *a*) a *e*) Análisis del movimiento de una pelota que gira a través del aire.

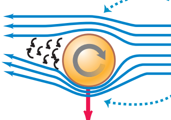
a) Movimiento del aire con respecto a una bola que no gira



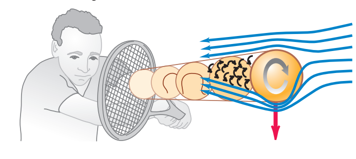
b) Movimiento de una bola que gira



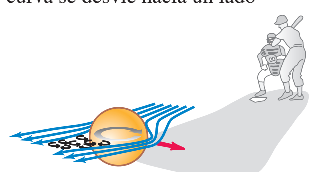
c) Fuerza generada cuando una bola que gira se desplaza a través del aire

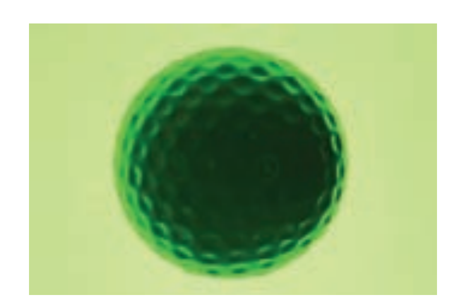


d) Giro que empuja una pelota de tenis hacia abajo



e) Giro que hace que una bola curva se desvíe hacia un lado





Evalúe su comprensión de la sección 12.6 ¿Cuánta más presión deberá aplicar una enfermera con el pulgar para administrar una inyección con una aguja hipodérmica cuyo diámetro interno mide 0.30 mm, en comparación con una aguja con diámetro interno de 0.60 mm? Suponga que las dos agujas tienen la misma longitud y que la rapidez de flujo de volumen es la misma en ambos casos. **i.** El doble; **ii.** 4 veces más; **iii.** 8 veces más; **iv.** 16 veces más; **v.** 32 veces más. ❙

CAPÍTULO 12 RESUMEN

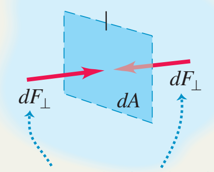


Densidad y presión: Densidad es masa por unidad de volumen. Si una masa m de material homogéneo tiene un volumen V, su densidad ρ es la proporción m/V. La gravedad específica es la proporción entre la densidad de un material y la del agua. (Véase el ejemplo 12.1).

La presión es fuerza normal por unidad de área. La ley de Pascal establece que la presión aplicada a la superficie de un fluido encerrado se transmite sin disminución a todas las partes del fluido. La presión absoluta es la presión total en un fluido; la presión manométrica es la diferencia entre la presión absoluta y la atmosférica. La unidad de presión del SI es el pascal (Pa): 1 Pa = 1 N/m^2. (Véase el ejemplo 12.2).

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (12.1)$$

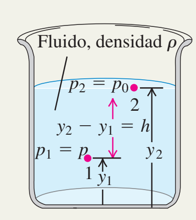
$$p = \frac{dF_{\perp}}{dA} \quad (12.2)$$



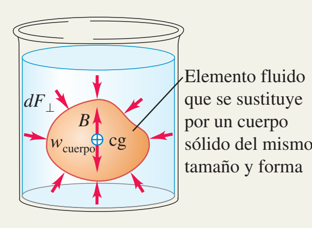
Presiones en un fluido en reposo: La diferencia de presión entre los puntos 1 y 2 en un fluido estático con densidad uniforme ρ (un fluido incompresible) es proporcional a la diferencia entre las alturas y_1 y y_2. Si la presión en la superficie de un líquido incompresible en reposo es p_0, entonces la presión a una profundidad h es mayor en una cantidad ρgh. (Véase los ejemplos 12.3 y 12.4).

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$$
(presión en un fluido de densidad uniforme) (12.5)

$$p = p_0 + \rho gh$$
(presión en un fluido de densidad uniforme) (12.6)



Flotación: El principio de Arquímedes dice que cuando un cuerpo se sumerge en un fluido, este ejerce sobre el cuerpo una fuerza de flotación hacia arriba igual al peso del fluido que el cuerpo desplaza. (Véase el ejemplo 12.5).



Flujo de un fluido: Un fluido ideal es incompresible y no tiene viscosidad (no hay fricción interna). Una línea de flujo es la trayectoria de una partícula de fluido; una línea de corriente es una curva tangente en todo punto al vector velocidad en ese punto. Un tubo de flujo es un tubo delimitado en sus costados por líneas de flujo. En flujo laminar, las capas de fluido se deslizan suavemente unas sobre otras. En flujo turbulento, hay gran desorden y el patrón de flujo cambia constantemente.

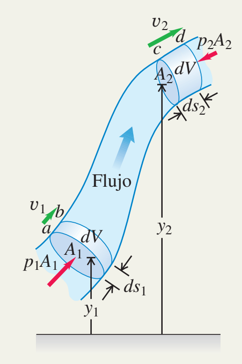
La conservación de la masa en un fluido incompresible se expresa con la ecuación de continuidad, la cual relaciona las rapideces de flujo v_1 y v_2 para dos secciones transversales A_1 y A_2 de un tubo de flujo. El producto Av es igual a la rapidez de flujo de volumen, dV/dt, la rapidez con que el volumen cruza una sección del tubo. (Véase el ejemplo 12.6).

La ecuación de Bernoulli relaciona la presión p, la rapidez de flujo v y la altura y de dos puntos cualesquiera, suponiendo flujo estable en un fluido ideal. (Véase los ejemplos 12.7 a 12.10).

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$
(ecuación de continuidad, fluido incompresible) (12.10)

$$\frac{dV}{dt} = Av$$
(rapidez de flujo de volumen) (12.11)

$$p_1 + \rho g y_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$
(ecuación de Bernoulli) (12.17)





PROBLEMA PRÁCTICO ¿Cuánto tiempo se tarda en vaciar?

Un gran tanque cilíndrico de diámetro D está abierto al aire libre en la parte superior. El tanque contiene agua hasta una altura H. Luego, se abre en la parte inferior del tanque un pequeño agujero circular con un diámetro d, donde d es mucho menor que D. Ignore los efectos de la viscosidad. *a*) Encuentre y, la altura del agua en el tanque un tiempo t después de que se ha abierto el agujero, como una función de t. *b*) ¿Cuánto tiempo se tarda en vaciar el tanque por completo? *c*) Si se duplica la altura inicial del agua en el tanque, ¿en qué factor aumenta el tiempo en que se vacía el tanque?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Dibuje un bosquejo de la situación que muestre todas las dimensiones importantes.
2. Elabore una lista de las cantidades desconocidas, y determine cuáles de estas son las incógnitas.
3. ¿Cuál es la rapidez con que el agua sale de la parte inferior del tanque? ¿Cómo se relaciona esta con la rapidez del flujo de volumen de agua de salida del tanque? ¿Cómo está relacionada la rapidez de flujo de volumen con la razón de cambio de y?

EJECUTAR

4. Utilice los resultados del paso 3 para escribir una ecuación para dy/dt.
5. Su resultado del paso 4 es una ecuación diferencial relativamente sencilla. Con sus conocimientos de cálculo, se puede integrar para encontrar y como una función de t. (*Sugerencia:* Una vez que haya hecho la integración, aún tiene que hacer un poco de álgebra).
6. Utilice el resultado del paso 5 para encontrar el momento en que el tanque está vacío. ¿Cómo dependerá su resultado de la altura H inicial?

EVALUAR

7. Compruebe si sus respuestas son razonables. Una buena comprobación es dibujar una gráfica de y en función de t. Según la gráfica, ¿cuál es el signo de dy/dt a diferentes horas? ¿Esto tiene sentido?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P12.1 Un cubo de madera de roble con caras muy lisas normalmente flota en el agua. Suponga que usted sumerge ese cubo por completo y presiona una de sus caras contra el fondo del tanque, de manera que no haya agua debajo de esa cara. ¿El bloque flotará a la superficie? ¿Existe una fuerza de flotación sobre él? Explique su respuesta.

P12.2 Una manguera de hule se conecta a un embudo y el extremo libre se dobla hacia arriba. Si se vierte agua en el embudo, sube al mismo nivel en la manguera que en el embudo, a pesar de que este tiene mucha más agua. ¿Por qué? ¿Qué es lo que soporta el peso adicional del agua en el embudo?

P12.3 Si compara el ejemplo 12.1 (sección 12.1) y el ejemplo 12.2 (sección 12.2), parece que 700 N de aire ejercen una fuerza hacia abajo de 2.0×10^6 N sobre el piso. ¿Cómo es posible?

P12.4 La ecuación (12.7) indica que una razón de área de 100 a 1 puede dar 100 veces más fuerza de salida que de entrada. ¿Acaso esto no viola la conservación de la energía? Explique.

P12.5 Tal vez haya notado que, cuanto menor es la presión de un neumático, mayor es el área de contacto entre este y el pavimento. ¿Por qué?

P12.6 Un globo de aire caliente se llena con aire calentado por un quemador en la base. ¿Por qué debe calentarse el aire? ¿Cómo se controla el ascenso y el descenso?

P12.7 Al describir el tamaño de un barco grande, se dice, por ejemplo, que "desplaza 20,000 toneladas". ¿Qué significa esto? ¿Se puede obtener el peso del barco a partir de este dato?

P12.8 Se deja caer una esfera sólida de aluminio en un balde de agua que descansa en el suelo. La fuerza de flotación es igual al peso del agua desplazada, que es menor que el peso de la esfera, así que esta se hunde. Si llevamos el balde a un elevador que acelera hacia arriba, el peso aparente del agua aumenta y, por lo tanto, aumenta la fuerza de flotación que actúa sobre la esfera. ¿La aceleración del elevador podría ser tan grande para hacer que la esfera flote en el agua? Explique su respuesta.

P12.9 Un dirigible rígido más ligero que el aire, lleno de helio, no puede elevarse indefinidamente. ¿Por qué no? ¿Qué determina la altitud máxima alcanzable?

P12.10 La presión del aire disminuye al aumentar la altitud. ¿Por qué entonces el aire cerca de la superficie no es succionado continuamente hacia las regiones altas que están a menor presión?

P12.11 Puede probarse la pureza del oro pesándolo en aire y en agua. ¿Cómo? ¿Cree que podría hacer pasar por oro un lingote de material más barato chapado con oro?

P12.12 Durante la gran inundación del río Mississippi de 1993, los diques en San Luis tendían a romperse primero en la base. ¿Por qué?

P12.13 Un barco carguero viaja del Océano Atlántico (agua salada) al Lago Ontario (agua dulce) por el río San Lorenzo. El barco se sume varios centímetros más en el agua del lago que en el océano. Explique por qué.

P12.14 Usted empuja un trozo de madera para que quede bajo la superficie de una alberca. Después de que está sumergido por completo, usted sigue empujándolo más y más profundamente. Conforme usted hace esto, ¿qué sucederá a la fuerza de flotación sobre el trozo de madera? ¿Esta fuerza seguirá aumentando, permanecerá igual o disminuirá? ¿Por qué?

P12.15 Una antigua pregunta es: "¿Qué pesa más, una libra de plumas o una de plomo?". Si el peso en libras es la fuerza gravitacional, ¿una libra de plumas equilibrará una libra de plomo en charolas opuestas de una balanza de brazos iguales? Explique, considerando las fuerzas de flotación.

P12.16 Suponga que la puerta de un cuarto embona herméticamente, pero sin fricción en su marco. ¿Cree que podría abrir la puerta si la presión del aire en un lado fuera la presión atmosférica estándar y en el otro difiriera en 1%? Explique su respuesta.

P12.17 A cierta profundidad en un líquido incompresible, la presión absoluta es p. Al doble de esa profundidad, ¿la presión absoluta será igual a $2p$, mayor que $2p$ o menor que $2p$? Justifique su respuesta.

P12.18 Un trozo de hierro está pegado encima de un bloque de madera. Si este se coloca en una cubeta de agua con el hierro arriba, flota. Ahora se voltea el bloque para que el hierro quede sumergido bajo el bloque. ¿El bloque flotará o se hundirá? ¿El nivel de agua en la cubeta subirá, bajará o permanecerá igual? Explique.

P12.19 Se toma una jarra de vidrio vacía y se introduce en un tanque de agua con la boca hacia abajo, atrapando el aire dentro de la jarra. Si se empuja más la jarra dentro del agua, ¿la fuerza de flotación que actúa sobre la jarra permanece igual? Si no es así, ¿aumenta o disminuye? Explique su respuesta.

P12.20 Imagine que flota en una canoa en el centro de una alberca. Una amiga está en la orilla, tomando nota del nivel exacto del agua en la pared de la alberca. Usted lleva consigo en la canoa una bola para jugar a los bolos, la cual deja caer cuidadosamente por la borda. La bola se hunde hasta el fondo de la alberca. ¿El nivel de agua en la alberca sube o baja?

P12.21 Imagine que flota en una canoa en el centro de una alberca. Una gran ave llega volando y se posa en su hombro. ¿El nivel de agua en la alberca sube o baja?

P12.22 A cierta profundidad en el océano incompresible, la presión manométrica es p_g. Al triple de esa profundidad, ¿la presión manométrica será mayor que $3p_g$, igual a $3p_g$ o menor que $3p_g$? Justifique su respuesta.

P12.23 Un cubo de hielo flota en un vaso de agua. Al derretirse el hielo, ¿el nivel de agua en el vaso subirá, bajará o permanecerá igual? Explique.

P12.24 Alguien le dice lo siguiente: "La ecuación de Bernoulli afirma que, ahí donde la rapidez del fluido es más alta, la presión es más baja, y viceversa". ¿Siempre es verdadero este enunciado, incluso en el caso de un fluido idealizado? Explique.

P12.25 Si en un fluido en estado estable, la velocidad en cada punto es constante, ¿cómo puede acelerar una partícula de fluido?

P12.26 En una exhibición de escaparate, una pelota de ping-pong está suspendida en un chorro de aire expulsado por la manguera de salida de una aspiradora de tanque. La pelota se mueve un poco, pero siempre regresa al centro del chorro, aunque este no sea vertical. ¿Cómo ilustra este comportamiento la ecuación de Bernoulli?

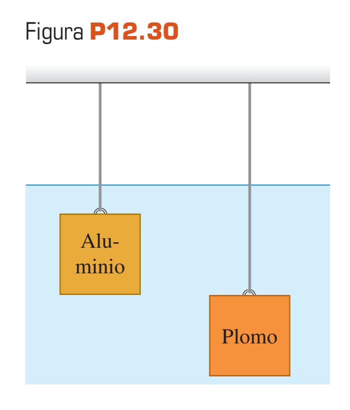
P12.27 Un tornado consiste en un vórtice de aire que gira rápidamente. ¿Por qué la presión es mucho más baja en el centro que afuera? ¿Cómo explica esto la potencia destructiva de un tornado?

P12.28 Los aeropuertos a gran altitud tienen pistas más largas para los despegues y aterrizajes, que los aeropuertos que están al nivel del mar. Una razón para ello es que los motores de los aviones desarrollan menos potencia en el aire enrarecido presente a mayor altitud. ¿Cuál es otra razón?

P12.29 Cuando un chorro de agua fluye suavemente de un grifo, se adelgaza al caer. Explique este fenómeno.

P12.30 Dos cubos de idéntico tamaño, uno de plomo y el otro de aluminio, están suspendidos a diferentes profundidades por medio de dos alambres en un tanque de agua (figura P12.30). *a*) ¿Cuál de los cubos experimenta una mayor fuerza de flotación? *b*) ¿Para cuál de los dos es mayor la tensión en el alambre? *c*) ¿Cuál de los cubos experimenta una mayor fuerza sobre su cara inferior? *d*) ¿Para cuál de los cubos la diferencia en la presión entre las caras superior e inferior es mayor?

Figura **P12.30**



EJERCICIOS

Sección 12.1 Densidad

12.1 •• Usted realiza un trabajo de medio tiempo, y un supervisor le pide traer del almacén una varilla cilíndrica de acero de 85.8 cm de longitud y 2.85 cm de diámetro. ¿Necesitará usted un carrito? (Para contestar, calcule el peso de la varilla).

12.2 •• Un cubo de 5.0 cm por lado está hecho de una aleación de metal. Después de perforar un agujero cilíndrico de 2.0 cm de diámetro para atravesar por completo una cara, en forma perpendicular a esta, encuentra que el cubo pesa 7.50 N. *a*) ¿Cuál es la densidad de este metal? *b*) ¿Cuánto pesaba el cubo antes de taladrar el agujero en este?

12.3 • Imagine que compra una pieza rectangular de metal de $5.0 \times 15.0 \times 30.0$ mm y masa de 0.0158 kg. El vendedor le dice que es de oro. Para verificarlo, usted calcula la densidad media de la pieza. ¿Qué valor obtiene? ¿Fue una estafa?

12.4 •• **Lingote de oro.** Se gana la lotería y decide impresionar a sus amigos exhibiendo un cubo de oro de un millón de dólares. En ese momento, el oro tiene un precio de venta de $426.60 por onza troy, y 1.0000 onza troy es igual a 31.1035 g. ¿Qué altura debe tener su cubo de un millón de dólares?

12.5 •• Una esfera uniforme de plomo y una de aluminio tienen la misma masa. ¿Cuál es la razón entre el radio de la esfera de aluminio y el de la esfera de plomo?

12.6 • *a*) ¿Cuál es la densidad media del Sol? *b*) ¿Cuál es la densidad media de una estrella de neutrones que tiene la misma masa que el Sol pero un radio de solo 20.0 km?

12.7 •• Un tubo cilíndrico hueco de cobre mide 1.50 m de longitud, tiene un diámetro exterior de 3.50 cm y un diámetro interior de 2.50 cm. ¿Cuánto pesa?

Sección 12.2 Presión en un fluido

12.8 •• **Fumarolas oceánicas.** Las fumarolas oceánicas son respiraderos volcánicos calientes que emiten humo en las profundidades del lecho oceánico. En muchas de ellas pululan criaturas exóticas, y algunos biólogos piensan que la vida en la Tierra pudo haberse originado alrededor de esos respiraderos. Las fumarolas varían en profundidad de unos 1500 a 3200 m por debajo de la superficie. ¿Cuál es la presión manométrica en una fumarola oceánica de 3200 m de profundidad, suponiendo que la densidad del agua no varía? Exprese su respuesta en pascales y atmósferas.

12.9 •• **Océanos en Marte.** Los científicos han encontrado evidencia de que en Marte pudo haber existido alguna vez un océano de 0.500 km de profundidad. La aceleración debida a la gravedad en Marte es de 3.71 m/s^2. *a*) ¿Cuál habría sido la presión manométrica en el fondo de tal océano, suponiendo que era de agua dulce? *b*) ¿A qué profundidad de los océanos terrestres se experimenta la misma presión manométrica?

12.10 •• **BIO** *a*) Calcule la diferencia en la presión arterial entre los pies y la parte superior de la cabeza o coronilla de una persona que mide 1.65 m de estatura. *b*) Considere un segmento cilíndrico de un vaso sanguíneo de 2.00 cm de longitud y 1.50 mm de diámetro. ¿Qué fuerza externa *adicional* tendría que resistir este vaso sanguíneo en los pies de la persona, en comparación con un vaso similar en su cabeza?

12.11 • **BIO** En la alimentación intravenosa, se inserta una aguja en una vena del brazo del paciente y se conecta un tubo entre la aguja y un depósito de fluido (densidad 1050 kg/m^3) que está a una altura h sobre el brazo. El depósito está abierto a la atmósfera por arriba. Si la presión manométrica dentro de la vena es de 5980 Pa, ¿qué valor mínimo de h permite que entre fluido en la vena? Suponga que el diámetro de la aguja es suficientemente grande como para despreciar la viscosidad (véase la sección 12.6) del fluido.

12.12 • Un barril contiene una capa de aceite de 0.120 m sobre 0.250 m de agua. La densidad del aceite es de 600 kg/m^3. *a*) ¿Qué presión manométrica hay en la interfase aceite-agua? *b*) ¿Qué presión manométrica hay en el fondo del barril?

12.13 • **BIO Parado de cabeza.** *a*) ¿Cuál es la *diferencia* entre la presión de la sangre en el cerebro cuando uno se para sobre su cabeza y la presión al estar de pie? Suponga que usted mide 1.85 m de altura. La densidad de la sangre es 1060 kg/m^3. *b*) ¿Qué efecto tiene el aumento de la presión sobre los vasos sanguíneos en el cerebro?

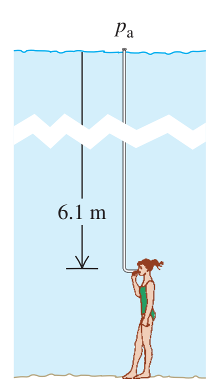
12.14 •• Se está diseñando una campana de buceo que resista la presión del mar a 250 m de profundidad. *a*) ¿Cuánto vale la presión manométrica a esa profundidad? (Desprecie el cambio en la densidad del agua con la profundidad). *b*) A esa profundidad, ¿qué fuerza neta ejercen el agua exterior y el aire interior sobre una ventanilla de vidrio circular de 30.0 cm de diámetro si la presión dentro de la campana es la que hay en la superficie del agua? (Desprecie la pequeña variación de presión sobre la superficie de la ventanilla).

12.15 •• **BIO Daños causados en el oído por el buceo.** Si la fuerza sobre la membrana timpánica (tímpano) aumenta en aproximadamente 1.5 N por encima de la fuerza de la presión atmosférica, la membrana sufre daños. Al bucear en el océano, ¿debajo de qué profundidad podría comenzar a dañarse su tímpano? El tímpano generalmente tiene un diámetro de 8.2 mm. (Consulte la tabla 12.1).

12.16 •• El líquido del manómetro de tubo abierto de la figura 12.8*a* es mercurio, $y_1 = 3.00$ cm y $y_2 = 7.00$ cm. La presión atmosférica es de 980 milibares. *a*) ¿Qué presión absoluta hay en la base del tubo en U? *b*) ¿Y en el tubo abierto 4.00 cm debajo de la superficie libre? *c*) ¿Qué presión absoluta tiene el gas en el recipiente? *d*) ¿Qué presión manométrica tiene el gas en pascales?

12.17 • **BIO** Hay una profundidad máxima a la que un buzo puede respirar por un tubo esnórquel (figura E12.17) pues, al aumentar la profundidad, se incrementa la diferencia de presión que tiende a colapsar los pulmones del buzo. Como el esnórquel conecta los pulmones con la atmósfera, la presión en ellos es la atmosférica. ¿Cuál es la diferencia de presión interna-externa cuando los pulmones del buzo están a 6.1 m de profundidad (aproximadamente 20 pies)? Suponga que el buzo está en agua dulce. (Un buzo que respira el aire comprimido de un tanque puede operar a mayores profundidades que uno que usa esnórquel, porque la presión del aire dentro de los pulmones aumenta hasta equilibrar la presión externa del agua).





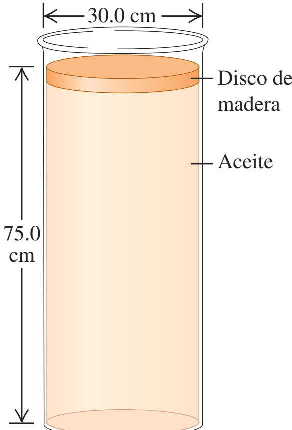
12.18 •• Un cilindro alto con área transversal de 12.0 cm^2 se llenó parcialmente con mercurio; la superficie del mercurio está a una altura de 5.00 cm arriba de la base del cilindro. Se vierte lentamente agua sobre el mercurio (estos dos líquidos no se mezclan). ¿Qué volumen de agua deberá agregarse para aumentar al doble la presión manométrica en la base del cilindro?

12.19 •• Un cortocircuito deja sin electricidad a un submarino que está 30 m por debajo de la superficie del mar. Para escapar, la tripulación debe empujar hacia fuera una escotilla ubicada en el fondo, la cual tiene un área de 0.75 m^2 y pesa 300 N. Si la presión interior es de 1.0 atm, ¿qué fuerza hacia abajo se debe ejercer sobre la escotilla para abrirla?

12.20 •• Un recipiente cerrado se llena parcialmente con agua. En un principio, el aire arriba del agua está a presión atmosférica (1.01×10^5 Pa) y la presión manométrica en la base del recipiente es de 2500 Pa. Después, se bombea aire adicional al interior, aumentando la presión del aire sobre el agua en 1500 Pa. *a*) ¿Cuál es la nueva presión manométrica en el fondo? *b*) ¿Cuánto deberá reducirse el nivel del agua en el recipiente, extrayendo agua a través de una válvula en el fondo, para que la presión manométrica en el fondo vuelva a ser de 2500 Pa? La presión del aire sobre el agua se mantiene a 1500 Pa sobre la presión atmosférica.

12.21 •• Un disco cilíndrico de madera que pesa 45.0 N y tiene un diámetro de 30.0 cm flota sobre un cilindro de aceite cuya densidad es de 0.850 g/cm^3 (figura E12.21). El cilindro de aceite mide 75.0 cm de alto y tiene un diámetro igual al cilindro de madera. *a*) Calcule la presión manométrica en la parte superior de la columna de aceite. *b*) Ahora suponga que alguien coloca un peso de 83.0 N en la parte superior del disco de madera, pero el aceite no se escurre alrededor del borde de la madera. ¿Cuál es el *cambio* en la presión **i.** en la base del aceite y **ii.** a la mitad de la columna de aceite?

Figura **E12.21**



12.22 •• **Exploración de Venus.** La presión superficial en Venus es de 92 atm, y la aceleración debida a la gravedad ahí es de 0.894*g*. En una futura misión exploratoria, un tanque cilíndrico vertical de benceno está sellado en el extremo superior, pero aun así sigue presurizado a 92 atm justo por encima del benceno. El tanque tiene un diámetro de 1.72 m, y la columna de benceno mide 11.50 m de alto. Ignore los efectos debidos a la temperatura extremadamente alta de Venus. *a*) ¿Cuál es la fuerza total ejercida sobre la superficie interior de la base del tanque? *b*) ¿Qué fuerza ejerce la atmósfera de Venus sobre la superficie exterior de la base del tanque? *c*) ¿Cuál es la fuerza total interior que ejerce la atmósfera sobre las paredes verticales del tanque?

12.23 •• **Elevador hidráulico I.** Para el elevador hidráulico que se ilustra en la figura 12.7, ¿cuál debe ser la proporción entre el diámetro del recipiente bajo el auto y el diámetro del recipiente donde se aplica la fuerza F_1, de manera que el auto de 1520 kg pueda ser levantado con una fuerza F_1 de solo 125 N?

12.24 • **Elevador hidráulico II.** El pistón de un elevador hidráulico para autos tiene 0.30 m de diámetro. ¿Qué presión manométrica, en pascales y en atmósferas, se requiere para levantar un auto de 1200 kg?

Sección 12.3 Flotación

12.25 • Una boya cilíndrica de 950 kg puede flotar verticalmente en agua salada. El diámetro de la boya es 0.900 m. Calcule la distancia adicional que se hundirá la boya cuando un hombre de 70.0 kg se coloca encima de esta.

12.26 •• Un bloque de hielo flota en un lago de agua dulce. ¿Qué volumen mínimo debe tener el bloque para que una mujer de 45.0 kg pueda ponerse de pie sobre este sin mojarse los pies?

12.27 •• Una muestra de mineral pesa 17.50 N en el aire, pero, si se cuelga de un hilo ligero y se sumerge por completo en agua, la tensión en el hilo es de 11.20 N. Calcule el volumen total y la densidad de la muestra.

12.28 •• Usted está preparando un aparato para hacer una visita a un planeta recientemente descubierto llamado Caasi, que tiene océanos de glicerina y una aceleración superficial debida a la gravedad de 4.15 m/s^2. Si el aparato flota en los océanos de la Tierra con el 25.0%

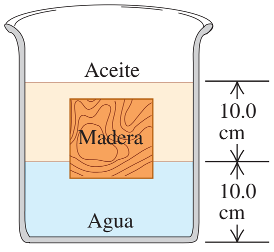
de su volumen sumergido, ¿qué porcentaje se sumergirá en los océanos de glicerina de Caasi?

12.29 •• Un objeto con densidad media ρ flota sobre un fluido de densidad ρ_{fluido}. *a*) ¿Qué relación debe haber entre las dos densidades? *b*) De acuerdo con su respuesta del inciso *a*), ¿cómo pueden flotar barcos de acero en el agua? *c*) En términos de ρ y ρ_{fluido}, ¿qué fracción del objeto está sumergida y qué fracción está sobre el fluido? Verifique que sus respuestas den el comportamiento correcto en el límite donde $\rho \rightarrow \rho_{\text{fluido}}$ y donde $\rho \rightarrow 0$. *d*) Durante un paseo en yate, un primo suyo recorta una pieza rectangular (dimensiones: $5.0 \times 4.0 \times 3.0$ cm) de un salvavidas y la tira al mar, donde flota. La masa de la pieza es de 42 g. ¿Qué porcentaje de su volumen está sobre la superficie del océano?

12.30 • Una esfera hueca de plástico se mantiene por debajo de la superficie de un lago de agua dulce mediante una cuerda anclada al fondo del lago. La esfera tiene un volumen de 0.650 m^3 y la tensión en la cuerda es de 900 N. *a*) Calcule la fuerza de flotación que ejerce el agua sobre la esfera. *b*) ¿Cuál es la masa de la esfera? *c*) La cuerda se rompe y la esfera se eleva a la superficie. Cuando la esfera llega al reposo, ¿qué fracción de su volumen estará sumergida?

12.31 •• Un bloque cúbico de madera de 10.0 cm por lado flota en la interfase entre aceite y agua con su superficie inferior 1.50 cm bajo la interfase (figura E12.31). La densidad del aceite es de 790 kg/m^3. *a*) ¿Qué presión manométrica hay en la superficie superior del bloque? *b*) ¿Y en la cara inferior? *c*) ¿Qué masa y densidad tiene el bloque?

Figura **E12.31**



12.32 • Un lingote de aluminio sólido pesa 89 N en el aire. *a*) ¿Qué volumen tiene? *b*) El lingote se cuelga de una cuerda y se sumerge por completo en agua. ¿Qué tensión hay en la cuerda (el peso *aparente* del lingote en agua)?

12.33 •• Una roca cuelga de un hilo ligero. Cuando está en el aire, la tensión en el hilo es de 39.2 N. Cuando está totalmente sumergida en agua, la tensión es de 28.4 N. Cuando está totalmente sumergida en un líquido desconocido, la tensión es de 18.6 N. Determine la densidad del líquido desconocido.

Sección 12.4 Flujo de fluido

12.34 •• Corre agua hacia una fuente, llenando todos los tubos con una rapidez constante de 0.750 m^3/s. *a*) ¿Qué tan rápido saldrá por un agujero de 4.50 cm de diámetro? *b*) ¿Con qué rapidez saldrá si el diámetro del agujero es tres veces más grande?

12.35 •• Una regadera tiene 20 agujeros circulares cuyo radio es de 1.00 mm. La regadera está conectada a un tubo de 0.80 cm de radio. Si la rapidez del agua en el tubo es de 3.0 m/s, ¿con qué rapidez saldrá de los agujeros de la regadera?

12.36 • Fluye agua por un tubo de sección transversal variable, llenándolo en todos sus puntos. En el punto 1, el área transversal del tubo es de 0.070 m^2, y la rapidez del fluido es de 3.50 m/s. ¿Qué rapidez tiene el fluido en puntos donde el área transversal es de *a*) 0.105 m^2? *b*) ¿0.047 m^2? *c*) Calcule el volumen de agua descargada del extremo abierto del tubo en 1.00 h.

12.37 • Fluye agua por un tubo circular de sección transversal variable, llenándolo en todos sus puntos. *a*) En un punto, el radio del tubo es de 0.150 m. ¿Qué rapidez tiene el agua en este punto si la rapidez estable de flujo de volumen en el tubo es de 1.20 m^3/s? *b*) En un segundo punto, la rapidez del agua es de 3.80 m/s. ¿Qué radio tiene el tubo en este punto?

12.38 • **Reparación de casa.** Necesita extender una tubería de 2.50 pulgadas de diámetro, pero solo dispone de un tubo de 1.00 pulgada de diámetro. Hace un ajuste para conectar estos tubos de extremo a extremo. Si el agua está fluyendo a 6.00 cm/s en el tubo ancho, ¿qué tan rápido va a fluir a través del estrecho?

12.39 • En un punto en un canal de irrigación que tiene una sección transversal rectangular de 18.5 m de ancho y 3.75 m de profundidad, el agua fluye a 2.50 cm/s. En un punto aguas abajo, pero al mismo nivel, el canal tiene 16.5 m de ancho, pero el agua fluye a 11.0 cm/s. ¿Qué tan profundo es el canal en este punto?

12.40 •• BIO **Obstrucción de una arteria.** Una técnica de medicina está tratando de determinar qué porcentaje de la arteria de un paciente está bloqueada por una placa. Para ello, se mide la presión sanguínea justo antes de la región de bloqueo y se encuentra que esta es de 1.20×10^4 Pa, mientras que en la región de bloqueo es de 1.15×10^4 Pa. Además, se sabe que la sangre que fluye a través de la arteria normal justo antes del punto de bloqueo se desplaza a 30.0 cm/s, y que la gravedad específica de la sangre de este paciente es 1.06. ¿Qué porcentaje de la superficie de sección transversal de la arteria del paciente está bloqueado por la placa?

Sección 12.5 Ecuación de Bernoulli

12.41 •• Un tanque sellado que contiene agua de mar hasta una altura de 11.0 m contiene también aire sobre el agua a una presión manométrica de 3.00 atm. Sale agua del tanque a través de un agujero pequeño en el fondo. ¿Qué tan rápido se está moviendo el agua?

12.42 • Se corta un agujero circular de 6.00 mm de diámetro en el costado de un tanque grande de agua, 14.0 m debajo del nivel del agua en el tanque. El tanque está abierto al aire por arriba. Calcule *a*) la rapidez de salida del agua y *b*) el volumen descargado por segundo.

12.43 • ¿Qué presión manométrica se requiere en una toma municipal de agua para que el chorro de una manguera de bomberos conectada a ella alcance una altura vertical de 15.0 m? (Suponga que la toma tiene un diámetro mucho mayor que la manguera).

12.44 •• En un punto de una tubería, la rapidez del agua es de 3.00 m/s y la presión manométrica es de 5.00×10^4 Pa. Calcule la presión manométrica en otro punto de la tubería, 11.0 m más abajo, si el diámetro del tubo ahí es el doble que en el primer punto.

12.45 • En cierto punto de una tubería horizontal, la rapidez del agua es de 2.50 m/s y la presión manométrica es de 1.80×10^4 Pa. Calcule la presión manométrica en un segundo punto donde el área transversal es el doble que en el primero.

12.46 • Una bebida refrescante (principalmente agua) fluye por una tubería de una planta embotelladora con una tasa de flujo de masa que llenaría 220 latas de 0.355 L por minuto. En el punto 2 del tubo, la presión manométrica es de 152 kPa y el área transversal es de 8.00 cm^2. En el punto 1, ubicado 1.35 m arriba del punto 2, el área transversal es de 2.00 cm^2. Calcule *a*) la rapidez de flujo de masa; *b*) la rapidez de flujo de volumen; *c*) la rapidez de flujo en los puntos 1 y 2; *d*) la presión manométrica en el punto 1.

12.47 •• Un sistema de riego de un campo de golf descarga agua de un tubo horizontal a razón de 7200 cm^3/s. En un punto del tubo, donde el radio es de 4.00 cm, la presión absoluta del agua es de 2.40×10^5 Pa. En un segundo punto del tubo, el agua pasa por una constricción cuyo radio es de 2.00 cm. ¿Qué presión absoluta tiene el agua al fluir por esa constricción?

Sección 12.6 Viscosidad y turbulencia

12.48 • Se requiere una diferencia de presión de 6.00×10^4 Pa para mantener una velocidad de flujo de volumen de 0.800 m^3/s para un fluido viscoso que fluye a través de una sección de tubo cilíndrico que

tiene un radio de 0.210 m. ¿Qué diferencia de presión es necesaria para mantener la misma rapidez de volumen del flujo si el radio de la tubería se reduce a 0.0700 m?

12.49 •• BIO Arteria obstruida. Sangre viscosa fluye a través de una arteria parcialmente obstruida por el colesterol. Un cirujano quiere eliminar suficiente colesterol para duplicar la rapidez de flujo de sangre a través de esta arteria. Si el diámetro original de la arteria es D, ¿cuál debería ser el nuevo diámetro (en términos de D) para lograr esto para el mismo gradiente de presión?

PROBLEMAS

12.50 •• PA El punto más profundo conocido de los océanos es la Fosa de las Marianas, con una profundidad de 10.92 km. *a*) Suponiendo que el agua es incompresible, ¿qué presión hay a esa profundidad? Use la densidad del agua de mar. *b*) La presión real es de 1.16×10^8 Pa; su valor calculado será menor porque la densidad en realidad varía con la profundidad. Usando la compresibilidad del agua y la presión real, calcule la densidad del agua en el fondo de la fosa. ¿Cuál es el cambio porcentual que se registra en la densidad del agua?

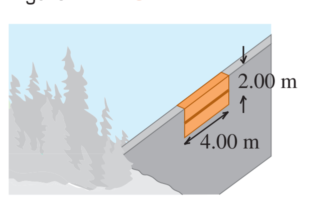
12.51 ••• En una demostración en clase, el profesor separa con facilidad dos cascos hemisféricos de acero (diámetro D) usando las asas con las que están provistos. Luego los une, extrae el aire hasta una presión absoluta p, y se los da a un fisicoculturista que está sentado en la última fila del salón para que los separe. *a*) Si la presión atmosférica es p_0, ¿qué fuerza deberá ejercer el fisicoculturista sobre cada casco? *b*) Evalúe su respuesta para el caso en que $p = 0.025$ atm y $D = 10.0$ cm.

12.52 •• BIO Navegación de peces. *a*) Como se puede observar en un acuario, los peces son capaces de permanecer a cualquier profundidad en el agua sin ningún esfuerzo. ¿Qué nos dice esta habilidad acerca de su densidad? *b*) Los peces son capaces de inflarse utilizando un saco (llamado *vejiga natatoria*) ubicada debajo de su columna vertebral. Estas bolsas se pueden llenar con una mezcla de oxígeno-nitrógeno que proviene de la sangre. Si un pez de 2.75 kg en agua dulce se infla y aumenta su volumen en un 10%, encuentre la fuerza *neta* que ejerce el *agua* sobre él. *c*) ¿Cuál es la fuerza neta *externa* sobre el pez? ¿El pez sube o baja cuando se infla?

12.53 ••• CALC Una piscina mide 5.0 m de longitud, 4.0 m de ancho y 3.0 m de profundidad. Calcule la fuerza que ejerce el agua contra *a*) el fondo y *b*) cualquiera de las paredes. (*Sugerencia:* Calcule la fuerza que actúa sobre una tira horizontal y delgada a una profundidad h, e integre a lo largo de la compuerta de la piscina). No incluya la fuerza debida a la presión del aire.

12.54 ••• PA CALC El borde superior de una compuerta en una presa está al nivel de la superficie del agua. La compuerta mide 2.00 m de altura y 4.00 m de ancho, y pivota sobre una línea horizontal que pasa por su centro (figura P12.54). Calcule la torca en torno al pivote causado por la fuerza que ejerce el agua. (*Sugerencia:* Use un procedimiento similar al del problema 12.53; calcule la torca de una tira horizontal delgada a una profundidad h e integre a lo alto de la compuerta).

Figura **P12.54**



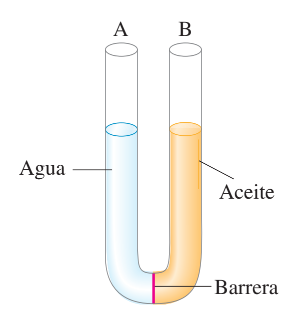
12.55 ••• PA CALC Fuerza y la torca sobre una presa. Una presa tiene forma de sólido rectangular. El lado que da al lago tiene área A y altura H. La superficie del lago de agua dulce detrás de la presa llega al borde superior de esta. *a*) Demuestre que la fuerza horizontal neta ejercida por el agua sobre la presa es $\frac{1}{2}\rho g H A$, es decir, la presión manométrica media sobre la cara de la presa multiplicada por el área (véase el proble-ma 12.53). *b*) Demuestre que la torca que ejerce el agua alrededor de un eje que corre a lo largo de la base de la presa es $\rho g H^2 A/6$. *c*) ¿Cómo dependen la fuerza y la torca del tamaño del lago?

12.56 •• Globos en Marte. Se ha propuesto que podría explorarse Marte utilizando globos inflados sostenidos justo arriba de la superficie. La flotación de la atmósfera mantendría los globos en el aire. La densidad de la atmósfera marciana es de 0.0154 kg/m^3 (aunque esto varía con la temperatura). Suponga que se fabrican estos globos de un plástico delgado, pero resistente, con una densidad tal que cada metro cuadrado tiene una masa de 5.00 g. Los inflamos con un gas muy ligero cuya masa puede despreciarse. *a*) ¿Cuáles deberían ser el radio y la masa de estos globos de manera que se sostengan en el aire justo arriba de la superficie de Marte? *b*) Si liberamos uno de esos globos del inciso *a*) en la Tierra, donde la densidad atmosférica es de 1.20 kg/m^3, ¿cuál sería su aceleración inicial suponiendo que el globo tiene el mismo tamaño que en Marte? ¿Ascendería o descendería? *c*) Si en Marte estos globos tienen cinco veces el radio determinado en el inciso *a*), ¿qué peso de un paquete de instrumentos podrían cargar?

12.57 •• Un cubo de 0.180 kg de hielo (agua congelada) está flotando en glicerina. La glicerina se encuentra en un cilindro alto que tiene un radio interno de 3.50 cm. El nivel de la glicerina está muy por debajo de la parte superior del cilindro. Si el hielo se derrite por completo, ¿en qué distancia cambia la altura del líquido en el cilindro? ¿El nivel de líquido aumenta o disminuye? Es decir, ¿la superficie del agua está arriba o debajo del nivel original de glicerina antes de que se derritiera el hielo?

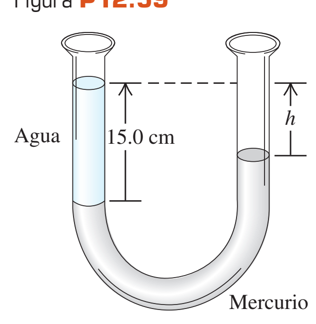
12.58 •• Un estrecho tubo de vidrio en forma de U, con extremos abiertos, se llena con 25.0 cm de aceite (de gravedad específica 0.80) y 25.0 cm de agua en los lados opuestos, con una barrera que separa los líquidos (figura P12.58). *a*) Suponga que los dos líquidos no se mezclan, y encuentre las alturas finales de las columnas de líquido en cada lado del tubo después de que se retira la barrera. *b*) En los casos siguientes, obtenga la respuesta por razonamiento físico simple y no por cálculos: **i.** ¿Cuál sería la altura en cada lado si el aceite y el agua tuvieran densidades iguales? **ii.** ¿Cuál sería la altura si la densidad del aceite fuera mucho menor que la del agua?

Figura **P12.58**



12.59 • Un tubo en forma de U abierto por ambos extremos contiene un poco de mercurio. Se vierte con cuidado un poco de agua en el brazo izquierdo del tubo hasta que la altura de la columna de agua es de 15.0 cm (figura P12.59). *a*) ¿Cuál es la presión manométrica en la interfase agua-mercurio? *b*) Calcule la distancia vertical h entre la superficie del mercurio en el brazo derecho del tubo y la superficie del agua en el brazo izquierdo.

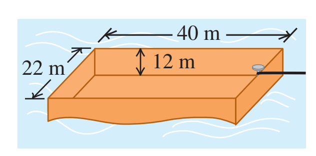
Figura **P12.59**



12.60 •• CALC La gran inundación de melaza. En la tarde del 15 de enero de 1919, un día inusitadamente cálido en Boston, se rompió un tanque metálico cilíndrico de 17.7 m de altura y 27.4 m de diámetro usado para almacenar melaza. El líquido fluyó por las calles en una corriente de 5 m de profundidad, matando peatones y caballos y tirando edificios. La melaza tenía una densidad de 1600 kg/m^3. Si el tanque estaba lleno antes del accidente, ¿qué fuerza total ejercía la melaza contra los costados? (*Sugerencia:* Considere la fuerza hacia afuera que actúa sobre un anillo de la pared del tanque de anchura dy y profundidad y bajo la superficie. Integre para calcular la fuerza total hacia afuera. Suponga que, antes de que el tanque se rompiera, la presión en la superficie de la melaza era igual a la presión del aire afuera del tanque).

12.61 • Un lanchón abierto tiene las dimensiones que se muestran en la figura P12.61. Si el lanchón está hecho con placa de acero de 4.0 cm de espesor en sus cuatro costados y el fondo, ¿qué masa de carbón puede transportar el lanchón en agua dulce sin hundirse? ¿Hay suficiente espacio en el lanchón para contener ese carbón? (La densidad aproximada del carbón es de 1500 kg/m^3).

Figura **P12.61**



12.62 ••• Un globo de aire caliente tiene un volumen de 2200 m^3. La tela del globo (la envoltura) pesa 900 N. La canasta con su equipo y tanques de propano llenos pesa 1700 N. Si el globo apenas puede levantar otros 3200 N de pasajeros, desayuno y champán cuando la densidad del aire exterior es de 1.23 kg/m^3, ¿qué densidad media tienen los gases calientes del interior?

12.63 •• Los anuncios de cierto auto aseguran que este flota en agua. *a*) Si la masa del auto es de 900 kg y su volumen interior es de 3.0 m^3, ¿qué fracción queda sumergida al flotar? Puede despreciarse el volumen del acero y demás materiales. *b*) Poco a poco se filtra agua y desplaza el aire en el auto. ¿Qué fracción del volumen interior está llena de agua cuando el auto se hunde?

12.64 • Un cubo de hielo de 9.70 g flota en un vaso totalmente lleno con 420 cm^3 de agua. Ignore la tensión superficial del agua y su variación de densidad con la temperatura (mientras siga líquida). *a*) ¿Qué volumen de agua desplaza el cubo de hielo? *b*) Una vez derretido el hielo, ¿se habrá desbordado algo de agua? Si así fue, ¿cuánta? Si no, explique por qué. *c*) Suponga que el agua del vaso era muy salada, con densidad de 1050 kg/m^3. ¿Qué volumen de agua salada desplazaría el cubo de hielo de 9.70 g? *d*) Repita el inciso *b*) para el cubo de agua dulce en agua salada.

12.65 ••• Un trozo de madera de 0.600 m de longitud, 0.250 m de ancho y 0.080 m de espesor tiene una densidad de 700 kg/m^3. ¿Qué volumen de plomo debe sujetarse a su base para hundir la madera en agua tranquila de manera que su cara superior quede al ras del agua? ¿Qué masa tiene ese volumen de plomo?

12.66 •• Un hidrómetro consiste en un bulbo esférico y un tallo cilíndrico con área transversal de 0.400 cm^2 (véase la figura 12.12*a*). El volumen total es de 13.2 cm^3. Sumergido en agua, el hidrómetro flota con 8.00 cm del tallo sobre la superficie. Sumergido en un líquido orgánico, 3.20 cm del tallo sobresale de la superficie. Calcule la densidad del líquido orgánico. (*Nota:* Esto ilustra la precisión del hidrómetro. Variaciones de densidad relativamente pequeñas producen variaciones relativamente grandes en la lectura).

12.67 •• Las densidades del aire, el helio y el hidrógeno (a $p = 1.0$ atm y $T = 20°C$) son 1.20 kg/m^3, 0.166 kg/m^3 y 0.0899 kg/m^3, respectivamente. *a*) ¿Qué volumen en metros cúbicos desplaza un dirigible lleno de hidrógeno que tiene una "sustentación" total de 90.0 kN? (La "sustentación" es la cantidad en que la fuerza de flotación excede el peso del gas que llena el dirigible). *b*) ¿Cuál sería la "sustentación" si se usara helio en vez de hidrógeno? A la luz de su respuesta, ¿por qué se usa helio en los modernos dirigibles publicitarios?

12.68 •• Si un barco tiene una masa de 5750 kg, incluyendo la carga y los pasajeros, flota en el agua justo hasta la parte superior de sus bordas (lados) en un lago de agua dulce. *a*) ¿Cuál es el volumen de este barco? *b*) El capitán determina que es demasiado peligroso flotar con su barco que está a punto de hundirse, por lo que decide arrojar algo de carga por la borda, de manera que 20% del volumen de la embarcación esté por encima del agua. ¿Cuánta masa debería tirar?

12.69 •• **PA** Un tanque abierto cilíndrico de ácido se encuentra en el borde de una mesa de 1.4 m de altura en el laboratorio de química. Si de este tanque brota ácido de un pequeño agujero en su base, ¿a qué distancia del extremo de la mesa caerá el ácido en el suelo, si el ácido en el tanque tiene 75 cm de profundidad?

12.70 •• **PA** Una manguera de bomberos debe ser capaz de lanzar agua hacia la parte superior de un edificio de 28.0 m de altura cuando se apunta recta hacia arriba. El agua entra a esta manguera con una rapidez constante de 0.500 m^3/s y sale por una boquilla redonda. *a*) ¿Cuál es el diámetro máximo que esta boquilla puede tener? *b*) Si la única boquilla disponible tiene un diámetro que es el doble de grande, ¿cuál es el punto más alto que puede alcanzar el agua?

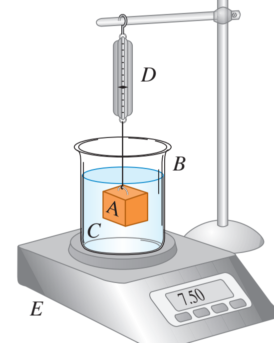
12.71 •• **PA** Se taladra un pequeño agujero en el lado de un tanque cilíndrico vertical de agua que está sobre el piso, con su extremo superior abierto al aire. *a*) Si el nivel del agua tiene una altura H, ¿a qué altura por encima de la base debe taladrarse el agujero para que el agua alcance su distancia máxima con respecto a la base del cilindro cuando toque el piso? *b*) ¿Cuál es la distancia máxima que el agua puede alcanzar?

12.72 ••• **CALC** Un tanque cilíndrico vertical cerrado y elevado con diámetro de 2.00 m contiene agua a una profundidad de 0.800 m. Un trabajador accidentalmente hace un orificio circular de diámetro 0.0200 m en la parte inferior del tanque. A medida que el agua sale del tanque, aire comprimido arriba del agua en el tanque mantiene una presión manométrica de 5.00×10^3 Pa en la superficie del agua. Ignore los efectos de la viscosidad. *a*) Inmediatamente después de que se hace el agujero, ¿cuál es la rapidez con que el agua sale del agujero? ¿Cuál es la razón entre esta rapidez y la rapidez de flujo de salida, si la parte superior del tanque está abierta al aire? *b*) ¿Cuánto tiempo se necesita para que salga toda el agua del tanque? ¿Cuál es la razón entre este tiempo y el tiempo que tarda el tanque en vaciarse, si la parte superior del tanque está abierta al aire?

12.73 •• Un bloque de madera balsa, colocado en una charola de una balanza de brazos iguales, se equilibra exactamente con una masa de latón de 0.115 kg en la otra charola. Calcule la masa verdadera de la madera si su densidad es de 150 kg/m^3. Explique por qué podemos despreciar la flotación en aire del latón, pero *no* de la madera balsa sin perder exactitud.

12.74 •• El bloque A de la figura P12.74 cuelga mediante una cuerda de la balanza de resorte D y se sumerge en el líquido C contenido en el vaso de precipitados B. La masa del vaso es 1.00 kg; la del líquido es 1.80 kg. La balanza D marca 3.50 kg, y la E, 7.50 kg. El volumen del bloque A es de 3.80×10^{-3} m^3. *a*) ¿Qué densidad tiene el líquido? *b*) ¿Qué marcará cada balanza si el bloque A se saca del líquido?

Figura **P12.74**



12.75 •• Un trozo de aluminio totalmente cubierto con una capa de oro forma un lingote que pesa 45.0 N. Si el lingote se suspende de una balanza de resorte y se sumerge en agua, la lectura es de 39.0 N. ¿Cuál es el peso del oro en el lingote?

12.76 •• Una pelota de plástico tiene 12.0 cm de radio y flota en agua con el 24.0% de su volumen sumergido. *a*) ¿Qué fuerza deberemos aplicar a la pelota para sostenerla en reposo totalmente bajo la superficie del agua? *b*) Si se suelta la pelota, ¿qué aceleración tendrá en el instante en que se libera?

12.77 •• El peso de la corona sólida de un rey es w. Si la corona se suspende de una cuerda ligera y se sumerge por completo en agua, la tensión en la cuerda (peso aparente de la corona) es fw. *a*) Demuestre que la densidad relativa (gravedad específica) de la corona es $1/(1 - f)$. Analice el significado de los límites al acercarse f a 0 y a 1. *b*) Si la corona es de oro sólido y pesa 12.9 N en el aire, ¿qué peso aparente

tiene cuando está completamente sumergida en agua? *c*) Repita el inciso *b*) considerando que la corona es de plomo chapada en oro, pero aún pesa 12.9 N en el aire.

12.78 •• Un trozo de acero pesa w, su peso aparente (véase el problema 12.77) sumergido por completo en agua es w_{agua}, y sumergido en un fluido desconocido, w_{fluido}. *a*) Demuestre que la densidad del fluido con respecto al agua (gravedad específica) es $(w - w_{fluido})/(w - w_{agua})$. *b*) ¿Es razonable este resultado para los tres casos de w_{fluido}, mayor, igual o menor que w_{agua}? *c*) El peso aparente de un trozo de acero en agua de densidad 1000 kg/m^3 equivale al 87.2% de su peso. ¿Qué porcentaje de su peso será su peso aparente en ácido fórmico (densidad 1220 kg/m^3)?

12.79 ••• Imagine que cuela un metal de densidad ρ_m en un molde, pero le preocupa que pueda haber cavidades en el colado. El peso del colado es w y la fuerza de flotación cuando está rodeado por completo de agua es B. *a*) Demuestre que el volumen total de las cavidades internas es $V_0 = B/(\rho_{agua}g) - w/(\rho_m g)$. *b*) Si el metal es cobre, el peso del colado es de 156 N y la fuerza de flotación es de 20 N, ¿qué volumen total de cavidades contiene el colado? ¿A qué fracción corresponde esto del volumen total del colado?

12.80 • Un bloque cúbico de madera de 0.100 m por lado y con densidad de 550 kg/m^3 flota en un frasco de agua. Aceite con densidad de 750 kg/m^3 se vierte sobre el agua hasta que la superficie del aceite está 0.035 m por debajo de la cara superior del bloque. *a*) ¿Qué espesor tiene la capa de aceite? *b*) ¿Qué presión manométrica hay en la cara inferior del bloque?

12.81 •• Bajen anclas. Una ancla de hierro de 35.0 kg y densidad de 7860 kg/m^3 está en la cubierta de una barcaza pequeña con lados verticales, que flota en un río de agua dulce. El área del fondo de la barcaza es de 8.00 m^2. El ancla se tira por la borda, pero queda suspendida arriba del fondo del río por una cuerda, cuya masa y volumen son tan pequeños que los podemos despreciar. Al tirarse el ancla y una vez que la barcaza ha dejado de oscilar, ¿la barcaza está más arriba o más abajo en el agua que antes? ¿Qué distancia vertical sube o baja?

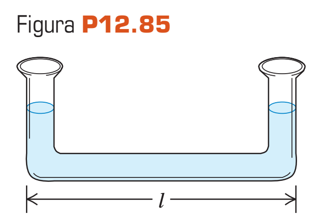
12.82 •• Suponga que el petróleo crudo de un buque-tanque tiene densidad de 750 kg/m^3. El buque encalla en una barra de arena. Para desencallarlo, el petróleo se bombea a barriles de acero que, cuando están vacíos, tienen una masa de 15.0 kg y capacidad para 0.120 m^3 de petróleo. Puede despreciarse el volumen ocupado por el acero del barril. *a*) Si un rescatista accidentalmente deja caer al mar un barril lleno y sellado, este ¿flotará o se hundirá? *b*) Si el barril flota, ¿qué fracción de su volumen estará por arriba de la superficie? Si se hunde, ¿qué tensión mínima habría que ejercer con una cuerda para subir el barril desde el fondo del océano? *c*) Repita los incisos *a*) y *b*) si la densidad del petróleo es de 910 kg/m^3 y los barriles vacíos tienen una masa de 32.0 kg.

12.83 ••• Un bloque cúbico con densidad ρ_B y lados de longitud L flota en un líquido con densidad mayor ρ_L. *a*) ¿Qué fracción del volumen del bloque está sobre la superficie del líquido? *b*) El líquido es más denso que el agua (densidad ρ_A) y no se mezcla con ella. Si se vierte agua en la superficie del líquido, ¿qué espesor (en términos de L, ρ_B, ρ_L y ρ_A) debe tener la capa de agua para que su superficie esté al ras de la cara superior del bloque? *c*) Calcule la profundidad de la capa de agua en el inciso *b*) si el líquido es mercurio, el bloque está hecho de hierro y la longitud de su lado es de 10.0 cm.

12.84 •• Una barcaza está en una esclusa rectangular en un río de agua dulce. La esclusa mide 60.0 m de longitud y 20.0 m de ancho, y las puertas de acero en sus extremos están cerradas. Con la barcaza flotando en la esclusa, una carga de 2.50×10^6 N de chatarra se coloca en la barcaza. El metal tiene una densidad de 9000 kg/m^3. *a*) Cuando la carga, que inicialmente estaba en tierra, se coloca en la barcaza, ¿qué distancia vertical sube el agua en la esclusa? *b*) Ahora la chatarra se tira de la barcaza al agua. ¿El nivel del agua en la esclusa sube, baja o permanece igual? Si sube o baja, ¿qué distancia vertical cambia?

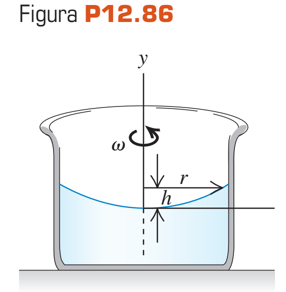
12.85 • PA CALC Un tubo en forma de U con una parte horizontal de longitud l (figura P12.85) contiene un líquido. ¿Qué diferencia de altura hay entre las columnas de líquido en los brazos verticales *a*) si el tubo tiene una aceleración a hacia la derecha? *b*) ¿Y si el tubo se monta en una tornamesa horizontal que gira con rapidez angular ω, con uno de sus brazos verticales en el eje de rotación? *c*) Explique por qué la diferencia de altura no depende de la densidad del líquido ni del área de sección transversal del tubo. ¿Sería igual si los brazos verticales no tuvieran la misma área de sección transversal? ¿Sería igual si la parte horizontal estuviera ahusada de un extremo al otro? Explique.

Figura **P12.85**



12.86 • PA CALC Un recipiente cilíndrico con un líquido incompresible con densidad ρ gira con rapidez angular constante ω alrededor de su eje de simetría, que tomamos como eje y (figura P12.86). *a*) Demuestre que la presión a una altura dada dentro del fluido aumenta en la dirección radial (hacia afuera desde el eje de rotación) de acuerdo con $\partial p/\partial r = \rho\omega^2 r$. *b*) Integre esta ecuación diferencial parcial para determinar la presión como función de la distancia del eje de rotación a lo largo de una línea horizontal en $y = 0$. *c*) Combine el resultado del inciso *b*) con la ecuación (12.5) para demostrar que la superficie del líquido en rotación tiene forma *parabólica*, es decir, la altura del líquido está dada por $h(r) = \omega^2 r^2/2g$. (Esta técnica se usa para hacer espejos de telescopio parabólicos; se hace girar vidrio líquido, dejando que se solidifique mientras gira).

Figura **P12.86**



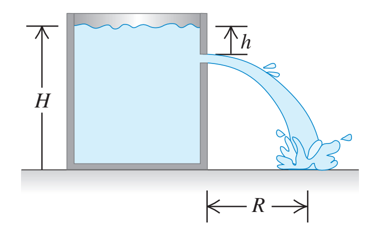
12.87 •• PA CALC Un fluido incompresible con densidad ρ está en un tubo de ensayo horizontal con área transversal interior A. El tubo gira en un círculo horizontal en una ultracentrífuga con rapidez angular ω. Las fuerzas gravitacionales son insignificantes. Considere un elemento de volumen del fluido con área A y espesor dr', a una distancia r' del eje de rotación. La presión en su superficie interior es p, y en la exterior, $p + dp$. *a*) Aplique la segunda ley de Newton al elemento de volumen para demostrar que $dp = \rho\omega^2 r' dr'$. *b*) Si la superficie del fluido está en un radio r_0 donde la presión es p_0, demuestre que la presión p a una distancia $r \geq r_0$ es $p = p_0 + \rho\omega^2(r^2 - r_0^2)/2$. *c*) Un objeto con volumen V y densidad ρ_{ob} tiene su centro de masa a una distancia R_{cmob} del eje. Demuestre que la fuerza horizontal neta que actúa sobre el objeto es $\rho V\omega^2 R_{cm}$, donde R_{cm} es la distancia del eje al centro de masa del fluido desplazado. *d*) Explique por qué el objeto se mueve hacia adentro si $\rho R_{cm} > \rho_{ob}R_{cmob}$ y hacia afuera si $\rho R_{cm} < \rho_{ob}R_{cmob}$. *e*) Para objetos pequeños con densidad uniforme, $R_{cm} = R_{cmob}$. ¿Qué sucede con una mezcla de objetos pequeños de este tipo con diferentes densidades en una ultracentrífuga?

12.88 ••• CALC Globos sueltos llenos de helio, flotando en un auto con las ventanas y las ventilas cerradas, se mueven en el sentido de la aceleración del auto, pero globos sueltos llenos de aire se mueven en el sentido opuesto. Para comprender por qué, considere solo las fuerzas horizontales que actúan sobre los globos. Sea a la magnitud de la aceleración hacia adelante del auto. Considere un tubo horizontal de aire

con área transversal A que se extiende del parabrisas, donde $x = 0$ y $p = p_0$, hacia atrás sobre el eje x. Ahora considere un elemento de volumen de espesor dx en este tubo. La presión en su superficie delantera es p, y en la trasera es $p + dp$. Suponga que el aire tiene una densidad constante ρ. *a*) Aplique la segunda ley de Newton a este elemento para demostrar que $dp = \rho a\, dx$. *b*) Integre el resultado del inciso *a*) para obtener la presión en la superficie delantera en términos de a y x. *c*) Para demostrar que es razonable considerar a ρ como constante, calcule la diferencia de presión en atmósferas para una distancia de hasta 2.5 m y una aceleración grande de 5.0 m/s^2. *d*) Demuestre que la fuerza horizontal neta que actúa sobre un globo de volumen V es ρVa. *e*) Si las fuerzas de fricción son insignificantes, demuestre que la aceleración del globo (densidad media ρ_{glo}) es $(\rho/\rho_{glo})a$ y que su aceleración con respecto al auto es $a_{rel} = [(\rho/\rho_{glo}) - 1]a$. *f*) Use la expresión para a_{rel} del inciso *e*) para explicar el movimiento de los globos.

12.89 • **PA** Hay agua hasta una altura H en un tanque abierto grande con paredes verticales (figura P12.89). Se perfora un agujero en una pared a una profundidad h bajo la superficie del agua. *a*) ¿A qué distancia R del pie de la pared tocará el piso el chorro que sale? *b*) ¿A qué distancia sobre la base del tanque debería hacerse un segundo agujero de manera que el chorro que salga por él tenga el mismo alcance que el que sale por el primero?

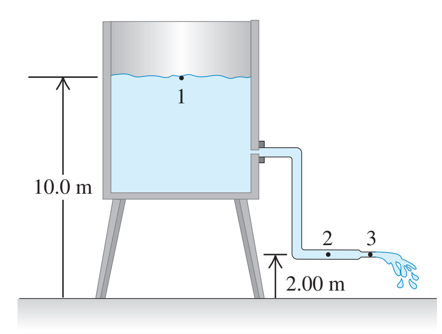
Figura **P12.89**



12.90 ••• Una cubeta cilíndrica, abierta por la parte superior, tiene 25.0 cm de altura y 10.0 cm de diámetro. Se perfora un agujero circular con área de 1.50 cm^2 en el centro del fondo de la cubeta. Se vierte agua en la cubeta mediante un tubo situado arriba, a razón de 2.40×10^{-4} m^3/s. ¿A qué altura subirá el agua en la cubeta?

12.91 • Fluye agua continuamente de un tanque abierto como en la figura P12.91. La altura del punto 1 es de 10.0 m, y la de los puntos 2 y 3 es de 2.00 m. El área transversal en el punto 2 es de 0.0480 m^2; en el punto 3 es de 0.0160 m^2. El área del tanque es muy grande en comparación con el área transversal del tubo. Suponiendo que puede aplicarse la ecuación de Bernoulli, calcule *a*) la rapidez de descarga en metros cúbicos por segundo; *b*) la presión manométrica en el punto 2.

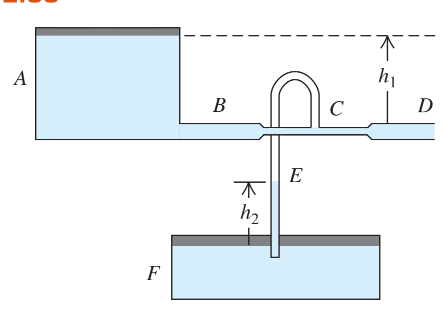
Figura **P12.91**



12.92 •• **PA** El radio del huracán Emily de 1993 fue de unos 350 km. La rapidez del viento cerca del centro (el "ojo") del huracán, cuyo radio fue de unos 30 km, alcanzó cerca de 200 km/h. Al entrar aire del borde del huracán hacia el ojo, su momento angular se mantuvo casi constante. *a*) Estime la rapidez del viento en el borde del huracán. *b*) Estime la diferencia de presión en la superficie terrestre entre el ojo y el borde del huracán. (*Sugerencia:* Véase la tabla 12.1). ¿Dónde es mayor la presión? *c*) Si la energía cinética del aire arremolinado en el ojo pudiera convertirse totalmente en energía potencial gravitacional, ¿cuánto subiría el aire? *d*) De hecho, el aire en el ojo sube a alturas de varios kilómetros. ¿Cómo puede conciliar esto con su respuesta del inciso *c*)?

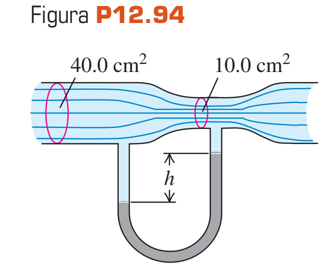
12.93 •• Dos tanques abiertos muy grandes A y F (figura P12.93) contienen el mismo líquido. Un tubo horizontal BCD, con una constricción en C y abierto al aire en D, sale del fondo del tanque A. Un tubo vertical E emboca en la constricción en C y baja al líquido del tanque F. Suponga flujo de línea de corriente y cero viscosidad. Si el área transversal en C es la mitad del área en D, y si D está a una distancia h_1 bajo el nivel del líquido en A, ¿a qué altura h_2 subirá el líquido en el tubo E? Exprese su respuesta en términos de h_1.

Figura **P12.93**



12.94 •• El tubo horizontal de la figura P12.94 tiene área transversal de 40.0 cm^2 en la parte más ancha y de 10.0 cm^2 en la constricción. Fluye agua en el tubo, cuya descarga es de 6.00×10^{-3} m^3/s (6.00 L/s). Calcule *a*) la rapidez de flujo en las partes ancha y angosta; *b*) la diferencia de presión entre estas partes; *c*) la diferencia de altura entre las columnas de mercurio en el tubo con forma de U.

Figura **P12.94**



12.95 • Un líquido que fluye de un tubo vertical produce un chorro con una forma bien definida. Para obtener la ecuación de esta forma, suponga que el líquido está en caída libre una vez que sale del tubo. Al salir, el líquido tiene rapidez v_0, y el radio del chorro es r_0. *a*) Obtenga una ecuación para la rapidez del líquido en función de la distancia y que ha caído. Combinando esto con la ecuación de continuidad, obtenga una expresión para el radio del chorro en función de y. *b*) Si fluye agua de un tubo vertical con rapidez de salida de 1.20 m/s, ¿a qué distancia bajo la salida se habrá reducido a la mitad el radio original del chorro?

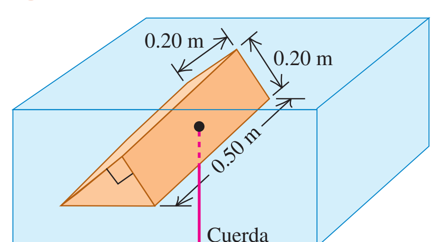
Problemas de desafío

12.96 ••• Una roca con masa $m = 3.00$ kg cuelga del techo de un elevador con una cuerda ligera. La roca está totalmente sumergida en una cubeta con agua que se encuentra en el piso del elevador, pero no toca el fondo ni los lados de la cubeta. *a*) Cuando el elevador está en reposo, la tensión en la cuerda es de 21.0 N. Calcule el volumen de la piedra. *b*) Deduzca una expresión para la tensión en la cuerda cuando el elevador tiene una aceleración de magnitud *a hacia arriba*. Calcule la tensión cuando $a = 2.50$ m/s^2 hacia arriba. *c*) Deduzca una expre-

sión para la tensión en la cuerda cuando el elevador tiene una aceleración de magnitud *a hacia abajo*. Calcule la tensión cuando $a = 2.50 \text{ m/s}^2$ hacia abajo. *d*) ¿Cuál es la tensión cuando el elevador está en caída libre con aceleración hacia abajo igual a g?

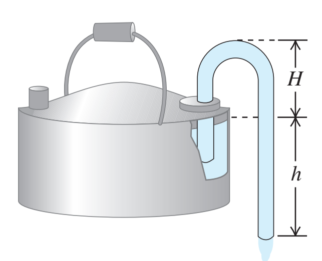
12.97 ••• **CALC** Suponga que un trozo de espuma de poliestireno, $\rho = 180 \text{ kg/m}^3$, se mantiene totalmente sumergido en agua (figura P12.97). *a*) Calcule la tensión en la cuerda usando el principio de Arquímedes. *b*) Use $p = p_0 + \rho g h$ para calcular directamente la fuerza que ejerce el agua sobre los dos lados inclinados y la base del trozo de poliestireno; luego demuestre que la suma vectorial de estas fuerzas es la fuerza de flotación.

Figura **P12.97**



12.98 ••• Un *sifón*, como se muestra en la figura P12.98, es un dispositivo útil para extraer líquidos de recipientes. Con la finalidad de establecer el flujo, el tubo debe llenarse inicialmente con fluido. Sea ρ la densidad del fluido y p_{atm} la presión atmosférica. Suponga que el área transversal del tubo es la misma en toda su longitud. *a*) Si el extremo inferior del sifón está a una distancia h bajo el nivel del líquido en el recipiente, ¿con qué rapidez fluye el líquido por ese extremo? (Suponga que el recipiente tiene un diámetro muy grande e ignore los efectos de viscosidad). *b*) Una característica curiosa del sifón es que el fluido inicialmente fluye hacia arriba. ¿Qué altura máxima H puede tener el punto alto del tubo sin que deje de haber flujo?

Figura **P12.98**



Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

La carne tanto del tiburón como del pez tropical es más densa que el agua de mar, así que, por sí solos, se hundirían. Sin embargo, un pez tropical tiene una cavidad llena de gas en su cuerpo llamada vejiga natatoria, de manera que la densidad *media* del cuerpo del pez es igual a la del agua de mar y el pez ni se hunde ni se eleva. Los tiburones no cuentan con esa cavidad. Por consiguiente, deben nadar constantemente para evitar hundirse usando sus aletas pectorales para dar sustentación, de forma muy similar a las alas de un avión (véase la sección 12.5).

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

12.1 Respuesta: ii, iv, i y iii (empatados), v. En cada caso, la densidad media es igual a la masa dividida entre el volumen. Por lo tanto, tenemos
i. $\rho = (4.00 \text{ kg})/(1.60 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = 2.50 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$;
ii. $\rho = (8.00 \text{ kg})/(1.60 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = 5.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$;
iii. $\rho = (8.00 \text{ kg})/(3.20 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = 2.50 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$;
iv. $\rho = (2560 \text{ kg})/(0.640 \text{ m}^3) = 4.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$;
v. $\rho = (2560 \text{ kg})/(1.28 \text{ m}^3) = 2.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. Observe que en comparación con el objeto **i**, el objeto **ii** tiene el doble de masa, pero el mismo volumen y, por lo tanto, tiene el doble de densidad media. El objeto **iii** tiene el doble de masa y el doble de volumen que el objeto **i**, de manera que **i** y **iii** tienen la misma densidad media. Por último, el objeto **v** tiene igual masa que el objeto **iv**, pero el doble de volumen, de manera que **v** tiene la mitad de la densidad media de **iv**.

12.2 Respuesta: ii. De acuerdo con la ecuación (12.9), la presión afuera del barómetro es igual al producto $\rho g h$. Cuando se saca el barómetro del refrigerador, la densidad ρ decrece, mientras que la altura h de la columna de mercurio no cambia; por lo tanto, la presión debe ser menor afuera que dentro del refrigerador.

12.3 Respuesta: i. Considere el agua, la estatua y el recipiente juntos como un sistema; el peso total del sistema no depende de si la estatua se encuentra sumergida. La fuerza total de soporte, incluyendo la tensión T y la fuerza ascendente F de la báscula sobre el recipiente (igual a la lectura de la báscula), es la misma en ambos casos. Pero en el ejemplo 12.5 vimos que T disminuye en 7.84 N cuando la estatua se encuentra sumergida, por lo que la lectura de la báscula debe *aumentar* en 7.84 N. Un punto de vista alternativo indica que el agua ejerce una fuerza de flotación hacia arriba de 7.84 N sobre la estatua, de manera que esta ejerce una fuerza igual, solo que hacia abajo, sobre el agua, haciendo que la lectura de la báscula sea 7.84 N mayor que el peso del agua y el recipiente.

12.4 Respuesta: ii. Una carretera cuyo ancho se reduce de tres carriles a uno es como un tubo cuya área transversal se estrecha a un tercio de su valor. Si los vehículos se comportaran como las moléculas de un fluido incompresible, entonces conforme los autos llegaran a la sección de un solo carril, el espaciamiento entre ellos (la "densidad") permanecería igual, pero triplicarían su rapidez. Esto mantendría constante la "rapidez de flujo de volumen" (el número de autos por segundo que pasan por un punto de la carretera). En la vida real, los autos se comportan como las moléculas de un fluido *compresible*: quedan más juntos unos de otros (la "densidad" aumenta) y menos autos por segundo pasan por un punto de la carretera (la "rapidez de flujo de volumen" disminuye).

12.5 Respuesta: ii. La segunda ley de Newton nos dice que un cuerpo acelera (su velocidad cambia) en respuesta a la fuerza neta. En un flujo de fluido, una diferencia de presión entre dos puntos significa que las partículas del fluido que se mueven entre esos dos puntos experimentan una fuerza, y esta fuerza hace que las partículas del fluido aceleren, es decir, que cambien su rapidez.

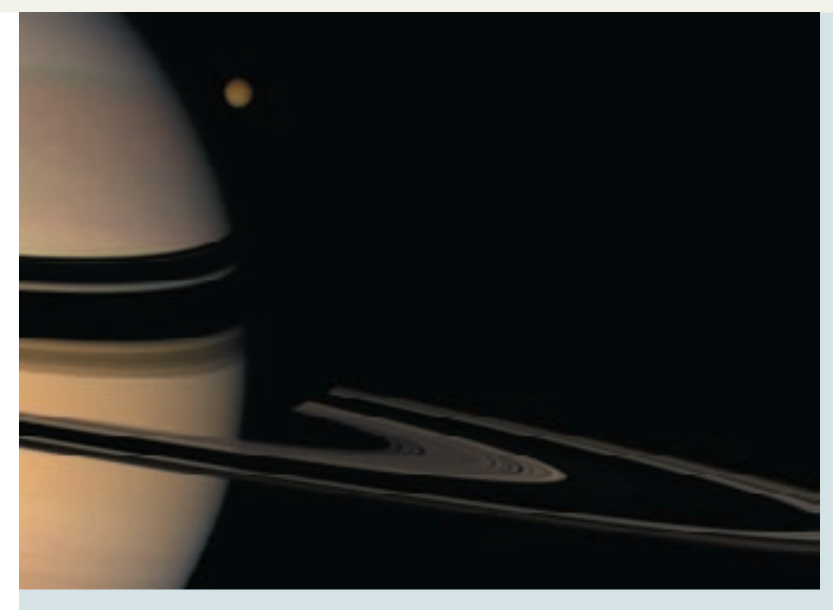
12.6 Respuesta: iv. La presión requerida es proporcional a $1/R^4$, donde R es el radio interior de la aguja (la mitad del diámetro interior). Con la aguja de menor diámetro, la presión es mayor en un factor de $[(0.60 \text{ mm})/(0.30 \text{ mm})]^4 = 2^4 = 16$.

Problema práctico

Respuestas: ***a***) $y = H - \left(\dfrac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gH}\, t + \left(\dfrac{d}{D}\right)^4 \dfrac{gt^2}{2}$

b) $T = \sqrt{\dfrac{2H}{g}} \left(\dfrac{D}{d}\right)^2$ ***c***) $\sqrt{2}$

13 GRAVITACIÓN



? Los anillos de Saturno están compuestos de incontables partículas en órbita. ¿Todas las partículas orbitan con la misma rapidez, o las partículas interiores orbitan con mayor rapidez, o mayor lentitud, que las exteriores?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo calcular las fuerzas gravitacionales que dos cuerpos cualesquiera ejercen uno sobre el otro.
- Cómo se relaciona el peso de un objeto con la expresión general de la fuerza gravitacional.
- Cómo utilizar e interpretar la expresión general de la energía potencial gravitacional.
- Cómo se relacionan la rapidez, el periodo orbital y la energía mecánica de un satélite en una órbita circular.
- Las leyes que describen los movimientos de los planetas y cómo trabajar con ellas.
- Qué son los agujeros negros, cómo calcular sus propiedades y cómo se descubren.

Algunas de las primeras investigaciones en el campo de la física nacieron de preguntas que la gente se hacía acerca del firmamento. ¿Por qué la Luna no se cae hacia la Tierra? ¿Por qué los planetas se mueven en el cielo? ¿Y por qué la Tierra no sale despedida hacia el espacio exterior, en lugar de permanecer en órbita alrededor del Sol? El estudio de la gravitación responde a estas y muchas otras preguntas relacionadas.

Como enfatizamos en el capítulo 5, la gravitación es una de las cuatro clases de interacciones que observamos en la naturaleza, y fue la primera que se estudió ampliamente. En el siglo XVII, Newton descubrió que la misma interacción que hace que una manzana caiga de un árbol mantiene a los planetas en órbita alrededor del Sol. Ese fue el nacimiento de la *mecánica celeste*, es decir, el estudio de la dinámica de los objetos en el espacio. En la actualidad, nuestro conocimiento de la mecánica celeste nos permite determinar cómo poner un satélite en una órbita deseada alrededor de la Tierra, o cómo elegir la trayectoria correcta para enviar una nave a otro planeta.

En este capítulo estudiaremos la ley básica que rige las interacciones gravitacionales. Se trata de una ley *universal*: la fuerza de gravedad actúa fundamentalmente de la misma manera entre la Tierra y nuestro cuerpo, entre el Sol y un planeta, y entre un planeta y sus lunas. Aplicaremos la ley de la gravitación a fenómenos como la variación del peso con la altitud, las órbitas de los satélites terrestres y las de los planetas alrededor del Sol.

13.1 Ley de Newton de la gravitación

El ejemplo de atracción gravitacional que probablemente resulta más conocido para el lector es su *peso*, la fuerza que lo atrae hacia la Tierra. Al estudiar el movimiento de los planetas y la Luna, Newton descubrió la característica fundamental de la atracción

gravitacional entre dos cuerpos *cualesquiera.* Junto con sus tres leyes del movimiento, en 1687 Newton dio a conocer la **ley de la gravitación**, que puede enunciarse así:

Toda partícula de materia en el Universo atrae a todas las demás partículas con una fuerza directamente proporcional al producto de las masas de las partículas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

Traduciendo esto a una ecuación, tenemos

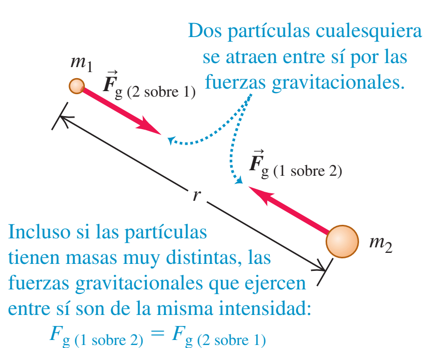
$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad \text{(ley de la gravitación)} \tag{13.1}$$

donde F_g es la magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre cualquiera de las partículas, m_1 y m_2 son sus masas, r es la distancia entre ellas (figura 13.1), y G es una constante física fundamental llamada **constante gravitacional**. El valor numérico de G depende del sistema de unidades empleado.

La ecuación (13.1) nos indica que la fuerza gravitacional entre dos partículas disminuye al aumentar la distancia r; por ejemplo, si se duplica la distancia, la fuerza se reducirá a la cuarta parte, y así sucesivamente. Aunque muchas estrellas del firmamento tienen una masa mucho mayor que la del Sol, están tan lejos que la fuerza gravitacional que ejercen sobre la Tierra es insignificante.

CUIDADO **No confunda g con G** Como los símbolos g y G son muy parecidos, es común confundir las dos cantidades gravitacionales tan diferentes que representan. Por un lado, g minúscula es la aceleración debida a la gravedad, que relaciona el peso w de un cuerpo con su masa m: $w = mg$. El valor de g varía en diferentes puntos de la superficie terrestre y en la superficie de otros planetas. En cambio, G mayúscula relaciona la fuerza gravitacional entre dos cuerpos con sus masas y la distancia entre ellos. Decimos que G es una constante *universal* porque tiene el mismo valor para dos cuerpos cualesquiera, sin importar dónde se encuentren. En la siguiente sección veremos la relación entre los valores de g y G.

13.1 Fuerzas gravitacionales entre dos partículas de masas m_1 y m_2.



Las fuerzas gravitacionales siempre actúan a lo largo de la línea que une las dos partículas, y forman un par acción-reacción. Aun si las masas de las partículas difieren, las dos fuerzas de interacción tienen la misma magnitud (figura 13.1). La fuerza de atracción que el cuerpo del lector ejerce sobre la Tierra tiene la misma magnitud de la fuerza que la Tierra ejerce sobre el lector. Si caemos de un trampolín a una alberca, ¡toda la Tierra sube hacia nosotros! (No lo notamos porque la masa de la Tierra es unas 10^{23} veces mayor que la de una persona, así que la aceleración de la Tierra es solo 10^{-23} veces la de la persona).

Gravitación y cuerpos esféricamente simétricos

Hemos planteado la ley de la gravitación en términos de la interacción entre dos *partículas*. Resulta que la interacción gravitacional entre dos cuerpos con distribuciones de masa *esféricamente simétricas* (ya sean sólidas o huecas) es la misma que si toda la masa estuviera concentrada en el centro, como se muestra en la figura 13.2. Así, si modelamos la Tierra como un cuerpo esféricamente simétrico de masa m_E, la fuerza que ejerce sobre una partícula o un cuerpo esféricamente simétrico con masa m, a una distancia r entre los centros, es

$$F_g = \frac{Gm_Em}{r^2} \tag{13.2}$$

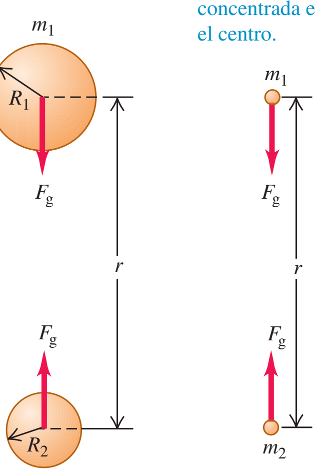
siempre y cuando el cuerpo se encuentre en el exterior de la Tierra. El cuerpo ejerce una fuerza de la misma magnitud *sobre* la Tierra. (Demostraremos esto en la sección 13.6).

En puntos *dentro* de la Tierra, la situación es diferente. Si pudiéramos taladrar un agujero hasta el centro de la Tierra y medir la fuerza gravitacional sobre un cuerpo a diferentes profundidades, veríamos que *disminuye* hacia el centro, en lugar de aumentar

13.2 El efecto gravitacional *afuera* de cualquier distribución de masa esféricamente simétrica es el mismo que si toda la masa estuviera concentrada en su centro.

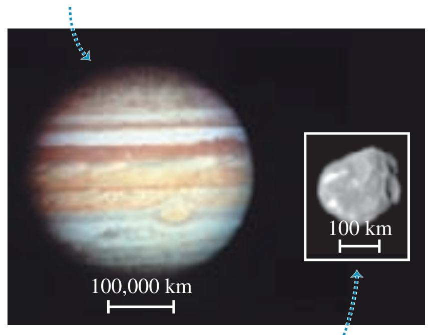
a) La fuerza gravitacional entre dos masas esféricamente simétricas m_1 y m_2 ...

b) ... es la misma que si se considera que toda la masa de cada esfera estuviera concentrada en el centro.



13.3 Cuerpos esféricos y no esféricos: Júpiter y una de sus lunas pequeñas, Amaltea.

La masa de Júpiter es muy grande (1.90×10^{27} kg), así que la atracción gravitacional mutua de sus partes ha hecho que el planeta adquiera una forma casi esférica.



Amaltea, una de las lunas de Júpiter, tiene una masa relativamente insignificante (7.17×10^{18} kg, alrededor de 3.8×10^{-9} la masa de Júpiter) y su atracción gravitacional mutua es débil, por lo que tiene una forma irregular.

según $1/r^2$. Conforme el cuerpo entra a la Tierra (o de otro cuerpo esférico), parte de la masa de la Tierra queda del lado del cuerpo opuesto al centro y tira en la dirección contraria. En el centro exacto de la Tierra, la fuerza gravitacional sobre el cuerpo es cero.

Los cuerpos esféricamente simétricos son casos importantes porque las lunas, los planetas y las estrellas tienden a ser esféricos. Puesto que todas las partículas de un cuerpo se atraen gravitacionalmente entre sí, tienden a moverse para reducir al mínimo la distancia que las separa. El resultado es que el cuerpo tiende naturalmente a adoptar una forma esférica, como sucede cuando un trozo de arcilla forma una esfera si lo apretamos con fuerzas iguales por todos lados. Este efecto se reduce mucho en los cuerpos celestes de masa pequeña porque la atracción gravitacional es menor, y estos cuerpos tienden a *no* ser esféricos (figura 13.3).

Determinación del valor de G

Para determinar el valor de la constante de gravitación G, debemos *medir* la fuerza gravitacional entre dos cuerpos de masas conocidas m_1 y m_2 separados por una distancia conocida r. La fuerza es muy pequeña para cuerpos que caben en un laboratorio, aunque puede medirse con un instrumento llamado *balanza de torsión*, que Sir Henry Cavendish usó en 1798 para determinar G.

En la figura 13.4 se muestra una versión moderna de la balanza de torsión de Cavendish. Una varilla ligera y rígida en forma de T invertida es sostenida por una fibra vertical de cuarzo muy delgada. Dos esferas pequeñas de masa m_1 se montan en los extremos de los brazos horizontales de la T. Si colocamos dos esferas grandes de masa m_2 en las posiciones indicadas, las fuerzas de atracción gravitacionales hacen girar la T un ángulo pequeño. Para medir el ángulo, hacemos incidir un rayo de luz en un espejo sujeto a la T. El haz reflejado incide en una escala, y al girar la T, la luz reflejada se mueve en la escala.

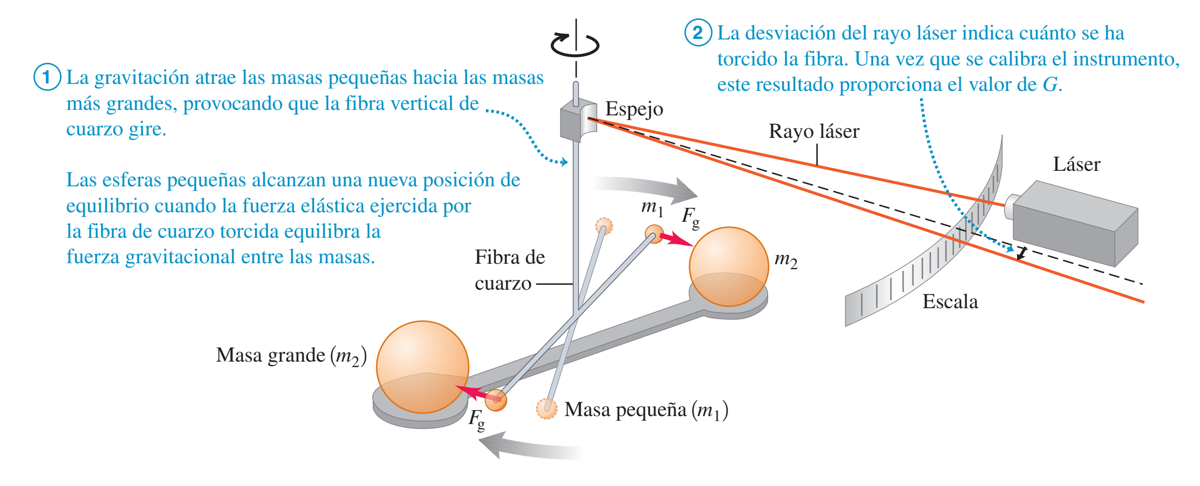
Después de calibrar la balanza de Cavendish, podemos medir las fuerzas gravitacionales y así determinar G. El valor aceptado actualmente es

$$G = 6.67428(67) \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$$

Con tres cifras significativas, $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$. Como $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg \cdot m/s^2}$, las unidades de G también pueden expresarse como $\mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}$.

Las fuerzas gravitacionales se combinan vectorialmente. Si cada una de dos masas ejerce una fuerza sobre una tercera, la fuerza *total* que actúa sobre esta es la suma vectorial de las fuerzas individuales de las dos primeras. El ejemplo 13.3 aprovecha esta propiedad, la cual se conoce como *superposición de fuerzas*.

13.4 Principio de la balanza de Cavendish, empleada para determinar el valor de G. El ángulo de desviación se exageró para efectos de claridad.





Ejemplo 13.1 Cálculo de la fuerza gravitacional

La masa m_1 de una de las esferas pequeñas de una balanza de Cavendish es de 0.0100 kg, la masa m_2 de la esfera grande es de 0.500 kg y la distancia entre centros es de 0.0500 m. Calcule la fuerza gravitacional F_g que actúa sobre cada esfera debida a la otra.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: Como los objetos son esféricamente simétricos, podemos calcular F_g suponiendo que son *partículas* que están separadas 0.0500 m, como en la figura 13.2. Cada esfera experimenta una fuerza de la misma magnitud proveniente de la otra esfera. Usamos la ley de la gravitación de Newton, ecuación (13.1), para determinar F_g:

$$F_g = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(0.0100\ \text{kg})(0.500\ \text{kg})}{(0.0500\ \text{m})^2}$$

$$= 1.33 \times 10^{-10}\ \text{N}$$

EVALUAR: Es notable que una fuerza tan pequeña pudiera medirse, o inclusive detectarse, hace más de 200 años. Solo un objeto en verdad masivo, como la Tierra, ejerce una fuerza gravitacional que podemos percibir.



Ejemplo 13.2 Aceleración debida a la atracción gravitacional

Suponga que las dos esferas del ejemplo 13.1 se colocan con sus centros separados 0.0500 m en un punto del espacio lejos de otros cuerpos. ¿Qué magnitud tiene la aceleración de cada una, relativa a un sistema inercial?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: Cada esfera ejerce sobre la otra una fuerza gravitacional de la misma magnitud F_g, la cual se calculó en el ejemplo 13.1. Se desprecia cualquier otra fuerza. Las magnitudes de las *aceleraciones* a_1 y a_2 de las dos esferas son diferentes porque sus masas son distintas. Para determinarlas usaremos la segunda ley de Newton:

$$a_1 = \frac{F_g}{m_1} = \frac{1.33 \times 10^{-10}\ \text{N}}{0.0100\ \text{kg}} = 1.33 \times 10^{-8}\ \text{m/s}^2$$

$$a_2 = \frac{F_g}{m_2} = \frac{1.33 \times 10^{-10}\ \text{N}}{0.500\ \text{kg}} = 2.66 \times 10^{-10}\ \text{m/s}^2$$

EVALUAR: La esfera más grande tiene 50 veces la masa de la esfera más pequeña y, por lo tanto, tiene $\frac{1}{50}$ de su aceleración. Estas aceleraciones *no* son constantes; las fuerzas gravitacionales aumentan cuando las esferas comienzan a moverse una hacia la otra.



Ejemplo 13.3 Superposición de fuerzas gravitacionales

Muchas estrellas pertenecen a *sistemas* de dos o más estrellas que se mantienen juntas gracias a su atracción gravitacional mutua. La figura 13.5 muestra un sistema de tres estrellas en un instante en que están en los vértices de un triángulo rectángulo de 45°. Calcule la fuerza gravitacional total ejercida sobre la estrella pequeña por las dos grandes.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: Usaremos el principio de superposición: la fuerza total $\vec{F}$ que actúa sobre la estrella pequeña es la suma vectorial de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ debidas a cada estrella grande, como se muestra en la figura 13.5. Suponemos que las estrellas son esferas como en la figura 13.2. Primero calculamos las magnitudes F_1 y F_2 usando la ecuación (13.1); luego, calculamos la suma vectorial empleando componentes:

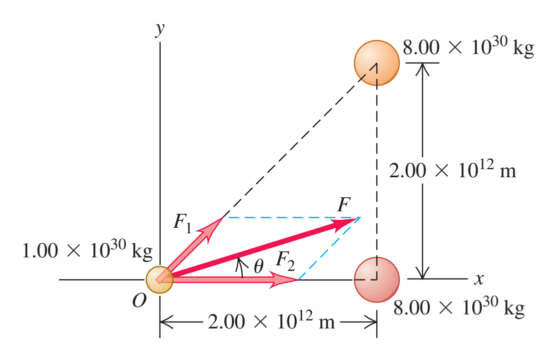
$$F_1 = \frac{\left[\begin{array}{c}(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) \\ \times (8.00 \times 10^{30}\ \text{kg})(1.00 \times 10^{30}\ \text{kg})\end{array}\right]}{(2.00 \times 10^{12}\ \text{m})^2 + (2.00 \times 10^{12}\ \text{m})^2}$$

$$= 6.67 \times 10^{25}\ \text{N}$$

$$F_2 = \frac{\left[\begin{array}{c}(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) \\ \times (8.00 \times 10^{30}\ \text{kg})(1.00 \times 10^{30}\ \text{kg})\end{array}\right]}{(2.00 \times 10^{12}\ \text{m})^2}$$

$$= 1.33 \times 10^{26}\ \text{N}$$

13.5 La fuerza gravitacional total que actúa sobre la estrella pequeña (en O) es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas sobre ella por las dos estrellas más grandes. (Como comparación, la masa del Sol, una estrella típica, es de 1.99×10^{30} kg, y la distancia entre la Tierra y el Sol es de 1.50×10^{11} m).



Las componentes x y y de estas fuerzas son

$$F_{1x} = (6.67 \times 10^{25}\ \text{N})(\cos 45°) = 4.72 \times 10^{25}\ \text{N}$$
$$F_{1y} = (6.67 \times 10^{25}\ \text{N})(\text{sen } 45°) = 4.72 \times 10^{25}\ \text{N}$$
$$F_{2x} = 1.33 \times 10^{26}\ \text{N}$$
$$F_{2y} = 0$$

Continúa

Las componentes de la fuerza total $\vec{F}$ que actúa sobre la estrella pequeña son

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = 1.81 \times 10^{26}\ \text{N}$$
$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = 4.72 \times 10^{25}\ \text{N}$$

La magnitud de $\vec{F}$ y su ángulo θ (véase la figura 13.5) son

$$F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2} = \sqrt{(1.81 \times 10^{26}\ \text{N})^2 + (4.72 \times 10^{25}\ \text{N})^2}$$
$$= 1.87 \times 10^{26}\ \text{N}$$
$$\theta = \arctan\frac{F_y}{F_x} = \arctan\frac{4.72 \times 10^{25}\ \text{N}}{1.81 \times 10^{26}\ \text{N}} = 14.6°$$

EVALUAR: Si bien la magnitud F de la fuerza es enorme, la magnitud de la aceleración resultante no lo es: $a = F/m = (1.87 \times 10^{26}\ \text{N})/(1.00 \times 10^{30}\ \text{kg}) = 1.87 \times 10^{-4}\ \text{m/s}^2$. Además, la fuerza $\vec{F}$ *no* está dirigida hacia el centro de masa de las dos estrellas grandes.

¿Por qué son importantes las fuerzas gravitacionales?

Una comparación de los ejemplos 13.1 y 13.3 revela que las fuerzas gravitacionales son insignificantes entre objetos como los que tenemos en nuestras casas; pero son considerables entre objetos del tamaño de las estrellas. De hecho, la gravitación es *la* fuerza más importante a la escala de planetas, estrellas y galaxias (figura 13.6). La gravitación mantiene la integridad de la Tierra y los planetas en órbitas alrededor del Sol. La atracción gravitacional mutua de diferentes partes del Sol comprime los materiales en su centro, hasta alcanzar densidades y temperaturas muy elevadas que hacen posible las reacciones nucleares que ocurren ahí. Tales reacciones generan las emisiones de energía solar, sin las cuales la vida no existiría en la Tierra.

13.6 Nuestro Sistema Solar forma parte de una galaxia espiral como esta, que contiene aproximadamente 10^{11} estrellas, junto con gas, polvo y otros materiales. El conjunto total se mantiene unido gracias a la atracción gravitacional mutua de toda la materia en la galaxia.



La fuerza gravitacional es tan importante a escala cósmica porque actúa *a distancia*, sin contacto directo entre los cuerpos. Las fuerzas eléctricas y magnéticas tienen esta misma propiedad notable, aunque son menos importantes en la escala astronómica porque las acumulaciones grandes de materia son eléctricamente neutras; es decir, contienen cantidades iguales de cargas negativas y positivas. Por ello, las fuerzas eléctricas y magnéticas entre estrellas o planetas son muy pequeñas o valen cero. Las interacciones fuerte y débil que vimos en la sección 5.5 también actúan a distancia; no obstante, su influencia es insignificante a distancias mayores que el diámetro de un núcleo atómico (cerca de 10^{-14} m).

Una forma útil de describir las fuerzas que actúan a distancia es en términos de un *campo*. Un cuerpo produce una perturbación o campo en todos los puntos del espacio, y la fuerza que actúa sobre otro cuerpo en un punto determinado es la acción del campo del primer cuerpo en ese punto. Hay un campo asociado a cada fuerza que actúa a distancia y, por ello, nos referimos a campos gravitacionales, eléctricos, magnéticos, etcétera. En este capítulo, no necesitaremos el concepto de campo para estudiar la gravitación, así que no hablaremos más de él. Sin embargo, en capítulos posteriores, veremos que el concepto de campo es una herramienta extremadamente útil para describir las interacciones eléctricas y magnéticas.

Evalúe su comprensión de la sección 13.1 Saturno tiene aproximadamente 100 veces la masa de la Tierra y está alejado del Sol casi 10 veces más que nuestro planeta. En comparación con la aceleración de la Tierra causada por la atracción gravitacional solar, ¿qué tan grande es la aceleración de Saturno debida a la gravitación solar? **i.** 100 veces mayor; **ii.** 10 veces mayor; **iii.** es igual; **iv.** $\frac{1}{10}$; **v.** $\frac{1}{100}$.



13.2 Peso

MasteringPHYSICS®
PhET: Lunar Lander

En la sección 4.4 definimos el *peso* de un cuerpo como la fuerza de atracción gravitacional que la Tierra ejerce sobre él. Ahora vamos a ampliar nuestra definición:

El peso de un cuerpo es la fuerza gravitacional total ejercida sobre este por todos los demás cuerpos del Universo.

Si un cuerpo está cerca de la superficie terrestre, se pueden despreciar las demás fuerzas gravitacionales y considerar el peso tan solo como la atracción de la Tierra. En la superficie de la *Luna*, tomaremos el peso de un cuerpo como la atracción gravitacional de la Luna, y así sucesivamente.

Si de nuevo modelamos la Tierra como un cuerpo esféricamente simétrico con radio R_E y masa m_E, el peso w de un cuerpo pequeño de masa m en la superficie terrestre (a una distancia R_E del centro) es

$$w = F_g = \frac{Gm_E m}{R_E^2} \quad \text{(peso de un cuerpo de masa } m \text{ en la superficie terrestre)} \tag{13.3}$$

Sin embargo, en la sección 4.4 también vimos que el peso w de un cuerpo es la fuerza que provoca la aceleración g en caída libre, de modo que por la segunda ley de Newton, $w = mg$. Si igualamos esto con la ecuación (13.3) y dividimos entre m, obtenemos

$$g = \frac{Gm_E}{R_E^2} \quad \text{(aceleración debida a la gravedad en la superficie terrestre)} \tag{13.4}$$

La aceleración debida a la gravedad g es independiente de la masa m del cuerpo porque m no aparece en esta ecuación. Ya lo sabíamos, pero ahora vemos cómo se deduce a partir de la ley de la gravitación.

Podemos *medir* todas las cantidades de la ecuación (13.4) excepto m_E, así que esta relación nos permite calcular la masa de la Tierra. Despejando m_E de la ecuación (13.4) y usando $R_E = 6380 \text{ km} = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$ y $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, se obtiene

$$m_E = \frac{gR_E^2}{G} = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

que está muy cerca del valor actualmente aceptado de 5.974×10^{24} kg. Una vez que Cavendish midió G, calculó la masa terrestre precisamente así.

En un punto arriba de la superficie terrestre a una distancia r del centro de la Tierra (una distancia $r - R_E$ sobre la superficie), el peso de un cuerpo está dado por la ecuación (13.3) sustituyendo R_E por r:

$$w = F_g = \frac{Gm_E m}{r^2} \tag{13.5}$$

El peso de un cuerpo disminuye inversamente con el cuadrado de su distancia al centro de la Tierra (figura 13.7). La figura 13.8 muestra cómo varía el peso de un astronauta en función de su altura sobre la Tierra, si su peso es de 700 N en la superficie.

El peso *aparente* de un cuerpo en la Tierra difiere un poco de la fuerza gravitacional terrestre porque la Tierra gira y, por lo tanto, no es precisamente un marco inercial de referencia. Hasta ahora hemos ignorado este efecto, suponiendo que la Tierra *es* un sistema inercial. En la sección 13.7 nos ocuparemos del efecto de la rotación terrestre.

Aun cuando la Tierra es una distribución de masa con simetría esférica aproximada, *no* es uniforme volumétricamente. Para demostrar esto, calculemos primero su *densidad* media, o masa por unidad de volumen. Si suponemos una Tierra esférica, el volumen es

$$V_E = \tfrac{4}{3}\pi R_E^3 = \tfrac{4}{3}\pi(6.38 \times 10^6 \text{ m})^3 = 1.09 \times 10^{21} \text{ m}^3$$

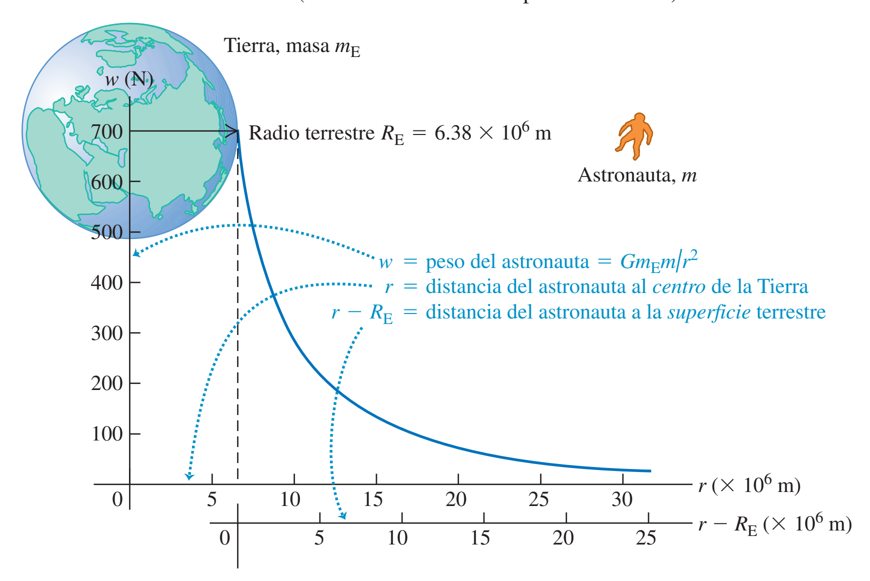
Aplicación Caminata y carrera en la Luna
Usted convierte automáticamente su caminata en carrera cuando la fuerza vertical que ejerce sobre el suelo, que por la tercera ley de Newton es igual a la fuerza vertical que el suelo ejerce sobre usted, rebasa su peso. Esta transición, de caminata a carrera, sucede a rapideces mucho menores en la Luna, donde los objetos solo pesan el 17% de lo que pesan en la Tierra. De ahí que los astronautas del Apolo corrían inclusive cuando se movían con relativa lentitud durante sus "caminatas" en la Luna.



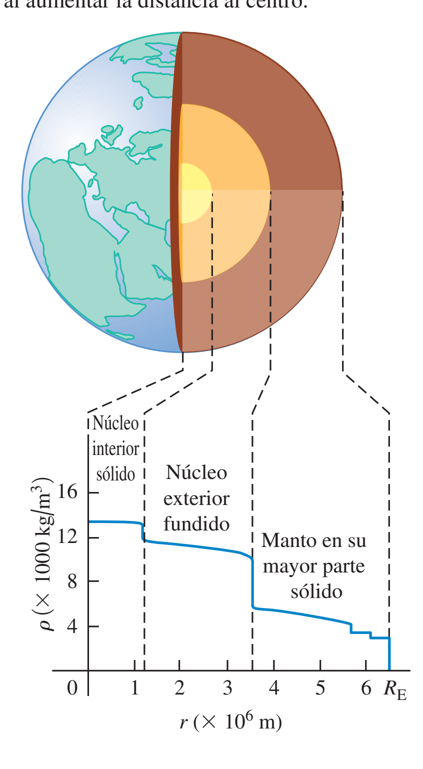
13.7 En un avión comercial a gran altitud, estamos más lejos del centro de la Tierra que cuando estamos en el suelo, por lo que pesamos ligeramente menos. ¿Puede usted demostrar que a una altitud de 10 km pesaría 0.3% menos que en el suelo?



13.8 Un astronauta que pesa 700 N en la superficie terrestre experimenta menos atracción gravitacional cuando está por arriba de dicha superficie. La distancia r que importa es la del astronauta al *centro* de la Tierra (*no* del astronauta a la superficie terrestre).



13.9 La densidad de la Tierra disminuye al aumentar la distancia al centro.



La densidad media ρ (la letra griega rho) de la Tierra es la masa total dividida entre el volumen total:

$$\rho = \frac{m_E}{V_E} = \frac{5.97 \times 10^{24}\ \text{kg}}{1.09 \times 10^{21}\ \text{m}^3}$$
$$= 5500\ \text{kg/m}^3 = 5.5\ \text{g/cm}^3$$

(Como referencia, la densidad del agua es de 1000 kg/m^3 = 1.00 g/cm^3). Si la Tierra fuera uniforme, cabría esperar que la densidad de las rocas individuales cerca de la superficie tuviera ese mismo valor. De hecho, la densidad de las rocas superficiales es significativamente menor: de 2000 kg/m^3 para rocas sedimentarias, a cerca de 3300 kg/m^3 para el basalto (un tipo de roca volcánica). Por lo tanto, la Tierra *no puede* ser uniforme, y el interior debe ser mucho más denso que la superficie para que la densidad *media* sea de 5500 kg/m^3. Según modelos geofísicos del interior de la Tierra, la densidad máxima en el centro es de aproximadamente 13,000 kg/m^3. La figura 13.9 es una gráfica de la densidad en función de la distancia al centro.

Ejemplo 13.4 Gravedad en Marte



Un vehículo de descenso, que pesa en la Tierra 3430 N, es enviado a Marte, cuyo radio es $R_M = 3.40 \times 10^6$ m y cuya masa es $m_M = 6.42 \times 10^{23}$ kg (véase el apéndice F). Calcule su peso F_g en la superficie marciana y la aceleración g_M debida a la gravedad de Marte.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Para calcular F_g usamos la ecuación (13.3), después de sustituir m_E y R_E por m_M y R_M. Determinamos la masa m del vehículo de descenso a partir del peso w en la Tierra y luego calculamos g_M a partir de $F_g = mg_M$.

EJECUTAR: El peso del vehículo en la Tierra es $w = mg$, de modo que

$$m = \frac{w}{g} = \frac{3430\ \text{N}}{9.80\ \text{m/s}^2} = 350\ \text{kg}$$

La masa es la misma sin que importe dónde se encuentra el vehículo. De acuerdo con la ecuación (13.3), el peso del vehículo en Marte es

$$F_g = \frac{Gm_Mm}{R_M^2}$$
$$= \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(6.42 \times 10^{23}\ \text{kg})(350\ \text{kg})}{(3.40 \times 10^6\ \text{m})^2}$$
$$= 1.30 \times 10^3\ \text{N}$$

La aceleración debida a la gravedad de Marte es

$$g_M = \frac{F_g}{m} = \frac{1.30 \times 10^3 \text{ N}}{350 \text{ kg}} = 3.7 \text{ m/s}^2$$

EVALUAR: Aun cuando Marte tiene el 11% de la masa de la Tierra (6.42×10^{23} kg contra 5.98×10^{24} kg), la aceleración g_M debida a la gravedad (y por lo tanto el peso F_g del objeto) es de aproximadamente el 40% del valor en la superficie terrestre. Esto se debe a que g_M es inversamente proporcional al cuadrado del radio del planeta, y Marte solo tiene el 53% del radio de la Tierra (3.40×10^6 m contra 6.38×10^6 m).

Se puede comprobar el resultado de g_M usando la ecuación (13.4), con las sustituciones adecuadas. ¿Obtuvo la misma respuesta?

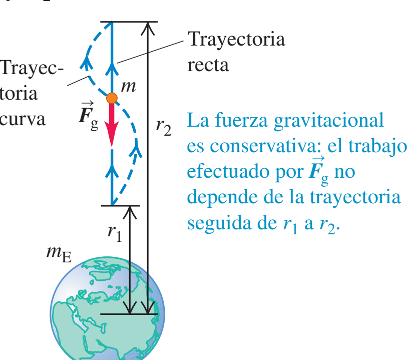
Evalúe su comprensión de la sección 13.2 Ordene de mayor a menor la gravedad superficial de los siguientes planetas ficticios: **i.** masa = 2 veces la masa de la Tierra, radio = 2 veces el radio de la Tierra; **ii.** masa = 4 veces la masa de laTierra, radio = 4 veces el radio de la Tierra; **iii.** masa = 4 veces la masa de la Tierra, radio = 2 veces el radio de la Tierra; **iv.** masa = 2 veces la masa de la Tierra, radio = 4 veces el radio de la Tierra.

13.3 Energía potencial gravitacional

Cuando presentamos el concepto de energía potencial gravitacional en la sección 7.1, supusimos que la fuerza gravitacional que actúa sobre un cuerpo es constante en magnitud y dirección. Esto llevó a la expresión $U = mgy$. Pero la fuerza gravitacional de la Tierra sobre un cuerpo de masa m afuera de la Tierra está dada en forma más general por la ecuación (13.2), $F_g = Gm_E m/r^2$, donde m_E es la masa de la Tierra y r es la distancia del cuerpo al centro de la Tierra. En problemas donde r cambia lo suficiente para que la fuerza gravitacional no se considere constante, necesitamos una expresión más general para la energía potencial gravitacional.

Para obtener esta expresión, usamos los mismos pasos que en la sección 7.1. Consideramos un cuerpo de masa m fuera de la Tierra, y calculamos primero el trabajo W_{grav} efectuado por la fuerza gravitacional cuando el cuerpo se aleja o se acerca al centro de la Tierra, desde $r = r_1$ hasta $r = r_2$ como en la figura 13.10. Este trabajo está dado por

$$W_{grav} = \int_{r_1}^{r_2} F_r \, dr \tag{13.6}$$



13.10 Cálculo del trabajo efectuado sobre un cuerpo por la fuerza gravitacional, cuando el cuerpo se mueve de la coordenada radial r_1 a r_2.

donde F_r es la componente radial de la fuerza gravitacional $\vec{F}$; es decir, la componente dirigida *hacia afuera* desde el centro de la Tierra. Dado que $\vec{F}$ apunta *hacia el centro* de la Tierra, F_r es negativa y difiere de la ecuación (13.2), la magnitud de la fuerza gravitacional, por un signo menos:

$$F_r = -\frac{Gm_E m}{r^2} \tag{13.7}$$

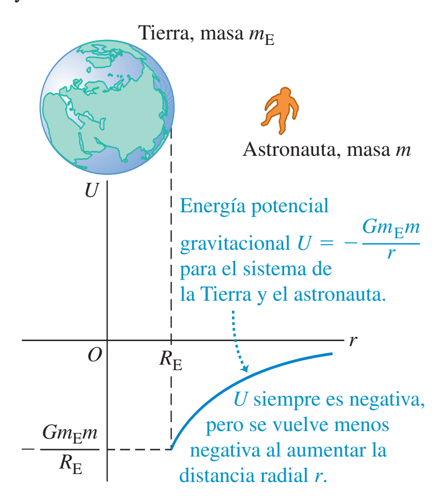
Sustituyendo la ecuación (13.7) en la (13.6), vemos que W_{grav} está dado por

$$W_{grav} = -Gm_E m \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Gm_E m}{r_2} - \frac{Gm_E m}{r_1} \tag{13.8}$$

La trayectoria no tiene que ser recta; puede ser una curva como la de la figura 13.10. Por un argumento similar al de la sección 7.1, este trabajo solo depende de los valores inicial y final de r, no del camino seguido. Esto también demuestra que la fuerza gravitacional siempre es *conservativa*.

Ahora definimos la energía potencial correspondiente U de modo que $W_{grav} = U_1 - U_2$ como en la ecuación (7.3). Comparando esto con la ecuación (13.8), vemos que la definición apropiada de **energía potencial gravitacional** es

$$U = -\frac{Gm_E m}{r} \quad \text{(energía potencial gravitacional)} \tag{13.9}$$



13.11 Gráfica de energía potencial gravitacional U para el sistema de la Tierra (masa m_E) y un astronauta (masa m) contra la distancia r entre el astronauta y el centro de la Tierra.

La figura 13.11 muestra cómo la energía potencial gravitacional depende de la distancia r entre el cuerpo de masa m y el centro de la Tierra. Si el cuerpo se aleja de la Tierra, r aumenta, la fuerza gravitacional efectúa trabajo negativo y U aumenta (se vuelve menos negativa). Si el cuerpo "cae" hacia la Tierra, r disminuye, el trabajo gravitacional es positivo y la energía potencial disminuye (se hace más negativa).

La ecuación (13.9) quizá parezca extraña porque indica que la energía potencial gravitacional siempre es negativa; pero ya hemos visto valores negativos de U. Al usar la fórmula $U = mgy$ en la sección 7.1, vimos que U era negativa, siempre que el cuerpo de masa m estuviera en un valor de y menor que la altura arbitraria que elegimos como $y = 0$; es decir, si el cuerpo y la Tierra estaban más cerca que cierta distancia arbitraria. (Véase el ejemplo 7.2 de la sección 7.1). Al definir U con la ecuación (13.9), elegimos que U es cero cuando el cuerpo de masa m está infinitamente lejos de la Tierra ($r = \infty$). Al acercarse el cuerpo a la Tierra, la energía potencial gravitacional disminuye y se hace negativa.

Si quisiéramos, podríamos tomar $U = 0$ en la superficie terrestre, donde $r = R_E$, solo con sumar la cantidad $Gm_E m/R_E$ a la ecuación (13.9). Esto haría a U positiva cuando $r > R_E$. No lo haremos por dos razones: una, se complicaría la expresión para U; y dos, el término sumado no afectaría la *diferencia* en energía potencial entre dos puntos, que es la única cantidad físicamente significativa.

CUIDADO **Fuerza gravitacional contra energía potencial gravitacional** Asegúrese de no confundir las expresiones de fuerza gravitacional, ecuación (13.7), y de energía potencial gravitacional, ecuación 13.9. La fuerza F_r es proporcional a $1/r^2$, y la energía potencial U es proporcional a $1/r$.

Con la ecuación (13.9), ya podemos usar relaciones generales de energía para problemas donde debe incluirse el comportamiento según $1/r^2$ de la fuerza gravitacional de la Tierra. Si esta fuerza gravitacional es la única que efectúa trabajo sobre el cuerpo, la energía mecánica total del sistema es constante, es decir, *se conserva*. En el ejemplo que sigue usaremos este principio para calcular la **rapidez de escape**, es decir, la rapidez que debe tener un cuerpo para escapar por completo de un planeta.

Ejemplo 13.5 "De la Tierra a la Luna"



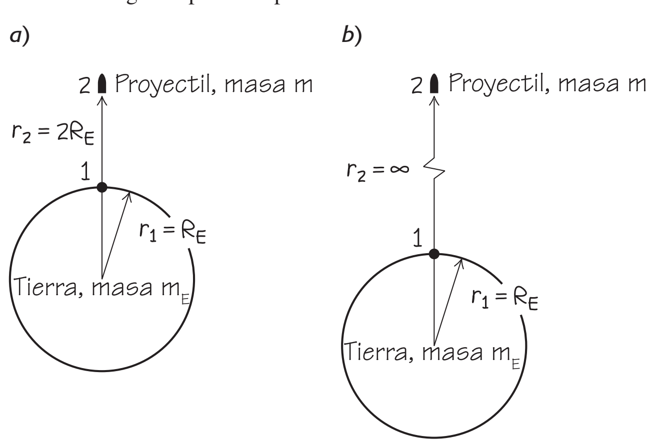
En la novela de Julio Verne de 1865 con ese título, tres hombres viajaron a la Luna en un proyectil disparado desde un cañón gigante hundido en el suelo de Florida. *a*) Calcule la rapidez inicial mínima necesaria para disparar el proyectil verticalmente hasta una altura sobre la Tierra igual al radio R_E de esta. *b*) Calcule la rapidez inicial mínima que permitiría al proyectil escapar de la Tierra (la *rapidez de escape*). Desprecie la resistencia del aire, la rotación de la Tierra y la atracción gravitacional de la Luna. El radio de la Tierra es $R_E = 6.38 \times 10^6$ m y su masa es $m_E = 5.97 \times 10^{24}$ kg.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Una vez que el proyectil sale del cañón, solo la fuerza gravitacional (que es conservativa) efectúa trabajo, por lo que podemos usar la conservación de energía mecánica para calcular la rapidez del proyectil a la que debe salir del cañón hasta que se detenga *a*) a dos radios terrestres con respecto al centro del planeta, y *b*) a una distancia infinita de la Tierra. La ecuación de conservación de la energía es $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$, donde la energía potencial U está dada por la ecuación (13.9).

La figura 13.12 muestra los diagramas. El punto 1 está en $r_1 = R_E$, donde el proyectil sale del cañón con rapidez v_1 (la incógnita). El punto 2 está donde el proyectil alcanza su altura máxima; en el inciso *a*) $r_2 = 2R_E$ (figura 13.12*a*); y en el inciso *b*) $r_2 = \infty$ (figura 13.12*b*). En ambos casos $v_2 = 0$ y $K_2 = 0$. Sea m la masa del proyectil (con pasajeros).

13.12 Diagrama para este problema.



EJECUTAR: *a*) Obtenemos v_1 con la ecuación de conservación de la energía

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + \left(-\frac{Gm_Em}{R_E}\right) = 0 + \left(-\frac{Gm_Em}{2R_E}\right)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{Gm_E}{R_E}} = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24}\ \text{kg})}{6.38 \times 10^6\ \text{m}}}$$

$$= 7900\ \text{m/s}\ (= 28{,}400\ \text{km/h} = 17{,}700\ \text{mi/h})$$

b) Ahora $r_2 = \infty$, así que $U_2 = 0$ (véase la figura 13.11). Como $K_2 = 0$, la energía mecánica total $K_2 + U_2$ es entonces cero. Nuevamente, obtenemos v_1 de la ecuación de conservación de la energía:

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + \left(-\frac{Gm_Em}{R_E}\right) = 0 + 0$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24}\ \text{kg})}{6.38 \times 10^6\ \text{m}}}$$

$$= 1.12 \times 10^4\ \text{m/s}\ (= 40{,}200\ \text{km/h} = 25{,}000\ \text{mi/h})$$

EVALUAR: El resultado del inciso *b*) no depende de la masa del proyectil ni de la dirección en que se lanza. Las naves modernas lanzadas desde Florida deben alcanzar prácticamente la misma rapidez que en el inciso *b*) para escapar de la Tierra; sin embargo, antes del lanzamiento ya se están moviendo a 410 m/s hacia el este por la rotación terrestre; si el lanzamiento es hacia el este, la nave aprovecha esta contribución "gratuita" a la rapidez de escape.

Generalizando nuestro resultado, la rapidez inicial v_1 que un cuerpo necesita para escapar de la superficie de un cuerpo esférico de masa M con radio R (despreciando la resistencia del aire) es $v_1 = \sqrt{2GM/R}$ (rapidez de escape). Esta ecuación produce rapideces de escape de 5.02×10^3 m/s para Marte, 5.95×10^4 m/s para Júpiter y 6.18×10^5 m/s para el Sol.

Más sobre la energía potencial gravitacional

Como nota final, demostremos que si estamos cerca de la superficie terrestre, la ecuación (13.9) se reduce a $U = mgy$ que ya conocemos del capítulo 7. Primero rescribimos la ecuación (13.8) como:

$$W_{grav} = Gm_Em\frac{r_1 - r_2}{r_1r_2}$$

Si el cuerpo se mantiene cerca de la Tierra, en el denominador podemos sustituir r_1 y r_2 por R_E, el radio de la Tierra, así que

$$W_{grav} = Gm_Em\frac{r_1 - r_2}{R_E^2}$$

Según la ecuación (13.4), $g = Gm_E/R_E^2$, por lo cual

$$W_{grav} = mg(r_1 - r_2)$$

Si sustituimos las r por y, esta es la ecuación (7.1) para el trabajo efectuado por una fuerza gravitacional constante. En la sección 7.1 usamos esta ecuación para deducir la ecuación (7.2), $U = mgy$, así que podemos considerar la ecuación (7.2) de la energía potencial gravitacional como un caso especial de la ecuación (13.9) que es más general.

Evalúe su comprensión de la sección 13.3 ¿Un planeta puede tener la misma gravedad superficial que la Tierra (es decir, el mismo valor de g en la superficie) y tener una rapidez de escape mayor? ❙

13.4 Movimiento de satélites

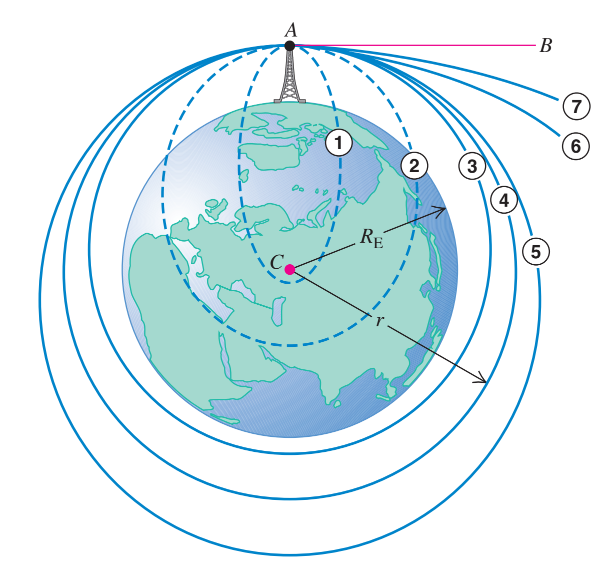
Los satélites artificiales que orbitan la Tierra son parte cotidiana de la tecnología moderna (figura 13.13). Pero, ¿cómo se mantienen en órbita y qué determina las propiedades de sus órbitas? Podemos usar las leyes del movimiento y la ley de la gravitación de Newton para obtener las respuestas. En la siguiente sección veremos cómo el movimiento de los planetas se puede analizar del mismo modo.

Para comenzar, recordemos lo dicho sobre el movimiento de proyectiles en la sección 3.3. En el ejemplo 3.6, un motociclista se lanza horizontalmente del borde de un acantilado en una trayectoria parabólica que termina en terreno plano en la base del acantilado. Si sobrevive y repite el experimento aumentando su rapidez de lanzamiento, caerá más lejos del punto de partida. Podemos imaginarlo lanzándose con tal rapidez que la curvatura de la Tierra se hace significativa. Conforme cae, la curvatura de la Tierra se aleja más de él. Si la rapidez del motociclista es suficiente, y si su punto de lanzamiento es tan alto que pueda evitar las montañas, podría seguir dando vueltas a la Tierra, sin tocar jamás el suelo.

13.13 Con una longitud de 13.2 m y una masa de 11,000 kg, el telescopio espacial Hubble se cuenta entre los satélites más grandes que se han puesto en órbita.



13.14 Trayectorias de un proyectil lanzado desde una gran altura (ignorando la resistencia del aire). Las órbitas 1 y 2 se completarían como se muestra, si la Tierra fuera una masa puntual en C. (Esta ilustración se basa en una de los *Principia* de Isaac Newton).



Un proyectil se lanza de A a B. Trayectorias 1 a 7 muestran el efecto de la rapidez inicial creciente.

La figura 13.14 muestra una variación de este tema. Lanzamos un proyectil del punto A en la dirección AB, tangente a la superficie terrestre. Las trayectorias 1 a 7 muestran el efecto de aumentar la rapidez inicial. En las trayectorias 3 a 5, el proyectil no choca contra la Tierra y se convierte en su satélite. Si no hay una fuerza que frene al proyectil, su rapidez al volver al punto A es la que tenía inicialmente, y el movimiento se repite indefinidamente.

Las trayectorias 1 a 5 terminan donde comenzaron y se denominan **órbitas cerradas**. Todas las órbitas cerradas son elipses o segmentos de elipses; la trayectoria 4 es un círculo, un caso especial de la elipse. (Analizaremos las propiedades de una elipse en la sección 13.5). Las trayectorias 6 y 7 son **órbitas abiertas**; el proyectil nunca vuelve a su punto de partida y se aleja cada vez más de la Tierra.

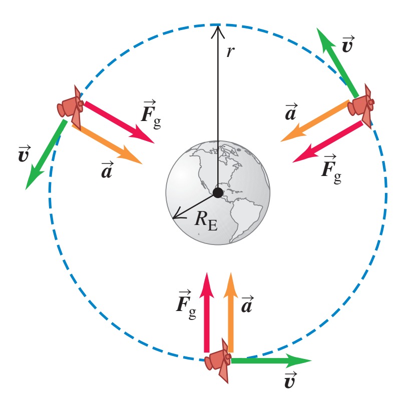


PhET: My Solar System
ActivPhysics 4.6: Satellites Orbit

Satélites: Órbitas circulares

Una órbita *circular*, como la trayectoria 4 de la figura 13.14, es el caso más sencillo. También es un caso importante, pues muchos satélites artificiales tienen órbitas casi circulares, y las órbitas de los planetas alrededor del Sol también son aproximadamente circulares. La única fuerza que actúa sobre un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra es la atracción gravitacional terrestre, dirigida hacia el centro de la Tierra y, por lo tanto, hacia el centro de la órbita (figura 13.15). Como vimos en la sección 5.4, esto implica que el satélite está en movimiento circular *uniforme* y su rapidez es constante. El satélite no cae *hacia* la Tierra; más bien, cae constantemente *alrededor* de la Tierra. En una órbita circular, la rapidez es exactamente la necesaria para mantener constante la distancia entre el satélite y el centro de la Tierra.

13.15 La fuerza $\vec{F}_g$ debida a la atracción gravitacional de la Tierra proporciona la aceleración centrípeta que mantiene a un satélite en órbita. Compare esta figura con la 5.28.



El satélite está en órbita circular: su aceleración $\vec{a}$ es siempre perpendicular a su velocidad $\vec{v}$, por ello, la rapidez v es constante.

Veamos cómo calcular la rapidez constante v de un satélite en órbita circular. El radio de la órbita es r, medido desde el *centro* de la Tierra; la aceleración del satélite tiene magnitud $a_{rad} = v^2/r$ y siempre está dirigida hacia el centro del círculo. Por la ley de la gravitación, la fuerza neta (la gravitacional) que actúa sobre el satélite de masa m tiene magnitud $F_g = Gm_Em/r^2$ y tiene la misma dirección de la aceleración. La segunda ley de Newton $\left(\sum \vec{F} = m\vec{a}\right)$ nos dice entonces que

$$\frac{Gm_Em}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Despejando v, tenemos que

$$v = \sqrt{\frac{Gm_E}{r}} \quad \text{(órbita circular)} \qquad (13.10)$$

Esta relación señala que no podemos elegir el radio r de la órbita y la rapidez v independientemente; para un radio r dado, la rapidez v de la órbita circular ya está predeterminada.

La masa m del satélite no aparece en la ecuación (13.10), lo cual demuestra que el movimiento del satélite no depende de su masa. Si pudiéramos partir un satélite a la mitad sin alterar su rapidez, cada mitad seguiría con el movimiento original. Un astronauta a bordo de un transbordador espacial también es como un satélite de la Tierra, retenido por la atracción gravitacional en la misma órbita que la nave. El astronauta tiene la misma velocidad y aceleración que la nave, así que nada lo empuja contra el piso o las paredes de la nave. Se encuentra en un estado de *ingravidez aparente*, como en un elevador en caída libre; véase la explicación que sigue al ejemplo 5.9 en la sección 5.2. (La ingravidez *verdadera* solo se lograría si el astronauta estuviera infinitamente lejos de cualquier otra masa, de modo que la fuerza gravitacional sobre él fuera cero). De hecho, cada parte de su cuerpo está aparentemente ingrávida; él no siente que algo empuje su estómago contra los intestinos ni la cabeza contra los hombros (figura 13.16).



13.16 Estos astronautas del transbordador espacial se encuentran en un estado de ingravidez aparente. ¿Quiénes están de pie y quiénes de cabeza?

La ingravidez aparente no se da solo en órbitas circulares; existe siempre que la gravedad es la única fuerza que actúa sobre una nave espacial; por lo tanto, se experimenta en órbitas de cualquier forma, incluidas las abiertas como las 6 y 7 de la figura 13.14.

Podemos deducir una relación entre el radio r de una órbita circular y el periodo T, la duración de una revolución. La rapidez v es la distancia $2\pi r$ recorrida en una revolución, dividida entre el periodo:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad (13.11)$$

Obtenemos una expresión para T si despejamos T de la ecuación (13.11) y sustituimos v de la ecuación (13.10):

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{Gm_E}} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{Gm_E}} \quad \text{(órbita circular)} \qquad (13.12)$$

Las ecuaciones (13.10) y (13.12) indican que las órbitas más grandes corresponden a rapideces más bajas y a periodos más largos. Como un ejemplo, la Estación Espacial Internacional orbita la Tierra a 6800 km del centro de nuestro planeta (400 km arriba de la superficie de la Tierra) con una rapidez orbital de 7.7 km/s y un periodo orbital de 93 minutos. La Luna gira alrededor de la Tierra en una órbita mucho más grande de radio igual a 384,000 km, y por lo tanto tiene una rapidez orbital menor (1.0 km/s) y un periodo orbital mucho más prolongado (27.3 días).

Es interesante comparar la ecuación (13.10) con el cálculo de la rapidez de escape en el ejemplo 13.5. Vemos que la rapidez de escape de un cuerpo esférico con radio R es $\sqrt{2}$ veces mayor que la rapidez de un satélite en una órbita circular con ese radio. Si nuestra nave está en órbita circular alrededor de *cualquier* planeta, debemos multiplicar nuestra rapidez por $\sqrt{2}$ para escapar al infinito, sin importar la masa del planeta.

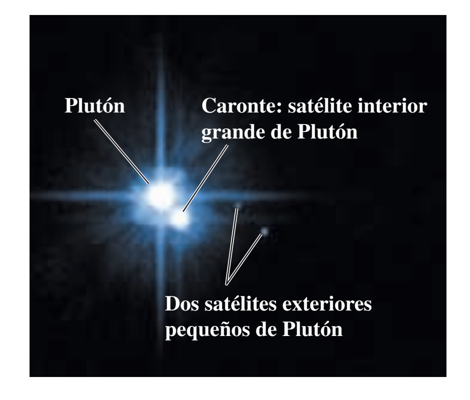
Puesto que la rapidez v en una órbita circular está determinada por la ecuación (13.10) para un radio orbital r dado, la energía mecánica total $E = K + U$ también está predeterminada. Usando las ecuaciones (13.9) y (13.10), tenemos

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{Gm_E m}{r}\right) = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{Gm_E}{r}\right) - \frac{Gm_E m}{r}$$
$$= -\frac{Gm_E m}{2r} \quad \text{(órbita circular)} \qquad (13.13)$$

La energía mecánica total en una órbita circular es negativa e igual a la mitad de la energía potencial. Aumentar el radio orbital r implica incrementar la energía mecánica (es decir, E se hace menos negativa). Si el satélite está en una órbita relativamente baja y toca las orillas de la atmósfera, la energía mecánica disminuirá a causa del trabajo negativo efectuado por la resistencia del aire; en consecuencia, el radio orbital disminuirá hasta que el satélite caiga a tierra o se queme en la atmósfera.

Hemos hablado casi exclusivamente de satélites terrestres; no obstante, podemos aplicar el mismo análisis al movimiento circular de *cualquier* cuerpo sometido a la atracción gravitacional de un cuerpo estacionario. Otros ejemplos son nuestra Luna y las lunas de otros planetas (figura 13.17).

13.17 Los dos satélites pequeños de Plutón fueron descubiertos en 2005. De acuerdo con las ecuaciones (13.10) y (13.12), el satélite de la órbita más grande tiene una rapidez orbital menor y un periodo orbital más prolongado que el satélite en la órbita más pequeña.





Ejemplo 13.6 Una órbita de satélite

Suponga que desea poner un satélite de 1000 kg en una órbita circular a una altura de 300 km sobre la superficie terrestre. *a*) ¿Qué rapidez, periodo y aceleración radial debe tener? *b*) ¿Cuánto trabajo se requiere para poner el satélite en órbita? *c*) ¿Cuánto trabajo adicional se necesita para que el satélite escape de la Tierra? El radio y la masa de la Tierra se dan en el ejemplo 13.5 (sección 13.3).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El satélite tendrá una órbita circular, así que podemos usar las ecuaciones que dedujimos en esta sección. En el inciso *a*) primero determinamos el radio r de la órbita del satélite a partir de su altitud. Luego calculamos la rapidez v y el periodo T usando las ecuaciones (13.10) y (13.12), y la aceleración con la fórmula $a_{rad} = v^2/r$. En los incisos *b*) y *c*), el trabajo requerido es la diferencia entre las energías mecánicas inicial y final que, en el caso de una órbita circular, está dada por la ecuación (13.13).

EJECUTAR: *a*) El radio de la órbita del satélite es $r = 6380 \text{ km} + 300 \text{ km} = 6680 \text{ km} = 6.68 \times 10^6$ m. De acuerdo con la ecuación (13.10), la rapidez orbital es

$$v = \sqrt{\frac{Gm_E}{r}} = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24}\text{ kg})}{6.68 \times 10^6\text{ m}}}$$
$$= 7720 \text{ m/s}$$

Calculamos el periodo orbital con la ecuación (13.12):

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6.68 \times 10^6\text{ m})}{7720\text{ m/s}} = 5440\text{ s} = 90.6\text{ min}$$

Por último, la aceleración radial es

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \frac{(7720\text{ m/s})^2}{6.68 \times 10^6\text{ m}} = 8.92\text{ m/s}^2$$

Este es el valor de g a una altura de 300 km sobre la superficie terrestre; es aproximadamente 10% menor que en la superficie.

b) El trabajo requerido es la diferencia entre E_2, la energía mecánica total cuando el satélite está en órbita, y E_1, la energía mecánica total cuando el satélite estaba en reposo en su plataforma de lanzamiento. Según la ecuación (13.13), la energía en órbita es

$$E_2 = -\frac{Gm_E m}{2r}$$
$$= -\frac{(6.67 \times 10^{-11}\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24}\text{ kg})(1000\text{ kg})}{2(6.68 \times 10^6\text{ m})}$$
$$= -2.98 \times 10^{10}\text{ J}$$

La energía cinética del satélite es cero en la plataforma de lanzamiento ($r = R_E$), así que:

$$E_1 = K_1 + U_1 = 0 + \left(-\frac{Gm_E m}{R_E}\right)$$
$$= -\frac{(6.67 \times 10^{-11}\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24}\text{ kg})(1000\text{ kg})}{6.38 \times 10^6\text{ m}}$$
$$= -6.24 \times 10^{10}\text{ J}$$

Por lo tanto, el trabajo requerido es

$$W_{requerido} = E_2 - E_1 = (-2.98 \times 10^{10}\text{ J}) - (-6.24 \times 10^{10}\text{ J})$$
$$= 3.26 \times 10^{10}\text{ J}$$

c) En el inciso *b*) del ejemplo 13.5, vimos que, para que un satélite escape al infinito, la energía mecánica total mínima debe ser cero. Aquí, la energía mecánica total en la órbita circular es $E_2 = -2.98 \times 10^{10}$ J; por lo que para llevar esto a cero, tendríamos que efectuar un trabajo de 2.98×10^{10} J sobre el satélite, presumiblemente por los motores.

EVALUAR: En el inciso *b*), despreciamos la energía cinética inicial que el satélite tenía por la rotación terrestre (cuando aún estaba en la plataforma de lanzamiento). ¿Cuánta diferencia implica esto? (Véase el ejemplo 13.5, donde se incluyen datos útiles).

Evalúe su comprensión de la sección 13.4 Imagine que una nave espacial está en una órbita circular a baja altitud alrededor de la Tierra. La resistencia del aire de las regiones exteriores de la atmósfera efectúa trabajo negativo sobre la nave, haciendo que el radio orbital disminuya ligeramente. ¿La rapidez de la nave **i.** permanece igual, **ii.** aumenta o **iii.** disminuye?



13.5 Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas

La palabra *planeta* viene de un vocablo griego que significa "vagabundo", y efectivamente, los planetas cambian continuamente su posición en el cielo en relación con el fondo estrellado. Uno de los grandes logros intelectuales de los siglos XVI y XVII fue darse cuenta de que la Tierra es un planeta, que todos los planetas están en órbita alrededor del Sol y que los movimientos aparentes de los planetas vistos desde la Tierra pueden servir para determinar con precisión sus órbitas.

Los primeros dos descubrimientos fueron publicados por Nicolás Copérnico en Polonia en 1543. La deducción de la naturaleza de las órbitas planetarias entre 1601 y 1619 corrió a cargo del astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler, utilizando un voluminoso conjunto de datos precisos acerca de los movimientos planetarios aparentes compilado por su maestro, el astrónomo danés Tycho Brahe. Por medio de en-

sayo y error, Kepler descubrió tres leyes empíricas que describían con exactitud los movimientos de los planetas:

1. **Cada planeta se mueve en una órbita elíptica, con el Sol en uno de los focos de la elipse.**
2. **Una línea del Sol a un planeta dado barre áreas iguales en tiempos iguales.**
3. **Los periodos de los planetas son proporcionales a las longitudes del eje mayor de sus órbitas elevadas a la potencia $\frac{3}{2}$.**

Kepler no sabía *por qué* los planetas se movían así. Tres generaciones después, cuando Newton dirigió su atención al movimiento planetario, descubrió que las leyes de Kepler pueden *deducirse*; son consecuencia de las leyes de Newton del movimiento y de la ley de la gravitación. Veamos de dónde surge cada una de las leyes de Kepler.

Primera ley de Kepler

Consideremos primero las órbitas elípticas descritas en la primera ley de Kepler. La figura 13.18 muestra la geometría de una elipse. La dimensión más larga es el *eje mayor*, siendo "a" la mitad de su longitud; esta distancia se denomina **semieje mayor**. La suma de las distancias de S a P y de S' a P es la misma para todos los puntos de la curva. S y S' son los *focos*. El Sol está en S, y el planeta está en P; consideramos a ambos como puntos porque su tamaño es muy pequeño en comparación con la distancia entre ellos. No hay nada en el otro foco S'.

La distancia de cada foco al centro de la elipse es ea, donde e es un número adimensional entre 0 y 1 llamado **excentricidad**. Si $e = 0$, la curva en realidad es un círculo. Las órbitas reales de los planetas son casi circulares; sus excentricidades varían entre 0.007 para Venus a 0.206 para Mercurio. (La órbita de la Tierra tiene $e = 0.017$). El punto de la órbita más cercano al Sol es el *perihelio*; y el más lejano, el *afelio*.

Newton logró demostrar que, para un cuerpo sobre el que actúa una fuerza de atracción proporcional a $1/r^2$, las únicas órbitas cerradas posibles son un círculo o una elipse; también demostró que las órbitas abiertas (las trayectorias 6 y 7 en la figura 13.14) deben ser parábolas o hipérbolas. Estos resultados pueden deducirse aplicando directamente las leyes de Newton del movimiento y la ley de la gravitación, junto con muchas ecuaciones diferenciales que estamos listos para enfrentar.

Segunda ley de Kepler

La figura 13.19 muestra la segunda ley de Kepler. En un lapso de tiempo pequeño dt, la línea del Sol S al planeta P describe un ángulo $d\theta$. El área barrida es el triángulo coloreado de altura r, base $r\,d\theta$ y área $dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$ en la figura 13.19*b*. La rapidez con la que se barre el área, dA/dt, se denomina *velocidad de sector*:

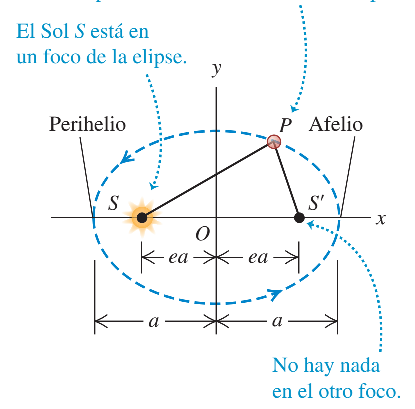
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} \qquad (13.14)$$

La esencia de la segunda ley de Kepler es que la velocidad de sector tiene el mismo valor en todos los puntos de la órbita. Cuando el planeta está cerca del Sol, r es pequeña y $d\theta/dt$ es grande; cuando el planeta está lejos del Sol, r es grande y $d\theta/dt$ es pequeña.

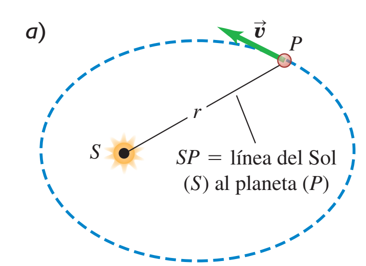
Para ver por qué la segunda ley de Kepler es consecuencia de las leyes de Newton, expresamos dA/dt en términos del vector velocidad $\vec{v}$ del planeta P. La componente de $\vec{v}$ perpendicular a la línea radial es $v_\perp = v \operatorname{sen} \phi$. Según la figura 13.19*b*, el desplazamiento en la dirección de $v_\perp$ durante el tiempo dt es $r\,d\theta$, de modo que tenemos $v_\perp = r\,d\theta/dt$. Usando esta relación en la ecuación (13.14), obtenemos

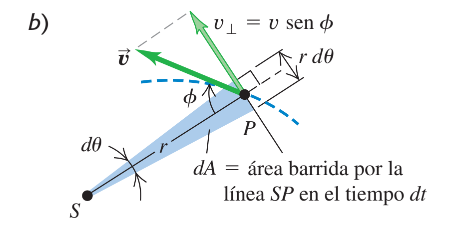
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}rv \operatorname{sen}\phi \qquad \text{(velocidad de sector)} \qquad (13.15)$$

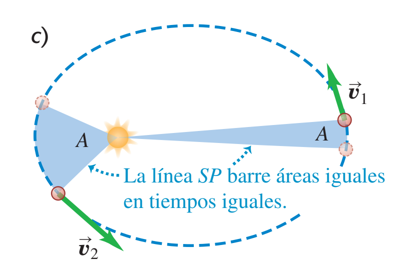
13.18 Geometría de una elipse. La suma de las distancias SP y $S'P$ es la misma para todos los puntos de la curva. Se exageraron los tamaños del Sol (S) y del planeta (P) por claridad.



13.19 *a*) El planeta (P) se mueve alrededor del Sol (S) en una órbita elíptica. *b*) En un tiempo dt, la línea SP barre un área $dA = \frac{1}{2}(r\,d\theta)r = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$. *c*) La rapidez del planeta varía de modo que la línea SP barre la misma área A en un tiempo dado t, sea cual fuere la posición del planeta en su órbita.







De esta manera, rv sen ϕ es la magnitud del producto vectorial $\vec{r} \times \vec{v}$, que es $1/m$ veces el momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ del planeta con respecto al Sol. Tenemos, entonces,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}\left|\vec{r} \times m\vec{v}\right| = \frac{L}{2m} \qquad (13.16)$$

Por lo tanto, la segunda ley de Kepler establece que la velocidad de sector es constante, ¡e implica que el momento angular es constante!

Es fácil saber por qué el momento angular del planeta *debe* ser constante. Según la ecuación (10.26), la rapidez de cambio de $\vec{L}$ es igual a la torca debida a la fuerza gravitacional $\vec{F}$ que actúa sobre el planeta:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

En nuestra situación, $\vec{r}$ es el vector del Sol al planeta, y la fuerza $\vec{F}$ está dirigida del planeta al Sol. Por lo tanto, estos vectores siempre están en la misma línea y su producto vectorial $\vec{r} \times \vec{F}$ es cero. De ahí que $d\vec{L}/dt = \mathbf{0}$. Esta conclusión no depende del comportamiento según $1/r^2$ de la fuerza; el momento angular se conserva para *cualquier* fuerza que siempre actúe sobre la línea que une la partícula a un punto fijo, denominada *fuerza central*. (La primera y la tercera leyes de Kepler *solo* son válidas para fuerzas $1/r^2$).

La conservación del momento angular también explica por qué la órbita está en un plano. El vector $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ siempre es perpendicular al plano de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$; como $\vec{L}$ es constante en magnitud *y* dirección, $\vec{r}$ y $\vec{v}$ siempre están en el mismo plano, que es el plano de la órbita del planeta.



Aplicación Riesgos biológicos de un viaje interplanetario

Una nave espacial enviada de la Tierra a otro planeta usa la mayor parte de su jornada en realizar un rodeo a lo largo de una órbita elíptica, con el Sol en uno de sus focos. Los cohetes se usan solo al principio y al final del viaje, e incluso el viaje a un planeta cercano como Marte toma varios meses. Durante su viaje, la nave espacial está expuesta a los rayos cósmicos, la radiación que emerge de otros puntos de nuestra galaxia. (En la Tierra, estamos protegidos de esta radiación por el campo magnético de nuestro planeta, como se describirá en el capítulo 27, volumen 2). Esto no es un problema para una nave espacial robótica, pero representa un problema médico serio para los astronautas que realicen este viaje.



Tercera ley de Kepler

Ya dedujimos la tercera ley de Kepler para el caso específico de órbitas circulares. La ecuación (13.12) indica que el periodo de un satélite o planeta en una órbita circular es proporcional al radio de la órbita elevado a la potencia $\frac{3}{2}$. Newton logró demostrar que esta misma relación se cumple para una órbita *elíptica*, sustituyendo el radio r por el semieje mayor a:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_S}} \quad \text{(órbita elíptica alrededor del Sol)} \qquad (13.17)$$

Como el planeta está en órbita alrededor del Sol, no de la Tierra, en la ecuación (13.12) sustituimos la masa de la Tierra m_E por la masa del Sol m_S. Observe que el periodo no depende de la excentricidad e. Un asteroide en una órbita elíptica alargada con semieje mayor a tiene el mismo periodo orbital que un planeta en una órbita circular de radio a. La diferencia clave es que la rapidez del asteroide varía a lo largo de su órbita elíptica (figura 13.19*c*), mientras que la rapidez del planeta es constante en su órbita circular.



Ejemplo conceptual 13.7 Rapideces orbitales

¿En qué punto de una órbita elíptica (figura 13.19) un planeta tiene la mayor rapidez? ¿Y la menor?

SOLUCIÓN

La energía mecánica se conserva al desplazarse el planeta en su órbita. La energía cinética del planeta $K = \frac{1}{2}mv^2$ es máxima cuando la energía potencial $U = -Gm_S m/r$ es mínima (es decir, la más negativa; véase la figura 13.11), lo cual se da cuando es mínima la distancia r entre el Sol y el planeta. Por lo tanto, la rapidez v es máxima en el perihelio. De manera análoga, K es mínima cuando r es máxima, de modo que la rapidez es mínima en el afelio.

Aquí podemos aprovechar lo que nos dice la intuición acerca de los cuerpos que caen. Al caer el planeta hacia el Sol, aumenta su rapidez, y su rapidez es máxima cuando está más cerca del Sol. Por el mismo razonamiento, el planeta se frena al alejarse del Sol, y su rapidez es mínima en el afelio.

Ejemplo 13.8 Tercera ley de Kepler



El asteroide Palas tiene un periodo orbital de 4.62 años y una excentricidad orbital de 0.233. Calcule el semieje mayor de su órbita.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este ejemplo utiliza la tercera ley de Kepler, la cual relaciona el periodo T con el semieje mayor a para un objeto (como un asteroide) en órbita. Usamos la ecuación (13.17) para determinar a; en el apéndice F observamos que $m_S = 1.99 \times 10^{30}$ kg, y el factor de conversión del apéndice E da $T = (4.62 \text{ años})(3.156 \times 10^7 \text{ s/año}) = 1.46 \times 10^8$ s. Observe que no necesitamos el valor de la excentricidad.

EJECUTAR: De acuerdo la ecuación (13.17), $a^{3/2} = [(Gm_S)^{1/2}T]/2\pi$. Para despejar a, elevamos ambos lados de esta expresión a la potencia $\frac{2}{3}$ y luego sustituimos los valores de G, m_S y T:

$$a = \left(\frac{Gm_S T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 4.15 \times 10^{11} \text{ m}$$

(Realice el cálculo para comprobarlo).

EVALUAR: Nuestro resultado es intermedio entre los semiejes mayores de Marte y Júpiter (véase el apéndice F). Efectivamente, la mayoría de los asteroides conocidos se localizan en un "cinturón de asteroides" entre las órbitas de esos dos planetas.

Ejemplo 13.9 El cometa Halley



El cometa Halley se desplaza en una órbita elíptica alargada alrededor del Sol (figura 13.20). Sus distancias del Sol al perihelio y al afelio son 8.75×10^7 km y 5.26×10^9 km, respectivamente. Calcule el semieje mayor, la excentricidad y el periodo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Vamos a calcular el semieje mayor a, la excentricidad e y el periodo de la órbita T. Podemos usar la figura 13.18 para calcular a y e a partir de las distancias al perihelio y al afelio. Una vez que conozcamos el valor de a, podremos obtener T con la tercera ley de Kepler, ecuación (13.17).

EJECUTAR: A partir de la figura 13.18, vemos que la longitud del eje mayor $2a$ es la suma de las distancias entre el cometa y el Sol en el perihelio y en el afelio. Así que

$$a = \frac{(8.75 \times 10^7 \text{ km}) + (5.26 \times 10^9 \text{ km})}{2} = 2.67 \times 10^9 \text{ km}$$

La figura 13.19 también indica que la distancia entre el cometa y el Sol en el perihelio es $a - ea = a(1 - e)$. Esta distancia es 8.75×10^7 km, por lo que

$$e = 1 - \frac{8.75 \times 10^7 \text{ km}}{a} = 1 - \frac{8.75 \times 10^7 \text{ km}}{2.67 \times 10^9 \text{ km}} = 0.967$$

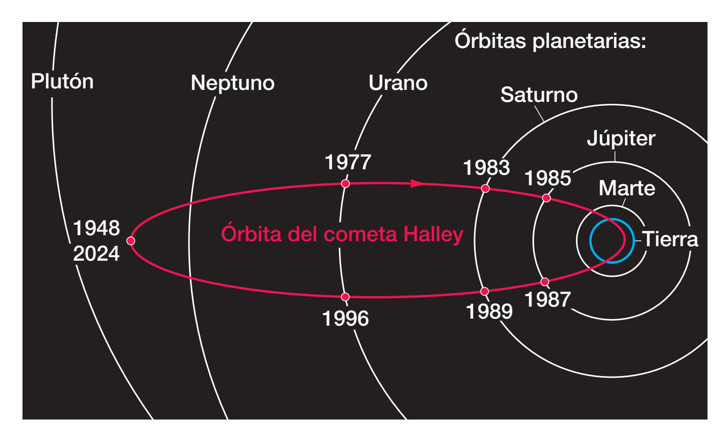
Según la ecuación (13.17), el periodo es

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_S}} = \frac{2\pi(2.67 \times 10^{12} \text{ m})^{3/2}}{\sqrt{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(1.99 \times 10^{30} \text{ kg})}}$$
$$= 2.38 \times 10^9 \text{ s} = 75.5 \text{ años}$$

EVALUAR: La excentricidad es casi 1, así que la órbita del cometa es muy alargada (véase la figura 13.20*a*). El cometa Halley estuvo en su perihelio a principios de 1986 (figura 13.20*b*); llegará otra vez al perihelio un periodo después, en el año 2061.

13.20 *a*) Órbita del cometa Halley. *b*) El cometa en 1986. En el corazón del cometa hay un cuerpo helado, llamado núcleo, de unos 10 km de diámetro. Cuando el cometa se acerca al Sol, el calor de este hace que el núcleo se evapore parcialmente. El material evaporado forma la cauda, que llega a medir decenas de millones de kilómetros de longitud.

a)



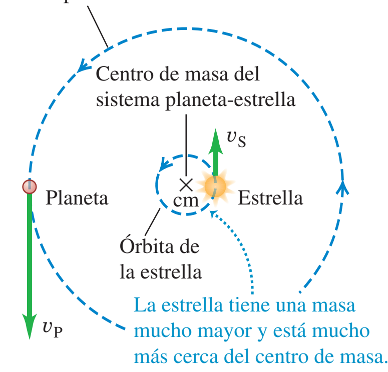
b)



Movimientos planetarios y el centro de masa

Hemos supuesto que, mientras un planeta o un cometa se mueven alrededor del Sol, este permanece absolutamente estacionario. Desde luego, esto no es correcto; como el Sol ejerce una fuerza gravitacional sobre el planeta, este ejerce una fuerza gravita-

13.21 Una estrella y su planeta están en órbita alrededor de su centro de masa común.



El planeta y la estrella están siempre en lados opuestos del centro de masa.

cional sobre el Sol de la misma magnitud pero en sentido opuesto. De hecho, *tanto* el Sol *como* el planeta giran alrededor de su centro de masa común (figura 13.21). No obstante, nuestro error al despreciar este efecto es pequeño; la masa del Sol es unas 750 veces mayor que la masa combinada de todos los planetas, de modo que el centro de masa del Sistema Solar no está lejos del centro del Sol. Resulta interesante que los astrónomos hayan aprovechado este efecto para detectar la presencia de planetas en órbita alrededor de otras estrellas. Los telescopios más sensibles pueden detectar el "bamboleo" aparente de una estrella en órbita alrededor del centro de masa común de la estrella y un planeta acompañante que no puede verse. (Los planetas son demasiado borrosos para observarse directamente). Analizando los "bamboleos", los astrónomos han descubierto planetas en órbita alrededor de más de un centenar de estrellas.

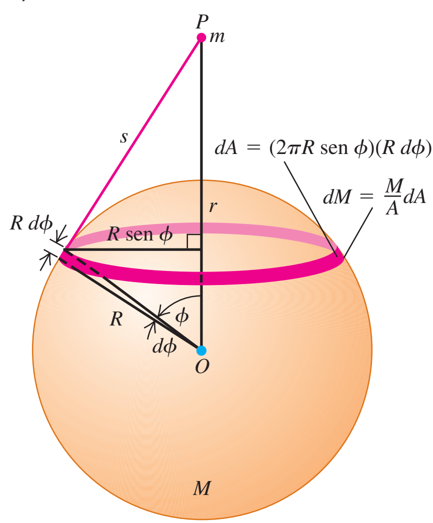
Los astrónomos modernos usan a diario los resultados del análisis de los movimientos planetarios efectuado por Newton. No obstante, el resultado más notable de la labor de Newton es que los movimientos de los cuerpos celestes obedecen las *mismas* leyes del movimiento que los cuerpos en la Tierra. Esta *síntesis newtoniana*, como se ha llamado, es uno de los grandes principios unificadores de la ciencia y afecta profundamente la forma en que vemos el Universo: no como un reino de misterio impenetrable, sino como una extensión directa del mundo cotidiano, sujeta al estudio y cálculo científicos.

Evalúe su comprensión de la sección 13.5 La órbita del cometa X tiene un semieje mayor cuatro veces más grande que el semieje mayor del cometa Y. Calcule la razón del periodo orbital de X con respecto al periodo orbital de Y. **i.** 2; **ii.** 4; **iii.** 8; **iv.** 16; **v.** 32; **vi.** 64.

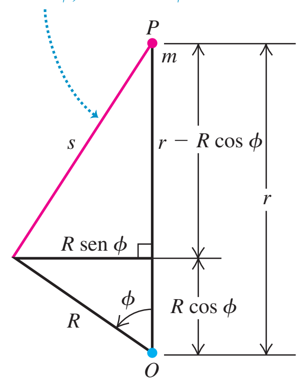


13.22 Cálculo de la energía potencial gravitacional de interacción entre una masa puntual m afuera de un cascarón esférico y un anillo en la superficie del cascarón.

a) Geometría de la situación



b) La distancia s es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos $(r - R\cos\phi)$ and $R \operatorname{sen} \phi$.



13.6 Distribuciones esféricas de masa

Hemos enunciado, sin demostrarlo, que la interacción gravitacional entre dos distribuciones de masa esféricamente simétricas es la misma que sería si la masa de cada una estuviera concentrada en su centro. Ya estamos en condiciones de demostrarlo. Newton buscó varios años una demostración, y aplazó la publicación de la ley de la gravitación hasta que la encontró.

Veamos lo que haremos. En lugar de comenzar con dos masas esféricamente simétricas, atacaremos el problema más sencillo de una masa puntual m que interactúa con un cascarón esférico delgado con masa total M. Demostraremos que, si m está afuera de la esfera, la *energía potencial* asociada a esta interacción gravitacional es la que sería si M estuviera concentrada en el centro de la esfera. En la sección 7.4 vimos que la fuerza es la derivada negativa de la energía potencial, así que la *fuerza* que actúa sobre m es la misma que para la masa puntual M. Toda distribución de masa esféricamente simétrica puede considerarse formada por muchos cascarones esféricos concéntricos, así que nuestro resultado será válido para *cualquier* M esféricamente simétrica.

Una masa puntual afuera de un cascarón esférico

Comenzamos considerando un anillo en la superficie del cascarón (figura 13.22*a*), con centro en la línea que va del centro del cascarón a m. Hacemos esto porque todas las partículas del anillo están a la misma distancia s de la masa puntual m. De acuerdo con la ecuación (13.9), la energía potencial de la interacción entre la Tierra (masa m_E) y una masa puntual m separada una distancia r es $U = -Gm_E m/r$. Cambiando la notación en esta expresión, vemos que la energía potencial de interacción entre la masa puntual m y una partícula de masa m_i del anillo está dada por

$$U_i = -\frac{Gmm_i}{s}$$

Para calcular la energía potencial de interacción entre m y el anillo entero de masa $dM = \sum_i m_i$, sumamos esta expresión de U_i para todas las partículas del anillo. Llamamos a esto energía potencial dU, y vemos que

$$dU = \sum_i U_i = \sum_i \left(-\frac{Gmm_i}{s}\right) = -\frac{Gm}{s}\sum_i m_i = -\frac{Gm\,dM}{s} \quad (13.18)$$

Para continuar, necesitamos conocer la masa dM del anillo, que podemos calcular con un poco de geometría. El radio del cascarón es R, así que, en términos del ángulo ϕ de la figura, el radio del anillo es R sen ϕ, y su circunferencia es $2\pi R$ sen ϕ. La anchura del anillo es $R\,d\phi$, y su área dA es aproximadamente su anchura multiplicada por su circunferencia:

$$dA = 2\pi R^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi$$

La razón entre la masa dM del anillo y la masa total M del cascarón es la misma que hay entre el área dA del anillo y el área total $A = 4\pi R^2$ del cascarón:

$$\frac{dM}{M} = \frac{2\pi R^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi}{4\pi R^2} = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\phi\, d\phi \quad (13.19)$$

Ahora despejamos dM de esta ecuación y sustituimos el resultado en la ecuación (13.18) para obtener la energía potencial de interacción entre la masa puntual m y el anillo:

$$dU = -\frac{GMm\operatorname{sen}\phi\, d\phi}{2s} \quad (13.20)$$

La energía potencial de interacción entre la masa puntual y el *cascarón* es la integral de la ecuación (13.20) para toda la esfera, desde $\phi = 0$ hasta $\phi = \pi$ (¡*no* 2π!) y desde $s = r - R$ hasta $s = r + R$. Para realizar la integración, debemos expresar el integrando en términos de una sola variable; elegimos s. Para expresar ϕ y $d\phi$ en términos de s necesitamos otro poco de geometría. En la figura 13.22*b* es evidente que s es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos ($r - R\cos\phi$) y R sen ϕ, así que, por el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} s^2 &= (r - R\cos\phi)^2 + (R\operatorname{sen}\phi)^2 \\ &= r^2 - 2rR\cos\phi + R^2 \end{aligned} \quad (13.21)$$

Diferenciamos ambos miembros:

$$2s\,ds = 2rR\operatorname{sen}\phi\, d\phi$$

Ahora dividimos esto entre $2rR$ y sustituimos el resultado en la ecuación (13.20):

$$dU = -\frac{GMm}{2s}\frac{s\,ds}{rR} = -\frac{GMm}{2rR}\,ds \quad (13.22)$$

Ahora podemos integrar la ecuación (13.22), recordando que s varía desde $r - R$ hasta $r + R$:

$$U = -\frac{GMm}{2rR}\int_{r-R}^{r+R} ds = -\frac{GMm}{2rR}[(r + R) - (r - R)] \quad (13.23)$$

Por último, tenemos

$$U = -\frac{GMm}{r} \quad \text{(masa puntual } m \text{ afuera de un cascarón esférico } M) \quad (13.24)$$

Esto es igual a la energía potencial de dos masas puntuales m y M a una distancia r, así que hemos demostrado que la energía potencial gravitacional del cascarón esférico M y la masa puntual m a cualquier distancia r es la misma que sería si fueran masas puntuales. Como la fuerza está dada por $F_r = -dU/dr$, la fuerza es la misma.

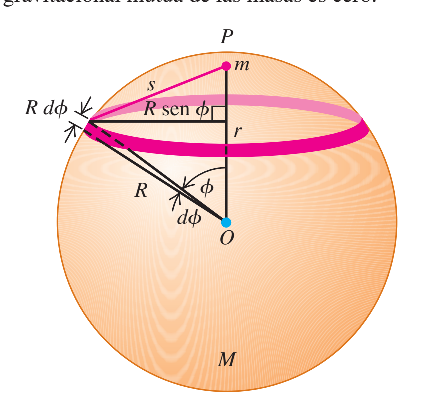
Fuerza gravitacional entre distribuciones esféricas de masa

Cualquier distribución esféricamente simétrica de masa puede considerarse como una combinación de cascarones esféricos concéntricos. Por el principio de superposición de las fuerzas, lo que es válido para un cascarón es válido para la combinación. Por lo tanto, hemos demostrado la mitad de lo que nos propusimos: que la interacción gravitacional entre una distribución esféricamente simétrica de masa y una masa puntual es la misma que sería si toda la masa de la distribución esféricamente simétrica estuviera concentrada en su centro.

La otra mitad consiste en demostrar que *dos* distribuciones esféricamente simétricas de masa interactúan como si fueran puntos. Esto es más fácil. En la figura 13.22*a*, las fuerzas que los dos cuerpos ejercen entre sí son un par acción-reacción, y cumplen la tercera ley de Newton. De esta manera, hemos demostrado que la fuerza que m ejerce *sobre* la esfera M es la que ejercería si M fuera un punto. Pero si ahora sustituimos m por una distribución esféricamente simétrica de masa centrada en la posición de m, la fuerza gravitacional que actúa sobre cualquier parte de M es la misma que antes, y lo mismo se cumple para la fuerza total. Esto completa la demostración.

Masa puntual dentro de un cascarón esférico

13.23 Si una masa puntual m está *dentro* de un cascarón esférico uniforme de masa M, la energía potencial es la misma sin importar en qué punto del interior del cascarón esté la masa puntual. La fuerza de la interacción gravitacional mutua de las masas es cero.



Supusimos al principio que la masa puntual m estaba afuera del cascarón esférico, así que nuestra demostración solo es válida si m está afuera de una distribución esféricamente simétrica de masa. Si m está *adentro* de un cascarón esférico, la geometría es la que se muestra en la figura 13.23. El análisis es el mismo; las ecuaciones (13.18) a (13.22) siguen siendo válidas; sin embargo, en la ecuación (13.23) los límites de integración deben cambiarse a $R - r$ y $R + r$. De esta manera,

$$U = -\frac{GMm}{2rR}\int_{R-r}^{R+r} ds = -\frac{GMm}{2rR}[(R + r) - (R - r)] \qquad (13.25)$$

y el resultado final es

$$U = -\frac{GMm}{R} \qquad \text{(masa puntual } m \text{ dentro de un cascarón esférico } M) \qquad (13.26)$$

Compare este resultado con la ecuación (13.24): en lugar de tener r, la distancia entre m y el centro de M, en el denominador, tenemos R, el radio del cascarón. Esto implica que en la ecuación (13.26) U no depende de r y, por ello, tiene el mismo valor en todo el interior del cascarón. Si m se mueve dentro del cascarón, no se efectúa trabajo sobre ella, por lo que la fuerza que actúa sobre m en cualquier punto dentro del cascarón debe ser cero.

En términos más generales, en cualquier punto del interior de una distribución esféricamente simétrica de masa (no necesariamente hueca), a una distancia r del centro, la fuerza gravitacional que actúa sobre una masa puntual m es la misma que existiría si eliminráramos toda la masa situada a una distancia mayor que r del centro y concentráramos la masa restante en el centro.

Ejemplo 13.10 "Viaje al centro de la Tierra"



Suponga que usted perfora un agujero que atraviesa la Tierra siguiendo un diámetro y deja caer un saco de correo por él. Deduzca una expresión para la fuerza gravitacional F_g que actúa sobre el saco en función de su distancia al centro de la Tierra. Suponga que la densidad de la Tierra es uniforme (un modelo no muy realista; véase la figura 13.9).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Partiendo de nuestro análisis anterior, el valor de F_g a una distancia r del centro de la Tierra está determinado solo por la masa M dentro de una región esférica de radio r (figura 13.24). Por lo que F_g es la misma que si toda la masa dentro del radio r estuviera concentrada en el centro de la Tierra. La masa de una esfera uniforme es proporcional al volumen de la esfera, que es $\frac{4}{3}\pi r^3$ para la esfera de radio r y $\frac{4}{3}\pi R_E{}^3$ para toda la Tierra.

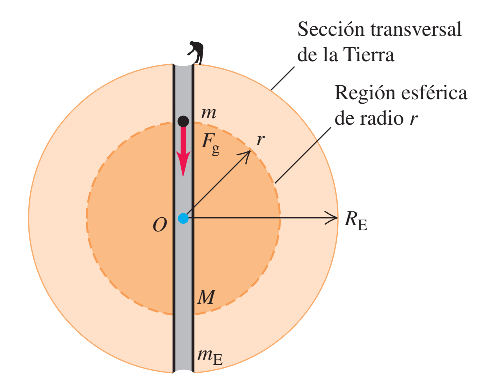
EJECUTAR: La razón de la masa M de la esfera de radio r y la masa terrestre, m_E, es

$$\frac{M}{m_E} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R_E{}^3} = \frac{r^3}{R_E{}^3} \qquad \text{de modo que} \qquad M = m_E\frac{r^3}{R_E{}^3}$$

La magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre m está dada por

$$F_g = \frac{GMm}{r^2} = \frac{Gm}{r^2}\left(m_E \frac{r^3}{R_E^3}\right) = \frac{Gm_E m}{R_E^3} r$$

EVALUAR: Dentro de esta esfera de densidad uniforme, F_g es *directamente proporcional* a la distancia r del centro, no a $1/r^2$ como sucede afuera de la esfera. En la superficie, donde $r = R_E$, tenemos que $F_g = Gm_E m/R_E^2$, como es de esperarse. En el siguiente capítulo aprenderemos a calcular el tiempo que el saco tardaría en llegar al otro lado de la Tierra.

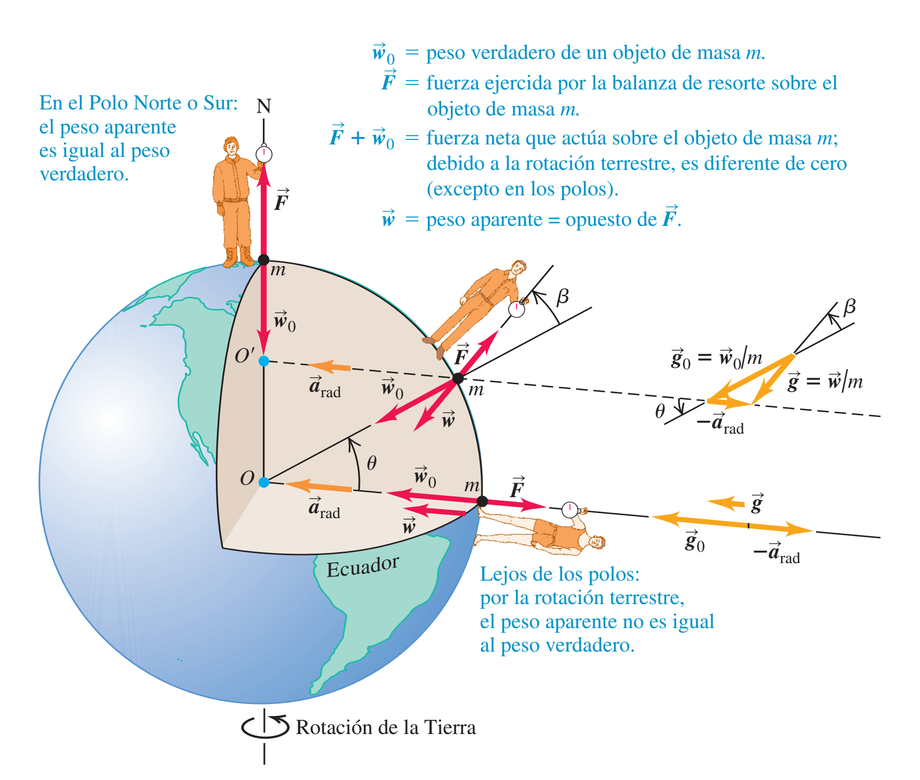


13.24 Agujero por el centro de la Tierra (la cual suponemos uniforme). Si un objeto está a una distancia r del centro, solo la masa dentro de una esfera de radio r ejerce una fuerza gravitacional neta sobre él.

Evalúe su comprensión de la sección 13.6 En la novela clásica de ciencia ficción *En el centro de la Tierra*, escrita en 1913 por Edgar Rice Burroughs, ciertos exploradores descubren que la Tierra es una esfera hueca y que toda una civilización vive en el interior de ella. ¿Sería posible ponerse de pie y caminar en la superficie interior de un planeta hueco que no gira?

13.7 Peso aparente y rotación terrestre

Puesto que la Tierra gira sobre su eje, no es precisamente un marco de referencia inercial. Por tal razón, el peso aparente de un cuerpo en la Tierra no es exactamente igual a la atracción gravitacional terrestre, a la que llamaremos **peso verdadero** $\vec{w}_0$ del cuerpo. La figura 13.25 es la vista de un corte de la Tierra donde hay tres observadores. Cada uno sostiene una balanza de resorte, de la cual cuelga un cuerpo de masa m. Cada balanza aplica una fuerza de tensión $\vec{F}$ al cuerpo que cuelga, y la lectura de cada balanza es la magnitud F de dicha fuerza. Si los observadores no están conscientes de



13.25 Excepto en los polos, la lectura de una báscula en la que se pesa un objeto (el *peso aparente*) es menor que la fuerza de atracción gravitacional que actúa sobre el objeto (el *peso verdadero*). Ello se debe a que se requiere una fuerza neta que proporcione la aceleración centrípeta, pues el objeto gira junto con la Tierra. Por claridad, en el dibujo se exagera considerablemente el ángulo β entre los vectores de peso verdadero y peso aparente.

la rotación terrestre, *piensan* que la lectura de la báscula es igual al peso del cuerpo porque creen que este se encuentra en equilibrio. Así, cada observador piensa que a la tensión $\vec{F}$ debe oponerse una fuerza igual y en sentido contrario $\vec{w}$, a la que llamamos **peso aparente**. Pero si los cuerpos giran junto con la Tierra, *no* están precisamente en equilibrio. Nuestro problema es encontrar la relación entre el peso aparente $\vec{w}$ y el peso verdadero $\vec{w}_0$.

Si suponemos que la Tierra es esféricamente simétrica, el peso verdadero $\vec{w}_0$ tendrá magnitud $Gm_Em/R_E{}^2$, donde m_E y R_E son la masa y el radio de la Tierra. Este valor es el mismo para todos los puntos en la superficie terrestre. Si podemos tomar el centro de la Tierra como el origen de un sistema inercial de coordenadas, el cuerpo que se encuentra en el Polo Norte realmente *está* en equilibrio en el sistema inercial, y la lectura de la balanza de resorte de ese observador es igual a w_0. En cambio, el cuerpo en el ecuador se mueve en un círculo de radio R_E con rapidez v, y debe haber una fuerza neta hacia adentro igual a la masa multiplicada por la aceleración centrípeta:

$$w_0 - F = \frac{mv^2}{R_E}$$

Por lo tanto, la magnitud del peso aparente (igual a la magnitud de F) es

$$w = w_0 - \frac{mv^2}{R_E} \qquad \text{(en el ecuador)} \tag{13.27}$$

Si la Tierra no girara y el cuerpo se soltara, este tendría una aceleración de caída libre $g_0 = w_0/m$. Como la Tierra *sí* gira, la aceleración real del cuerpo que cae relativa al observador en el ecuador es $g = w/m$. Dividiendo la ecuación (13.27) entre m y usando estas relaciones, obtenemos

$$g = g_0 - \frac{v^2}{R_E} \qquad \text{(en el ecuador)}$$

Para evaluar v^2/R_E, observamos que, en 86,164 s, un punto en el ecuador se mueve una distancia igual a la circunferencia de la Tierra, $2\pi R_E = 2\pi(6.38 \times 10^6\ \text{m})$. (El día solar, 86,400 s, es $\frac{1}{365}$ más largo porque, en un día, la Tierra también recorre $\frac{1}{365}$ de su órbita alrededor del Sol). Entonces,

$$v = \frac{2\pi(6.38 \times 10^6\ \text{m})}{86{,}164\ \text{s}} = 465\ \text{m/s}$$

$$\frac{v^2}{R_E} = \frac{(465\ \text{m/s})^2}{6.38 \times 10^6\ \text{m}} = 0.0339\ \text{m/s}^2$$

Así, para una Tierra esféricamente simétrica, la aceleración debida a la gravedad debería ser aproximadamente 0.03 m/s^2 menor en el ecuador que en los polos.

En puntos intermedios entre el ecuador y los polos, el peso verdadero $\vec{w}_0$ y la aceleración centrípeta no están en la misma línea, y necesitamos escribir la ecuación vectorial correspondiente a la ecuación (13.27). En la figura 13.25, vemos que la ecuación adecuada es

$$\vec{w} = \vec{w}_0 - m\vec{a}_{\text{rad}} = m\vec{g}_0 - m\vec{a}_{\text{rad}} \tag{13.28}$$

La diferencia en las magnitudes de g y g_0 está entre cero y 0.0339 m/s^2. Como se aprecia en la figura 13.25, la *dirección* del peso aparente difiere de la dirección hacia el centro de la Tierra en un ángulo pequeño β, que es de 0.1° o menos.

La tabla 13.1 da los valores de g en varios lugares, mostrando las variaciones con la latitud. También hay otras variaciones pequeñas debido a que la Tierra no tiene una simetría esférica perfecta, a las variaciones locales en la densidad y a las diferencias de elevación.

Tabla 13.1 Variaciones de g con la latitud y la elevación

Estación	Latitud norte	Elevación (m)	$g(\text{m/s}^2)$
Zona del Canal	09°	0	9.78243
Jamaica	18°	0	9.78591
Bermudas	32°	0	9.79806
Denver, CO	40°	1638	9.79609
Pittsburgh, PA	40.5°	235	9.80118
Cambridge, MA	42°	0	9.80398
Groenlandia	70°	0	9.82534

Evalúe su comprensión de la sección 13.7 Imagine un planeta que tiene la misma masa y radio que la Tierra; no obstante, realiza 10 rotaciones durante el tiempo en que la Tierra hace una. ¿Cuál sería la diferencia entre la aceleración debida a la gravedad en el ecuador del planeta y la aceleración debida a la gravedad en sus polos? **i.** 0.00339 m/s^2; **ii.** 0.0339 m/s^2; **iii.** 0.339 m/s^2; **iv.** 3.39 m/s^2. |



13.8 Agujeros negros

El concepto de agujero negro es una de las consecuencias más interesantes y desconcertantes de la teoría gravitacional moderna, pero la idea básica puede entenderse con base en los principios newtonianos.

Rapidez de escape de una estrella

Pensemos primero en las propiedades de nuestro Sol. Su masa $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg y radio $R = 6.96 \times 10^{8}$ m son mucho mayores que los de cualquier planeta; sin embargo, en comparación con otras estrellas, nuestro Sol no es excepcionalmente masivo. Se puede calcular la densidad media ρ del Sol del mismo modo en que se calculó la densidad media de la Tierra en la sección 13.2:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1.99 \times 10^{30}\ \text{kg}}{\frac{4}{3}\pi(6.96 \times 10^{8}\ \text{m})^3} = 1410\ \text{kg/m}^3$$

La temperatura del Sol varía entre 5800 K (unos 5500°C o 10,000°F) en la superficie y 1.5×10^{7} K (unos 2.7×10^{7}°F) en el interior, así que seguramente no contiene sólidos ni líquidos. No obstante, la atracción gravitacional junta los átomos de gas hasta volver al Sol, en promedio, 41% más denso que el agua y unas 1200 veces más denso que el aire que respiramos.

Veamos ahora la rapidez de escape de un cuerpo en la superficie del Sol. En el ejemplo 13.5 (sección 13.3), vimos que la rapidez de escape de la superficie de una masa esférica de masa M y radio R es $v = \sqrt{2GM/R}$. Podemos relacionar esto con la densidad media. Sustituyendo $M = \rho V = \rho(\frac{4}{3}\pi R^3)$ en la expresión para la rapidez de escape:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}}R \qquad (13.29)$$

Con cualquier forma de esta ecuación, podemos demostrar que la rapidez de escape para un cuerpo en la superficie solar es $v = 6.18 \times 10^{5}$ m/s (cerca de 2.2 millones de km/h o 1.4 millones de mi/h). Este valor, que es aproximadamente $\frac{1}{500}$ de la rapidez de la luz, es independiente de la masa del cuerpo que escapa; solo depende de la masa y el radio (o la densidad media y el radio) del Sol.

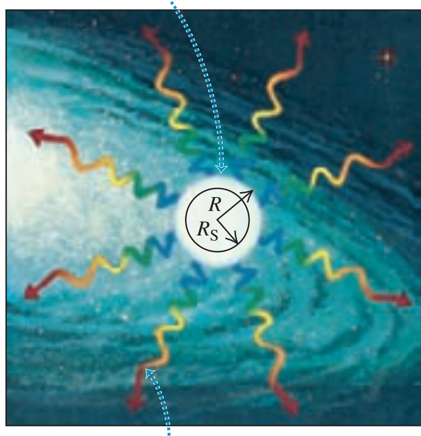
Consideremos ahora diversas estrellas con la misma densidad media ρ y diferentes radios R. La ecuación (13.29) indica que, para un valor dado de la densidad ρ, la rapidez de escape v es directamente proporcional a R. En 1783 el astrónomo aficionado John Mitchell señaló que, si un cuerpo con la misma densidad media del Sol tuviera un radio 500 veces mayor, la magnitud de su rapidez de escape sería mayor que la rapidez de la luz c. Al apuntar que "toda la luz emitida por semejante cuerpo tendría que regresar a él", Mitchell se convirtió en la primera persona en sugerir la existencia de lo que ahora llamamos **agujero negro**, un objeto que ejerce una gran fuerza gravitacional sobre otros cuerpos, pero que ni siquiera puede emitir su propia luz.

Agujeros negros, el radio de Schwarzschild y el horizonte de eventos

La primera expresión para la rapidez de escape de la ecuación (13.29) sugiere que un cuerpo de masa M actúa como agujero negro, si su radio R es menor que o igual a cierto radio crítico. ¿Cómo podemos determinar este radio crítico? Podríamos pensar que se puede determinar su valor con solo establecer que $v = c$ en la ecuación (13.29). De hecho, esto sí da el resultado correcto, pero solo porque dos errores se compensan.

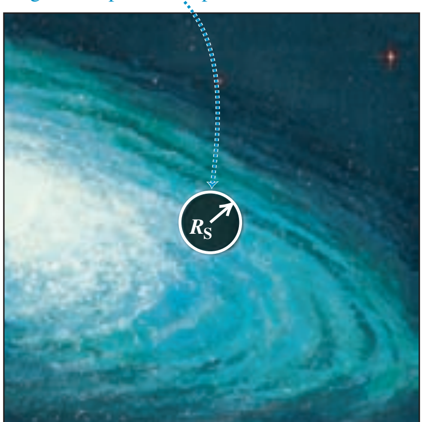
13.26 *a*) Un cuerpo con radio R mayor que el radio de Schwarzschild R_S. *b*) Si el cuerpo colapsa a un radio menor que R_S, es un agujero negro con una rapidez de escape mayor que la rapidez de la luz. La superficie de la esfera de radio R_S se denomina el horizonte de eventos del agujero negro.

a) Si el radio R de un cuerpo es mayor que el radio de Schwarzschild R_S, la luz puede escapar de la superficie del cuerpo.



Gravedad que actúa sobre la luz que escapa y se "desplaza al rojo" hacia longitudes de onda mayores.

b) Si toda la masa del cuerpo está dentro del radio R_S, este cuerpo es un agujero negro: ninguna luz puede escapar de él.



La energía cinética de la luz *no* es $mc^2/2$, y la energía potencial gravitacional cerca de un agujero negro *no* está dada por la ecuación (13.9). En 1916 Karl Schwarzschild usó la teoría general de la relatividad de Einstein (que en parte es una generalización y extensión de la teoría gravitacional newtoniana) con la finalidad de deducir una expresión para el radio crítico R_S, llamado ahora **radio de Schwarzschild**. El resultado es el mismo que si hubiéramos igualado v a c en la ecuación (13.29):

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R_S}}$$

Despejando el radio de Schwarzschild R_S, tenemos

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \qquad \text{(radio de Schwarzschild)} \qquad (13.30)$$

Si un cuerpo esférico sin rotación con masa M tiene un radio menor que R_S, *nada* (ni siquiera la luz) podrá escapar de su superficie, y el cuerpo es un agujero negro (figura 13.26). En este caso, todos los cuerpos que estén a menos de una distancia R_S del centro del agujero negro quedarán atrapados por su atracción gravitacional y no podrán escapar de él.

La superficie de la esfera con radio R_S que rodea a un agujero negro se denomina **horizonte de eventos** porque, como la luz no puede escapar del interior de la esfera, no podemos ver los eventos que ocurren ahí. Lo único que un observador afuera del horizonte de eventos puede conocer acerca de un agujero negro es su masa (por sus efectos gravitacionales sobre otros cuerpos), su carga eléctrica (por las fuerzas eléctricas que ejerce sobre otros cuerpos cargados) y su momento angular (porque un agujero negro en rotación tiende a arrastrar el espacio que hay a su alrededor y todo lo que contiene en él). Toda la demás información acerca del cuerpo se pierde irremediablemente cuando se colapsa dentro de su horizonte de eventos.

Ejemplo 13.11 Cálculos en agujeros negros



Las teorías astrofísicas sugieren que una estrella quemada puede colapsarse bajo su propia gravedad para formar un agujero negro, si su masa es de cuando menos tres masas solares. En tal caso, ¿qué radio tendría el horizonte de eventos?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: El radio en cuestión es el radio de Schwarzschild. Usamos la ecuación (13.30) con un valor de M de tres masas solares, es decir, $M = 3\,(1.99 \times 10^{30}\ \text{kg}) = 6.0 \times 10^{30}\ \text{kg}$:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(6.0 \times 10^{30}\ \text{kg})}{(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})^2}$$

$$= 8.9 \times 10^3\ \text{m} = 8.9\ \text{km} = 5.5\ \text{mi}$$

EVALUAR: La densidad media de este objeto es

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{6.0 \times 10^{30}\ \text{kg}}{\frac{4}{3}\pi(8.9 \times 10^3\ \text{m})^3} = 2.0 \times 10^{18}\ \text{kg/m}^3$$

Esto es aproximadamente 10^{15} veces la densidad de la materia ordinaria en la Tierra y es comparable con la densidad de los núcleos atómicos.

De hecho, una vez que el cuerpo se colapsa a un radio de R_S, nada puede evitar que se colapse más. Toda la masa se comprime a un solo punto llamado *singularidad* en el centro del horizonte de eventos. Este punto tiene volumen cero y, por ende, densidad *infinita*.

Visita a un agujero negro

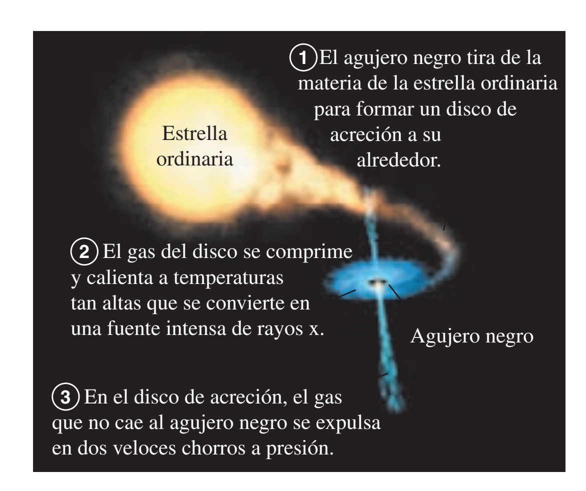
En puntos alejados de un agujero negro, sus efectos gravitacionales son los mismos que los de cualquier cuerpo normal con la misma masa. Si el Sol se colapsara para formar un agujero negro, las órbitas de los planetas no se afectarían. Sin embargo, en las cercanías del agujero negro las cosas son drásticamente distintas. Si el lector decidiera convertirse en un héroe de la ciencia y saltara a un agujero negro, quienes se quedaran atrás observarían varios efectos extraños al moverse usted hacia el horizonte de eventos, casi todos asociados con la relatividad general.

Si usted llevara un radiotransmisor para informar de sus experiencias, habría que sintonizar el receptor continuamente a frecuencias cada vez más bajas por el efecto denominado *desplazamiento gravitacional al rojo*. Junto con este desplazamiento, los observadores percibirían que los relojes de usted (electrónicos o biológicos) avanzarían cada vez más lentamente por el efecto llamado *dilatación del tiempo*. De hecho, a los observadores no les alcanzaría la vida para ver cómo usted llega al horizonte de eventos.

En su marco de referencia, usted llegaría al horizonte de eventos en un tiempo muy corto, pero de forma un tanto desconcertante. Al caer con los pies por delante hacia el agujero negro, la atracción gravitacional sobre los pies sería mayor que sobre la cabeza, la cual estaría un poco más lejos del agujero. Las *diferencias* en la fuerza gravitacional que actúa sobre las distintas partes de su cuerpo serían suficientes para estirarlo a usted en la dirección hacia el agujero negro y comprimirlo en la dirección perpendicular. Estos efectos (llamados *fuerzas de marea*) separarían sus átomos y luego los desgarrarían, antes de que usted llegara al horizonte de eventos.

Detección de agujeros negros

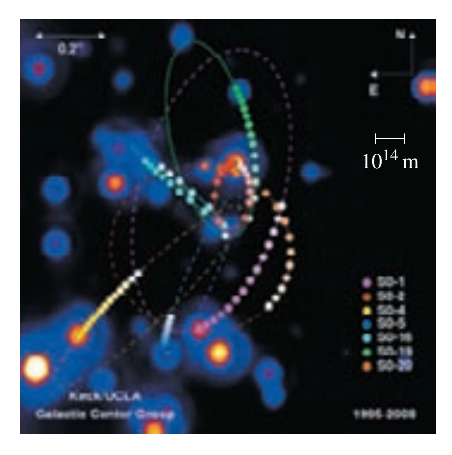
Si la luz no puede escapar de un agujero negro, y si los agujeros negros son tan pequeños como sugiere el ejemplo 13.11, ¿cómo sabemos que tales entidades existen? La respuesta es que si hay gas o polvo cerca de un agujero negro, tenderá a formar un *disco de acreción* que girará en torno del agujero y caerá en él, como en un remolino (figura 13.27). La fricción dentro del material del disco hace que pierda energía mecánica y caiga en espiral hacia el agujero negro, comprimiéndose al hacerlo. Esto



13.27 Sistema de estrellas binarias en el que una estrella ordinaria y un agujero negro giran uno alrededor del otro. El agujero negro no puede verse, pero pueden detectarse los rayos x de su disco de acreción.

causa un calentamiento del material, como sucede con el aire comprimido en una bomba para bicicleta. Se pueden alcanzar temperaturas por encima de 10^6 K en el disco de acreción, de modo que no solo se emite luz visible (como hacen los cuerpos al "rojo vivo" o al "blanco vivo"), sino también rayos x. Los astrónomos buscan estos rayos x (emitidos *antes* de que el material cruce el horizonte de eventos), para detectar la presencia de un agujero negro. Se han hallado varios candidatos prometedores, y los astrónomos han expresado una confianza considerable en la existencia de los agujeros negros.

13.28 Esta imagen de color falso muestra los movimientos de las estrellas en el centro de nuestra galaxia durante un periodo de 13 años. Un análisis de estas órbitas con la tercera ley de Kepler indica que las estrellas se mueven alrededor de un objeto invisible, cuya masa es de unas 4.1×10^6 veces la masa del Sol. La barra de la escala indica una longitud de 10^{14} m (670 veces la distancia entre la Tierra y el Sol) a la distancia del centro galáctico.



La masa de los agujeros negros en sistemas de estrellas binarias, como el de la figura 13.27, es unas cuantas veces mayor que la del Sol, y cada vez hay más pruebas de la existencia de *agujeros negros supermasivos* mucho mayores. Se cree que hay uno en el centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea, a unos 26,000 años luz de la Tierra en la dirección de la constelación Sagitario. Imágenes de alta definición del centro galáctico revelan estrellas que giran a más de 1500 km/s en torno a un objeto invisible que coincide con la posición de una fuente de ondas de radio llamada Sgr A* (figura 13.28). Al analizar estos movimientos, los astrónomos pueden inferir el periodo T y el semieje mayor a de la órbita de cada estrella. Así, se puede calcular la masa m_X del objeto invisible utilizando la tercera ley de Kepler en la forma que se da en la ecuación (13.17), sustituyendo la masa del Sol m_S por m_X:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_X}} \qquad \text{así que} \qquad m_X = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$

La conclusión es que el misterioso objeto oscuro en el centro de la galaxia tiene una masa de 8.2×10^{36} kg, es decir, 4.1 *millones* de veces la masa del Sol. Sin embargo, observaciones efectuadas con radiotelescopios revelan que su radio no es mayor que 4.4×10^{10} m, aproximadamente un tercio de la distancia que hay entre la Tierra y el Sol. Estas observaciones sugieren que este objeto masivo y compacto es un agujero negro con un radio de Schwarzschild de 1.1×10^{10} m. Los astrónomos confían en mejorar la resolución de sus observaciones a tal grado que, en unos pocos años, podrán ver el horizonte de eventos de ese agujero negro.

Otras líneas de investigación sugieren que podría haber agujeros negros aún más grandes, con más de 10^9 masas solares, en el centro de otras galaxias. Los estudios de observación y teóricos sobre agujeros negros de todos tamaños siguen siendo un área de investigación estimulante tanto en la física como en la astronomía.

Evalúe su comprensión de la sección 13.8 Si el Sol llegara a colapsarse para formar un agujero negro, ¿qué efecto tendría este suceso sobre la órbita de la Tierra? **i.** La órbita se encogería; **ii.** la órbita se expandiría; **iii.** la órbita permanecería del mismo tamaño.

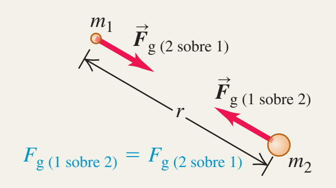


CAPÍTULO 13 RESUMEN



Ley de Newton de la gravitación: Dos cuerpos *cualesquiera* con masas m_1 y m_2, separados por una distancia r, se atraen con fuerzas inversamente proporcionales a r^2. Tales fuerzas forman un par acción-reacción y obedecen la tercera ley de Newton. Si dos o más cuerpos ejercen fuerzas gravitacionales sobre un cuerpo dado, la fuerza gravitacional total que actúa sobre ese cuerpo es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por los otros cuerpos. La interacción gravitacional entre distribuciones esféricas de masa, como los planetas o las estrellas, es igual que si toda la masa estuviera concentrada en el centro. (Véase los ejemplos 13.1 a 13.3 y 13.10).

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \qquad (13.1)$$



Fuerza gravitacional, peso y energía potencial gravitacional: El peso w de un cuerpo es la fuerza gravitacional total ejercida sobre él por todos los demás cuerpos del Universo. Cerca de la superficie de la Tierra (masa m_E y radio R_E), el peso en esencia es igual a la fuerza gravitacional de la Tierra sola. La energía potencial gravitacional U de dos masas m y m_E separadas por una distancia r es inversamente proporcional a r. La energía potencial nunca es positiva; es cero solo cuando los dos cuerpos están infinitamente distantes. (Véase los ejemplos 13.4 y 13.5).

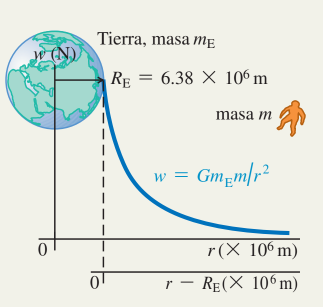
$$w = F_g = \frac{Gm_Em}{R_E^2} \qquad (13.3)$$

(peso en la superficie de la Tierra)

$$g = \frac{Gm_E}{R_E^2} \qquad (13.4)$$

(aceleración debida a la gravedad en la superficie terrestre)

$$U = -\frac{Gm_Em}{r} \qquad (13.9)$$



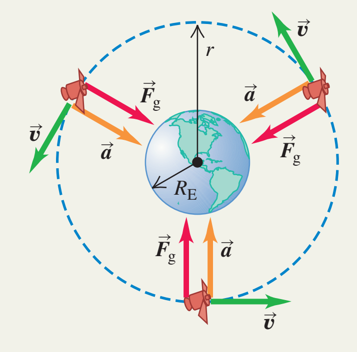
Órbitas: Si un satélite se mueve en una órbita circular, la atracción gravitacional de la Tierra proporciona la aceleración centrípeta. Las tres leyes de Kepler describen el caso más general: la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol o de un satélite alrededor de un planeta. (Véase ejemplos 13.6 a 13.9).

$$v = \sqrt{\frac{Gm_E}{r}} \qquad (13.10)$$

(rapidez en órbita circular)

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{Gm_E}} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{Gm_E}} \qquad (13.12)$$

(periodo en órbita circular)



Agujeros negros: Si una distribución esférica de masa sin rotación, con masa total M, tiene un radio menor que su radio de Schwarzschild, R_S, se clasifica como agujero negro. La interacción gravitacional impide que cualquier cosa, incluida la luz, escape de una esfera con radio R_S. (Véase el ejemplo 13.11).

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \qquad (13.30)$$

(radio de Schwarzschild)



Si todo el cuerpo está dentro del radio de Schwarzschild $R_S = 2GM/c^2$, el cuerpo es un agujero negro.



PROBLEMA PRÁCTICO Rapideces en una órbita elíptica

Un cometa gira en torno al Sol (masa m_S) en una órbita elíptica con semieje mayor a y excentricidad e. *a*) Obtenga las expresiones para las rapideces del cometa en el perihelio y en el afelio. *b*) Evalúe estas expresiones para el cometa Halley (véase el ejemplo 13.9).

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Elabore un dibujo de la situación; muestre todas las dimensiones relevantes. Identifique el perihelio y el afelio.
2. Liste las cantidades desconocidas e identifique las incógnitas.
3. Igual que sucede con un satélite que gira alrededor de la Tierra, la energía mecánica de un cometa alrededor del Sol se conserva. (¿Por qué?). ¿Qué otra cantidad se conserva conforme el cometa se mueve en su órbita? (*Sugerencia:* Véase la sección 13.5).

EJECUTAR

4. Por lo menos serán necesarias dos ecuaciones que incluyan las dos incógnitas, y expresiones para las distancias entre el Sol y el cometa en el perihelio y el afelio. (*Sugerencia:* Véase la figura 13.18).
5. Resuelva las ecuaciones para obtener las incógnitas. Compare las expresiones: ¿Cuál es la menor rapidez? ¿Es lógico?
6. Use las expresiones del paso 5 para obtener los valores de la rapidez en el perihelio y el afelio para el cometa Halley. (*Sugerencia:* Véase el apéndice F).

EVALUAR

7. Compruebe si sus resultados son lógicos para el caso especial de una órbita circular ($e = 0$).

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P13.1 Un estudiante escribió: “La única razón por la que una manzana cae hacia la Tierra en lugar de que esta suba hacia la manzana es que la Tierra tiene una masa mucho mayor y, por lo tanto, tira con una fuerza mucho mayor”. Comente esta aseveración.

P13.2 Un planeta gira en una órbita circular con periodo T alrededor de una estrella. Si orbitara, a la misma distancia, en torno a una estrella con una masa tres veces mayor que la estrella original, ¿el nuevo periodo (en términos de T) sería: *a*) $3T$, *b*) $T\sqrt{3}$, *c*) T, *d*) $T/\sqrt{3}$ o *e*) $T/3$?

P13.3 Si todos los planetas tuvieran la misma densidad media, ¿cómo dependería del radio del planeta la aceleración en la superficie debida a la gravedad?

P13.4 ¿Una libra de mantequilla es la misma cantidad en la Tierra que en Marte? ¿Y un kilogramo de mantequilla? Explique su respuesta.

P13.5 El ejemplo 13.2 (sección 13.1) muestra que la aceleración de cada esfera causada por la fuerza gravitacional es inversamente proporcional a la masa de dicha esfera. ¿Por qué entonces esa fuerza da a todas las masas la misma aceleración cuando se dejan caer cerca de la superficie terrestre?

P13.6 ¿Usted atrae más al Sol al mediodía o a la medianoche? Explique su respuesta.

P13.7 Puesto que la Luna es atraída constantemente hacia la Tierra por la interacción gravitacional, ¿por qué no choca contra la Tierra?

P13.8 Un planeta se mueve en una órbita circular con periodo T alrededor de una estrella. Si el planeta estuviera en órbita a la misma distancia alrededor de esa estrella, pero su masa fuera tres veces mayor, ¿cuál sería el nuevo periodo (en términos de T)? *a*) $3T$, *b*) $T\sqrt{3}$, *c*) T, *d*) $T/\sqrt{3}$ o *e*) $T/3$?

P13.9 El Sol tira de la Luna con una fuerza cuya magnitud es más del doble de la magnitud de la fuerza con que la Tierra atrae a la Luna. ¿Por qué entonces el Sol no “se lleva” a la Luna?

P13.10 En el capítulo 7 se definió la energía potencial gravitacional como $U = mgy$, positiva para un cuerpo de masa m sobre la superficie terrestre (que está en $y = 0$). Sin embargo, en este capítulo definimos la energía potencial gravitacional como $U = -Gm_Em/r$, que es *negativa* para un cuerpo de masa m sobre la superficie terrestre (que está en $r = R_E$). ¿Cómo puede conciliar estas descripciones de la energía potencial gravitacional que, al parecer, son incompatibles?

P13.11 Un planeta se mueve con rapidez constante en una órbita circular alrededor de una estrella. En una órbita completa, ¿la fuerza gravitacional que la estrella ejerce sobre el planeta realiza trabajo neto positivo, negativo o cero? ¿Y si la órbita del planeta fuera elíptica, de modo que la rapidez del planeta no sea constante? Explique sus respuestas.

P13.12 ¿La rapidez de escape para un objeto en la superficie terrestre depende de la dirección en que se lanza? Explique su respuesta. ¿Su respuesta depende de si incluye o no los efectos de la resistencia del aire?

P13.13 Si un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre, ¿qué sucederá si la energía mecánica total (cinética + potencial) es *a*) menor que cero y *b*) mayor que cero? En cada caso, desprecie la resistencia del aire y los efectos gravitacionales del Sol, la Luna y los demás planetas.

P13.14 Diga si la siguiente afirmación es correcta: “En ausencia de resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil lanzado cerca de la superficie terrestre es una *elipse*, no una parábola”.

P13.15 La Tierra está más cerca del Sol en noviembre que en mayo. ¿En cuál de estos meses es mayor su rapidez orbital? Explique su respuesta.

P13.16 Una empresa de comunicaciones desea poner en órbita un satélite que siempre esté directamente sobre el paralelo 45 de la Tierra (latitud 45° norte). Esto implica que el plano de la órbita no pasará por el centro de la Tierra. ¿Es posible tal órbita? ¿Por qué?

P13.17 ¿En qué punto de una órbita elíptica es máxima la aceleración? ¿Y mínima? Justifique sus respuestas.

P13.18 ¿Qué viaje requiere más combustible, de la Tierra a la Luna o de la Luna a la Tierra? Explique su respuesta.

P13.19 ¿Cuál sería la tercera ley de Kepler para órbitas circulares, si una modificación a la ley de Newton de la gravitación hiciera a la fuerza gravitacional inversamente proporcional a r^3? ¿Este cambio afectaría las otras dos leyes de Kepler? Explique su respuesta.

P13.20 En la órbita elíptica del cometa Halley que se ilustra en la figura 13.20*a*, la fuerza de gravedad del Sol hace que el cometa caiga desde el afelio hasta el perihelio. Pero, ¿qué hace que el cometa suba otra vez del perihelio al afelio?

P13.21 Muchas personas creen que los astronautas en órbita sienten que no tienen peso porque están "fuera del alcance de la gravedad terrestre". ¿Qué tan lejos tendría que viajar una nave para estar realmente fuera de la influencia gravitacional de la Tierra? En tal caso, ¿permanecería en órbita la nave? Explique su respuesta. ¿Cuál es la razón real por la que los astronautas en órbita se sienten sin peso?

P13.22 Como parte de su capacitación, los astronautas viajan en un avión que vuela en la misma trayectoria parabólica que un proyectil en caída libre. Explique por qué esto provoca la misma sensación de ingravidez aparente que estar en órbita.

EJERCICIOS

Sección 13.1 Ley de Newton de la gravitación

13.1 • ¿Cuál es la razón que hay entre la atracción gravitacional del Sol sobre la Luna y la de la Tierra sobre la Luna? (Suponga que la distancia entre la Luna y el Sol es aproximadamente la misma que entre la Tierra y el Sol). Use los datos del apéndice F. ¿Es más preciso decir que la Luna está en órbita alrededor de la Tierra o del Sol?

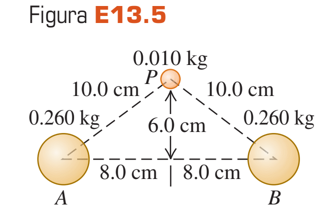
13.2 •• **PA** **Experimento de Cavendish.** En la balanza de Cavendish que se ilustra en la figura 13.4, suponga que $m_1 = 1.10$ kg, $m_2 = 25.0$ kg y la varilla que conecta a las esferas de masa m_1 mide 30.0 cm de longitud. Si la distancia del centro de cada esfera de masa m_1 al centro de la esfera de masa m_2 más cercana es de 12.0 cm, calcule *a*) la fuerza neta y *b*) la torca neta (alrededor del eje de rotación) en la parte giratoria del aparato. *c*) ¿Parece que la torca del inciso *b*) sería suficiente para hacer girar la varilla con facilidad? Sugiera algunas maneras de mejorar la sensibilidad de este experimento.

13.3 • **Cita en el espacio.** Una pareja de astronautas acuerda citarse en el espacio después de unas horas. Su plan es dejar que la fuerza de gravedad los reúna. Uno de ellos tiene una masa de 65 kg y el otro una masa de 72 kg, y parten del reposo estando separados una distancia de 20.0 m. *a*) Elabore un diagrama de cuerpo libre de cada astronauta y úselo para determinar la aceleración inicial del individuo. Como una aproximación burda, se puede modelar a los astronautas como esferas uniformes. *b*) Si la aceleración de los astronautas es constante, ¿cuántos días tendrían que esperar para estar juntos? (¡Cuidado! *Ambos* astronautas aceleran el uno hacia el otro). *c*) De hecho, ¿su aceleración permanecería constante? Si no, ¿aumentaría o disminuiría? ¿Por qué?

13.4 •• Dos esferas uniformes, ambas con masa M y radio R, se tocan entre sí. ¿Qué magnitud tiene su fuerza de atracción gravitacional?

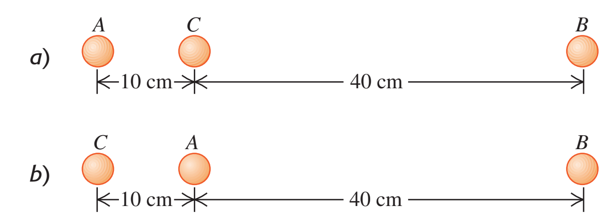
13.5 • Dos esferas uniformes de 0.260 kg están fijas en los puntos A y B (figura E13.5). Calcule la magnitud y la dirección de la aceleración inicial de una esfera uniforme con masa de 0.010 kg que se suelta del reposo en P, suponiendo que solo actúan sobre ella las fuerzas gravitacionales ejercidas por las esferas A y B.

Figura **E13.5**



13.6 •• Obtenga la magnitud y la dirección de la fuerza gravitacional neta que las masas B y C ejercen sobre la masa A en la figura E13.6. Cada masa es de 2.00 kg.

Figura **E13.6**



13.7 • Una persona adulta promedio tiene una masa aproximada de 70 kg. *a*) ¿Qué fuerza ejerce la Luna llena sobre ella, si está directamente arriba de su cabeza y tiene su centro a 378,000 km? *b*) Compare esta fuerza con la fuerza que la Tierra ejerce sobre la persona.

13.8 •• Una masa puntual de 8.00 kg y una masa puntual de 15.0 kg están separadas 50.0 cm. Se suelta una partícula de masa m desde un punto entre las dos masas a 20.0 cm de la masa de 8.00 kg en la línea que conecta las dos masas fijas. Obtenga la magnitud y la dirección de la aceleración de la partícula.

13.9 •• Una partícula de masa $3m$ se localiza a 1.00 m de una partícula de masa m. *a*) ¿Dónde debería colocar usted una tercera masa M, de manera que la fuerza gravitacional neta sobre M debida a las dos masas sea exactamente igual a cero? *b*) ¿En este punto, el equilibrio de M es estable o inestable, **i.** para puntos en la línea que une m y $3m$, y **ii.** para puntos en una línea que pasa por M y es perpendicular a la línea que conecta m y $3m$?

13.10 •• Las masas puntuales m y $2m$ están sobre el eje x, con m en el origen y $2m$ en $x = L$. Una tercera masa puntual M se mueve a lo largo del eje x. *a*) ¿En qué punto la fuerza gravitacional neta sobre M, debida a las otras dos masas, es igual a cero? *b*) Elabore un diagrama de la componente x de la fuerza neta sobre M debida a m y a $2m$, considerando las cantidades a la derecha como positivas. Incluya las regiones $x < 0$, $0 < x < L$ y $x > L$. Tenga especial cuidado en mostrar el comportamiento de la gráfica en los lados $x = 0$ y $x = L$.

Sección 13.2 Peso

13.11 •• ¿A qué distancia sobre la superficie terrestre la aceleración debida a la gravedad es de 0.980 m/s^2, si en la superficie tiene una magnitud de 9.80 m/s^2?

13.12 • La masa de Venus es el 81.5% de la masa de la Tierra, y su radio es el 94.9% del radio de la Tierra. *a*) Calcule la aceleración debida a la gravedad en la superficie de Venus con estos datos. *b*) Si una roca pesa 75.0 N en la Tierra, ¿cuánto pesará en la superficie de Venus?

13.13 • Titania, la luna más grande de Urano, tiene $\frac{1}{8}$ del radio terrestre y $\frac{1}{1700}$ de la masa de la Tierra. *a*) Calcule la aceleración debida a la gravedad en su superficie. *b*) Obtenga la densidad media de Titania. (Es menor que la densidad de las rocas, lo cual es una evidencia de que Titania está constituida principalmente por hielo).

13.14 • Rea, una de las lunas de Saturno, tiene un radio de 765 km y una aceleración debida a la gravedad de 0.278 m/s^2 en su superficie. Calcule su masa y densidad media.

13.15 •• Calcule la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre un astronauta de 75 kg, quien está reparando el telescopio espacial Hubble a una altura de 600 km sobre la superficie terrestre, y compare ese va-

lor con su peso en la superficie de la Tierra. Con base en su resultado, explique por qué decimos que los astronautas no tienen peso cuando están en órbita alrededor de la Tierra en un satélite como el transbordador espacial. ¿Se debe a que la atracción gravitacional terrestre es tan pequeña que se puede despreciar?

Sección 13.3 Energía potencial gravitacional

13.16 •• **Volcanes en Io.** La luna de Júpiter llamada Io tiene volcanes activos (de hecho, es el cuerpo volcánico más activo del Sistema Solar), que expulsa material hasta 500 km arriba de la superficie (o inclusive más alto). Io tiene una masa de 8.94×10^{22} kg y un radio de 1815 km. Ignore cualquier variación de la gravedad en un intervalo de 500 km de escombros. ¿A qué altura subiría este material en la Tierra si fuera expulsado con la misma rapidez que en Io?

13.17 • Use los resultados del ejemplo 13.5 (sección 13.3) para calcular la rapidez de escape de una nave: *a*) desde la superficie de Marte, y *b*) desde la superficie de Júpiter. Use los datos del apéndice F. *c*) ¿Por qué la rapidez de escape de la nave es independiente de su masa?

13.18 •• Diez días después de lanzarse hacia Marte en diciembre de 1998, la nave *Mars Climate Orbiter* (masa de 629 kg) estaba a 2.87×10^6 km de la Tierra, viajando con rapidez de 1.20×10^4 km/h relativa a la Tierra. Para ese instante, calcule *a*) la energía cinética de la nave relativa a la Tierra y *b*) la energía potencial del sistema Tierra-nave.

Sección 13.4 Movimiento de satélites

13.19 • Para que un satélite tenga una órbita circular de 780 km arriba de la superficie terrestre, *a*) ¿qué rapidez orbital debe tener? y *b*) ¿cuál es el periodo de la órbita (en horas)?

13.20 •• **Misión Aura.** El 15 de julio de 2004, la NASA lanzó la nave espacial Aura para estudiar el clima y la atmósfera terrestres. Este satélite fue puesto en una órbita a 705 km sobre la superficie terrestre. Suponga una órbita circular. *a*) ¿Cuántas horas le tomará a este satélite completar una órbita? *b*) ¿Qué tan rápido (en km/s) se mueve la nave espacial Aura?

13.21 •• Dos satélites tienen órbitas circulares alrededor de un planeta de radio igual a 9.00×10^6 m. Un satélite tiene una masa de 68.0 kg, radio orbital de 5.00×10^7 m, y rapidez orbital de 4800 m/s. El segundo satélite tiene una masa de 84.0 kg y radio orbital de 3.00×10^7 m. ¿Cuál es la rapidez orbital de este segundo satélite?

13.22 •• **Estación Espacial Internacional.** La Estación Espacial Internacional efectúa 15.65 revoluciones por día en su órbita alrededor de la Tierra. Suponiendo una órbita circular, ¿qué tan alto con respecto a la superficie terrestre debe estar dicho satélite?

13.23 • Deimos, una luna de Marte, tiene un diámetro aproximado de 12 km y una masa de 2.0×10^{15} kg. Suponga que usted está varado solo en Deimos y quiere jugar béisbol. ¡Usted mismo sería el lanzador y el bateador! *a*) ¿Con qué rapidez tendría que lanzar la pelota para que entre en órbita justo por encima de la superficie y vuelva a donde usted está listo para batearla? ¿Cree que podría lanzarla con esa rapidez? *b*) ¿Cuánto tiempo (en horas) después del lanzamiento, la pelota debería estar lista para ser bateada? ¿Sería un juego de béisbol emocionante?

Sección 13.5 Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas

13.24 •• **Planeta Vulcano.** Suponga que se descubre un planeta entre el Sol y Mercurio, con una órbita circular de radio igual a $\frac{2}{3}$ del radio orbital medio de Mercurio. ¿Qué periodo orbital tendría ese planeta? (Llegó a postularse la existencia de tal planeta, en parte para explicar la precesión de la órbita de Mercurio. Incluso recibió el nombre Vulcano, aunque no tenemos pruebas de que realmente exista. La precesión de Mercurio se ha explicado con base en la relatividad general).

13.25 •• La estrella Rho^1 Cancri está a 57 años luz de la Tierra y su masa es 0.85 veces la del Sol. Se ha detectado un planeta en órbita circular en torno a Rho^1 Cancri, con un radio orbital igual a 0.11 veces el radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol. Calcule *a*) la rapidez orbital y *b*) el periodo orbital del planeta de Rho^1 Cancri.

13.26 •• En marzo de 2006, se descubrieron dos satélites pequeños en órbita alrededor de Plutón: uno a una distancia de 48,000 km y el otro a 64,000 km. Ya se sabe que Plutón tiene un satélite grande, Caronte, el cual orbita a 19,600 km y tiene un periodo orbital de 6.39 días. Suponiendo que los satélites no se afectan mutuamente, encuentre los periodos orbitales de los dos satélites pequeños *sin* considerar la masa de Plutón.

13.27 • *a*) Use la figura 13.18 para demostrar que la distancia entre el Sol y el planeta en el perihelio es $(1 - e)a$, que en el afelio es $(1 + e)a$ y que, por lo tanto, la suma de estas dos distancias es $2a$. *b*) Cuando el planeta enano Plutón se encontraba en su perihelio en 1989, estaba casi 100 millones de km más cerca del Sol que Neptuno. Los semiejes mayores de las órbitas de Plutón y Neptuno son 5.92×10^{12} m y 4.50×10^{12} m, respectivamente, y sus excentricidades son 0.248 y 0.010. Calcule la distancia más corta de Plutón al Sol y la más grande de Neptuno al Sol. *c*) ¿Cuántos años, después de haberse ubicado en su perihelio en 1989, Plutón volverá a estar en su perihelio?

13.28 •• **Júpiter caliente.** En 2004 los astrónomos informaron el descubrimiento de un planeta del tamaño de Júpiter con una órbita muy cercana a la estrella HD 179949 (de ahí el término "Júpiter caliente"). La órbita estaba solo a $\frac{1}{9}$ de la distancia de Mercurio al Sol, y al planeta le tomó solo 3.09 días efectuar una órbita (que se supone circular). *a*) ¿Cuál es la masa de la estrella? Exprese su respuesta en kilogramos y como múltiplo de la masa del Sol. *b*) ¿Qué tan rápido (en km/s) se mueve este planeta?

13.29 •• **Planetas más allá del Sistema Solar.** El 15 de octubre de 2001, se descubrió un planeta orbitando alrededor de la estrella HD 68988. Su distancia orbital se midió en 10.5 millones de kilómetros a partir del centro de la estrella, y su periodo orbital se estimó en 6.3 días. ¿Cuál es la masa de HD 68988? Exprese su respuesta en kilogramos y en términos de la masa del Sol. (Consulte el apéndice F).

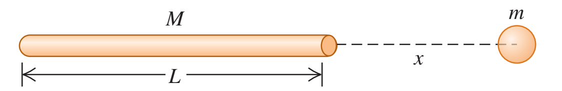
Sección 13.6 Distribuciones esféricas de masa

13.30 • Un cascarón esférico uniforme de 1000.0 kg tiene un radio de 5.00 m. *a*) Calcule la fuerza gravitacional que dicho cascarón ejerce sobre una masa puntual de 2.00 kg colocada a las siguientes distancias del centro del cascarón: **i.** 5.01 m, **ii.** 4.99 m, **iii.** 2.72 m. *b*) Dibuje una gráfica cualitativa de la magnitud de la fuerza gravitacional que esta esfera ejerce sobre una masa puntual m en función de la distancia r de m desde el centro de la esfera. Incluya la región desde $r = 0$ hasta $r \rightarrow \infty$.

13.31 •• Una esfera sólida uniforme de 1000.0 kg tiene un radio de 5.00 m. *a*) Obtenga la fuerza gravitacional que esta esfera ejerce sobre una masa puntual de 2.00 kg colocada a las siguientes distancias del centro de la esfera: **i.** 5.01 m y **ii.** 2.50 m. *b*) Dibuje una gráfica cualitativa de la magnitud de la fuerza gravitacional que esta esfera ejerce sobre una masa puntual m en función de la distancia r de m desde el centro de la esfera. Incluya la región desde $r = 0$ hasta $r \rightarrow \infty$.

13.32 • CALC Una varilla delgada uniforme tiene longitud L y masa M. Una esfera uniforme pequeña de masa m se coloca a una distancia x de un extremo de la varilla, sobre el eje de esta (figura E13.32). *a*) Calcule

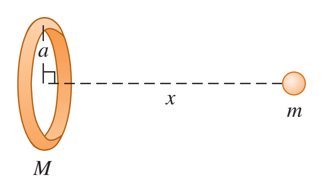
Figura **E13.32**



la energía potencial gravitacional del sistema varilla-esfera. Tome la energía potencial igual a cero cuando la varilla y la esfera están separadas una distancia infinita. Demuestre que su respuesta se reduce al resultado esperado cuando x es mucho mayor que L. [*Sugerencia:* Use la expansión en forma de serie de potencias que se da en el apéndice B para $\ln(1 + x)$]. *b*) Utilice $F_x = -dU/dx$ para calcular la magnitud y la dirección de la fuerza gravitacional que la varilla ejerce sobre la esfera (véase la sección 7.4). Demuestre que su respuesta se reduce al resultado esperado cuando x es mucho mayor que L.

13.33 • **CALC** Considere el cuerpo con forma de anillo de la figura E13.33. Una partícula de masa m se coloca a una distancia x del centro del anillo, sobre la línea que pasa por el centro y es perpendicular al plano del anillo. *a*) Calcule la energía potencial gravitacional U de este sistema. Tome la energía potencial igual a cero cuando los dos objetos están muy alejados. *b*) Demuestre que su respuesta al inciso *a*) se reduce al resultado esperado cuando x es mucho mayor que el radio a del anillo. *c*) Use $F_x = -dU/dx$ para obtener la magnitud y la dirección de la fuerza que actúa sobre la partícula (véase la sección 7.4). *d*) Demuestre que su respuesta al inciso *c*) se reduce al resultado esperado cuando x es mucho mayor que a. *e*) ¿Cuánto valen U y F_x cuando $x = 0$? Explique por qué son lógicos estos resultados.

Figura **E13.33**



Sección 13.7 Peso aparente y rotación terrestre

13.34 •• **Una visita a Santa.** Usted decide visitar a Santa Claus en el Polo Norte para ponerlo al corriente de su excelente comportamiento durante el año. Mientras está ahí, observa que el elfo Sneezy, cuando cuelga de una cuerda, genera una tensión de 475.0 N en esta. Si Sneezy cuelga de una cuerda similar mientras entrega regalos en el ecuador de la Tierra, ¿cuál será la tensión en ella? (Recuerde que la Tierra gira alrededor de un eje que pasa por los polos Norte y Sur). Consulte el apéndice F y comience con un diagrama de cuerpo libre de Sneezy en el ecuador.

13.35 • La aceleración debida a la gravedad en el Polo Norte de Neptuno es cercana a $10.7\ \text{m/s}^2$. Neptuno tiene una masa de 1.0×10^{26} kg, un radio de 2.5×10^4 km y gira una vez alrededor de su eje en aproximadamente 16 h. *a*) Calcule la fuerza gravitacional que actúa sobre un objeto de 5.0 kg en el Polo Norte de Neptuno. *b*) ¿Qué peso aparente tiene ese mismo objeto en el ecuador de Neptuno? (*Nota:* La “superficie” de Neptuno es gaseosa, no sólida, así que no podríamos ponernos de pie ahí).

Sección 13.8 Agujeros negros

13.36 •• **Miniagujeros negros.** Los cosmólogos han especulado que agujeros negros del tamaño de un protón pudieron haberse formado en los días posteriores al Big Bang cuando inició el Universo. Si tomamos el diámetro de un protón como 1.0×10^{-15} m, ¿cuál sería la masa de un miniagujero negro?

13.37 •• **En el centro de la galaxia.** Los astrónomos han observado un objeto pequeño y masivo en el centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea (véase la sección 13.8). Un anillo de material orbita este objeto masivo; el anillo tiene un diámetro aproximado de 15 años luz y rapidez orbital aproximada de 200 km/s. *a*) Determine la masa del objeto central de la Vía Láctea. Dé su respuesta en kg y en masas solares (una masa solar es la masa del Sol). *b*) Observaciones de estrellas y las teorías acerca de su estructura sugieren que es imposible que una sola estrella tenga una masa mayor de unas 50 masas solares. ¿Podría el objeto masivo ser una simple estrella ordinaria? *c*) Muchos astrónomos creen que el objeto masivo en el centro de la Vía Láctea es un agujero negro. De ser así, ¿qué radio de Schwarzschild tendría? ¿Un agujero negro de este tamaño cabría dentro de la órbita de la Tierra en torno al Sol?

13.38 • *a*) Demuestre que un agujero negro atrae a un objeto de masa m con una fuerza de $mc^2R_S/(2r^2)$, donde r es la distancia entre el objeto y el centro del agujero negro. *b*) Calcule la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por un agujero negro con radio de Schwarzschild de 14.0 mm sobre una masa de 5.00 kg a 3000 km de distancia. *c*) ¿Qué masa tiene este agujero negro?

13.39 • En 2005 los astrónomos anunciaron el descubrimiento de un enorme agujero negro en la galaxia Markarian 766 que tenía aglomeraciones de materia orbitando alrededor una vez cada 27 horas y moviéndose a 30,000 km/s. *a*) ¿Qué tan lejos están estas aglomeraciones del centro del agujero negro? *b*) ¿Cuál es la masa de este agujero negro suponiendo órbitas circulares? Exprese su respuesta en kilogramos y como múltiplos de la masa de nuestro Sol. *c*) ¿Cuál es el radio de su horizonte de eventos?

PROBLEMAS

13.40 ••• En las esquinas de un cuadrado que mide 10.0 cm por lado, se colocan cuatro masas idénticas de 800 kg cada una. ¿Qué fuerza gravitacional neta (magnitud y dirección) actúa sobre una de las masas, debida a las otras tres?

13.41 ••• Las estrellas de neutrones, como la que está en el centro de la nebulosa del Cangrejo, tienen aproximadamente la misma masa que el Sol, pero un diámetro *mucho* más pequeño. Si una persona pesa 675 N en la Tierra, ¿cuánto pesaría en la superficie de una estrella de neutrones que tuviera la misma masa que el Sol y un diámetro de 20 km?

13.42 ••• **PA** **Exploración de Europa.** Hay evidencia contundente de que Europa, un satélite de Júpiter, tiene un océano líquido debajo de su superficie congelada. Muchos científicos creen que se debería enviar un vehículo explorador ahí para buscar señales de vida. Antes de lanzarlo, se debería probar tal vehículo en las condiciones de la gravedad en la superficie de Europa. Una forma de hacerlo consiste en colocar el vehículo explorador en el extremo de un brazo giratorio en un satélite en órbita terrestre. Si el brazo tiene 4.25 m de longitud y pivota en uno de sus extremos, ¿con qué rapidez angular (en rpm) debería girar para que la aceleración del vehículo fuera la misma que la aceleración debida a la gravedad en la superficie de Europa? La masa de Europa es de 4.8×10^{22} kg y tiene un diámetro de 3138 km.

13.43 • Tres esferas uniformes están fijas en las posiciones indicadas en la figura P13.43. *a*) ¿Qué magnitud y dirección tiene la fuerza que actúa sobre una partícula de 0.0150 kg colocada en P? *b*) Si las esferas están en el espacio profundo y una partícula de 0.0150 kg se suelta del reposo a 300 m del origen sobre una línea inclinada 45° abajo del eje $-x$, ¿qué rapidez tendrá la partícula cuando llegue al origen?

Figura **P13.43**

13.44 •• Una esfera uniforme con masa de 60.0 kg se sostiene con su centro en el origen, y una segunda esfera uniforme con masa de 80.0 kg se sostiene con su centro en el punto $x = 0$, $y = 3.00$ m. *a*) ¿Qué magnitud y dirección tiene la fuerza gravitacional neta que estas esferas ejercen sobre una tercera esfera uniforme con masa de 0.500 kg cuyo centro está en el punto $x = 4.00$ m, $y = 0$? *b*) ¿En qué posición, que no sea a una distancia infinita, podría colocarse la tercera esfera de modo que la fuerza gravitacional neta que actúa sobre ella debida a las otras dos esferas sea cero?

13.45 •• PA BIO **Desgaste de cadera en la Luna.** *a*) Use los datos del apéndice F para calcular la aceleración debida a la gravedad en la Luna. *b*) Calcule la fuerza de fricción sobre una astronauta de 65 kg que camina en la Luna transportando un paquete de instrumentos de 43 kg si el coeficiente de fricción cinética en la articulación de su cadera es de 0.0050. *c*) ¿Cuál sería la fuerza de fricción en la Tierra para esta astronauta?

13.46 •• **Misión en Titán.** El 25 de diciembre de 2004, la sonda *Huygens* se separó de la nave espacial que orbitaba Saturno e inició una misión de 22 días en la luna gigante de Saturno, Titán, sobre cuya superficie se posó. Además de los datos del apéndice F, es importante saber que Titán está a 1.22×10^6 km del centro de Saturno y tiene una masa de 1.35×10^{23} kg y un diámetro de 5150 km. ¿A qué distancia de Titán su atracción gravitacional equilibrará la atracción gravitacional de Saturno?

13.47 •• El asteroide Toro tiene un radio de 5.0 km aproximadamente. Consulte el apéndice F si es necesario. *a*) Suponiendo que la densidad de Toro es la misma que la de la Tierra (5.5 g/cm^3), calcule su masa total y obtenga la aceleración en su superficie debida a la gravedad. *b*) Suponga que un objeto se coloca en órbita circular alrededor de Toro, con un radio ligeramente más grande que el radio del asteroide. ¿Cuál es la rapidez del objeto? ¿Podría lanzarse usted mismo en órbita alrededor de Toro si corre?

13.48 ••• En cierto instante, la Tierra, la Luna y una nave estacionaria de 1250 kg están en los vértices de un triángulo equilátero, cuyos lados miden 3.84×10^5 km de longitud. *a*) Calcule la magnitud y dirección de la fuerza gravitacional neta que la Tierra y la Luna ejercen sobre la nave. Exprese la dirección en términos de un ángulo medido a partir de una línea que pasa por la Tierra y la nave. En un dibujo, muestre la Tierra, la Luna, la nave y el vector fuerza. *b*) ¿Qué cantidad mínima de trabajo tendría que efectuarse para desplazar la nave a un punto distante de la Tierra y la Luna? Pueden despreciarse los efectos gravitacionales debidos a los demás planetas y al Sol.

13.49 ••• PA Se realiza un experimento en el espacio profundo con dos esferas uniformes, una con masa de 50.0 kg y la otra con masa de 100.0 kg. El radio de las dos esferas es el mismo: $r = 0.20$ m. Las esferas se sueltan del reposo con sus centros separados 40.0 m, y aceleran una hacia la otra por su atracción gravitacional mutua. Ignore todas las demás fuerzas gravitacionales. *a*) Explique por qué se conserva el momento lineal. *b*) Cuando sus centros están separados 20.0 m, **i.** ¿qué rapidez tiene cada esfera? y **ii.** ¿con qué magnitud de velocidad relativa se acerca una esfera a la otra? *c*) ¿A qué distancia de la posición inicial del centro de la esfera de 50.0 kg chocan las superficies de las dos esferas?

13.50 •• PA **Submarinos en Europa.** Algunos científicos están deseosos de enviar un submarino de control remoto a la luna de Júpiter, Europa, con la finalidad de buscar vida en sus océanos debajo de la capa de hielo. Se ha medido la masa de Europa como 4.8×10^{22} kg, su diámetro es de 3138 km, y no tiene atmósfera apreciable. Suponga que la capa de hielo en la superficie no es lo suficientemente gruesa para ejercer una fuerza considerable sobre el agua. Si las ventanas del submarino que se diseñó son cuadradas, tienen 25.0 cm por lado, y pueden resistir una fuerza máxima hacia adentro de 9750 N por ventana, ¿cuál es la máxima profundidad a la que puede viajar con seguridad el submarino?

13.51 • **Satélites geosincrónicos.** Muchos satélites se mueven en un círculo en el plano ecuatorial de la Tierra y están a tal altura que siempre permanecen sobre el mismo punto. *a*) Determine la altura de estos satélites sobre la superficie terrestre. (Una órbita con estas características se llama *geosincrónica*). *b*) Explique, con un dibujo, por qué las señales de radio de estos satélites no pueden llegar directamente a receptores terrestres situados a más de 81.3° de latitud norte.

13.52 ••• Un módulo de descenso con masa de 12,500 kg está en órbita circular a una distancia de 5.75×10^5 m sobre la superficie de un planeta. El periodo de la órbita es de 5800 s. Los astronautas del módulo han determinado que el diámetro del planeta es de 9.60×10^6 m. El módulo desciende en el Polo Norte del planeta. ¿Cuánto pesará un astronauta de 85.6 kg al ponerse de pie en la superficie del planeta?

13.53 ••• Determine la rapidez de escape desde un asteroide de 300 km de diámetro y densidad de 2500 kg/m^3.

13.54 •• *a*) Los asteroides tienen densidades medias del orden de 2500 kg/m^3 y radios desde 470 km hasta menos de 1 km. Suponiendo que un asteroide tiene una distribución esféricamente simétrica de masa, estime el radio del asteroide más grande del que podría escapar con solo saltar. (*Sugerencia:* Puede estimar su rapidez de salto relacionándola con la altura máxima que puede saltar en la Tierra). *b*) Europa, una de las cuatro lunas grandes de Júpiter, tiene un radio de 1570 km. La aceleración debida a la gravedad en su superficie es de 1.33 m/s^2. Calcule su densidad media.

13.55 ••• *a*) Suponga que está en el ecuador de la Tierra y observa un satélite que pasa directamente arriba en dirección oeste a este. Exactamente 12.0 horas después, observa otra vez el satélite directamente arriba de su cabeza. ¿A qué altura sobre la superficie terrestre está la órbita del satélite? *b*) Ahora observa otro satélite que se mueve de este a oeste y pasa directamente arriba de su cabeza. El satélite vuelve a estar en esa posición 12.0 horas después. ¿A qué distancia sobre la superficie terrestre está su órbita?

13.56 •• El planeta X gira de forma análoga a la Tierra alrededor de un eje que pasa por sus polos Norte y Sur, y es perfectamente esférico. Un astronauta que pesa 943.0 N en la Tierra pesa 915.0 N en el Polo Norte del planeta X y solo 850.0 N en su ecuador. La distancia entre el Polo Norte y el ecuador es de 18,850 km, medidos sobre la superficie del planeta X. *a*) ¿Qué duración tiene el día en el planeta X? *b*) Si un satélite de 45,000 kg se coloca en órbita circular 2000 km arriba de la superficie del planeta X, ¿qué periodo orbital tendrá?

13.57 •• Hay dos ecuaciones para calcular el cambio en la energía potencial gravitacional U del sistema de una masa m y la Tierra. Una es $U = mgy$ (ecuación 7.2) y la otra es $U = -Gm_E m/r$ (ecuación 13.9). Como se demostró en la sección 13.3, la primera solo es correcta si la fuerza gravitacional es constante dentro del cambio de altura Δy. La segunda siempre es correcta. En realidad, la fuerza gravitacional nunca es exactamente constante dentro de cualquier cambio de altura, pero si la variación es pequeña, podemos despreciarla. Considere la diferencia de U entre una masa en la superficie terrestre y a una distancia h arriba de ella, usando ambas ecuaciones, y determine el valor de h con el que la ecuación (7.2) tiene un error de 1%. Exprese h como una fracción del radio de la Tierra y también como valor numérico.

13.58 ••• PA Imagine que usted es el principal ingeniero científico de la nave *Despistado Errante*, la cual se posa en el misterioso planeta Mongo. Usted efectúa estas mediciones: una piedra de 2.50 kg lanzada hacia arriba desde el suelo a 12.0 m/s vuelve al suelo en 6.00 s; la circunferencia de Mongo en el ecuador es de 2.00×10^5 km; y el planeta carece prácticamente de atmósfera. El capitán Confusión, comandante de la nave, pide la siguiente información: *a*) ¿Qué masa tiene Mongo? *b*) Si el *Despistado Errante* se coloca en una órbita circular 30,000 km arriba de la superficie de Mongo, ¿cuántas horas tardará en dar una vuelta completa al planeta?

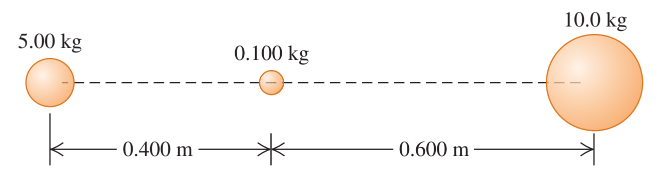
13.59 •• PA Un astronauta, cuya misión es ir donde nadie ha ido antes, desciende sobre un planeta esférico en una galaxia lejana. Cuando se encuentra en la superficie del planeta, libera del reposo una roca pequeña y determina que esta tarda 0.480 s en caer 1.90 m. Si el radio del planeta es de 8.60×10^7 m, ¿cuál es la masa del planeta?

13.60 •• En el ejemplo 13.5 (sección 13.3), despreciamos los efectos gravitacionales de la Luna sobre una nave que viaja de la Tierra a la Luna. De hecho, debemos incluir también la energía potencial gravitacional debida a la Luna. Para este problema, desprecie los movimientos de ambos cuerpos. *a*) Si la Luna tiene radio R_M y la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna es R_{EM}, calcule la energía potencial gravitacional total de los sistemas partícula-Tierra y partícula-Luna, cuando una partícula de masa m está entre ambos cuerpos, a una distancia r del centro de la Tierra. Sea la energía potencial gravitacional cero cuando los objetos están muy alejados entre sí. *b*) Hay un punto en la línea entre la Tierra y la Luna, donde la fuerza gravitacional neta es cero. Use la expresión que dedujo en *a*) y valores numéricos del apéndice F para calcular la distancia de este punto al centro de la Tierra. ¿Con qué rapidez debe lanzarse una nave desde la superficie terrestre para llegar apenas a este punto? *c*) Si se lanzara una nave de la superficie terrestre a la Luna con una rapidez inicial de 11.2 km/s, ¿qué rapidez tendría al chocar contra la Luna?

13.61 •• Calcule la diferencia porcentual entre el peso que tiene usted en Sacramento, al nivel del mar, y en la cima del monte Everest, que está a 8800 m sobre el nivel del mar.

13.62 •• La esfera de 0.100 kg de la figura P13.62 se libera del reposo en la posición que se indica en el diagrama, con su centro a 0.400 m del centro de masa de 5.00 kg. Suponga que las únicas fuerzas sobre la esfera de 0.100 kg son las fuerzas gravitacionales ejercidas por las otras dos esferas (de 5.00 y 10.0 kg), las cuales se mantienen en su lugar. ¿Cuál es la rapidez de la esfera de 0.100 kg cuando se ha movido 0.400 m a la derecha de su posición inicial?

Figura **P13.62**



13.63 ••• Una nave no tripulada está en órbita circular alrededor de la Luna, observando la superficie lunar desde una altura de 50.0 km (véase el apéndice F). Para consternación de los científicos en la Tierra, un desperfecto eléctrico hace que un motor a bordo se incendie y reduzca la rapidez de la nave en 20.0 m/s. Si no se corrige la órbita, ¿con qué rapidez (en km/h) chocará la nave contra la superficie lunar?

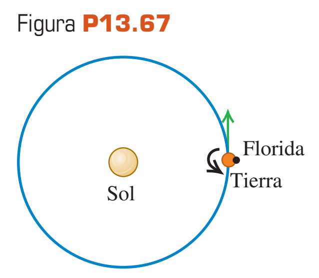
13.64 ••• **Masa de un cometa.** El 4 de julio de 2005, la nave espacial de la NASA Deep Impact disparó un proyectil a la superficie del cometa Tempel 1, el cual mide aproximadamente 9.0 km de diámetro. Observaciones de los restos superficiales liberados por el impacto mostraron que el polvo, con una rapidez tan baja como 1.0 m/s, podía escapar del cometa. *a*) Suponiendo una forma esférica, ¿cuál es la masa de este cometa? (*Sugerencia:* Véase el ejemplo 13.5 en la sección 13.3). *b*) ¿Qué tan alejados del centro del cometa estarán los restos cuando hayan perdido **i.** el 90.0% de la energía cinética inicial en la superficie, y **ii.** toda su energía cinética inicial en la superficie?

13.65 • **Martillo que cae.** Un martillo de masa m se deja caer del reposo desde una altura h arriba de la superficie terrestre, no necesariamente pequeña en comparación con el radio R_E de la Tierra. Despreciando la resistencia del aire, deduzca una expresión para la rapidez v del martillo cuando llega a la superficie terrestre. Su expresión deberá incluir h, R_E y m_E, la masa de la Tierra.

13.66 • *a*) Calcule cuánto trabajo se requiere para lanzar una nave espacial de masa m desde la superficie de la Tierra (masa m_E, radio R_E) y colocarla en una *órbita baja* circular, es decir, una órbita cuya altura sobre la superficie terrestre es mucho menor que R_E. (Por ejemplo, la Estación Espacial Internacional está en órbita baja a una altura aproximada de 400 km, mucho menor que $R_E = 6380$ km). Se puede despreciar la energía cinética que la nave tiene en el suelo debido a la rotación de nuestro planeta. *b*) Calcule la cantidad mínima de trabajo adicional requerida para pasar la nave de una órbita baja a una distancia muy grande desde la Tierra. Se pueden ignorar los efectos gravitacionales del Sol, la Luna y los demás planetas. *c*) Justifique la afirmación de que "en términos de energía, una órbita baja está a la mitad de la distancia a los confines del Universo".

13.67 • Se va a lanzar una nave de la superficie terrestre, de modo que escape del Sistema Solar. *a*) Calcule la rapidez relativa al centro de la Tierra con que se debe lanzar la nave. Tenga en cuenta los efectos gravitacionales de la Tierra y el Sol, e incluya los efectos de la rapidez orbital de la Tierra, pero desprecie la resistencia del aire. *b*) La rotación terrestre puede ayudar a esta nave a alcanzar la rapidez de escape. Calcule la rapidez que la nave debe tener relativa a la *superficie* terrestre, si se lanza de Florida en el punto indicado en la figura P13.67. Los movimientos rotacional y orbital de la Tierra tienen la misma dirección. Las instalaciones de lanzamiento de Florida están 28.5° al norte del ecuador. *c*) La Agencia Espacial Europea (ESA) usa instalaciones de lanzamiento en la Guyana Francesa (inmediatamente al norte de Brasil), 5.15° al norte del ecuador. ¿Qué rapidez relativa a la superficie terrestre necesitaría adquirir una nave para escapar del Sistema Solar, si se lanza desde la Guyana Francesa?

Figura **P13.67**



13.68 • **Gravedad dentro de la Tierra.** Calcule la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre una masa de 10.0 kg, si esta se coloca en los siguientes lugares. Consulte la figura 13.9 y suponga una densidad constante en cada una de las regiones interiores (manto, núcleo exterior, núcleo interior), pero *no* la misma densidad entre ellas. Utilice la gráfica para estimar la densidad media para cada región: *a*) en la superficie terrestre; *b*) en la superficie exterior del núcleo exterior fundido; *c*) en la superficie del núcleo interior sólido; *d*) en el centro de la Tierra.

13.69 • **Huecos de Kirkwood.** Cientos de miles de asteroides giran alrededor del Sol en el *cinturón de asteroides*, el cual se extiende desde aproximadamente 3×10^8 km hasta 5×10^8 km del Sol. *a*) Calcule el periodo orbital (en años) de un asteroide en **i.** la orilla interior del cinturón y **ii.** la orilla exterior del cinturón. Suponga órbitas circulares. *b*) En 1867, el astrónomo estadounidense Daniel Kirkwood señaló que existen varios huecos en el cinturón de asteroides, donde se encuentran relativamente pocos de tales cuerpos. Ahora se sabe que esos *huecos de Kirkwood* se deben a la atracción gravitacional de Júpiter, el planeta más grande, cuyo periodo orbital alrededor del Sol es de 11.86 años. Por ejemplo, si un asteroide tiene un periodo orbital que es la mitad del de Júpiter, es decir, 5.93 años, en cada segunda órbita el asteroide estaría a una distancia mínima de Júpiter y experimentará una fuerte atracción hacia ese planeta. Dicha atracción, al actuar repetidamente en órbitas sucesivas, podría ir sacando a los asteroides para crear el hueco de Kirkwood. Utilice esta hipótesis para determinar el radio orbital de ese hueco de Kirkwood. *c*) Otro hueco de Kirkwood aparece a una distancia del Sol, en la que el periodo orbital es 0.400 veces el de Júpiter. Explique esto y calcule el radio orbital de ese hueco de Kirkwood.

13.70 ••• Si un satélite está en una órbita lo bastante baja, experimentará el arrastre de la atmósfera terrestre. Dado que el arrastre realiza trabajo negativo (es decir, la dirección de la fuerza de arrastre es opuesta al movimiento), la energía mecánica disminuirá. Según la ecuación (13.13), si E disminuye (se hace más negativa), el radio r de la órbita disminuirá. Si el arrastre es relativamente pequeño, puede considerarse que el satélite está en una órbita circular con radio continuamente decreciente. *a*) Según la ecuación (13.10), si el radio de la órbita circular de un satélite disminuye, la rapidez orbital v del satélite *aumenta*. ¿Cómo puede conciliar esto con la afirmación de que la energía mecánica *disminuye*? (*Sugerencia:* ¿El arrastre es la única fuerza que realiza trabajo sobre el satélite al disminuir el radio orbital?). *b*) Por el arrastre del aire, el radio de la órbita circular de un satélite disminuye de r a $r - \Delta r$, donde la cantidad positiva Δr es mucho menor que r. La masa del satélite es m. Demuestre que el aumento en la rapidez orbital es $\Delta v = +(\Delta r/2)\sqrt{Gm_E/r^3}$; que el cambio de energía cinética es $\Delta K = +(Gm_E\, m/2r^2)\, \Delta r$; que el cambio de energía potencial gravitacional es $\Delta U = -2\, \Delta K = -(Gm_E\, m/r^2)\, \Delta r$; y que la cantidad de trabajo efectuado por la fuerza de arrastre es $W = -(Gm_E\, m/2r^2)\, \Delta r$. Interprete estos resultados a la luz de sus comentarios del inciso *a*). *c*) Un satélite con masa de 3000 kg está inicialmente en una órbita circular a 300 km por encima de la superficie terrestre. A causa del arrastre el aire, la altura del satélite disminuye a 250 km. Calcule la rapidez orbital inicial, el aumento en dicha rapidez, la energía mecánica inicial, el cambio de energía cinética, el cambio de energía potencial gravitacional, el cambio de energía mecánica y el trabajo realizado por la fuerza de arrastre del aire. *d*) A final de cuentas, el satélite descenderá a una altura tan baja en la atmósfera que se quemará y los restos caerán a la superficie. ¿Qué pasa con la energía mecánica inicial?

13.71 • **Estrella binaria: masas iguales.** Dos estrellas idénticas de masa M están en órbita alrededor de su centro de masa. Las dos órbitas son circulares con radio R, de modo que las dos estrellas siempre están en lados opuestos del círculo. *a*) Calcule la fuerza gravitacional que una estrella ejerce sobre la otra. *b*) Calcule la rapidez orbital de cada estrella y el periodo de la órbita. *c*) ¿Cuánta energía se requeriría para separar las estrellas hasta el infinito?

13.72 •• PA **Estrella binaria: masas distintas.** Dos estrellas, de masas M_1 y M_2, están en órbitas circulares alrededor de su centro de masa. La primera tiene una órbita de radio R_1; y la segunda, R_2. *a*) Demuestre que la relación de los radios orbitales de las dos estrellas es igual al recíproco de la relación de sus masas, es decir, $R_1/R_2 = M_2/M_1$. *b*) Explique por qué las dos estrellas tienen el mismo periodo orbital T y que este último está dado por $T = 2\pi(R_1 + R_2)^{3/2}/\sqrt{G(M_1 + M_2)}$. *c*) Las dos estrellas de cierto sistema binario se mueven en órbitas circulares. La primera estrella, Alfa, tiene una rapidez orbital de 36.0 km/s; y la segunda estrella, Beta, de 12.0 km/s. El periodo orbital es de 137 días. Calcule las masas de las estrellas. *d*) Uno de los mejores candidatos para agujero negro está en el sistema binario llamado A0620-0090. Los dos objetos del sistema son una estrella anaranjada, V616 Monocerotis, y un objeto compacto que se cree es un agujero negro (figura 13.27). El periodo orbital de A0620-0090 es de 7.75 horas. Se estima que la masa de V616 Monocerotis es 0.67 veces la masa del Sol, y la del agujero negro, 3.8 veces la masa del Sol. Suponiendo que las órbitas son circulares, determine el radio de la órbita y la rapidez orbital de cada objeto. Compare sus respuestas con el radio orbital de la Tierra y su rapidez orbital alrededor del Sol.

13.73 ••• Los cometas viajan alrededor del Sol en órbitas elípticas de gran excentricidad. Si un cometa tiene una rapidez de 2.0×10^4 m/s cuando está a una distancia de 2.5×10^{11} m del centro del Sol, ¿qué rapidez tiene cuando se encuentra a 5.0×10^{10} m?

13.74 •• PA Un astronauta se encuentra en el Polo Norte de un planeta con simetría esférica, descubierto recientemente, de radio R. En sus manos sostiene un contenedor lleno de un líquido de masa m y volumen V. En la superficie del líquido, la presión es p_0; a la profundidad d, debajo de la superficie, la presión tiene un valor mayor p. Con esta información, determine la masa del planeta.

13.75 •• CALC La Tierra no tiene densidad uniforme: es más densa en su centro y menos densa en su superficie. Una aproximación de su densidad es $\rho(r) = A - Br$, donde $A = 12{,}700$ kg/m^3 y $B = 1.50 \times 10^{-3}$ kg/m^4. Use $R = 6.37 \times 10^6$ m para el radio de la Tierra aproximada como una esfera. *a*) La evidencia geológica indica que las densidades son 13,100 kg/m^3 y 2400 kg/m^3 en el centro y la superficie de la Tierra, respectivamente. ¿Qué valores da el modelo aproximado para las densidades de estas dos ubicaciones? *b*) Imagine que se divide la Tierra en cascarones esféricos concéntricos. Cada cascarón tiene un radio r, espesor dr, volumen $dV = 4\pi r^2\, dr$ y masa $dm = \rho(r)dV$. Integrando desde $r = 0$ hasta $r = R$, demuestre que la masa de la Tierra en este modelo es $M = \frac{4}{3}\pi R^3\left(A - \frac{3}{4}BR\right)$. *c*) Demuestre que los valores dados de A y B proporcionan la masa correcta de la Tierra con un margen del 0.4%. *d*) En la sección 13.6 vimos que un cascarón esférico uniforme no contribuye a g en su interior. Demuestre que $g(r) = \frac{4}{3}\pi Gr\left(A - \frac{3}{4}Br\right)$ dentro de la Tierra en este modelo. *e*) Compruebe que la expresión del inciso *d*) da $g = 0$ en el centro de la Tierra y $g = 9.85$ m/s^2 en la superficie. *f*) Demuestre que, en este modelo, g *no* disminuye uniformemente con la profundidad, sino que tiene un máximo de $4\pi GA^2/9B = 10.01$ m/s^2 en $r = 2A/3B = 5640$ km.

13.76 •• PA CALC En el ejemplo 13.10 (sección 13.6) vimos que en el interior de un planeta de densidad uniforme (un supuesto irreal para la Tierra), la aceleración debida a la gravedad se incrementa uniformemente con la distancia al centro del planeta. Es decir, $g(r) = g_S r/R$, donde g_S es la aceleración debida a la gravedad en la superficie, r es la distancia al centro del planeta y R es el radio del planeta. El interior del planeta se puede tratar aproximadamente como un fluido incompresible de densidad ρ. *a*) Sustituya la altura y en la ecuación (12.4) por la coordenada radial r e integre para calcular la presión en el interior de un planeta uniforme como función de r. Sea la presión en la superficie igual a cero. (Esto significa ignorar la presión de la atmósfera del planeta). *b*) Usando este modelo calcule la presión en el centro de la Tierra. (Use un valor de ρ igual a la densidad media de la Tierra, calculada a partir de la masa y el radio proporcionados en el apéndice F). *c*) Los geólogos estiman que la presión en el centro de la Tierra es de aproximadamente 4×10^{11} Pa. ¿Concuerda esto con el cálculo de la presión en $r = 0$? ¿Qué podría explicar cualquier diferencia?

13.77 ••• PA Considere una nave en órbita elíptica alrededor de la Tierra. En el punto bajo, o perigeo, de su órbita, la nave está 400 km arriba de la superficie de la Tierra; en el punto alto, o apogeo, está a 4000 km de la superficie de la Tierra. *a*) Calcule el periodo de la nave en esa órbita. *b*) Usando la conservación del momento angular, calcule la razón entre la rapidez de la nave en el perigeo y la rapidez de la nave en el apogeo. *c*) Usando la conservación de la energía, determine la rapidez de la nave tanto en el perigeo como en el apogeo. *d*) Se desea que la nave escape totalmente de la Tierra. Si sus cohetes se encienden en el perigeo, ¿cuánto tendrá que aumentarse la rapidez para lograrlo? ¿Qué ocurre si los cohetes se disparan en el apogeo? ¿Qué punto de la órbita se puede usar con mayor eficiencia?

13.78 • Urano tiene un radio de 25,560 km y en la superficie de sus polos la aceleración debida a la gravedad es de 11.1 m/s^2. Su luna Miranda (descubierta en 1948 por Kuiper) está en una órbita circular a una altura de 104,000 km sobre la superficie del planeta; además, tiene una masa de 6.6×10^{19} kg y un radio de 235 km. *a*) Calcule la masa de

Urano a partir de estos datos. *b*) Calcule la magnitud de la aceleración de Miranda debida a su movimiento orbital alrededor de Urano. *c*) Calcule la aceleración debida a la gravedad de Miranda en su superficie. *d*) ¿Las respuestas a los incisos *b*) y *c*) implican que un objeto soltado 1 m arriba de la superficie de Miranda en el lado que da hacia Urano caerá *hacia arriba* relativo a Miranda? Explique.

13.79 ••• Una nave de 5000 kg está en órbita circular 2000 km arriba de la superficie de Marte. ¿Cuánto trabajo deben efectuar sus motores para llevarla a una órbita circular 4000 km arriba de la superficie?

13.80 •• Uno de los cometas más brillantes del siglo XX fue el cometa Hyakutake, que pasó cerca del Sol a principios de 1996. Se estimó que el periodo orbital de ese cometa es de unos 30,000 años. Calcule el semieje mayor de la órbita de este cometa y compare ese valor con la distancia media entre Plutón y el Sol, y con la distancia a Alfa Centauri, la estrella más cercana al Sol, que se encuentra a 4.3 años luz.

13.81 ••• **CALC** Los planetas no son uniformes en su interior. Normalmente, son más densos en el centro, y su densidad se reduce hacia la superficie. Modele un planeta esféricamente simétrico, con el mismo radio que la Tierra, suponiendo que su densidad disminuye linealmente al aumentar la distancia al centro. Sea la densidad en el centro de $15.0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$, y en la superficie, de $2.0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$. Determine la aceleración debida a la gravedad en la superficie de ese planeta.

13.82 •• **CALC** Un alambre uniforme con masa M y longitud L se dobla para formar una semicircunferencia. Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza gravitacional que este alambre ejerce sobre una masa puntual m colocada en el centro de curvatura de la semicircunferencia.

13.83 ••• **CALC** Un objeto en forma de anillo circular delgado tiene radio a y masa M. Una esfera uniforme de masa m y radio R se coloca con su centro a una distancia x a la derecha del centro del anillo, sobre una línea que pasa por el centro del anillo y es perpendicular a su plano (véase la figura E13.33). ¿Qué fuerza gravitacional ejerce la esfera sobre el anillo? Demuestre que su resultado se reduce al valor esperado cuando x es mucho mayor que a.

13.84 ••• **CALC** Una varilla uniforme delgada tiene una longitud L y una masa M. Calcule la magnitud de la fuerza gravitacional que la varilla ejerce sobre una partícula de masa m, situada en un punto a lo largo del eje de la varilla y a una distancia x de un extremo (figura E13.32). Demuestre que su resultado se reduce al valor esperado cuando x es mucho mayor que L.

13.85 • **CALC** Se perfora un pozo de la superficie al centro de la Tierra (véase la figura 13.24). Como en el ejemplo 13.10 (sección 13.6), suponga que la densidad de la Tierra es uniforme. Con esta aproximación poco realista, la fuerza gravitacional que actúa sobre un objeto de masa m, ubicado dentro de la Tierra a una distancia r del centro, tiene magnitud $F_g = Gm_E mr/R_E^3$ (como se demostró en el ejemplo 13.10) y apunta hacia el centro de la Tierra. *a*) Deduzca una expresión para la energía potencial gravitacional $U(r)$ del sistema objeto-Tierra en función de la distancia del objeto al centro de la Tierra. Considere la energía potencial igual a cero cuando el objeto está en el centro de la Tierra. *b*) Si un objeto se deja caer por el pozo desde la superficie terrestre, ¿qué rapidez tendrá cuando llegue al centro de la Tierra?

PROBLEMAS DE DESAFÍO

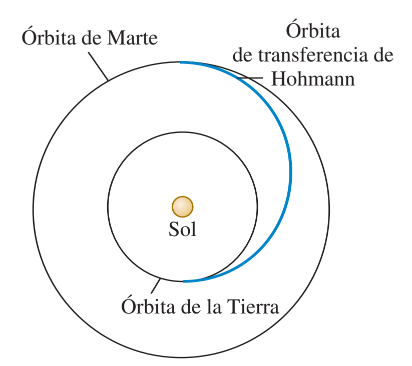
13.86 ••• *a*) Cuando un objeto está en una órbita circular de radio r alrededor de la Tierra (masa m_E), el periodo de la órbita es T, dado por la ecuación (13.12), y la rapidez orbital es v, dada por la ecuación (13.10). Demuestre que, cuando el objeto se mueve en una órbita circular con radio un poco mayor $r + \Delta r$, donde $\Delta r \ll r$, su nuevo periodo es $T + \Delta T$ y su nueva rapidez orbital es $v - \Delta v$, donde Δr, ΔT y Δv son cantidades positivas y

$$\Delta T = \frac{3\pi\,\Delta r}{v} \qquad \text{y} \qquad \Delta v = \frac{\pi\,\Delta r}{T}$$

[*Sugerencia:* Use la expresión $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, válida para $|x| \ll 1$.] *b*) La Estación Espacial Internacional (ISS, por las siglas de International Space Station) está en una órbita casi circular a una altitud de 398.00 km. Una cuadrilla de mantenimiento está a punto de llegar en un transbordador espacial que también está en una órbita circular en el mismo plano orbital que la ISS, pero con una altitud de 398.10 km. La cuadrilla acudió para retirar un cable eléctrico inutilizado con una longitud de 125 m que está unido a la ISS por un extremo, con el otro extremo flotando libre en el espacio. El plan es que el transbordador atrape el extremo libre en el instante en que la nave, la ISS y el centro de la Tierra estén alineados. Al tensarse el cable, se soltará de la ISS. ¿Cuántos minutos después de que el transbordador atrape el extremo suelto el cable se soltará de la ISS? Dé su respuesta en minutos. *c*) Demuestre que, si el transbordador no logra atrapar el cable, la cuadrilla deberá esperar un tiempo $t \approx T^2/\Delta T$ para tener otra oportunidad. Calcule el valor numérico de t y explique si valdría la pena esperar.

13.87 ••• **Navegación interplanetaria.** La forma más eficiente de enviar una nave de la Tierra a otro planeta es usar una *órbita de transferencia de Hohmann* (figura P13.87). Si las órbitas de los planetas de origen y de destino son circulares, la órbita de transferencia de Hohmann es una órbita elíptica, cuyo perihelio y afelio son tangentes a las órbitas de los dos planetas. Los cohetes se encienden brevemente en el planeta de origen para colocar la nave en la órbita de transferencia; a continuación, la nave viaja sin motor hasta llegar al planeta de destino. En ese instante, los cohetes se encienden otra vez para poner a la nave en la misma órbita alrededor del Sol que el planeta de destino. *a*) Para un vuelo de la Tierra a Marte, ¿en qué dirección se deben disparar los cohetes en la Tierra y en Marte: en la dirección del movimiento o en la dirección opuesta? ¿Y en un vuelo de Marte a la Tierra? *b*) ¿Cuánto tarda un viaje de ida de la Tierra a Marte, entre los disparos de los cohetes? *c*) Para llegar a Marte desde la Tierra, el instante del lanzamiento debe calcularse de modo que Marte esté en el lugar correcto cuando la nave llegue a la órbita de Marte alrededor del Sol. En el lanzamiento, ¿qué ángulo deben formar las líneas Sol-Marte y Sol-Tierra? Use datos del apéndice F.

Figura **P13.87**



13.88 ••• **PA** **Fuerzas de marea cerca de un agujero negro.** Un astronauta, dentro de una nave que lo protege de las radiaciones dañinas, está en órbita alrededor de un agujero negro a una distancia de 120 km de su centro. El agujero tiene 5.00 veces la masa del Sol y un radio de Schwarzschild de 15.0 km. El astronauta está situado dentro de la nave, de modo tal que una de sus orejas de 0.030 kg está 6.0 cm más lejos del agujero negro que el centro de masa de la nave, y la otra oreja está 6.0 cm más cerca. *a*) ¿Qué tensión hay entre las orejas? ¿Sería difícil para el astronauta evitar ser desgarrado por las fuerzas gravitacionales? (Puesto que todo su cuerpo está en órbita con la misma velocidad angular, una oreja se mueve con demasiada lentitud para el radio de su órbita y la otra lo hace con demasiada rapidez. Por ello, la cabeza debe ejercer fuerzas sobre las orejas para mantenerlas en sus

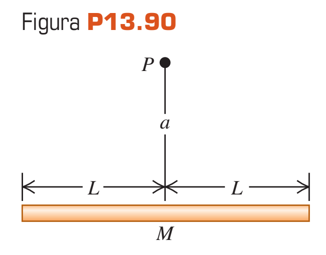
órbitas). *b*) ¿El centro de gravedad de la cabeza está en el mismo punto que su centro de masa? Explique.

13.89 ••• **CALC** La masa M está distribuida uniformemente en un disco de radio a. Calcule la fuerza gravitacional (magnitud y dirección) que actúa entre esta masa y una partícula de masa m situada a una distancia x arriba del centro del disco (figura P13.89). ¿Su resultado se reduce a la expresión correcta cuando x se hace muy grande? (*Sugerencia:* Divida el disco en anillos concéntricos infinitesimalmente delgados, use la expresión deducida en el ejercicio 13.33 para la fuerza gravitacional debida a cada anillo, e integre para obtener la fuerza total).

Figura **P13.89**

13.90 ••• **CALC** La masa M está distribuida uniformemente a lo largo de una línea de longitud $2L$. Una partícula de masa m está en un punto a una distancia a arriba del centro de la línea en su bisectriz perpendicular (el punto P en la figura P13.90). Para la fuerza gravitacional que la línea ejerce sobre la partícula, calcule las componentes perpendicular y paralela a la línea. ¿Su resultado se reduce a la expresión correcta cuando a se hace muy grande?

Figura **P13.90**



Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

Cuanto menor sea el radio orbital r de un satélite, mayor será su rapidez orbital v [ecuación (13.10)]. Por lo tanto, una partícula cerca del borde interior de los anillos de Saturno tiene mayor rapidez que una partícula cerca del borde exterior de los anillos.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

13.1 Respuesta: v. De acuerdo con la ecuación (13.1), la fuerza gravitacional del Sol (masa m_1) sobre un planeta (masa m_2) que está a una distancia r tiene magnitud $F_g = Gm_1m_2/r^2$. En comparación con la Tierra, Saturno tiene un valor de r^2 que es $10^2 = 100$ veces más grande y un valor de m_2 que también es 100 veces mayor. Por lo tanto, la *fuerza* que el Sol ejerce sobre Saturno tiene la misma magnitud que la fuerza que el Sol ejerce sobre la Tierra. La *aceleración* de un planeta es igual a la fuerza neta dividida entre la masa del planeta: como Saturno tiene 100 veces más masa que la Tierra, su aceleración es $\frac{1}{100}$ de la aceleración terrestre.

13.2 Respuesta: iii, i, ii, iv. De acuerdo con la ecuación (13.4), la aceleración debida a la gravedad en la superficie de un planeta de masa m_P y radio R_P es $g_P = Gm_P/R_P{}^2$. Es decir, g_p es directamente proporcional a la masa del planeta e inversamente proporcional al cuadrado de su radio. Entonces, comparado con el valor de g en la superficie terrestre, el valor de g_p en cada planeta es de **i.** $2/2^2 = \frac{1}{2}$; **ii.** $4/4^2 = \frac{1}{4}$; **iii.** $4/2^2 = 1$; es decir, el mismo que en la Tierra, y **iv.** $2/4^2 = \frac{1}{8}$.

13.3 Respuesta: sí Esto es posible, porque la gravedad superficial y la rapidez de escape dependen de diferente manera de la masa m_P y del radio R_P del planeta: el valor de g en la superficie es $Gm_P/R_P{}^2$, mientras que la rapidez de escape es $\sqrt{2Gm_P/R_P}$. En el caso de Saturno, por ejemplo, m_P es aproximadamente 100 veces la masa de la Tierra y R_P es aproximadamente 10 veces el radio de la Tierra. El valor de g difiere del valor en la Tierra por un factor de $(100)/(10)^2 = 1$ (es decir, es igual que en la Tierra), en tanto que la rapidez de escape es mayor en un factor de $\sqrt{100/10} = 3.2$. Es útil recordar que la gravedad superficial se refiere a las condiciones en la superficie del planeta, mientras que la rapidez de escape (que es la que necesitamos adquirir para escapar al infinito) depende de las condiciones en *todos* los puntos entre la superficie del planeta y el infinito.

13.4 Respuesta: ii. La ecuación (13.10) muestra que en una órbita de radio menor, la nave espacial tiene una rapidez mayor. El trabajo negativo efectuado por la resistencia del aire disminuye la energía mecánica *total* $E = K + U$; la energía cinética K aumenta (se vuelve más positiva), pero disminuye la energía potencial gravitacional U (se vuelve más negativa) en una cantidad mayor.

13.5 Respuesta: iii. La ecuación (13.17) indica que el periodo orbital T es proporcional a la potencia $\frac{3}{2}$ del semieje mayor a. Por lo tanto, el periodo orbital del cometa X es más largo que el del cometa Y por un factor de $4^{3/2} = 8$.

13.6 Respuesta: no Nuestro análisis revela que la fuerza gravitacional dentro de un cascarón esférico hueco es *cero*. Por consiguiente, quienes visitaran el interior de un planeta hueco experimentarían ingravidez, y no podrían ponerse de pie ni caminar sobre la superficie interior del planeta.

13.7 Respuesta: iv. El análisis de la ecuación (13.27) indica que la diferencia entre la aceleración debida a la gravedad en el ecuador y en los polos es v^2/R_E. Puesto que este planeta tiene el mismo radio y, por consiguiente, la misma circunferencia que la Tierra, la rapidez v en su ecuador debe ser 10 veces la rapidez del ecuador terrestre. Por lo tanto, v^2/R_E es $10^2 = 100$ veces mayor que en la Tierra, o bien, $100(0.0339\ \text{m/s}^2) = 3.39\ \text{m/s}^2$. La aceleración debida a la gravedad en los polos es $9.80\ \text{m/s}^2$, en tanto que en el ecuador es significativamente menor: $9.80\ \text{m/s}^2 - 3.39\ \text{m/s}^2 = 6.41\ \text{m/s}^2$. Usted puede demostrar que si el planeta estuviera girando 17.0 veces más rápido que la Tierra, la aceleración debida a la gravedad en el ecuador sería *cero* ¡y los objetos sueltos saldrían disparados de la superficie del ecuador!

13.8 Respuesta: iii. Si el Sol se colapsara para formar un agujero negro (lo cual, según lo que actualmente sabemos acerca de las estrellas, no puede suceder), tendría la misma masa pero un radio mucho menor. Como la atracción gravitacional entre el Sol y la Tierra no depende del radio del Sol, no se alteraría la órbita de la Tierra.

Problema práctico

Respuestas: ***a***) Perihelio: $v_P = \sqrt{\dfrac{Gm_S}{a}\dfrac{(1+e)}{(1-e)}}$

Afelio: $v_A = \sqrt{\dfrac{Gm_S}{a}\dfrac{(1-e)}{(1+e)}}$

b) $v_P = 54.4\ \text{km/s}$, $v_A = 0.913\ \text{km/s}$

MOVIMIENTO PERIÓDICO 14



? Los perros caminan mucho más rápido que los humanos. ¿Esto se debe principalmente a que las patas de los perros son más cortas que las piernas de los humanos, menos masivas que las piernas de los humanos, o es resultado de ambas cosas?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir las oscilaciones en términos de amplitud, periodo, frecuencia y frecuencia angular.
- Cómo efectuar cálculos de movimiento armónico simple, un tipo de oscilación importante.
- Cómo utilizar los conceptos de energía para analizar el movimiento armónico simple.
- Cómo aplicar los conceptos relacionados con el movimiento armónico simple en diferentes situaciones físicas.
- Cómo analizar los movimientos de un péndulo simple.
- Qué es un péndulo físico y cómo calcular las propiedades de su movimiento.
- Qué determina la duración de una oscilación.
- Cómo una fuerza aplicada a un oscilador en la frecuencia adecuada puede causar una respuesta o resonancia muy grande.

Muchos tipos de movimiento se repiten una y otra vez: la vibración de un cristal de cuarzo en un reloj de pulso, el péndulo oscilante de un reloj con pedestal, las vibraciones sonoras producidas por un clarinete o un tubo de órgano y el movimiento periódico de los pistones de un motor de combustión. A esta clase de movimiento le llamamos **movimiento periódico** u **oscilación**, y será el tema del presente capítulo. Su comprensión será indispensable para nuestro estudio posterior de las ondas, el sonido, la corriente alterna y la luz.

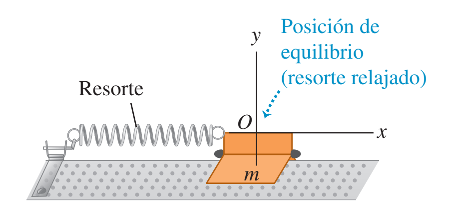
Un cuerpo que tiene un movimiento periódico se caracteriza por una posición de equilibrio estable; cuando se le aleja de esa posición y se suelta, entra en acción una fuerza o torca para hacerlo regresar al equilibrio. Sin embargo, para cuando llega ahí, ya ha adquirido cierta energía cinética que le permite continuar su movimiento hasta detenerse del otro lado, de donde será impulsado nuevamente hacia su posición de equilibrio. Imagine una pelota que rueda de un lado a otro dentro de un tazón redondo, o un péndulo que oscila pasando por su posición vertical.

En este capítulo, nos concentraremos en dos ejemplos sencillos de sistemas con movimiento periódico: los sistemas resorte-masa y los péndulos. También veremos por qué algunas oscilaciones tienden a detenerse con el tiempo, y otras tienen desplazamientos cada vez mayores con respecto al equilibrio cuando actúan fuerzas periódicamente variables.

14.1 Descripción de la oscilación

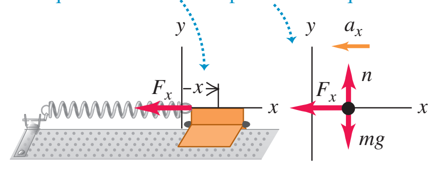
Uno de los sistemas más sencillos que puede tener movimiento periódico se muestra en la figura 14.1. Un cuerpo con masa m se mantiene sobre una guía horizontal sin fricción, como una pista o un riel de aire, de modo que solo puede desplazarse a lo largo del eje x. El cuerpo está conectado a un resorte de masa despreciable que puede estirarse o comprimirse. El extremo izquierdo del resorte está fijo, y el derecho está unido al cuerpo. La fuerza del resorte es la única fuerza horizontal que actúa sobre el cuerpo; las fuerzas normal y gravitacional verticales en este caso suman cero.

14.1 Sistema que puede tener movimiento periódico.

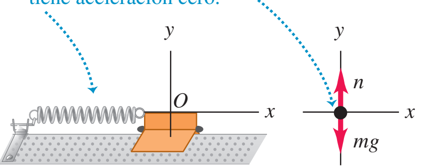


14.2 Modelo de movimiento periódico. Cuando el cuerpo está desplazado con respecto a la posición de equilibrio en $x = 0$, el resorte ejerce una fuerza de restitución dirigida hacia la posición de equilibrio.

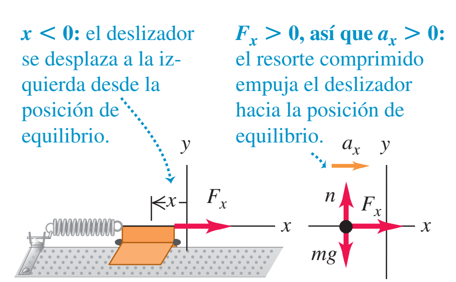
a)



b)



c)



Lo más sencillo es definir nuestro sistema de coordenadas con el origen O en la posición de equilibrio, donde el resorte no está estirado ni comprimido. Así, x es la componente x del **desplazamiento** del cuerpo con respecto al equilibrio y también es el cambio de longitud del resorte. La componente x de la fuerza que el resorte ejerce sobre el cuerpo es F_x y la componente x de la aceleración, a_x, está dada por $a_x = F_x/m$.

La figura 14.2 muestra el cuerpo para tres desplazamientos diferentes del resorte. Siempre que el cuerpo se desplaza con respecto a su posición de equilibrio, la fuerza del resorte tiende a regresarlo a dicha posición. Llamamos a una fuerza con esa característica **fuerza de restitución**. Solo puede haber oscilación si hay una fuerza de restitución que tiende a regresar el sistema a la posición de equilibrio.

Analicemos cómo se da la oscilación en este sistema. Si desplazamos el cuerpo a la derecha hasta $x = A$ y lo soltamos, la fuerza total y la aceleración son hacia la izquierda (figura 14.2*a*). La rapidez aumenta conforme el cuerpo se aproxima a la posición de equilibrio O. Cuando el cuerpo está en O, la fuerza neta que actúa sobre él es cero (figura 14.2*b*), pero, a causa de su movimiento, *rebasa* la posición de equilibrio. En el otro lado de esa posición, el cuerpo se sigue moviendo a la izquierda, pero la fuerza total y la aceleración son a la derecha (figura 14.2*c*); por lo tanto, la rapidez disminuye hasta que el cuerpo se detiene. Después demostraremos que, con un resorte ideal, el punto en el que se detiene es $x = -A$. Ahora el cuerpo acelera hacia la derecha, rebasa otra vez el equilibrio, y se detiene en el punto inicial $x = A$, listo para repetir todo el proceso. ¡El cuerpo está oscilando! Si no hay fricción u otra fuerza que elimine energía mecánica del sistema, el movimiento se repetirá eternamente; la fuerza de restitución tirará perpetuamente del cuerpo hacia la posición de equilibrio, por la cual el cuerpo pasará una y otra vez.

En situaciones diferentes, la fuerza puede depender de diversas maneras del desplazamiento x con respecto al equilibrio, pero *siempre* habrá oscilación si la fuerza es de *restitución* y tiende a regresar al sistema al punto de equilibrio.

Amplitud, periodo, frecuencia y frecuencia angular

Veamos algunos términos que usaremos al analizar movimientos periódicos de todo tipo:

La **amplitud** del movimiento, denotada con A, es la magnitud máxima del desplazamiento con respecto al equilibrio, es decir, el valor máximo de $|x|$ y siempre es positiva. Si el resorte de la figura 14.2 es ideal, el rango global del movimiento es $2A$. La unidad de A en el SI es el metro. Una vibración completa, o **ciclo,** es un viaje redondo (de ida y vuelta), digamos de A a $-A$ y de regreso a A, o bien, de O a A, regresando por O hasta $-A$ y volviendo a O. Observe que el movimiento de un lado al otro (digamos, de $-A$ a A) es medio ciclo, no un ciclo completo.

El **periodo**, T, es el tiempo que tarda un ciclo, y siempre es positivo. La unidad del periodo en el SI es el segundo, aunque a veces se expresa como "segundos por ciclo".

La **frecuencia**, f, es el número de ciclos en la unidad de tiempo, y siempre es positiva. La unidad de la frecuencia en el SI es el hertz:

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ ciclo/s} = 1 \text{ s}^{-1}$$

Esta unidad se llama así en honor del físico alemán Heinrich Hertz (1857-1894), un pionero en la investigación de las ondas electromagnéticas.

La **frecuencia angular**, ω, es 2π veces la frecuencia:

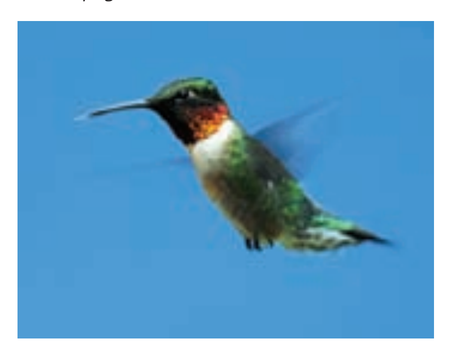
$$\omega = 2\pi f$$

Pronto veremos para qué sirve ω; representa la rapidez de cambio de una cantidad angular (no necesariamente relacionada con un movimiento de rotación) que siempre se mide en radianes, de modo que sus unidades son rad/s. Puesto que f está en ciclos/s, podemos considerar que el número 2π tiene unidades de rad/ciclo.

Por las definiciones de periodo T y frecuencia f, es evidente que uno es el recíproco del otro:

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f} \qquad \text{(relaciones entre frecuencia y periodo)} \tag{14.1}$$

Aplicación Frecuencias de las alas
El colibrí garganta rubí (*Archilochus colubris*) normalmente bate sus alas en aproximadamente 50 Hz, produciendo su sonido característico. Los insectos pueden batir sus alas a un ritmo aún más rápido, desde 330 Hz para una mosca doméstica y 600 Hz para un mosquito, hasta una cifra increíble de 1040 Hz para el diminuto jején (*Ceratopogonidae*).



También, por la definición de ω,

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{(frecuencia angular)} \qquad (14.2)$$



Ejemplo 14.1 Periodo, frecuencia y frecuencia angular

Un transductor ultrasónico empleado para el diagnóstico médico oscila con una frecuencia de 6.7 MHz = 6.7×10^6 Hz. ¿Cuánto tarda cada oscilación, y qué frecuencia angular tiene?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Nuestras incógnitas son el periodo T y la frecuencia angular ω. Podemos obtener esas variables empleando la frecuencia f en las ecuaciones (14.1) y (14.2), respectivamente.

EJECUTAR: De las ecuaciones (14.1) y (14.2),

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{6.7 \times 10^6\ \text{Hz}} = 1.5 \times 10^{-7}\ \text{s} = 0.15\ \mu\text{s}$$

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi f = 2\pi(6.7 \times 10^6\ \text{Hz}) \\ &= (2\pi\ \text{rad/ciclo})(6.7 \times 10^6\ \text{ciclo/s}) \\ &= 4.2 \times 10^7\ \text{rad/s}\end{aligned}$$

EVALUAR: Esta es una vibración muy rápida, con f y ω grandes y T pequeño. Una vibración lenta tiene f y ω pequeñas, y T grande.

Evalúe su comprensión de la sección 14.1 Un cuerpo como el de la figura 14.2 oscila de un lado a otro. Para cada uno de los siguientes valores de la velocidad v_x y la aceleración a_x del cuerpo, indique si el desplazamiento x es positivo, negativo o cero. *a)* $v_x > 0$ y $a_x > 0$; *b)* $v_x > 0$ y $a_x < 0$; *c)* $v_x < 0$ y $a_x > 0$; *d)* $v_x < 0$ y $a_x < 0$; *e)* $v_x = 0$ y $a_x < 0$; *f)* $v_x > 0$ y $a_x = 0$.



14.2 Movimiento armónico simple

El tipo de oscilación más sencillo sucede cuando la fuerza de restitución F_x es *directamente proporcional* al desplazamiento x con respecto al equilibrio. Esto ocurre si el resorte de las figuras 14.1 y 14.2 es ideal y obedece la ley de Hooke. La constante de proporcionalidad entre F_x y x es la constante de fuerza k. (De ser necesario, repase la ley de Hooke y la definición de la constante de fuerza en la sección 6.3). En ambos lados de la posición de equilibrio, F_x y x siempre tienen signos opuestos. En la sección 6.3, representamos la fuerza que actúa *sobre* un resorte ideal estirado como $F_x = kx$. La componente x de la fuerza que el resorte ejerce *sobre el cuerpo* es el negativo de esta, así que la componente x de la fuerza F_x sobre el cuerpo es

$$F_x = -kx \qquad \text{(fuerza de restitución ejercida por un resorte ideal)} \qquad (14.3)$$

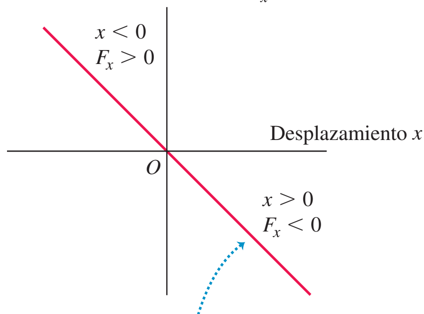
Esta ecuación da la magnitud y el signo correctos de la fuerza, ya sea x positivo, negativo o cero (figura 14.3). La constante de fuerza k siempre es positiva y tiene unidades de N/m (también resultan útiles las unidades de kg/s^2). Estamos suponiendo que no hay fricción, así que la ecuación (14.3) da la fuerza *neta* que actúa sobre el cuerpo.

Cuando la fuerza de restitución es directamente proporcional al desplazamiento con respecto al equilibrio, como en la ecuación (14.3), la oscilación se denomina **movimiento armónico simple**, *que se abrevia como* **MAS**. La aceleración $a_x = d^2x/dt^2 = F_x/m$ de un cuerpo en MAS está dada por

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad \text{(movimiento armónico simple)} \qquad (14.4)$$

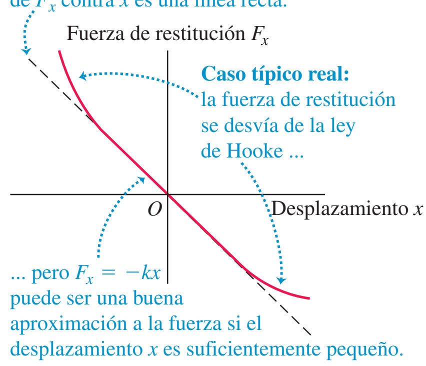
El signo menos indica que la aceleración y el desplazamiento siempre tienen signos opuestos. Esta aceleración *no* es constante, así que olvídese de usar las ecuaciones para aceleración constante del capítulo 2. Más adelante veremos cómo resolver esta ecuación para obtener el desplazamiento x en función del tiempo. Un cuerpo que está en movimiento armónico simple se denomina **oscilador armónico**.

14.3 Un resorte ideal ejerce una fuerza de restitución que obedece la ley de Hooke, $F_x = -k_x$. La oscilación con esta fuerza de restitución se denomina movimiento armónico simple.



La fuerza de restitución ejercida por un resorte ideal es directamente proporcional al desplazamiento (ley de Hooke, $F_x = -kx$): la gráfica de F_x contra x es una recta.

14.4 En casi todas las oscilaciones reales, se aplica la ley de Hooke siempre que el cuerpo no se aleje tanto del equilibrio. En tal caso, las oscilaciones tienen amplitud pequeña y son casi armónicas simples.



¿Por qué es importante el movimiento armónico simple? Tenga presente que no todos los movimientos periódicos son armónicos simples; en el movimiento periódico en general, la relación entre la fuerza de restitución y el desplazamiento es más complicada que la ecuación (14.3). No obstante, en muchos sistemas, la fuerza de restitución es *aproximadamente* proporcional al desplazamiento si este es lo suficientemente pequeño (figura 14.4). Es decir, si la amplitud es pequeña, las oscilaciones de tales sistemas son más o menos armónicas simples y, por lo tanto, la ecuación (14.4) las describe en forma aproximada. Así, podemos usar el MAS como modelo aproximado de muchos movimientos periódicos distintos, como la vibración del cristal de cuarzo de un reloj de pulso, el movimiento de un diapasón, la corriente eléctrica en un circuito de corriente alterna y las vibraciones de los átomos en moléculas y sólidos.

Movimiento circular y ecuaciones del MAS

Para explorar las propiedades del movimiento armónico simple, debemos expresar el desplazamiento x del cuerpo oscilante en función del tiempo, $x(t)$. La segunda derivada de esta función, d^2x/dt^2, debe ser igual a $(-k/m)$ multiplicado por la función misma, como lo pide la ecuación (14.4). Ya hemos mencionado que las fórmulas para aceleración constante de la sección 2.4 no son útiles aquí, porque la aceleración cambia constantemente al cambiar el desplazamiento x. En cambio, obtendremos $x(t)$ aprovechando la notable similitud entre el MAS y otra forma de movimiento que ya estudiamos.

La figura 14.5*a* muestra la vista superior de un disco horizontal de radio A con una esfera pegada a su borde en el punto Q. El disco gira con rapidez angular constante ω (que se mide en rad/s), así que la esfera tiene movimiento circular uniforme. Un haz de luz horizontal incide en el disco y proyecta la sombra de la esfera en una pantalla. La sombra en el punto P oscila conforme la esfera se mueve en un círculo. Luego instalamos un cuerpo sujeto a un resorte ideal, como la combinación de las figuras 14.1 y 14.2, de modo que el cuerpo oscile paralelo a la sombra. Demostraremos que el movimiento del cuerpo y el movimiento de la sombra de la esfera son *idénticos*, cuando la amplitud de la oscilación del cuerpo es igual al radio del disco A, y si la frecuencia angular $2\pi f$ del cuerpo oscilante es igual a la rapidez angular ω del disco. Esto es, *el movimiento armónico simple es la proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro.*

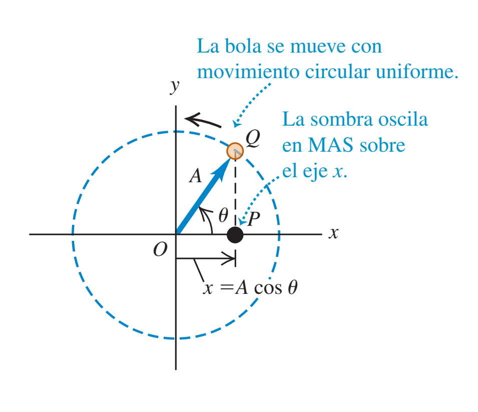
Podemos comprobar esta notable afirmación calculando la aceleración de la sombra en P y comparándola con la aceleración de un cuerpo en MAS, dada por la ecuación (14.4). El círculo en el que la esfera se mueve, de modo que su proyección coincide con el movimiento del cuerpo oscilante, se denomina **círculo de referencia**; llamaremos a Q el *punto de referencia*. Tomamos el círculo de referencia en el plano

14.5 *a*) Relación entre movimiento circular uniforme y movimiento armónico simple. *b*) La sombra de la esfera se mueve exactamente como un cuerpo que oscila unido a un resorte ideal.

a) Aparato para crear el círculo de referencia

Pantalla vertical iluminada
$-A$ O P A
Sombra de la esfera en la pantalla
Sombra de la esfera
Esfera en la tornamesa giratoria
Q
A
ω
Mientras en la tornamesa la esfera Q se mueve con movimiento circular uniforme, su sombra P se mueve de un lado a otro en movimiento armónico simple en la pantalla.
Iluminación
Mesa
Haz de luz

b) Representación abstracta del movimiento en *a*)



xy, con el origen O en el centro del círculo (figura 14.5b). En el instante t, el vector OQ del origen al punto de referencia Q forma un ángulo θ con el eje $+x$. Al girar Q en el círculo de referencia con rapidez angular constante ω, el vector OQ gira con la misma rapidez angular. Un vector giratorio así se denomina **fasor**. (Este término estaba en uso mucho antes de inventarse el arma del mismo nombre del programa de TV "Viaje a las estrellas". El método de fasores para analizar oscilaciones es útil en muchas áreas de la física. Usaremos los fasores cuando estudiemos los circuitos de corriente alterna en el capítulo 31, volumen 2, y la interferencia de la luz en los capítulos 35 y 36, volumen 2).

La componente x del fasor en el instante t es la coordenada x del punto Q:

$$x = A\cos\theta \tag{14.5}$$

Esta es también la coordenada x de la sombra P, que es la *proyección* de Q sobre el eje x. Por lo tanto, la velocidad x de la sombra P en el eje x es igual a la componente x del vector velocidad del punto de referencia Q (figura 14.6a) y la aceleración x de P es igual a la componente x del vector aceleración de Q (figura 14.6b). Puesto que Q está en movimiento circular uniforme, su vector aceleración $\vec{a}_Q$ siempre apunta hacia O. Además, la magnitud de $\vec{a}_Q$ es constante y es igual a la velocidad angular al cuadrado multiplicada por el radio del círculo (véase la sección 9.3):

$$a_Q = \omega^2 A \tag{14.6}$$

La figura 14.6b muestra que la componente x de $\vec{a}_Q$ es $a_x = -a_Q\cos\theta$. Combinando esto con las ecuaciones (14.5) y (14.6), vemos que la aceleración del punto P es

$$a_x = -a_Q\cos\theta = -\omega^2 A\cos\theta \quad \text{o} \tag{14.7}$$

$$a_x = -\omega^2 x \tag{14.8}$$

La aceleración del punto P es directamente proporcional al desplazamiento x y siempre tiene el signo opuesto. Estas son precisamente las características distintivas del movimiento armónico simple.

La ecuación (14.8) es *exactamente* igual a la ecuación (14.4) para la aceleración de un oscilador armónico, siempre que la rapidez angular ω del punto de referencia Q esté relacionada con la constante de fuerza k y la masa m del cuerpo oscilante por

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{o} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{14.9}$$

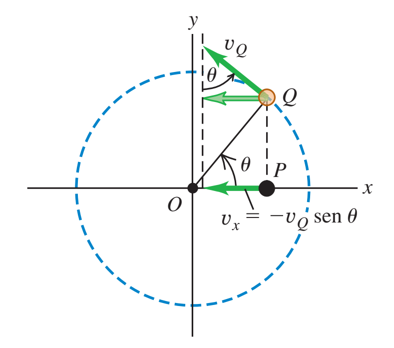
Hemos estado usando el mismo símbolo ω para la *rapidez* angular del punto de referencia Q y la *frecuencia* angular del punto oscilante P. La razón es que ¡estas cantidades son iguales! Si Q completa una revolución en un tiempo T, P completa un ciclo de oscilación en el mismo tiempo; por lo tanto, T es el periodo de la oscilación. Durante el tiempo T, el punto Q gira 2π radianes, así que su rapidez angular es $\omega = 2\pi/T$. Esta es la ecuación (14.2) para la frecuencia angular de P, lo cual verifica nuestra afirmación acerca de las dos interpretaciones de ω. Por ello, introdujimos la frecuencia angular en la sección 14.1; es la cantidad que vincula la oscilación y el movimiento circular. Así, reinterpretamos la ecuación (14.9) como una expresión de la frecuencia angular del movimiento armónico simple para un cuerpo de masa m, sobre el que actúa una fuerza de restitución con constante de fuerza k:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(movimiento armónico simple)} \tag{14.10}$$

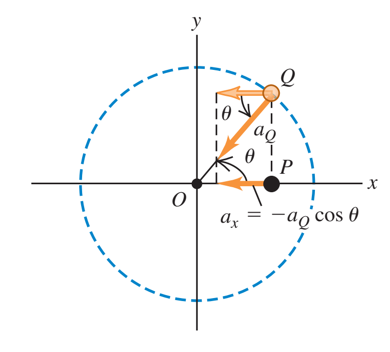
Cuando un cuerpo comienza a oscilar en un MAS, no podemos elegir el valor de ω, pues está predeterminado por los valores de k y m. Las unidades de k son N/m, o bien, kg/s^2, así que k/m está en $(\text{kg/s}^2)/\text{kg} = \text{s}^{-2}$. Cuando obtenemos la raíz cuadrada en la ecuación (14.10), obtenemos s^{-1} o, mejor dicho, rad/s, porque se trata de una frecuencia *angular* (recuerde que el radián no es una unidad verdadera).

14.6 *a*) La velocidad x y *b*) la aceleración de x de la sombra de la esfera representada por el punto P (véase la figura 14.5) son las componentes x de los vectores velocidad y aceleración, respectivamente, de la esfera Q.

a) Uso del círculo de referencia para determinar la velocidad x del punto P



b) Uso del círculo de referencia para determinar la aceleración x del punto P



De acuerdo con las ecuaciones (14.1) y (14.2), la frecuencia f y el periodo T son

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(movimiento armónico simple)} \tag{14.11}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(movimiento armónico simple)} \tag{14.12}$$

14.7 Cuanto mayor sea la masa m de los brazos de un diapasón, más baja será la frecuencia de oscilación $f = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$ y más bajo será el tono del sonido producido por el diapasón.

Brazos con masa m grande: frecuencia baja $f = 128$ Hz



Brazos con masa m pequeña: frecuencia alta $f = 4096$ Hz

A partir de la ecuación (14.12), vemos que una masa mayor m, con su mayor inercia, tiene menos aceleración, se mueve más lentamente y tarda más en completar un ciclo (figura 14.7). En cambio, un resorte más rígido (con mayor constante de fuerza k) ejerce una mayor fuerza para una deformación x dada, causando una mayor aceleración, rapideces más altas y ciclos más cortos.

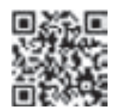
CUIDADO **No confunda frecuencia con frecuencia angular** Podemos meternos en problemas, si no distinguimos entre frecuencia f y frecuencia angular $\omega = 2\pi f$. La frecuencia nos indica cuántos ciclos de oscilación ocurren por segundo; mientras que la frecuencia angular nos dice a cuántos radianes por segundo corresponde esto en el círculo de referencia. Al resolver problemas, fíjese bien si el objetivo es obtener f o ω.

Periodo y amplitud en el MAS

Las ecuaciones (14.11) y (14.12) indican que el periodo y la frecuencia del movimiento armónico simple están determinados solamente por la masa m y la constante de fuerza k. *En el movimiento armónico simple, el periodo y la frecuencia no dependen de la amplitud* A. Para valores dados de m y k, el tiempo de una oscilación completa es el mismo, sea la amplitud grande o pequeña. La ecuación (14.3) muestra por qué esto es lógico. Una mayor A implica que la masa alcanza valores mayores de $|x|$ y está sujeta a fuerzas de restitución mayores. Esto aumenta la rapidez media del cuerpo durante un ciclo completo, lo cual compensa exactamente la necesidad de recorrer una mayor distancia, de modo que el tiempo total es el mismo.

En esencia, las oscilaciones de un diapasón son movimiento armónico simple, lo que significa que tal instrumento siempre vibra con la misma frecuencia, sea cual fuere la amplitud. Esto permite usar el diapasón como estándar para el tono musical. Si no fuera por esta característica del movimiento armónico simple, sería imposible hacer que los relojes mecánicos y electrónicos que conocemos fueran exactos, y tampoco podríamos tocar afinadamente la mayoría de los instrumentos musicales. Si encontramos un cuerpo oscilante cuyo periodo *sí* depende de la amplitud, su movimiento *no* es armónico simple.

Ejemplo 14.2 Frecuencia angular, frecuencia y periodo del MAS

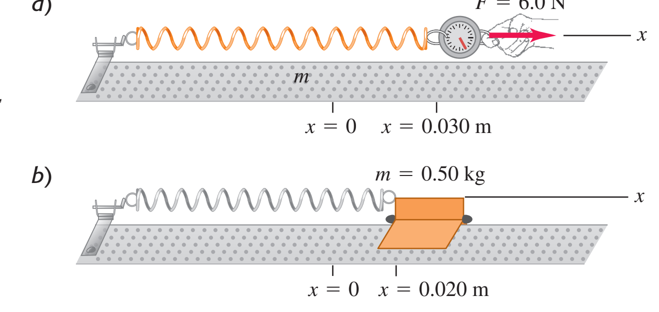


Un resorte se monta horizontalmente con su extremo izquierdo fijo. Se conecta una balanza de resorte al extremo libre y se da un tirón hacia la derecha (figura 14.8*a*), indicando que la fuerza de estiramiento es proporcional al desplazamiento y que una fuerza de 6.0 N causa un desplazamiento de 0.030 m. Quitamos la balanza de resorte y conectamos un deslizador de 0.50 kg al extremo, tiramos de él hasta moverlo 0.020 m a la derecha por una pista de aire sin fricción, y lo soltamos a partir del reposo (figura 14.8*b*). *a*) Determine la constante de fuerza del resorte. *b*) Calcule la frecuencia angular, la frecuencia f y el periodo T de la oscilación resultante.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Puesto que la fuerza del resorte (con magnitud igual a la fuerza de estiramiento) es proporcional al desplazamiento, el movimiento es armónico simple. Encontramos la constante de la fuerza k usando la ley de Hooke, ecuación (14.3), y ω, f y T, usando las ecuaciones (14.10), (14.11) y (14.12), respectivamente.

14.8 *a*) La fuerza ejercida *sobre* el resorte (indicada por el vector F) tiene componente x: $F_x = +6.0$ N. La fuerza ejercida *por* el resorte tiene componente x: $F_x = -6.0$ N. *b*) Un deslizador está unido al mismo resorte y se le permite oscilar.



EJECUTAR: *a*) Cuando $x = 0.030$ m, la fuerza que el resorte ejerce sobre la balanza de resorte es $F_x = -6.0$ N. De acuerdo con la ecuación (14.3),

$$k = -\frac{F_x}{x} = -\frac{-6.0\ \text{N}}{0.030\ \text{m}} = 200\ \text{N/m} = 200\ \text{kg/s}^2$$

b) Usando $m = 0.50$ kg en la ecuación (14.10), vemos que

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200\ \text{kg/s}^2}{0.50\ \text{kg}}} = 20\ \text{rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20\ \text{rad/s}}{2\pi\ \text{rad/ciclo}} = 3.2\ \text{ciclos/s} = 3.2\ \text{Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3.2\ \text{ciclos/s}} = 0.31\ \text{s}$$

EVALUAR: La amplitud de la oscilación es de 0.020 m, la distancia que movimos el deslizador conectado al resorte antes de soltarlo. No necesitamos esta información para calcular la frecuencia angular, la frecuencia ni el periodo porque, en el MAS, ninguna de esas cantidades depende de la amplitud. El periodo por lo regular se da en "segundos", y no en "segundos por ciclo".

Desplazamiento, velocidad y aceleración en el MAS

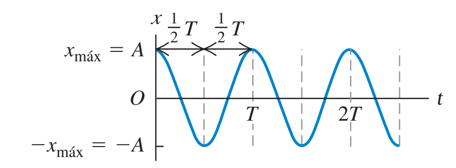
Aún necesitamos obtener el desplazamiento x en función del tiempo para un oscilador armónico. La ecuación (14.4) para un cuerpo en movimiento armónico simple en el eje x es idéntica a la ecuación (14.8), para la coordenada x del punto de referencia en movimiento circular uniforme con rapidez angular constante $\omega = \sqrt{k/m}$. Por lo tanto, la ecuación (14.5), $x = A\cos\theta$, describe la coordenada x para ambas situaciones. Si en $t = 0$, el fasor OQ forma un ángulo ϕ (letra griega phi) con el eje $+x$, entonces en cualquier instante posterior t, este ángulo será $\theta = \omega t + \phi$. Sustituimos esto en la ecuación (14.5) para obtener

MasteringPHYSICS

PhET: Motion in 2D
ActivPhysics 9.1: Position Graphs and Equations
ActivPhysics 9.2: Describing Vibrational Motion
ActivPhysics 9.5: Age Drops Tarzan

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{(desplazamiento del MAS)} \qquad (14.13)$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$. La figura 14.9 muestra una gráfica de la ecuación (14.13) para el caso específico en que $\phi = 0$. El desplazamiento x es una función periódica del tiempo, como se espera en el MAS. También podríamos haber escrito la ecuación (14.13) en términos de la función seno en vez de coseno, usando la identidad $\cos\alpha = \text{sen}(\alpha + p/2)$. *En el movimiento armónico simple, la posición es una función periódica sinusoidal del tiempo.* Hay muchas otras funciones periódicas, pero ninguna tan sencilla como una función seno o coseno.



14.9 Gráfica de x contra t [véase la ecuación (14.13)] para el movimiento armónico simple. El caso mostrado tiene $\phi = 0$.

El valor del coseno siempre está entre -1 y 1, por lo que en la ecuación (14.13) x siempre está entre $-A$ y A. Esto confirma que A es la amplitud del movimiento.

El periodo T es lo que tarda un ciclo de oscilación, como se muestra en la figura 14.9. La función coseno se repite cada vez que la cantidad entre paréntesis de la ecuación (14.13) aumenta en 2π radianes. Si comenzamos en $t = 0$, el tiempo T para completar un ciclo está dado por

$$\omega T = \sqrt{\frac{k}{m}}\,T = 2\pi \qquad \text{o} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

que es exactamente la ecuación (14.12). Un cambio de m o de k modifica el periodo de oscilación, como se muestra en las figuras 14.10*a* y 14.10*b*. El periodo no depende de la amplitud A (figura 14.10*c*).

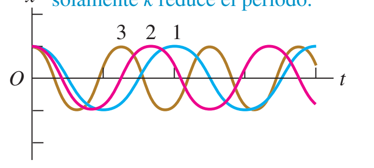
14.10 Variaciones del movimiento armónico simple. En todos los casos, $\phi = 0$ [véase la ecuación (14.13)].

a) m aumenta; A y k son iguales

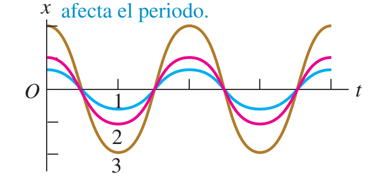
La masa m aumenta de la curva 1 a la 2 a la 3; incrementar solamente m aumenta el periodo.

x O t 1 2 3

b) k aumenta; A y m son iguales

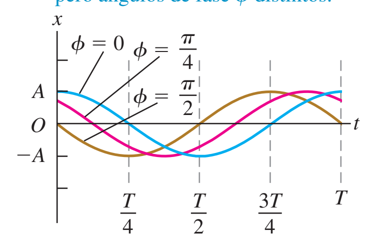


c) A aumenta; k y m son iguales



14.11 Variaciones del MAS: desplazamiento contra tiempo para el mismo oscilador armónico, pero ángulos de fase ϕ distintos.

Estas tres curvas muestran el MAS con periodo T y amplitud A iguales, pero ángulos de fase ϕ distintos.



La constante ϕ de la ecuación (14.13) es el **ángulo de fase**, que nos indica en qué punto del ciclo se encontraba el movimiento cuando $t = 0$ (o en qué parte del círculo estaba el punto Q en $t = 0$). Denotamos la posición en $t = 0$ con x_0. Sustituyendo $t = 0$ y $x = x_0$ en la ecuación (14.13) obtenemos

$$x_0 = A\cos\phi \qquad (14.14)$$

Si $\phi = 0$, entonces $x_0 = A \cos 0 = A$; por lo tanto, el cuerpo parte del desplazamiento positivo máximo. Si $\phi = \pi$, entonces $x_0 = A \cos \pi = -A$; por lo tanto, la partícula parte del desplazamiento *negativo* máximo. Si $\phi = \pi/2$, entonces $x_0 = A \cos(\pi/2) = 0$; por lo tanto, la partícula parte del origen. La figura 14.11 muestra el desplazamiento x contra el tiempo para tres diferentes ángulos de fase.

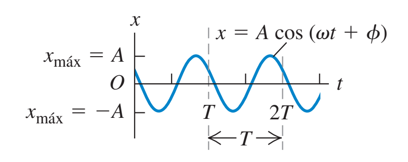
Encontramos la velocidad v_x y la aceleración a_x en función del tiempo para un oscilador armónico derivando la ecuación (14.13) con respecto al tiempo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \qquad \text{(velocidad en el MAS)} \qquad (14.15)$$

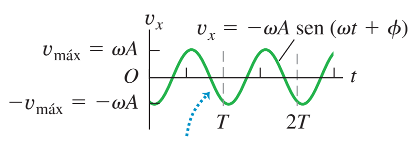
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{(aceleración en el MAS)} \qquad (14.16)$$

14.12 Gráficas de: *a*) x contra t, *b*) v_x contra t y *c*) a_x contra t para un cuerpo en MAS. Para el movimiento representado en estas gráficas, $\phi = \pi/3$.

a) Desplazamiento x en función del tiempo t

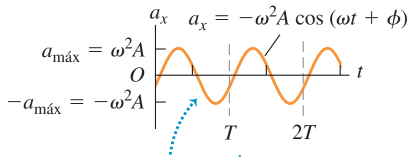


b) Velocidad v_x en función del tiempo t



La gráfica v_x−t se desplaza por $\frac{1}{4}$ de ciclo con respecto a la gráfica x−t.

c) Aceleración a_x en función del tiempo t



La gráfica a_x-t se desplaza $\frac{1}{4}$ de ciclo con respecto a la gráfica v_x-t y $\frac{1}{2}$ ciclo con respecto a la gráfica x-t.

La velocidad v_x oscila entre $v_{\text{máx}} = +\omega A$ y $-v_{\text{máx}} = -\omega A$, y la aceleración a_x oscila entre $a_{\text{máx}} = +\omega^2 A$ y $-a_{\text{máx}} = -\omega^2 A$ (figura 14.12). Si comparamos la ecuación (14.16) con la (14.13) y recordamos que $\omega^2 = k/m$ [ecuación (14.9)], vemos que

$$a_x = -\omega^2 x = -\frac{k}{m}x$$

que es justamente la ecuación (14.4) para el movimiento armónico simple. Esto confirma que es correcta la ecuación (14.13) para x en función del tiempo.

Ya antes dedujimos geométricamente la ecuación (14.16), tomando la componente x del vector aceleración del punto de referencia Q. Esto se hizo en la figura 14.6*b* y la ecuación (14.7) (recuerde que $\theta = \omega t + \phi$). Del mismo modo, podríamos haber derivado la ecuación (14.15) tomando la componente x del vector velocidad de Q (figura 14.6*b*). Dejamos los detalles al lector.

Observe que la gráfica sinusoidal de desplazamiento contra tiempo (figura 14.12*a*) está desplazada un cuarto de periodo con respecto a la de velocidad contra tiempo (figura 14.12*b*), y medio periodo con respecto a la de aceleración contra tiempo (figura 14.12*c*). La figura 14.13 muestra por qué ocurre así. Cuando el cuerpo pasa por la posición de equilibrio y el desplazamiento es cero, la velocidad es $v_{\text{máx}}$, o bien, $-v_{\text{máx}}$ (dependiendo de la dirección de movimiento) y la aceleración es cero. Cuando el cuerpo está en su desplazamiento máximo positivo ($x = +A$) o negativo ($x = -A$), la velocidad es cero y el cuerpo se encuentra momentáneamente en reposo. En estos puntos, la fuerza de restitución $F_x = -kx$ y la aceleración del cuerpo tienen su magnitud máxima. En $x = +A$ la aceleración es negativa e igual a $-a_{\text{máx}}$. En $x = -A$, la aceleración es positiva: $a_x = +a_{\text{máx}}$.

Si conocemos la posición y la velocidad iniciales x_0 y v_{0x} del cuerpo oscilante, podemos determinar la amplitud A y el ángulo de fase ϕ como sigue. v_{0x} es la velocidad inicial en $t = 0$; si sustituimos $v_x = v_{0x}$ y $t = 0$ en la ecuación (14.15), vemos que

$$v_{0x} = -\omega A\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad (14.17)$$

Para calcular ϕ, divida la ecuación (14.17) entre la (14.14). Esto elimina A y produce una ecuación de la que podemos despejar ϕ:

$$\frac{v_{0x}}{x_0} = \frac{-\omega A \operatorname{sen}\phi}{A\cos\phi} = -\omega\tan\phi$$

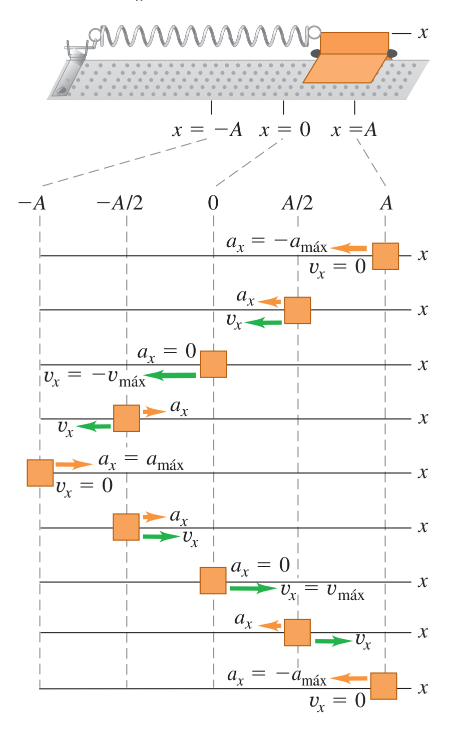
$$\phi = \arctan\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right) \quad \text{(ángulo de fase en el MAS)} \qquad (14.18)$$

También es fácil calcular la amplitud A si conocemos x_0 y v_{0x}. Bosquejaremos la deducción y dejaremos los detalles al lector. Eleve al cuadrado la ecuación (14.14); luego divida la ecuación (14.17) entre ω, elévela al cuadrado y súmela al cuadrado de la ecuación (14.14). El miembro derecho será $A^2(\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi)$, que es igual a A^2. El resultado final es

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}} \quad \text{(amplitud en el MAS)} \qquad (14.19)$$

Observe que si el cuerpo tiene tanto un desplazamiento inicial x_0 como una velocidad inicial v_{0x} distinta de cero, la amplitud A *no* es igual al desplazamiento inicial. Eso es lógico; si el cuerpo parte de un x_0 positivo y se le imparte una velocidad positiva v_{0x}, llegará *más lejos* que x_0 antes de regresar.

14.13 Cómo varían la velocidad v_x y la aceleración a_x durante un ciclo en un MAS.



Estrategia para resolver problemas 14.1 Movimiento armónico simple I: descripción del movimiento



IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* Un sistema oscilante tiene movimiento armónico simple (MAS) *únicamente* si la fuerza de restitución es directamente proporcional al desplazamiento.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Identifique las cantidades conocidas y desconocidas, y determine cuáles son las incógnitas.
2. Distinga entre dos clases de cantidades. Las *propiedades básicas del sistema* incluyen la masa m, la constante de fuerza k y las cantidades derivadas de m y k, como el periodo T, la frecuencia f y la frecuencia angular ω. Estas son independientes de las *propiedades del movimiento,* que describen cómo se comporta el sistema cuando se pone en movimiento de una forma específica, e incluyen la amplitud A, la velocidad máxima $v_{\text{máx}}$, el ángulo de fase ϕ y los valores de x, v_x y a_x en un instante dado.
3. Si es necesario, defina un eje x como en la figura 14.13, con la posición de equilibrio en $x = 0$.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Use las ecuaciones dadas en las secciones 14.1 y 14.2 para obtener las incógnitas.
2. Para encontrar los valores de x, v_x y a_x en diversos instantes, use las ecuaciones (14.13), (14.15) y (14.16), respectivamente. Si se dan la posición x_0 y la velocidad inicial v_{0x}, se puede determinar el ángulo de fase ϕ y la amplitud A a partir de las ecuaciones (14.18) y (14.19). Si el cuerpo tiene un desplazamiento inicial positivo x_0 pero velocidad inicial cero ($v_{0x} = 0$), la amplitud es $A = x_0$ y el ángulo de fase es $\phi = 0$. Si el cuerpo tiene velocidad inicial positiva v_{0x} pero ningún desplazamiento inicial ($x_0 = 0$), la amplitud es $A = v_{0x}/\omega$ y el ángulo de fase es $\phi = -\pi/2$. Exprese todos los ángulos de fase en *radianes*.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe sus resultados para asegurarse de que sean congruentes. Por ejemplo, suponga que usó x_0 y v_{0x} con la finalidad de obtener expresiones generales para x y v_x en el instante t. Si sustituye $t = 0$ en estas expresiones, deberá obtener los valores correctos de x_0 y v_{0x}.

Ejemplo 14.3 Descripción del MAS



Al deslizador del ejemplo 14.2 le impartiremos un desplazamiento inicial $x_0 = +0.015$ m y una velocidad inicial $v_{0x} = +0.40$ m/s. *a*) Determine el periodo, la amplitud y el ángulo de fase del movimiento. *b*) Escriba ecuaciones para desplazamiento, velocidad y aceleración en función del tiempo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Como en el ejemplo 14.2, las oscilaciones son de un MAS. Usamos las ecuaciones desarrolladas en esta sección y los valores dados $k = 200$ N/m, $m = 0.50$ kg, x_0 y v_{0x} para calcular las incógnitas A y ϕ y las expresiones para x, v_x y a_x.

Continúa

EJECUTAR: *a*) En el MAS el periodo y la frecuencia angular son *propiedades del sistema* que dependen solo de k y m, no de la amplitud, y por lo tanto son iguales que en el ejemplo 14.2 ($T = 0.31$ s y $\omega = 20$ rad/s). De acuerdo con la ecuación (14.19), la amplitud es

$$A = \sqrt{x_0{}^2 + \frac{v_{0x}{}^2}{\omega^2}} = \sqrt{(0.015\ \text{m})^2 + \frac{(0.40\ \text{m/s})^2}{(20\ \text{rad/s})^2}} = 0.025\ \text{m}$$

Para obtener el ángulo de fase, usamos la ecuación (14.18):

$$\begin{aligned}\phi &= \arctan\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right)\\ &= \arctan\left(-\frac{0.40\ \text{m/s}}{(20\ \text{rad/s})(0.015\ \text{m})}\right) = -53° = -0.93\ \text{rad}\end{aligned}$$

b) El desplazamiento, la velocidad y la aceleración en cualquier instante están dados por las ecuaciones (14.13), (14.15) y (14.16), respectivamente. Sustituyendo los valores, obtenemos

$$\begin{aligned}x &= (0.025\ \text{m})\cos[(20\ \text{rad/s})t - 0.93\ \text{rad}]\\ v_x &= -(0.50\ \text{m/s})\,\text{sen}[(20\ \text{rad/s})t - 0.93\ \text{rad}]\\ a_x &= -(10\ \text{m/s}^2)\cos[(20\ \text{rad/s})t - 0.93\ \text{rad}]\end{aligned}$$

EVALUAR: Podrá comprobar los resultados para x y v_x sustituyendo $t = 0$ y evaluando el resultado. Deberá obtener $x = x_0 = 0.015$ m y $v_x = v_{0x} = 0.40$ m/s.

Evalúe su comprensión de la sección 14.2 Se une un deslizador a un resorte, como se indica en la figura 14.13. Si el deslizador se mueve a $x = 0.10$ m y se suelta del reposo en el tiempo $t = 0$, oscilará con amplitud $A = 0.10$ m y ángulo de fase $\phi = 0$. *a*) Suponga ahora que en $t = 0$ el deslizador está en $x = 0.10$ m y se mueve a la derecha como se indica en la figura 14.13. En tal situación, ¿la amplitud es mayor, menor o igual que 0.10 m? ¿El ángulo de fase es mayor, menor o igual que cero? *b*) Suponga ahora que en $t = 0$ el deslizador está en $x = 0.10$ m y se mueve a la izquierda como se muestra en la figura 14.13. En tal situación, ¿la amplitud es mayor, menor o igual que 0.10 m? ¿El ángulo de fase es mayor, menor o igual que cero?

MasteringPHYSICS®

PhET: Masses & Springs
ActivPhysics 9.3: Vibrational Energy
ActivPhysics 9.4: Two Ways to Weigh Young Tarzan
ActivPhysics 9.6: Releasing a Vibrating Skier I
ActivPhysics 9.7: Releasing a Vibrating Skier II
ActivPhysics 9.8: One- and Two-Spring Vibrating Systems
ActivPhysics 9.9: Vibro-Ride

14.3 Energía en el movimiento armónico simple

Podemos aprender aún más acerca del movimiento armónico simple usando consideraciones de energía. Examinemos otra vez el cuerpo que oscila en el extremo de un resorte en las figuras 14.2 y 14.13. Ya señalamos que la fuerza del resorte es la única fuerza horizontal que actúa sobre el cuerpo. La fuerza ejercida por un resorte ideal es conservativa y las fuerzas verticales no efectúan trabajo, así que se *conserva* la energía mecánica total del sistema. También supondremos que la masa del resorte es despreciable.

La energía cinética del cuerpo es $K = \frac{1}{2}mv^2$ y la energía potencial del resorte es $U = \frac{1}{2}kx^2$, igual que en la sección 7.2. (Sería útil repasar dicha sección). No hay fuerzas no conservativas que efectúen trabajo, así que se conserva la energía mecánica total $E = K + U$:

$$E = \tfrac{1}{2}mv_x{}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \text{constante} \qquad (14.20)$$

(Puesto que el movimiento es unidimensional, $v^2 = v_x{}^2$).

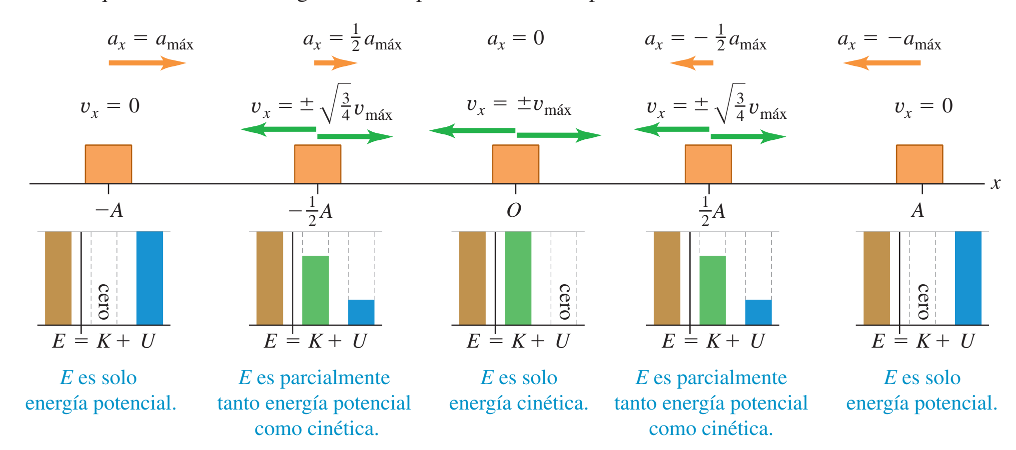
La energía mecánica total E también está relacionada directamente con la amplitud A del movimiento. Cuando el cuerpo llega al punto $x = A$, su desplazamiento máximo con respecto al equilibrio, se detiene momentáneamente antes de volver hacia la posición de equilibrio. Es decir, cuando $x = A$ (o bien, $-A$), $v_x = 0$. Aquí, la energía es solo potencial, y $E = \frac{1}{2}kA^2$. Puesto que E es constante, esta cantidad es igual a $\frac{1}{2}kA^2$ en cualquier otro punto. Combinando esta expresión con la ecuación (14.20), obtenemos

$$E = \tfrac{1}{2}mv_x{}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 = \text{constante} \qquad \text{(energía mecánica total en un MAS)} \qquad (14.21)$$

Podemos verificar esta ecuación sustituyendo x y v_x de las ecuaciones (14.13) y (14.15), y usando $\omega^2 = k/m$ de la ecuación (14.9):

$$\begin{aligned}E &= \tfrac{1}{2}mv_x{}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}m[-\omega A\,\text{sen}(\omega t + \phi)]^2 + \tfrac{1}{2}k[A\cos(\omega t + \phi)]^2\\ &= \tfrac{1}{2}kA^2\,\text{sen}^2(\omega t + \phi) + \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)\\ &= \tfrac{1}{2}kA^2\end{aligned}$$

14.14 Gráficas de E, K y U contra desplazamiento en un MAS. La velocidad del cuerpo *no* es constante, de manera que las imágenes del cuerpo en posiciones equidistantes *no* están igualmente espaciadas en el tiempo.



(Recuerde que $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$). Por lo tanto, nuestras expresiones para el desplazamiento y la velocidad en un MAS son congruentes con la conservación de la energía, como debe ser.

Podemos usar la ecuación (14.21) para calcular la velocidad v_x del cuerpo en cierto desplazamiento x:

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2} \tag{14.22}$$

El signo $\pm$ implica que, para un valor de x dado, el cuerpo se puede estar moviendo en cualquiera de las dos direcciones. Por ejemplo, cuando $x = \pm A/2$,

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - \left(\pm\frac{A}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{k}{m}}A$$

La ecuación (14.22) también indica que la rapidez *máxima* $v_{máx}$ se da en $x = 0$. Utilizando la ecuación (14.10), $\omega = \sqrt{k/m}$, encontramos que

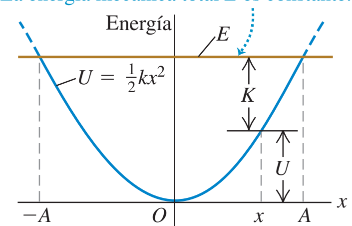
$$v_{máx} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \omega A \tag{14.23}$$

Esto concuerda con la ecuación (14.15), la cual reveló que v_x oscila entre $-\omega A$ y $+\omega A$.

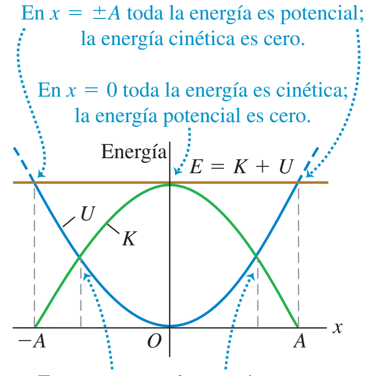
Interpretación de E, K y U en el MAS

La figura 14.14 muestra las energías E, K y U en $x = 0$, $x = \pm A/2$ y $x = \pm A$. La figura 14.15 es una representación gráfica de la ecuación (14.21); la energía (cinética, potencial y total) se grafica verticalmente, y la coordenada x, horizontalmente. La curva

a) La energía potencial U y la energía mecánica total E para un cuerpo en un MAS en función del desplazamiento x



b) La misma gráfica que en *a*), ahora también muestra K, la energía cinética



14.15 Energía cinética K, energía potencial U y energía mecánica total E en función de la posición en un MAS. Para cada valor de x, la suma de K y U es igual al valor constante de E. ¿Puede usted demostrar que en $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}A$, la energía es mitad cinética y mitad potencial?

parabólica de la figura 14.15*a* representa la energía potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$. La línea horizontal representa la energía mecánica total E, que es constante y no varía con x. En cualquier valor de x entre $-A$ y A, la distancia vertical entre el eje x y la parábola es U; como $E = K + U$, la distancia vertical restante hasta la línea horizontal es K. La figura 14.15*b* muestra tanto K como U en función de x. La línea horizontal para E interseca la curva de energía potencial en $x = -A$ y $x = A$, donde la energía es solo potencial, la energía cinética es cero y el cuerpo está momentáneamente en reposo antes de invertir su dirección. Cuando el cuerpo oscila entre $-A$ y A, la energía se transforma continuamente de potencial a cinética, y viceversa.

La figura 14.15*a* muestra la relación entre la amplitud A y la energía mecánica total correspondiente, $E = \frac{1}{2}kA^2$. Si tratáramos de hacer que x fuera mayor que A (o menor que $-A$), U sería mayor que E, y K tendría que ser negativa. Esto es imposible, así que x no puede ser mayor que A ni menor que $-A$.

Estrategia para resolver problemas 14.2 Movimiento armónico simple II: energía



La ecuación de energía del MAS (ecuación 14.21) es una relación útil entre velocidad, posición y energía mecánica total. Si el problema implica una relación entre posición, velocidad y aceleración sin referencia al tiempo, considere usar la ecuación (14.4) (de la segunda ley de Newton) o la (14.21) (de la conservación de la energía); puesto que en esta última intervienen x^2 y v_x^2, debemos inferir los *signos* de x y de v_x de la situación. Por ejemplo, si el cuerpo se mueve de la posición de equilibrio hacia al punto de desplazamiento positivo máximo, x y v_x serán valores positivos.

Ejemplo 14.4 Velocidad, aceleración y energía en el MAS



a) Calcule las velocidades máxima y mínima que alcanza el deslizador del ejemplo 14.2. *b*) Calcule las aceleraciones máxima y mínima. *c*) Determine la velocidad v_x y la aceleración a_x cuando el deslizador se ha movido a la mitad del camino desde su posición inicial a la posición de equilibrio $x = 0$. *d*) Determine las energías total, potencial y cinética en esta posición.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El problema se refiere a propiedades del movimiento en diversas *posiciones*, no en *instantes* específicos. Esto nos sugiere que podemos usar las relaciones de energía que dedujimos en esta sección. La figura 14.13 muestra que elegimos el eje x. El desplazamiento máximo con respecto al equilibrio es $A = 0.020$ m. Usaremos las ecuaciones (14.22) y (14.4) con la finalidad de obtener v_x y a_x para una x dada. Entonces usaremos la ecuación (14.21) para x y v_x dadas para obtener las energías total, potencial y cinética E, U y K.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (14.22), la velocidad v_x para cualquier desplazamiento x es

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2}$$

La *rapidez* máxima del deslizador ocurre cuando el cuerpo pasa por $x = 0$:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{200\ \text{N/m}}{0.50\ \text{kg}}}(0.020\ \text{m}) = 0.40\ \text{m/s}$$

Sus *velocidades* máxima y mínima (más negativa) son +0.40 m/s y −0.40 m/s, que ocurren cuando el cuerpo pasa por $x = 0$ hacia la derecha y hacia la izquierda, respectivamente.

b) De acuerdo con la ecuación (14.4), $a_x = -(k/m)x$. La aceleración máxima del deslizador (más positiva) ocurre en el valor más negativo de x, esto es, $x = -A$:

$$a_{\text{máx}} = -\frac{k}{m}(-A) = -\frac{200\ \text{N/m}}{0.50\ \text{kg}}(-0.020\ \text{m}) = 8.0\ \text{m/s}^2$$

La aceleración mínima (más negativa) es $a_{\text{mín}} = -8.0\ \text{m/s}^2$ y ocurre en $x = +A = +0.020$ m.

c) El punto a la mitad del camino de $x = x_0 = A$ a $x = 0$ es $x = A/2 = 0.010$ m. Según la ecuación (14.22), en este punto

$$v_x = -\sqrt{\frac{200\ \text{N/m}}{0.50\ \text{kg}}}\sqrt{(0.020\ \text{m})^2 - (0.010\ \text{m})^2} = -0.35\ \text{m/s}$$

Elegimos la raíz cuadrada negativa porque el deslizador se mueve de $x = A$ hacia $x = 0$. A partir de la ecuación (14.4),

$$a_x = -\frac{200\ \text{N/m}}{0.50\ \text{kg}}(0.010\ \text{m}) = -4.0\ \text{m/s}^2$$

En la figura 14.14, se muestran las condiciones en $x = 0$, $\pm A/2$ y $\pm A$.

d) Las energías son

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}(200\ \text{N/m})(0.020\ \text{m})^2 = 0.040\ \text{J}$$
$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(200\ \text{N/m})(0.010\ \text{m})^2 = 0.010\ \text{J}$$
$$K = \tfrac{1}{2}mv_x^2 = \tfrac{1}{2}(0.50\ \text{kg})(-0.35\ \text{m/s})^2 = 0.030\ \text{J}$$

EVALUAR: En $x = A/2$, la energía es una cuarta parte energía potencial y tres cuartas partes energía cinética. Podrá comprobar este resultado examinando la figura 14.15*b*.



Ejemplo 14.5 Energía y momento lineal en el MAS

Un bloque con masa M, unido a un resorte horizontal con constante de fuerza k, se desplaza en movimiento armónico simple con amplitud A_1. En el instante en que el bloque pasa por su posición de equilibrio, un trozo de masilla con masa m se deja caer verticalmente sobre el bloque desde una altura moderada y se adhiere a él. *a*) Calcule la amplitud y el periodo ahora. *b*) Repita el inciso *a*) suponiendo que la masilla se deja caer sobre el bloque en un extremo de su trayectoria.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El problema implica el movimiento en una posición dada, no un instante dado, así que usaremos métodos de energía para resolverlo. La figura 14.16 muestra nuestros bosquejos. Antes de que la masilla caiga, la energía mecánica del sistema constituido por el bloque y el resorte es constante. En el inciso *a*) la colisión entre la masilla y el bloque es un choque totalmente inelástico: se conserva la componente horizontal del momento lineal, pero disminuye la energía cinética, y aumenta la cantidad de masa que está oscilando. Después del choque, la energía mecánica se mantiene constante con un valor diferente. En el inciso *b*) también aumenta la masa que oscila, pero el bloque no se está moviendo cuando se agrega la masilla; no hay efectivamente una colisión, y no hay pérdida de energía mecánica. Calculamos la amplitud A_2 después del choque considerando la energía final del sistema usando la ecuación (14.21) y la conservación del momento lineal. El periodo T_2 después del choque es una *propiedad del sistema*, por lo que es igual en los incisos *a*) y *b*); lo encontramos mediante la ecuación (14.12).

EJECUTAR: *a*) Antes del choque, la energía mecánica total del bloque y el resorte es $E_1 = \frac{1}{2}kA_1^2$. El bloque está en $x = 0$, por lo que $U = 0$ y la energía es puramente cinética (figura 14.16*a*). Si v_1 es la rapidez del bloque en este punto, entonces $E_1 = \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2$ y

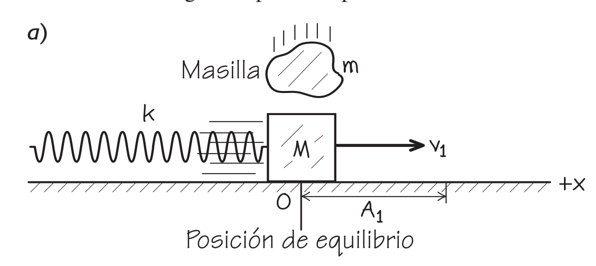
$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}A_1$$

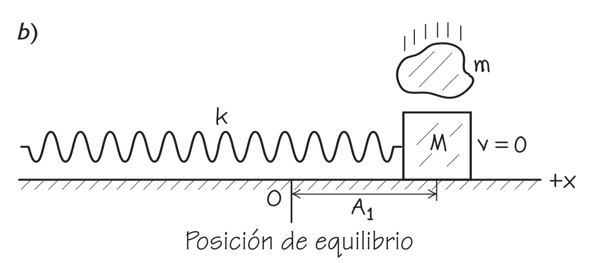
Durante el choque, se conserva la componente x del momento lineal del sistema conformado por el bloque y la masilla. (¿Por qué?). Justo antes del choque, esta componente es la suma de Mv_1 (para el bloque) y cero (para la masilla). Justo después del choque, el bloque y la masilla se mueven juntos con rapidez v_2, y su componente x del momento lineal combinada es $(M + m)v_2$. Por la conservación del momento lineal,

$$Mv_1 + 0 = (M + m)v_2 \qquad \text{así} \qquad v_2 = \frac{M}{M + m}v_1$$

Suponemos que el choque no dura mucho, así que poco después, el bloque y la masilla aún están en la posición de equilibrio. La energía sigue siendo exclusivamente cinética, pero *menor* que antes del choque:

$$E_2 = \frac{1}{2}(M + m)v_2^2 = \frac{1}{2}\frac{M^2}{M + m}v_1^2$$
$$= \frac{M}{M + m}\left(\frac{1}{2}Mv_1^2\right) = \left(\frac{M}{M + m}\right)E_1$$





14.16 Nuestros diagramas para este problema.

Puesto que $E_2 = \frac{1}{2}kA_2^2$, donde A_2 es la amplitud después del choque, tenemos

$$\frac{1}{2}kA_2^2 = \left(\frac{M}{M + m}\right)\frac{1}{2}kA_1^2$$
$$A_2 = A_1\sqrt{\frac{M}{M + m}}$$

Usando la ecuación (14.12), el periodo de oscilación después del choque es

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M + m}{k}}$$

b) Al caer la masilla sobre el bloque, este se encuentra momentáneamente en reposo (figura 14.16*b*); la componente x del momento lineal es cero tanto antes como después del choque. El bloque y la masilla tienen energía cinética cero justo antes del choque, y también inmediatamente después. Toda la energía es energía potencial almacenada en el resorte, por lo que la adición de la masa *no afecta* la energía mecánica. Es decir, $E_2 = E_1 = \frac{1}{2}kA_1^2$, y la amplitud después del choque es la misma: $A_2 = A_1$. El periodo es de nuevo $T_2 = 2\pi\sqrt{(M + m)/k}$.

EVALUAR: La energía se pierde en el inciso *a*) porque la masilla se desliza contra el bloque en movimiento durante el choque, y la energía se disipa por fricción cinética. No se pierde energía en el inciso *b*), ya que no hay deslizamiento durante la colisión.

Evalúe su comprensión de la sección 14.3 *a*) Para duplicar la energía total de un sistema masa-resorte oscilando con MAS, ¿en qué factor se debe aumentar la amplitud? **i.** 4; **ii.** 2; **iii.** $\sqrt{2} = 1.414$; **iv.** $\sqrt[4]{2} = 1.189$. *b*) ¿En qué factor cambiará la frecuencia como resultado de tal incremento de amplitud? **i.** 4; **ii.** 2; **iii.** $\sqrt{2} = 1.414$; **iv.** $\sqrt[4]{2} = 1.189$; **v.** no cambia.



14.4 Aplicaciones del movimiento armónico simple

Hasta ahora, hemos examinado globalmente *una* situación donde hay movimiento armónico simple (MAS): un cuerpo conectado a un resorte ideal horizontal. No obstante, el MAS se puede presentar en cualquier sistema donde haya una fuerza de restitución que sea directamente proporcional al desplazamiento con respecto al equilibrio, de acuerdo con la ecuación (14.3), $F_x = -kx$. La fuerza de restitución se originará de diferentes maneras y en distintas situaciones, por lo que se debe determinar la constante de fuerza k para cada caso, examinando la fuerza neta que actúa sobre el sistema. Una vez hecho esto, es fácil calcular la frecuencia angular ω, la frecuencia f y el periodo T; basta con sustituir el valor de k en las ecuaciones (14.10), (14.11) y (14.12), respectivamente. Utilicemos estas ideas para examinar varios ejemplos de movimiento armónico simple.

MAS vertical

Suponga que colgamos un resorte con constante de fuerza k (figura 14.17*a*) y suspendemos de este un cuerpo de masa m. Las oscilaciones ahora serán verticales; ¿seguirán definiéndose como MAS? En la figura 14.17*b*, el cuerpo cuelga en reposo, en equilibrio. En tal posición, el resorte se estira una distancia Δl apenas suficiente para que la fuerza vertical hacia arriba $k\,\Delta l$ del resorte sobre el cuerpo equilibre su peso mg:

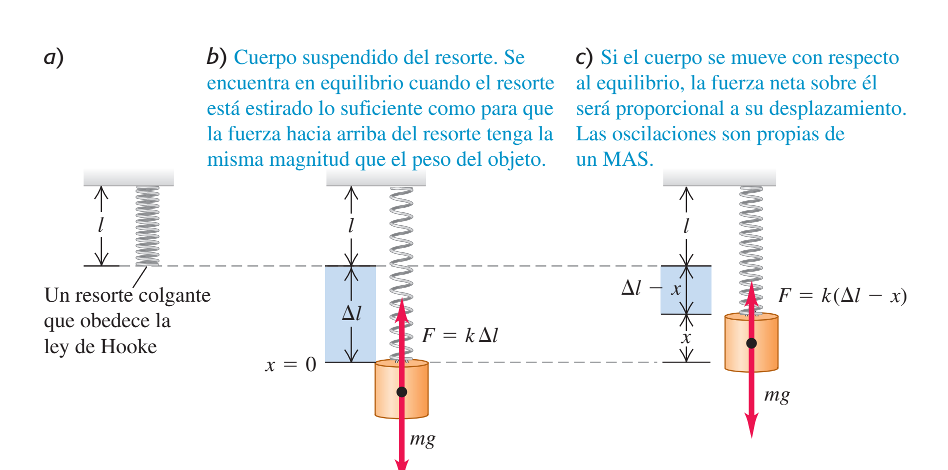
$$k\,\Delta l = mg$$

Sea $x = 0$ la posición de equilibrio, con la dirección $+x$ hacia arriba. Cuando el cuerpo está una distancia x *arriba* de su posición de equilibrio (figura 14.17*c*), la extensión del resorte es $\Delta l - x$. Entonces, la fuerza hacia arriba que ejerce sobre el cuerpo es $k(\Delta l - x)$, y la componente x neta de la fuerza sobre el cuerpo es

$$F_{\text{neta}} = k(\Delta l - x) + (-mg) = -kx$$

esto es, una fuerza neta hacia abajo de magnitud kx. Asimismo, cuando el cuerpo está *debajo* de la posición de equilibrio, hay una fuerza neta hacia arriba de magnitud kx. En ambos casos, hay una fuerza de restitución de magnitud kx. Si el cuerpo se pone en movimiento vertical, oscilará en MAS con la misma frecuencia angular que si fuera horizontal, $\omega = \sqrt{k/m}$. Por lo tanto, el MAS vertical no difiere en esencia del horizontal. El único cambio real es que la posición de equilibrio $x = 0$ ya no corresponde al punto donde el resorte no está estirado. Las mismas ideas son válidas cuando un cuerpo con peso mg se coloca sobre un resorte compresible (figura 14.18) y este se comprime una distancia Δl.

14.17 Un cuerpo se adhiere a un resorte colgante.





Ejemplo 14.6 MAS vertical en un automóvil viejo

Los amortiguadores de un automóvil viejo con masa de 1000 kg están gastados. Cuando una persona de 980 N se sube lentamente al auto en su centro de gravedad, el auto baja 2.8 cm. Cuando el auto (con la persona a bordo) cae en un bache, comienza a oscilar verticalmente en MAS. Modele el auto y a la persona como un solo cuerpo unido únicamente a un resorte, y calcule el periodo y la frecuencia de la oscilación.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La situación es similar a la de la figura 14.18. La compresión del resorte cuando se agrega el peso del individuo nos da la constante de fuerza, que podemos usar para obtener el periodo y la frecuencia (las incógnitas).

EJECUTAR: Cuando la fuerza aumenta en 980 N, el resorte se comprime otros 0.028 m, y la coordenada x del auto cambia en -0.028 m. Por lo tanto, la constante de fuerza efectiva (incluido el efecto de toda la suspensión) es

$$k = -\frac{F_x}{x} = -\frac{980 \text{ N}}{-0.028 \text{ m}} = 3.5 \times 10^4 \text{ kg/s}^2$$

La masa de la persona es $w/g = (980 \text{ N})/(9.8 \text{ m/s}^2) = 100$ kg. La masa oscilante *total* es $m = 1000 \text{ kg} + 100 \text{ kg} = 1100$ kg. El periodo T es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1100 \text{ kg}}{3.5 \times 10^4 \text{ kg/s}^2}} = 1.11 \text{ s}$$

y la frecuencia es $f = 1/T = 1/(1.11 \text{ s}) = 0.90$ Hz.

EVALUAR: Una oscilación persistente con un periodo aproximado de 1 segundo es muy molesta. El propósito de los amortiguadores es eliminar estas oscilaciones (véase la sección 14.7).

MAS angular

La figura 14.19 ilustra la rueda de balance de un reloj mecánico. La rueda tiene un momento de inercia I alrededor de su eje. Un resorte en espiral ejerce una torca de restitución τ_z que es proporcional al desplazamiento angular θ con respecto a la posición de equilibrio. Escribimos $\tau_z = -\kappa\theta$, donde κ (la letra griega kappa) es una constante llamada *constante de torsión.* Empleando la analogía rotacional de la segunda ley de Newton para un cuerpo rígido, $\Sigma\tau_z = I\alpha_z = I\, d^2\theta/dt^2$, podemos encontrar la ecuación del movimiento:

$$-\kappa\theta = I\alpha \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta$$

La forma de esta ecuación es idéntica a la de la ecuación (14.4) para la aceleración en movimiento armónico simple, sustituyendo x por θ y k/m por κ/I. Así, estamos tratando con una forma de movimiento armónico simple *angular*. La frecuencia angular ω y la frecuencia f están dadas por las ecuaciones (14.10) y (14.11), respectivamente, con la misma sustitución:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \text{y} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \text{(MAS angular)} \tag{14.24}$$

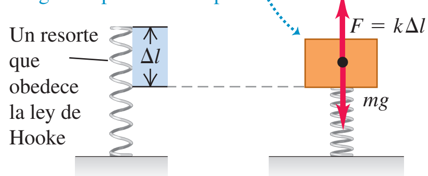
El movimiento está descrito por la función

$$\theta = \Theta\cos(\omega t + \phi)$$

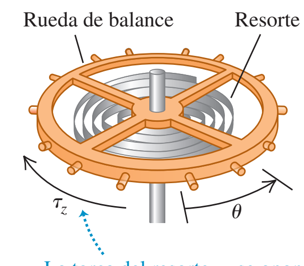
donde Θ (la letra griega theta mayúscula) desempeña el papel de una amplitud angular.

Es bueno que el movimiento de una rueda de balance *sea* armónico simple. Si no lo fuera, la frecuencia podría depender de la amplitud, y el reloj se adelantaría o se retrasaría, al ir disminuyendo la tensión del resorte.

14.18 Si el peso mg comprime el resorte una distancia Δl, la constante de fuerza es $k = mg/\Delta l$ y la frecuencia angular para un MAS vertical es $\omega = \sqrt{k/m}$; igual que si el cuerpo estuviera suspendido del resorte (véase la figura 14.17).



14.19 Rueda de balance de un reloj mecánico. El resorte ejerce una torca de restitución que es proporcional al desplazamiento angular θ; por lo tanto, el movimiento es MAS angular.



Vibraciones de moléculas

En la siguiente explicación de las vibraciones de las moléculas se usa el teorema binomial. Si el lector no está familiarizado con dicho teorema, le recomendamos estudiar la sección respectiva de su libro de matemáticas.

Cuando dos átomos están separados menos de unos cuantos diámetros atómicos, pueden ejercer fuerzas de atracción entre sí. Por otro lado, si los átomos están tan cercanos que sus capas electrónicas se traslapan, las fuerzas entre ellos son de repulsión. Entre estos límites, hay una separación de equilibrio donde los átomos forman una *molécula*. Si los átomos se desplazan ligeramente del equilibrio, oscilarán.

14.20 *a*) Dos átomos con sus centros separados una distancia r. *b*) La energía potencial U de la interacción de Van der Waals en función de r *c*) La fuerza F_r sobre el átomo derecho en función de r.

a) Sistema de dos átomos

b) Energía potencial U del sistema de dos átomos en función de r

c) La fuerza F_r en función de r

Como ejemplo, consideremos un tipo de interacción entre átomos llamada *interacción de Van der Waals*. Nuestro objetivo inmediato es estudiar las oscilaciones, así que no entraremos en detalles con respecto al origen de la interacción. Tomemos el centro de un átomo como el origen; el otro estará a una distancia r (figura 14.20*a*). La distancia de equilibrio entre los centros es $r = R_0$. Se ha observado experimentalmente que tal interacción se puede describir con la función de energía potencial

$$U = U_0\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_0}{r}\right)^{6}\right] \tag{14.25}$$

donde U_0 es una constante positiva con unidades de joules. Si los átomos están muy separados, $U = 0$; si están separados por la distancia de equilibrio $r = R_0$, $U = -U_0$. La fuerza sobre el segundo átomo es la derivada negativa de la ecuación (14.25):

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = U_0\left[\frac{12R_0^{12}}{r^{13}} - 2\frac{6R_0^{6}}{r^{7}}\right] = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r}\right)^{7}\right] \tag{14.26}$$

La energía potencial y la fuerza se grafican en las figuras 14.20*b* y 14.20*c*, respectivamente. La fuerza es positiva para $r < R_0$ y negativa para $r > R_0$, así que es una fuerza de *restitución*.

Examinemos la fuerza de restitución F_r en la ecuación (14.26). Introducimos la cantidad x para representar el desplazamiento con respecto al equilibrio:

$$x = r - R_0 \qquad \text{así que} \qquad r = R_0 + x$$

En términos de x, la fuerza F_r de la ecuación (14.26) se convierte en

$$\begin{aligned} F_r &= 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{R_0 + x}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{R_0 + x}\right)^{7}\right] \\ &= 12\frac{U_0}{R_0}\left[\frac{1}{(1 + x/R_0)^{13}} - \frac{1}{(1 + x/R_0)^{7}}\right] \end{aligned} \tag{14.27}$$

Esto no se parece a la ley de Hooke, $F_x = -kx$, y podríamos precipitarnos a la conclusión de que las oscilaciones moleculares no pueden ser MAS. Sin embargo, limitémonos a oscilaciones de *amplitud pequeña*, de modo que el valor absoluto del desplazamiento x sea pequeño en comparación con R_0, y el valor absoluto de la razón x/R_0 sea mucho menor que 1. Ahora podemos simplificar la ecuación (14.27) usando el *teorema binomial*:

$$(1 + u)^n = 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2!}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^3 + \cdots \tag{14.28}$$

Si $|u|$ es mucho menor que 1, cada término sucesivo de la ecuación (14.28) es mucho menor que el anterior, y podemos aproximar $(1 + u)^n$ con solo los dos primeros términos. En la ecuación (14.27), u se reemplaza con x/R_0 y n es igual a -13 o -7, de manera que

$$\frac{1}{(1 + x/R_0)^{13}} = (1 + x/R_0)^{-13} \approx 1 + (-13)\frac{x}{R_0}$$

$$\frac{1}{(1 + x/R_0)^{7}} = (1 + x/R_0)^{-7} \approx 1 + (-7)\frac{x}{R_0}$$

$$F_r \approx 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(1 + (-13)\frac{x}{R_0}\right) - \left(1 + (-7)\frac{x}{R_0}\right)\right] = -\left(\frac{72U_0}{R_0^2}\right)x \qquad (14.29)$$

Esta es la ley de Hooke con constante de fuerza $k = 72U_0/R_0^2$. (Observe que k tiene las unidades correctas, J/m^2 o bien, N/m). Así, las oscilaciones de las moléculas unidas por interacción de Van der Waals pueden ser movimiento armónico simple, si la amplitud es pequeña en comparación con R_0, haciendo válida la aproximación $|x/R_0| \ll 1$ empleada al deducir la ecuación (14.29).

También podemos demostrar que la energía potencial U de la ecuación (14.25) se puede escribir como $U \approx \frac{1}{2}kx^2 + C$, donde $C = -U_0$ y k es de nuevo igual a $72U_0/R_0^2$. La suma de una constante a la energía potencial no afecta la interpretación física, así que el sistema de dos átomos no es fundamentalmente distinto de una masa unida a un resorte horizontal, para el que $U = \frac{1}{2}kx^2$.

Ejemplo 14.7 Vibración molecular



Dos átomos de argón pueden formar una molécula débilmente unida, Ar_2, gracias a una interacción de Van der Waals con $U_0 = 1.68 \times 10^{-21}$ J y $R_0 = 3.82 \times 10^{-10}$ m. Calcule la frecuencia de oscilaciones pequeñas de un átomo de Ar alrededor de su posición de equilibrio.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR Es como la situación que se muestra en la figura 14.20. Puesto que las oscilaciones son pequeñas, podemos usar la ecuación (14.29) para obtener la constante de fuerza k, y la ecuación (14.11) para encontrar la frecuencia del MAS.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (14.29),

$$k = \frac{72U_0}{R_0^2} = \frac{72(1.68 \times 10^{-21}\text{ J})}{(3.82 \times 10^{-10}\text{ m})^2} = 0.829\text{ J/m}^2 = 0.829\text{ N/m}$$

(Esta constante de fuerza es comparable con la de los resortes de juguete laxos, como Slinky™). Según el apéndice D, la masa atómica media del argón es $(39.948\text{ u})(1.66 \times 10^{-27}\text{ kg/1 u}) = 6.63 \times 10^{-26}$ kg.

De acuerdo la ecuación (14.11), si uno de los átomos está fijo y el otro oscila,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0.829\text{ N/m}}{6.63 \times 10^{-26}\text{ kg}}} = 5.63 \times 10^{11}\text{ Hz}$$

EVALUAR: Nuestra respuesta para f no es del todo correcta. Si no actúa una fuerza externa neta sobre la molécula, su centro de masa (situado a la mitad de la distancia entre los dos átomos) no tiene aceleración, así que *ambos* átomos deben oscilar con la misma amplitud en direcciones opuestas. Podemos explicar esto sustituyendo m por $m/2$ en la expresión para f. Esto aumenta f en un factor de $\sqrt{2}$, así que la frecuencia correcta es $f = \sqrt{2}(5.63 \times 10^{11}\text{ Hz}) = 7.96 \times 10^{11}$ Hz. Una complicación adicional es que, para la escala atómica, debemos usar *mecánica cuántica*, en lugar de mecánica newtoniana, para describir el movimiento; por fortuna, la frecuencia tiene el mismo valor en mecánica cuántica: $f = 7.96 \times 10^{11}$ Hz.

Evalúe su comprensión de la sección 14.4 Un bloque unido a un resorte ideal colgante oscila verticalmente con un periodo de 10 s en la Tierra. Si usted se lleva el bloque y el resorte a Marte, donde la aceleración debida a la gravedad es solo el 40% de la terrestre, ¿cuál será el nuevo periodo de oscilación? **i.** 10 s; **ii.** más de 10 s; **iii.** menos de 10 s.



14.5 El péndulo simple



PhET: Pendulum Lab
ActivPhysics 9.10: Pendulum Frequency
ActivPhysics 9.11: Risky Pendulum Walk
ActivPhysics 9.12: Physical Pendulum

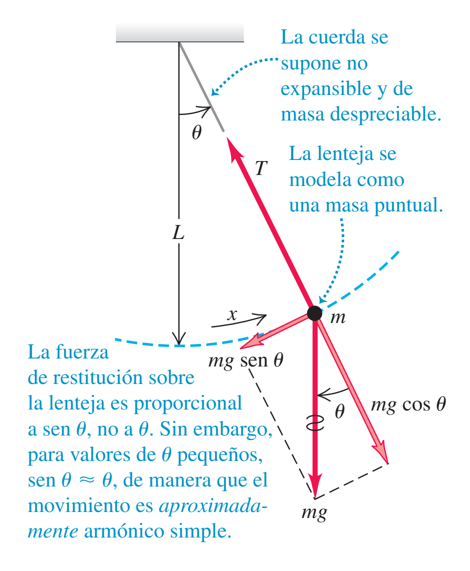
Un **péndulo simple** es un modelo idealizado que consiste en una masa puntual suspendida de una cuerda no expansible y de masa despreciable. Si la masa se mueve a un lado de su posición de equilibrio vertical descendente, oscilará alrededor de dicha posición. Situaciones ordinarias, como una bola de demolición en el cable de una grúa o un niño en un columpio (figura 14.21*a*) se modelan como péndulos simples.

14.21 Dinámica de un péndulo simple.

a) Un péndulo real



b) Un péndulo simple idealizado



La trayectoria de la partícula puntual con masa (llamada en ocasiones pesa o lenteja) no es una recta, sino el arco de un círculo de radio L igual a la longitud de la cuerda (figura 14.21*b*). Usamos como coordenada la distancia x medida sobre el arco. Si el movimiento es armónico simple, la fuerza de restitución debe ser directamente proporcional a x, o bien a θ (porque $x = L\theta$). ¿Lo es?

En la figura 14.21*b*, representamos las fuerzas que actúan sobre la masa en términos de componentes tangencial y radial. La fuerza de restitución F_θ es la componente tangencial de la fuerza neta:

$$F_\theta = -mg \text{ sen } \theta \tag{14.30}$$

La fuerza de restitución se debe a la gravedad; la tensión T solo actúa para hacer que la masa puntual describa un arco. La fuerza de restitución es proporcional *no* a θ sino a sen θ, así que el movimiento *no* es armónico simple. Sin embargo, si el ángulo θ es *pequeño*, sen θ es casi igual a θ en radianes (figura 14.22). Por ejemplo, si $\theta = 0.1$ rad (unos 6°), sen θ = 0.0998, una diferencia de solo 0.2%. Con esta aproximación, la ecuación (14.30) se convierte en

$$F_\theta = -mg\theta = -mg\frac{x}{L} \qquad \text{o}$$

$$F_\theta = -\frac{mg}{L}x \tag{14.31}$$

La fuerza de restitución es entonces proporcional a la coordenada para desplazamientos pequeños, y la constante de fuerza es $k = mg/L$. De acuerdo con la ecuación (14.10), la frecuencia angular ω de un péndulo simple con amplitud pequeña es

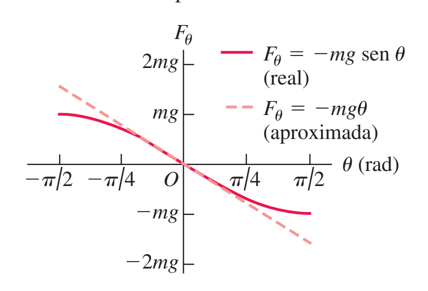
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/L}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{(péndulo simple, amplitud pequeña)} \tag{14.32}$$

Las relaciones de frecuencia y periodo correspondientes son

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{(péndulo simple, amplitud pequeña)} \tag{14.33}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{(péndulo simple, amplitud pequeña)} \tag{14.34}$$

14.22 Para pequeños desplazamientos angulares θ, la fuerza de restauración en un péndulo simple $F_\theta = -mg$ sen θ es aproximadamente igual a $-mg\theta$; es decir, es aproximadamente proporcional al desplazamiento θ. Por lo tanto, para ángulos pequeños, las oscilaciones son armónicas simples.



Observe que en estas expresiones no interviene la *masa* de la partícula. La razón es que la fuerza de restitución, una componente del peso de la partícula, es proporcional a m. Así, la masa aparece en *ambos* miembros de $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ y se elimina. (Se trata del mismo principio físico que explica por qué dos cuerpos con diferente masa caen con la misma aceleración en el vacío). Si la oscilación es pequeña, el periodo de un péndulo para un valor dado de g depende solo de su longitud.

La dependencia de L y g en las ecuaciones (14.32) a (14.34) es justo lo esperado. Un péndulo largo tiene un periodo más largo que uno corto. Si aumenta g, aumenta la fuerza de restitución, causando un aumento de la frecuencia y una disminución del periodo.

Destacamos nuevamente que el movimiento de un péndulo es *aproximadamente* armónico simple. Cuando la amplitud no es pequeña, la divergencia con respecto al MAS puede ser considerable. Pero, ¿qué significa "pequeña" en este caso? El periodo se puede expresar con una serie infinita; cuando el desplazamiento angular máximo es Θ, el periodo T está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\text{sen}^2\frac{\Theta}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2}\text{sen}^4\frac{\Theta}{2} + \cdots\right) \tag{14.35}$$

Podemos calcular el periodo con la precisión deseada tomando suficientes términos de la serie. Compruebe que si $\Theta = 15°$ (a cada lado de la posición central), el periodo

verdadero es más largo que la aproximación dada por la ecuación (14.34) en menos del 0.5%.

La utilidad del péndulo en relojes depende de que el periodo sea *prácticamente* independiente de la amplitud, siempre que esta sea pequeña. Así, al perder impulso un reloj de péndulo y disminuir un poco la amplitud de las oscilaciones, la exactitud del reloj casi no se altera.



Ejemplo 14.8 Un péndulo simple

Calcule el periodo y la frecuencia de un péndulo simple de 1.000 m de longitud en un lugar donde $g = 9.800\ \mathrm{m/s^2}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este es un péndulo simple, utilizaremos las ideas de esta sección. Usaremos la ecuación (14.34) para determinar el periodo T de un péndulo a partir de su longitud, y la ecuación (14.1) para obtener la frecuencia f a partir de T.

EJECUTAR: De acuerdo con las ecuaciones (14.34) y (14.1),

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.000\ \mathrm{m}}{9.800\ \mathrm{m/s^2}}} = 2.007\ \mathrm{s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2.007\ \mathrm{s}} = 0.4983\ \mathrm{Hz}$$

EVALUAR: El periodo es aproximadamente de 2 s. De hecho, cuando se estableció el sistema métrico, el segundo se *definió* como la mitad del periodo de un péndulo de 1 m. Sin embargo, este no fue un estándar muy adecuado para el tiempo, porque el valor de g varía según el lugar. Ya hablamos de estándares de tiempo más modernos en la sección 1.3.

Evalúe su comprensión de la seccciónn 14.5 Cuando un cuerpo que oscila en un resorte horizontal pasa por su posición de equilibrio, su aceleración es cero (véase la figura 14.2*b*). Cuando la lenteja de un péndulo oscilatorio simple pasa por su posición de equilibrio, ¿su aceleración es cero?

14.6 El péndulo físico

Un **péndulo físico** es cualquier péndulo *real* que usa un cuerpo de tamaño finito, en contraste con el modelo idealizado de péndulo *simple* en el que toda la masa se concentra en un punto. Si las oscilaciones son pequeñas, el análisis del movimiento de un péndulo real es tan sencillo como el de uno simple. La figura 14.23 muestra un cuerpo de forma irregular que puede girar sin fricción alrededor de un eje que pasa por el punto O. En la posición de equilibrio, el centro de gravedad está directamente abajo del pivote; en la posición que se muestra en la figura, el cuerpo está desplazado del equilibrio un ángulo θ que usamos como coordenada para el sistema. La distancia de O al centro de gravedad es d, el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje de rotación a través de O es I y la masa total es m. Cuando el cuerpo se desplaza como se muestra, el peso mg causa una torca de restitución

$$\tau_z = -(mg)(d\,\mathrm{sen}\,\theta) \tag{14.36}$$

El signo negativo indica que la torca de restitución es en sentido horario, si el desplazamiento es en sentido antihorario, y viceversa.

Cuando el cuerpo se libera, oscila alrededor de su posición de equilibrio. El movimiento no es armónico simple porque la torca τ_z es proporcional a $\mathrm{sen}\,\theta$, y no a θ mismo. No obstante, si θ es pequeño, podemos aproximar $\mathrm{sen}\,\theta$ con θ en radianes, tal como lo hicimos al analizar el péndulo simple. Entonces, el movimiento es *aproximadamente* armónico simple. Con esta aproximación,

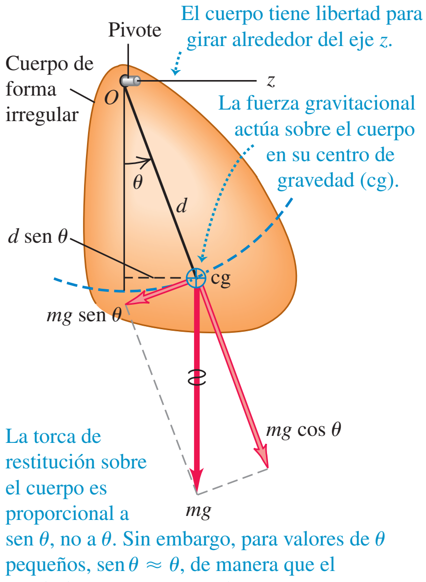
$$\tau_z = -(mgd)\theta$$

La ecuación de movimiento es $\sum\tau_z = I\alpha_z$, así que

$$-(mgd)\theta = I\alpha_z = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta \tag{14.37}$$

14.23 Dinámica de un péndulo físico.



Si comparamos esto con la ecuación (14.4), vemos que el papel de (k/m) en el sistema masa-resorte lo desempeña aquí la cantidad (mgd/I). Por lo tanto, la frecuencia angular está dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad \text{(péndulo físico, amplitud pequeña)} \tag{14.38}$$

La frecuencia f es $1/2\pi$ veces esto, y el periodo T es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad \text{(péndulo físico, amplitud pequeña)} \tag{14.39}$$

La ecuación (14.39) es la base de un método común para determinar experimentalmente el momento de inercia de un cuerpo de forma compleja. Primero, se localiza el centro de gravedad del cuerpo por balanceo. Luego, se suspende el cuerpo de modo que oscile libremente alrededor de un eje, y se mide el periodo T de oscilaciones de amplitud pequeña. Por último, usando la ecuación (14.39) se puede calcular el momento de inercia I del cuerpo alrededor de ese eje a partir de T, la masa del cuerpo m y la distancia d del eje al centro de gravedad (véase el ejercicio 14.53). Los investigadores en biomecánica usan este método para calcular los momentos de inercia de las extremidades de un animal. Esta información es importante para analizar cómo camina un animal, como veremos en el segundo de los dos ejemplos que siguen

Ejemplo 14.9 Péndulo físico contra péndulo simple



Suponga que el cuerpo de la figura 14.23 es una varilla uniforme de longitud L cuyo pivote se encuentra en un extremo. Calcule el periodo de su movimiento.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Nuestra incógnita es el periodo de oscilación de una varilla, la cual actúa como un péndulo físico. Necesitamos encontrar el momento de inercia de la varilla en la tabla 9.2, y después determinar T usando la ecuación (14.39).

EJECUTAR: El momento de inercia de una varilla uniforme con respecto a un eje en su extremo es $I = \frac{1}{3}ML^2$. La distancia del pivote al centro de gravedad de la varilla es $d = L/2$. Así, de acuerdo con la ecuación (14.39),

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{MgL/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

EVALUAR: Si la varilla es un metro ($L = 1.00$ m) y $g = 9.80$ m/s^2, entonces,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2(1.00\text{ m})}{3(9.80\text{ m/s}^2)}} = 1.64\text{ s}$$

El periodo es menor en un factor de $\sqrt{\frac{2}{3}} = 0.816$ que el de un péndulo simple con la misma longitud (véase el ejemplo 14.8). El momento de inercia de la varilla alrededor de un extremo, $I = \frac{1}{3}ML^2$, es un tercio del que tiene un péndulo simple, y el cg de la varilla está a la mitad de la distancia a partir del pivote, en comparación con un péndulo simple. Se puede demostrar que, junto con la ecuación (14.39), estas dos diferencias contribuyen al factor $\sqrt{\frac{2}{3}}$ con el que los péndulos difieren.

Ejemplo 14.10 *Tyrannosaurus rex* y el péndulo físico

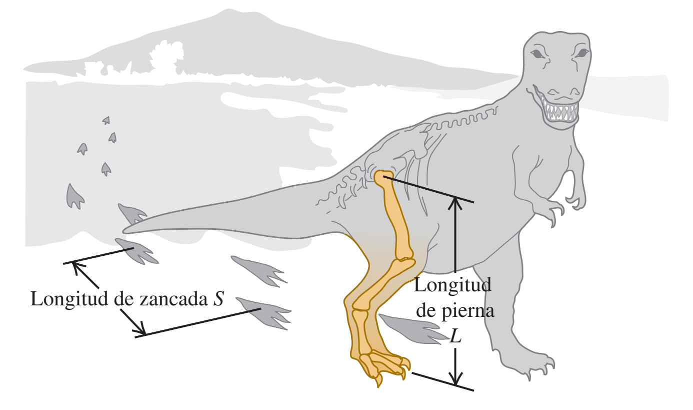


Todos los animales que caminan, incluido el ser humano, tienen un ritmo (paso) natural para desplazarse, es decir, un número de pasos por minuto que resulta más cómodo que un ritmo más rápido o más lento. Suponga que este ritmo natural corresponde a la oscilación de las piernas como un péndulo físico. *a*) ¿Cómo depende el paso natural de la longitud L de la pierna, medida de la cadera al pie? Considere la pierna como una varilla uniforme con pivote en la cadera. *b*) Pruebas fósiles demuestran que el *Tyrannosaurus rex*, un dinosaurio bípedo que vivió hace 65 millones de años, tenía una longitud de pierna $L = 3.1$ m y una longitud de zancada $S = 4.0$ m (la distancia de una huella a la siguiente del mismo pie; figura 14.24). Estime la rapidez con que caminaba el *T. rex*.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Nuestras incógnitas son *a*) la relación entre el ritmo al caminar y la longitud de la pierna, y *b*) la rapidez con que caminaba el *T rex*. Trataremos la pierna como un péndulo físico, con el

14.24 La rapidez al caminar del *Tyrannosaurus rex* se puede estimar a partir de la longitud de su pierna L y la de su zancada S.



periodo de oscilación que determinamos en el ejemplo 14.9. Podemos obtener la rapidez al caminar a partir del periodo y la longitud de la zancada.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con el ejemplo 14.9, el periodo de oscilación de la pierna es $T = 2\pi\sqrt{2L/3g}$, que es proporcional a $\sqrt{L}$. Cada paso toma medio periodo, así que el ritmo de la caminata (en pasos por segundo) es el doble de la frecuencia de oscilación $f = 1/T$, que es proporcional a $1/\sqrt{L}$. A mayor longitud L de pierna, menor será el ritmo del paso.

b) De acuerdo con nuestro modelo del ritmo del andar natural, el tiempo que el *T. rex* tardaba en dar una zancada era

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2(3.1\ \text{m})}{3(9.8\ \text{m/s}^2)}} = 2.9\ \text{s}$$

de manera que su rapidez al caminar era

$$v = \frac{S}{T} = \frac{4.0\ \text{m}}{2.9\ \text{s}} = 1.4\ \text{m/s} = 5.0\ \text{km/h} = 3.1\ \text{mi/h}$$

Esta es más o menos la rapidez con que camina un ser humano.

EVALUAR: Una varilla uniforme no es un buen modelo de una pierna. Las piernas de muchos animales, entre ellos el *T. rex* y los humanos, no son uniformes; hay mucho más masa entre la cadera y la rodilla que entre esta y el pie. Así, el centro de masa está a menos de $L/2$ de la cadera; una estimación razonable sería $L/4$. Por lo tanto, el momento de inercia es *significativamente* menor que $ML^2/3$, tal vez del orden de $ML^2/15$. Use el análisis del ejemplo 14.9 con estas correcciones; obtendrá un periodo de oscilación más corto y una rapidez al andar aún mayor para el *T. rex*.

Evalúe su comprensión de la sección 14.6 El centro de gravedad de un péndulo simple de masa m y longitud L se ubica en la posición de la lenteja del péndulo, a una distancia L del punto del pivote. El centro de gravedad de una varilla uniforme de la misma masa m y longitud $2L$ que pivota en un extremo también está a una distancia L del punto del pivote. ¿Cómo se compara el periodo de esta varilla uniforme con el periodo de un péndulo simple? **i.** La varilla tiene un periodo más largo; **ii.** la varilla tiene un periodo más corto; **iii.** la varilla tiene el mismo periodo.



14.7 Oscilaciones amortiguadas

Los sistemas oscilantes idealizados que hasta ahora hemos visto no tienen fricción; no hay fuerzas no conservativas, la energía mecánica total es constante, y un sistema puesto en movimiento sigue oscilando eternamente sin disminución de la amplitud.

Sin embargo, los sistemas del mundo real siempre tienen fuerzas disipativas, y las oscilaciones cesan con el tiempo, a menos que un mecanismo reponga la energía mecánica disipada (figura 14.25). Un reloj mecánico de péndulo sigue andando porque la energía potencial almacenada en el resorte, o en un sistema de pesos colgantes, repone la energía mecánica perdida por fricción en el pivote y los engranes. A final de cuentas, el resorte perderá su tensión o los pesos llegarán al fondo de su trayecto. Al no haber más energía disponible, la amplitud de las oscilaciones del péndulo disminuirá, y el reloj se detendrá.

14.25 Si una campana que oscila se deja de impulsar, tarde o temprano las fuerzas amortiguadoras (resistencia del aire y fricción en el punto de suspensión) harán que deje de moverse.



La disminución de la amplitud causada por fuerzas disipativas se denomina **amortiguamiento**, y el movimiento correspondiente se llama **oscilación amortiguada**. El caso más sencillo para un análisis detallado es un oscilador armónico simple, con una fuerza de amortiguamiento por fricción directamente proporcional a la *velocidad* del cuerpo oscilante. Este comportamiento se observa en la fricción por flujo de fluidos viscosos, como en los amortiguadores de los automóviles o el deslizamiento entre superficies lubricadas con aceite. Así, sobre el cuerpo actúa una fuerza adicional debida a la fricción, $F_x = -bv_x$, donde $v_x = dx/dt$ es la velocidad y b es una constante que describe la intensidad de la fuerza amortiguadora. El signo menos indica que la fuerza siempre tiene dirección opuesta a la velocidad. La fuerza *neta* que actúa sobre el cuerpo es, entonces,

$$\sum F_x = -kx - bv_x \qquad (14.40)$$

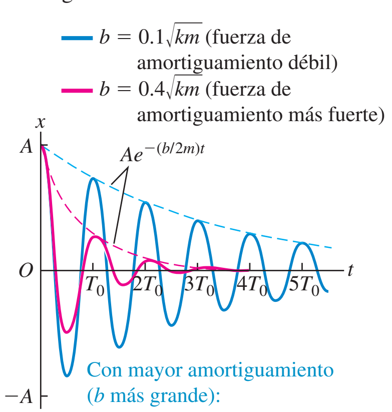
y la segunda ley de Newton para el sistema es

$$-kx - bv_x = ma_x \qquad \text{o} \qquad -kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (14.41)$$

La ecuación (14.41) es una ecuación diferencial en x; sería igual a la ecuación (14.4), que da la aceleración en un MAS, excepto por el término adicional $-bdx/dt$. La resolución de esta ecuación es un problema sencillo en ecuaciones diferenciales, pero no entraremos aquí en detalles. Si la fuerza de amortiguamiento es relativamente pequeña, el movimiento está descrito por

$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega' t + \phi) \quad \text{(oscilador con poco amortiguamiento)} \qquad (14.42)$$

14.26 Gráfica de desplazamiento contra tiempo para un oscilador con poco amortiguamiento [véase la ecuación (14.42)] y ángulo de fase $\phi = 0$. Se muestran curvas para dos valores de la constante de amortiguamiento b.



La frecuencia angular de la oscilación ω' está dada por

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad \text{(oscilador con poco amortiguamiento)} \tag{14.43}$$

El lector podrá verificar que la ecuación (14.42) es una solución de la ecuación (14.41) calculando la primera y segunda derivadas de x, sustituyéndolas en la ecuación (14.41) y verificando si los miembros derecho e izquierdo son iguales. Este procedimiento es sencillo, aunque algo tedioso.

El movimiento descrito por la ecuación (14.42) difiere del caso no amortiguado en dos aspectos. Primero, la amplitud $Ae^{-(b/2m)t}$ no es constante, sino que disminuye con el tiempo a causa del factor exponencial decreciente $e^{-(b/2m)t}$. La figura 14.26 es una gráfica de la ecuación (14.42) para el caso $\phi = 0$; muestra que, cuanto mayor sea el valor de b, la amplitud disminuirá más rápidamente.

Segundo, la frecuencia angular ω', dada por la ecuación (14.43), ya no es igual a $\omega = \sqrt{k/m}$ sino un poco menor, y se vuelve cero si b es tan grande que

$$\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = 0 \qquad \text{o} \qquad b = 2\sqrt{km} \tag{14.44}$$

Si se satisface la ecuación (14.44), la condición se denomina **amortiguamiento crítico**. El sistema ya no oscila, sino que vuelve a su posición de equilibrio sin oscilar cuando se le desplaza y suelta.

Si b es mayor que $2\sqrt{km}$, la condición se denomina **sobreamortiguamiento**. Aquí tampoco hay oscilación, pero el sistema regresa al equilibrio más lentamente que con amortiguamiento crítico. Para el caso sobreamortiguado, las soluciones de la ecuación (14.41) tienen la forma

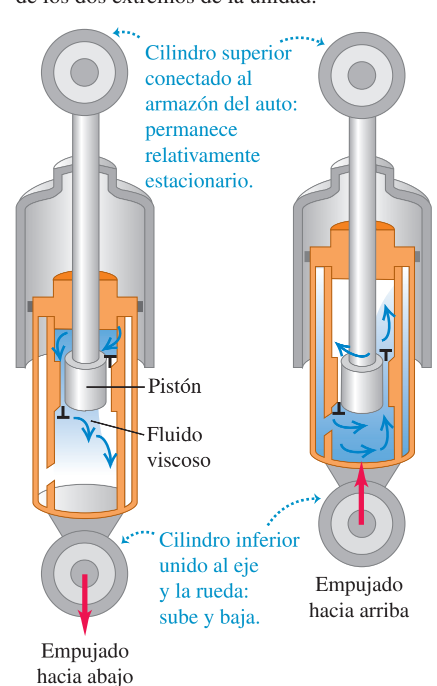
$$x = C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t}$$

donde C_1 y C_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales, y a_1 y a_2 son constantes determinadas por m, k y b.

Cuando b es menor que el valor crítico, como en la ecuación (14.42), la condición se llama **subamortiguamiento**. El sistema oscila con amplitud constantemente decreciente.

En un diapasón o una cuerda de guitarra que vibra, normalmente queremos el mínimo amortiguamiento posible. En cambio, el amortiguamiento es benéfico en las oscilaciones de la suspensión de un automóvil. Los amortiguadores proveen una fuerza amortiguadora dependiente de la velocidad para que, cuando el auto pase por un bache, no siga rebotando eternamente (figura 14.27). Para optimizar la comodidad de los pasajeros, el sistema debería estar críticamente amortiguado o un poco subamortiguado. Demasiado amortiguamiento sería contraproducente: si la suspensión está sobreamortiguada y el auto cae en otro bache, justo después del primero, los resortes de la suspensión todavía estarán comprimidos un poco por el primer golpe, y no podrán absorber plenamente el impacto.

14.27 Un amortiguador de automóvil. El fluido viscoso causa una fuerza amortiguadora que depende de la velocidad relativa de los dos extremos de la unidad.



Energía en oscilaciones amortiguadas

En oscilaciones amortiguadas, la fuerza amortiguadora no es conservativa; la energía mecánica del sistema no es constante, sino que disminuye continuamente, acercándose a cero después de un tiempo largo. Con la finalidad de deducir una expresión para la rapidez de cambio de energía, primero escribimos una expresión para la energía mecánica total E en cualquier instante:

$$E = \tfrac{1}{2}mv_x^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

Para calcular la rapidez de cambio de esta cantidad, la derivamos con respecto al tiempo:

$$\frac{dE}{dt} = mv_x\frac{dv_x}{dt} + kx\frac{dx}{dt}$$

Pero $dv_x/dt = a_x$, y $dx/dt = v_x$, así que

$$\frac{dE}{dt} = v_x(ma_x + kx)$$

De acuerdo con la ecuación (14.41), $ma_x + kx = -bdx/dt = -bv_x$, por lo que

$$\frac{dE}{dt} = v_x(-bv_x) = -bv_x^2 \quad \text{(oscilaciones amortiguadas)} \tag{14.45}$$

El miembro derecho de la ecuación (14.45) es **negativo**, siempre que el cuerpo que oscila esté en movimiento, independientemente de que la velocidad v_x sea positiva o negativa. Esto indica que conforme el cuerpo se mueve, la energía disminuye, aunque no con una tasa uniforme. El término $-bv_x^2 = (-bv_x)v_x$ (fuerza multiplicada por velocidad) es la rapidez con que la fuerza amortiguadora efectúa trabajo (negativo) sobre el sistema (es decir, la *potencia* amortiguadora). Esto es igual a la tasa de cambio de la energía mecánica total del sistema.

Se observa un comportamiento similar en circuitos eléctricos que contienen inductancia, capacitancia y resistencia. Hay una frecuencia de oscilación natural, y la resistencia desempeña el papel de la constante de amortiguamiento b. Estudiaremos estos circuitos con detalle en los capítulos 30 y 31 (volumen 2).

Evalúe su comprensión de la sección 14.7 Un avión vuela en línea recta a una altitud constante. Si una ráfaga de viento golpea la punta del aparato y la eleva, la punta se balanceará verticalmente hasta que finalmente el avión regrese a su altitud original. ¿Estas oscilaciones son **i.** no amortiguadas, **ii.** subamortiguadas, **iii.** críticamente amortiguadas o **iv.** sobreamortiguadas?

14.8 Oscilaciones forzadas y resonancia

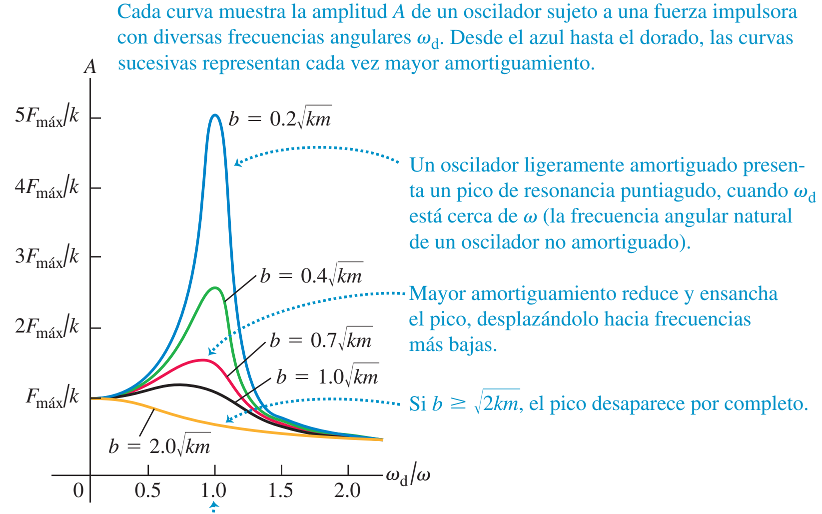
Un oscilador amortiguado aislado dejará de moverse tarde o temprano; no obstante, podemos mantener una oscilación de amplitud constante aplicando una fuerza que varíe con el tiempo periódica o cíclicamente, con periodo y frecuencia definidos. Por ejemplo, considere que su primo Morton está sentado en un columpio. Puede mantenerlo oscilando con amplitud constante dándole un empujoncito a la vez en cada ciclo. Llamamos a esta fuerza adicional **fuerza impulsora**.

Oscilación amortiguada con una fuerza impulsora periódica

Si aplicamos a un oscilador armónico amortiguado una fuerza impulsora que varíe periódicamente con frecuencia angular ω_d, el movimiento resultante se llama **oscilación forzada**, o bien, *oscilación impulsada*, y es diferente del movimiento que se da cuando el sistema se desplaza del equilibrio y luego se deja solo, en cuyo caso el sistema oscilará con una **frecuencia angular natural** ω' determinada por m, k y b, como en la ecuación (14.43). En una oscilación forzada, en cambio, la frecuencia angular con que la masa oscila es igual a la frecuencia angular de la fuerza impulsora, ω_d, la cual *no* tiene que ser igual a la frecuencia angular ω' con que el sistema oscilaría sin una fuerza impulsora. Si usted sujeta las cuerdas del columpio de Morton, puede obligar al columpio a oscilar con cualquier frecuencia que desee.

Suponga que se obliga al oscilador a vibrar con una frecuencia angular ω_d casi *igual* a la frecuencia angular ω' que tendría sin una fuerza impulsora. ¿Qué sucede? El oscilador tiende naturalmente a oscilar con $\omega = \omega'$, y esperaríamos que la amplitud de la oscilación resultante fuera mayor que cuando las dos frecuencias son muy diferentes. Análisis y experimentos detallados muestran que esto es lo que sucede. El caso más fácil de analizar es una fuerza impulsora que varía *sinusoidalmente*, digamos, $F(t) = F_{máx} \cos \omega_d t$. Si variamos la frecuencia ω_d de la fuerza impulsora, la amplitud de la oscilación forzada resultante variará de manera interesante (figura 14.28). Cuando hay muy poco amortiguamiento (b pequeña), la amplitud tendrá un pico marcado conforme la frecuencia angular impulsora ω_d se acerca a la frecuencia angular de oscilación natural ω'. Cuando aumenta el amortiguamiento (b mayor), el pico se ensancha y se hace más bajo, desplazándose hacia menores frecuencias.

Podríamos deducir una expresión que muestre cómo la amplitud A de la oscilación forzada depende de la frecuencia de una fuerza impulsora sinusoidal, con valor



14.28 Gráfica de la amplitud A de oscilación forzada en función de la frecuencia angular ω_d de la fuerza impulsora. El eje horizontal indica el cociente de ω_d y la frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$ de un oscilador no amortiguado. Cada curva tiene un valor distinto de la constante de amortiguamiento b.

máximo $F_{máx}$. Ello implicaría resolver ecuaciones diferenciales para las que aún no estamos preparados, aunque el resultado sería:



$$A = \frac{F_{máx}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + b^2\omega_d^2}} \quad \text{(amplitud de un oscilador impulsado)} \qquad (14.46)$$

Cuando $k - m\omega_d^2 = 0$, el primer término bajo el radical es cero, y A tiene un máximo cerca de $\omega_d = \sqrt{k/m}$. La altura de la curva en este punto es proporcional a $1/b$; cuanto menor sea el amortiguamiento, más alto será el pico. En el extremo de baja frecuencia, con $\omega_d = 0$, obtenemos $A = F_{máx}/k$. Esto corresponde a una fuerza *constante* $F_{máx}$ y un desplazamiento constante $A = F_{máx}/k$ con respecto al equilibrio, como esperaríamos.

Resonancia y sus consecuencias

El hecho de que haya un pico de amplitud a frecuencias impulsoras cercanas a la frecuencia natural del sistema se denomina **resonancia**. En física, abundan los ejemplos de resonancia; uno es aumentar las oscilaciones de un niño en un columpio, empujando con una frecuencia igual a la frecuencia natural del columpio. Un ruido vibratorio en un automóvil que se escucha solo a cierta rapidez del motor o de rotación de las ruedas es un ejemplo muy conocido. Los altavoces de bajo precio a menudo emiten un retumbo o zumbido molesto, cuando una nota musical coincide con la frecuencia de resonancia del cono del altavoz o de la carcasa. En el capítulo 16 estudiaremos otros ejemplos de resonancia que implican sonido. La resonancia también ocurre en los circuitos eléctricos, como veremos en el capítulo 31 (volumen 2). Un circuito sintonizado en un radio o un televisor responden vigorosamente a ondas con frecuencias cercanas a su frecuencia de resonancia, y aprovechamos esto para seleccionar una estación específica y rechazar las demás.

La resonancia en los sistemas mecánicos puede ser destructiva. Un escuadrón de soldados una vez destruyó un puente marchando sobre él al mismo paso; la frecuencia de sus pasos era cercana a una frecuencia de vibración natural del puente, y la oscilación resultante tuvo suficiente amplitud para resquebrajar el puente. Desde entonces, se ha ordenado a los soldados que rompan el paso antes de cruzar un puente. Hace algunos años, las vibraciones de los motores de cierto avión tuvieron justo la frecuencia adecuada para resonar con las frecuencias naturales de las alas. Las grandes oscilaciones se acumularon y, finalmente, las alas se desprendieron.

Aplicación Resonancia canina
A diferencia de los humanos, los perros no tienen glándulas sudoríparas, de manera que deben jadear para enfriarse. La frecuencia con la que jadea un perro está muy cerca de la frecuencia de resonancia de su sistema respiratorio. Esto hace que la máxima cantidad de aire entre y salga del cuerpo del perro, y así se minimiza el esfuerzo que el animal debe ejercer para enfriarse por sí mismo.



Evalúe su comprensión de la sección 14.8 Al impulsarse con una frecuencia cercana a su frecuencia natural, un oscilador con muy poco amortiguamiento tiene mucho mayor respuesta, que el mismo oscilador con más amortiguamiento. Cuando se impulsa con una frecuencia que es mucho mayor o mucho menor que la frecuencia natural, ¿qué oscilador tendrá la mayor respuesta: **i.** aquel con muy poco amortiguamiento o **ii.** el que tiene más amortiguamiento?

MP

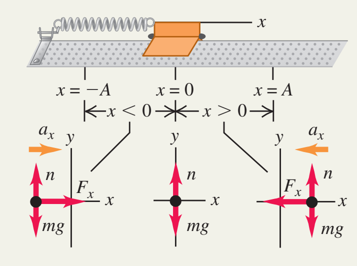
RESUMEN



Movimiento periódico: Un movimiento periódico se repite en un ciclo definido; se presenta siempre que un cuerpo tiene una posición de equilibrio estable y una fuerza de restitución que actúa cuando el cuerpo se desplaza a partir del equilibrio. El periodo T es el tiempo que tarda un ciclo. La frecuencia f es el número de ciclos por unidad de tiempo. La frecuencia angular ω es 2π veces la frecuencia. (Véase el ejemplo 14.1).

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f} \tag{14.1}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{14.2}$$



Movimiento armónico simple: Si en el movimiento periódico la fuerza de restitución F_x es directamente proporcional al desplazamiento x, el movimiento se denomina armónico simple (MAS). En muchos casos, esta condición se satisface si el desplazamiento con respecto al equilibrio es pequeño. La frecuencia angular, la frecuencia y el periodo en un MAS no dependen de la amplitud, solo dependen de la masa m y la constante de fuerza k. En un MAS, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración son funciones sinusoidales del tiempo; la amplitud A y el ángulo de fase ϕ de la oscilación están determinados por la posición y velocidad iniciales del cuerpo. (Véase los ejemplos 14.2, 14.3, 14.6 y 14.7).

$$F_x = -kx \tag{14.3}$$

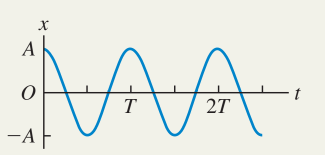
$$a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{k}{m}x \tag{14.4}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{14.10}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{14.11}$$

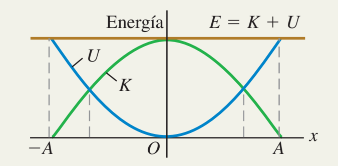
$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{14.12}$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \tag{14.13}$$



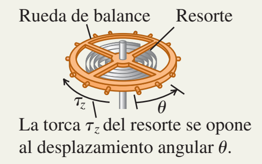
Energía en el movimiento armónico simple: La energía se conserva en un MAS. La energía total se puede expresar en términos de la constante de fuerza k y la amplitud A. (Véase los ejemplos 14.4 y 14.5).

$$E = \tfrac{1}{2}mv_x^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 = \text{constante}$$



Movimiento armónico simple angular: En el MAS angular, la frecuencia y la frecuencia angular están relacionadas con el momento de inercia I y la constante de torsión κ.

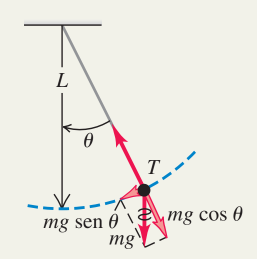
$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \text{y} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$



Péndulo simple: Un péndulo simple consiste en una masa puntual m en el extremo de una cuerda de longitud L y masa despreciable. Su movimiento es aproximadamente armónico simple si la amplitud es lo bastante pequeña; entonces, la frecuencia angular, la frecuencia y el periodo dependen solo de g y L, no de la masa ni de la amplitud. (Véase el ejemplo 14.8).

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \tag{14.32}$$

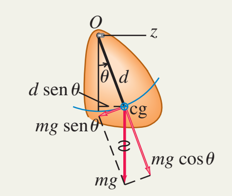
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{14.34}$$



Péndulo físico: Un péndulo físico es un cuerpo suspendido de un eje de rotación. La frecuencia angular y el periodo para oscilaciones de amplitud pequeña son independientes de la amplitud, aunque dependen de la masa m, la distancia d del eje de rotación a su centro de gravedad y del momento de inercia I con respecto al eje. (Véase los ejemplos 14.9 y 14.10).

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \tag{14.38}$$

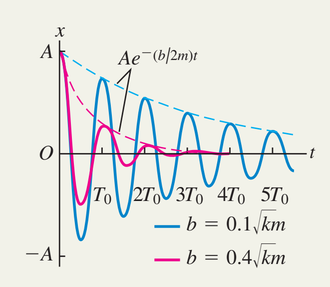
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{14.39}$$



Oscilaciones amortiguadas: Si a un oscilador armónico simple se le aplica una fuerza $F_x = -bv_x$ proporcional a la velocidad, el movimiento se denomina oscilación amortiguada. Si $b < 2\sqrt{km}$ (condición de subamortiguamiento), el sistema oscila con amplitud decreciente y una frecuencia angular ω' que es más baja de la que tendría sin amortiguamiento. Si $b = 2\sqrt{km}$ (condición de amortiguamiento crítico) o $b > 2\sqrt{km}$ (condición de sobreamortiguamiento), cuando el sistema se desplaza regresando a su posición de equilibrio sin oscilar.

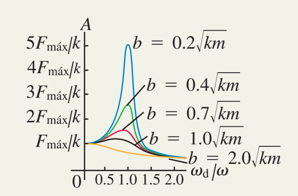
$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega' t + \phi) \quad (14.42)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad (14.43)$$



Oscilaciones impulsadas y resonancia: Si a un oscilador armónico amortiguado se aplica una fuerza impulsora que varía sinusoidalmente, el movimiento resultante se denomina oscilación forzada. La amplitud es función de la frecuencia impulsora ω_d y alcanza un máximo con una frecuencia impulsora cercana a la frecuencia natural del sistema. Este comportamiento se denomina resonancia.

$$A = \frac{F_{máx}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + b^2\omega_d^2}} \quad (14.46)$$

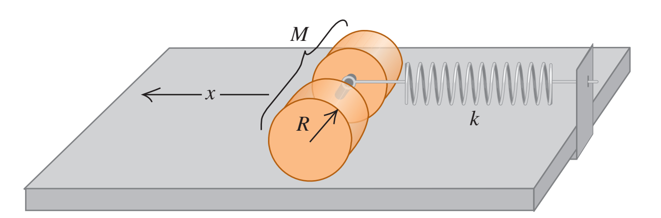


PROBLEMA PRÁCTICO Oscilar y rodar



Dos cilindros sólidos uniformes, de radio R y masa total M, están conectados a lo largo de su eje común mediante una varilla corta y ligera, y descansan sobre una mesa horizontal (figura 14.29). Un anillo sin fricción en el centro de la varilla está unido a un resorte con constante de fuerza k; el otro extremo del resorte está fijo. Se tira de los cilindros hacia la izquierda una distancia x, estirando el resorte, y luego se suelta el sistema a partir del reposo. Debido a la fricción entre la mesa y los cilindros, estos últimos ruedan sin resbalar, conforme oscilan. Demuestre que el movimiento del centro de masa de los cilindros es armónico simple, y encuentre su periodo.

14.29



GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. ¿Qué condición se debe cumplir para que el movimiento del centro de masa de los cilindros sea armónico simple? (*Sugerencia:* Véase la sección 14.2).
2. ¿Cuáles ecuaciones se deberían utilizar para describir los movimientos de traslación y de rotación de los cilindros? ¿Qué ecuación se debe utilizar para describir la condición de que los cilindros ruedan sin resbalar? (*Sugerencia:* Véase la sección 10.3).
3. Dibuje la situación y elija un sistema de coordenadas. Elabore una lista de las cantidades desconocidas y determine cuál es la incógnita.

EJECUTAR

4. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para los cilindros cuando se desplazan una distancia x a partir del equilibrio.
5. Resuelva las ecuaciones con la finalidad de encontrar una expresión para la aceleración del centro de masa de los cilindros. ¿Qué le dice esta expresión?
6. Utilice el resultado del paso 5 para encontrar el periodo de oscilación del centro de masa de los cilindros.

EVALUAR

7. ¿Cuál sería el periodo de oscilación si no hubiera fricción y los cilindros no hubieran rodado? ¿Este periodo es mayor o menor que el resultado del paso 6? ¿Es esto razonable?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com 

•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P14.1 Un objeto se mueve con MAS de amplitud A en el extremo de un resorte. Si la amplitud se duplica, ¿qué sucede con la distancia total que el objeto recorre en un periodo? ¿Qué sucede con el periodo? ¿Qué sucede con la rapidez máxima del objeto? Analice la relación entre estas respuestas.

P14.2 Piense en varios ejemplos cotidianos de movimiento que sea, al menos aproximadamente, armónico simple. ¿Cómo difiere cada uno del MAS?

P14.3 ¿Un diapasón u otro instrumento de afinación similar tiene MAS? ¿Por qué es algo esencial para los músicos?

P14.4 Una caja que contiene un guijarro se conecta a un resorte horizontal ideal y oscila sobre una mesa de aire sin fricción. Cuando la caja ha alcanzado su distancia máxima a partir del punto de equilibrio, repentinamente el guijarro se retira verticalmente sin perturbar la caja. ¿Las siguientes características del movimiento aumentarán, disminuirán o permanecerán iguales en el movimiento subsiguiente de la caja? Justifique cada respuesta. *a*) Frecuencia; *b*) periodo; *c*) amplitud; *d*) energía cinética máxima de la caja; *e*) rapidez máxima de la caja.

P14.5 Si un resorte uniforme se corta a la mitad, ¿qué constante de fuerza tendrá cada mitad? Justifique su respuesta. ¿Cómo diferiría la frecuencia del MAS usando la mitad del resorte en comparación con la frecuencia producida usando la misma masa y el resorte completo?

P14.6 En el análisis del MAS de este capítulo se despreció la masa del resorte. ¿Cómo cambia esta masa las características del movimiento?

P14.7 Dos deslizadores idénticos en un riel de aire están conectados por un resorte ideal. ¿Podría tal sistema experimentar un MAS? Explique su respuesta. ¿Cómo sería el periodo en comparación con el de un solo deslizador unido a un resorte, donde el otro extremo está unido rígidamente a un objeto estacionario? Explique su respuesta.

P14.8 Imagine que lo capturan unos marcianos, lo llevan a su nave y lo duermen con un sedante. Tiempo después, despierta y se encuentra encerrado en un compartimento pequeño sin ventanas. Lo único que le dejaron es su reloj digital, su anillo de graduación y su larga cadena de plata. Explique cómo podría determinar si todavía está en la Tierra o si se encuentra en Marte.

P14.9 El sistema que se muestra en la figura 14.17 se monta en un elevador. ¿Qué sucede con el periodo del movimiento (aumenta, disminuye o no cambia), cuando el elevador *a*) acelera hacia arriba a 5.0 $\mathrm{m/s^2}$; *b*) se mueve hacia arriba a 5.0 m/s constantes; *c*) acelera hacia abajo a 5.0 $\mathrm{m/s^2}$? Justifique sus respuestas.

P14.10 Si un péndulo tiene un periodo de 2.5 s en la Tierra, ¿qué periodo tendría en una estación espacial en órbita terrestre? Si una masa colgada de un resorte vertical tiene un periodo de 5.0 s en la Tierra, ¿qué periodo tendrá en la estación espacial? Justifique sus respuestas.

P14.11 Un péndulo simple se monta en un elevador. ¿Qué sucede con el periodo del péndulo (aumenta, disminuye o no cambia), cuando el elevador *a*) acelera hacia arriba a 5.0 $\mathrm{m/s^2}$; *b*) se mueve hacia arriba a 5.0 m/s constantes; *c*) acelera hacia abajo a 5.0 $\mathrm{m/s^2}$; *d*) acelera hacia abajo a 9.8 $\mathrm{m/s^2}$? Justifique sus respuestas.

P14.12 ¿Qué debe hacerse a la longitud de la cuerda de un péndulo simple para *a*) duplicar su frecuencia, *b*) duplicar su periodo, *c*) duplicar su frecuencia angular?

P14.13 Si un reloj de péndulo se sube a la cima de una montaña, ¿se adelanta o se atrasa? Explique, suponiendo que marca la hora correcta a menor altitud.

P14.14 Si la amplitud de un péndulo simple aumenta, ¿debería aumentar o disminuir su periodo? Mencione un argumento cualitativo; no se base en la ecuación (14.35). ¿Su argumento también es válido para un péndulo físico?

P14.15 ¿Por qué los perros pequeños (como los chihuahueños) caminan con zancadas más rápidas que los perros grandes (como los daneses)?

P14.16 ¿En qué punto del movimiento de un péndulo simple es máxima la tensión en la cuerda? ¿Y mínima? En cada caso, explique su razonamiento.

P14.17 ¿Un estándar de tiempo podría basarse en el periodo de cierto péndulo estándar? ¿Qué ventajas y desventajas tendría tal estándar con respecto al estándar actual descrito en la sección 1.3?

P14.18 Para un péndulo simple, diferencie claramente entre ω (la velocidad angular) y ω (la frecuencia angular). ¿Cuál es constante y cuál es variable?

P14.19 Un deslizador está conectado a un resorte ideal fijo y oscila sobre una pista de aire horizontal sin fricción. Se coloca una moneda encima del deslizador para que oscile con este. ¿En qué puntos del movimiento es máxima la fuerza de fricción sobre la moneda? ¿En qué puntos es mínima? Justifique sus respuestas.

P14.20 Al diseñar estructuras en una región de alta sismicidad, ¿qué relación debe haber entre las frecuencias naturales de oscilación de una estructura y las frecuencias típicas de un terremoto? ¿Por qué? ¿La estructura debe tener mucho o poco amortiguamiento?

EJERCICIOS

Sección 14.1 Descripción de la oscilación

14.1 • **BIO** *a*) **Música.** Cuando una persona canta, sus cuerdas vocales vibran en un patrón repetitivo que tiene la misma frecuencia que la nota que está cantando. Si alguien canta la nota si bemol, que tiene una frecuencia de 466 Hz, ¿cuánto tiempo duran las cuerdas vocales de la persona vibrando para completar un ciclo completo, y cuál es la frecuencia angular de las cuerdas? *b*) **Oído.** Cuando las ondas sonoras inciden sobre el tímpano, esta membrana vibra con la misma frecuencia que el sonido. El tono más alto que los seres humanos normales pueden oír tiene un periodo de 50.0 μs. ¿Cuáles son la frecuencia y la frecuencia angular del tímpano vibrando por este sonido? *c*) **Vista.** Cuando luz que tiene vibraciones de frecuencia angular que van desde 2.7×10^{15} rad/s a 4.7×10^{15} rad/s incide en la retina del ojo, estimula las células receptoras ahí y se percibe como luz visible. ¿Cuáles son los límites del periodo y la frecuencia de la luz? *d*) **Ultrasonido.** Se utilizan ondas sonoras de alta frecuencia (ultrasonido) para examinar el interior del cuerpo, de forma similar a como lo hacen los rayos x. Para detectar objetos pequeños, tales como tumores, se utiliza una frecuencia de alrededor de 5.0 MHz. ¿Cuáles son el periodo y la frecuencia angular de las vibraciones moleculares causadas por este pulso de sonido?

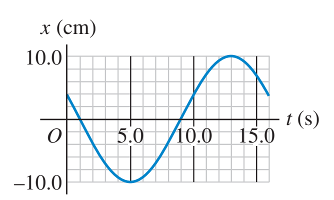
14.2 • Si un objeto en una superficie horizontal sin fricción se une a un resorte, se desplaza y después se suelta, oscilará. Si se desplaza 0.120 m a partir de su posición de equilibrio y se suelta con rapidez

inicial cero, luego de 0.800 s su desplazamiento es de 0.120 m en el lado opuesto, habiendo pasado la posición de equilibrio una vez durante este intervalo. Calcule *a*) la amplitud, *b*) el periodo y *c*) la frecuencia.

14.3 • La punta de un diapasón efectúa 440 vibraciones completas en 0.500 s. Calcule la frecuencia angular y el periodo del movimiento.

14.4 • En la figura E14.4 se muestra el desplazamiento de un objeto oscilante en función del tiempo. Calcule *a*) la frecuencia, *b*) la amplitud, *c*) el periodo y *d*) la frecuencia angular de este movimiento.

Figura **E14.4**



14.5 •• Una pieza de una máquina está en MAS con frecuencia de 5.00 Hz y amplitud de 1.80 cm. ¿Cuánto tarda la pieza en ir de $x = 0$ a $x = -1.80$ cm?

Sección 14.2 Movimiento armónico simple

14.6 •• En un laboratorio de física, se conecta un deslizador de riel de aire de 0.200 kg al extremo de un resorte ideal de masa despreciable y se pone a oscilar. El tiempo transcurrido entre la primera vez que el deslizador pasa por la posición de equilibrio y la segunda vez que pasa por este punto es de 2.60 s. Determine la constante de fuerza del resorte.

14.7 • Un cuerpo de masa desconocida se une a un resorte ideal con constante de fuerza de 120 N/m. Se observa que vibra con una frecuencia de 6.00 Hz. Calcule *a*) el periodo del movimiento; *b*) la frecuencia angular, y *c*) la masa del cuerpo.

14.8 • Cuando una masa de 0.750 kg oscila en un resorte ideal, la frecuencia es de 1.33 Hz. *a*) ¿Cuál será la frecuencia si se agregan 0.220 kg a la masa original, y *b*) si se restan de la masa original? Intente resolver este problema *sin* calcular la constante de fuerza del resorte.

14.9 •• Un objeto está experimentando MAS con un periodo de 0.900 s y una amplitud de 0.320 m. En $t = 0$ el objeto está en $x = 0.320$ m y se encuentra instantáneamente en reposo. Calcule el tiempo que tarda en ir *a*) de $x = 0.320$ m a $x = 0.160$ m, y *b*) de $x = 0.160$ m a $x = 0$.

14.10 • Un pequeño bloque está unido a un resorte ideal y se mueve con MAS sobre una superficie horizontal, sin fricción. Cuando el bloque se encuentra en $x = 0.280$ m, la aceleración del bloque es -5.30 m/s^2. ¿Cuál es la frecuencia del movimiento?

14.11 • Un bloque de 2.00 kg, que resbala sin fricción, se conecta a un resorte ideal con constante de fuerza de 300 N/m. En $t = 0$, el resorte no está estirado ni comprimido, y el bloque se mueve en la dirección negativa a 12.0 m/s. Calcule *a*) la amplitud y *b*) el ángulo de fase. *c*) Escriba una ecuación para la posición en función del tiempo.

14.12 •• Repita el ejercicio 14.11, pero suponga que en $t = 0$ el bloque tiene una velocidad de -4.00 m/s y un desplazamiento de $+0.200$ m.

14.13 • La punta de la aguja de una máquina de coser se mueve en MAS, sobre el eje x con una frecuencia de 2.5 Hz. En $t = 0$, sus componentes de posición y velocidad son, respectivamente, $+1.1$ cm y -15 cm/s. *a*) Calcule la componente de aceleración de la aguja en $t = 0$. *b*) Escriba ecuaciones para las componentes de posición, velocidad y aceleración de la punta en función del tiempo.

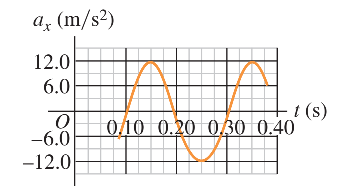
14.14 •• Un pequeño bloque está unido a un resorte ideal y se mueve con MAS sobre una superficie horizontal, sin fricción. Cuando la amplitud del movimiento es 0.090 m, el bloque tarda 2.70 s en viajar de $x = 0.090$ m a $x = -0.090$ m. Si se duplica la amplitud, a 0.180 m, ¿cuánto tiempo tarda el bloque de viajar *a*) de $x = 0.180$ m a $x = -0.180$ m y *b*) de $x = 0.090$ m a $x = -0.090$ m?

14.15 • BIO **Peso de los astronautas.** Este procedimiento se utiliza realmente para "pesar" a los astronautas en el espacio. Se une una silla de 42.5 kg a un resorte y se le deja oscilar cuando está vacía; la silla tarda 1.30 s en efectuar una vibración completa. En cambio, con un astronauta sentado en ella, sin tocar el piso con sus pies, la silla tarda 2.54 s en completar un ciclo. ¿Cuál debe ser la masa del astronauta?

14.16 • Un objeto de 0.400 kg en MAS tiene $a_x = -2.70$ m/s^2 cuando $x = 0.300$ m. ¿Cuánto tarda una oscilación?

14.17 • Sobre una pista de aire horizontal sin fricción, un deslizador oscila en el extremo de un resorte ideal, cuya constante de fuerza es 2.50 N/cm. En la figura E14.17 la gráfica muestra la aceleración del deslizador en función del tiempo. Calcule *a*) la masa del deslizador; *b*) el desplazamiento máximo del deslizador desde el punto de equilibrio; *c*) la fuerza máxima que el resorte ejerce sobre el deslizador.

Figura **E14.17**



14.18 • La velocidad de una masa de 0.500 kg en un resorte está dada en función del tiempo por $v_x(t) = -(3.60 \text{ cm/s}) \text{ sen}[(4.71 \text{ s}^{-1})t - \pi/2]$. Calcule *a*) el periodo, *b*) la amplitud, *c*) la aceleración máxima de la masa y *d*) la constante de fuerza del resorte.

14.19 • El desplazamiento en función del tiempo de una masa de 1.50 kg en un resorte está dado por la ecuación

$$x(t) = (7.40 \text{ cm}) \cos[(4.16 \text{ s}^{-1})t - 2.42]$$

Calcule *a*) el tiempo que tarda una vibración completa; *b*) la constante de fuerza del resorte; *c*) la rapidez máxima de la masa; *d*) la fuerza máxima que actúa sobre la masa; *e*) la posición, rapidez y aceleración de la masa en $t = 1.00$ s, y *f*) la fuerza que actúa sobre la masa en ese momento.

14.20 • BIO **Peso de un virus.** En febrero de 2004, científicos de la Universidad de Purdue utilizaron una técnica altamente sensible para medir la masa de un virus vaccinia (del tipo usado en la vacuna contra la viruela). El procedimiento implicó la medición de la frecuencia de oscilación de una pequeña placa de silicio (de solo 30 nm de largo) con un láser, primero sin virus y luego con el virus unido al silicio. La diferencia de masa provocó un cambio en la frecuencia. Podemos modelar este proceso como una masa en un resorte. *a*) Demuestre que la proporción entre la frecuencia con el virus adjunto (f_{S+V}) y la frecuencia sin el virus (f_S) está dada por la fórmula $\frac{f_{S+V}}{f_S} = \frac{1}{\sqrt{1 + (m_V/m_S)}}$, donde m_V es la masa del virus y m_S es la masa de la placa de silicio. Observe que *no* es necesario conocer o medir la constante de fuerza del resorte. *b*) En algunos datos, la placa de silicio tiene una masa de 2.10×10^{-16} g y una frecuencia de 2.00×10^{15} Hz sin el virus, y 2.87×10^{14} Hz con el virus. ¿Cuál es la masa del virus, en gramos y en femtogramos?

14.21 •• CALC **Tirón.** Una cuerda de guitarra vibra a una frecuencia de 440 Hz. Un punto en su centro se mueve con MAS con una

amplitud de 3.0 nm y un ángulo de fase de cero. *a*) Escriba una ecuación para la posición del centro de la cuerda como función del tiempo. *b*) ¿Cuáles son los valores máximos de las magnitudes de la velocidad y la aceleración del centro de la cuerda? *c*) La derivada de la aceleración con respecto al tiempo es una cantidad llamada el *tirón*. Escriba una ecuación para el tirón del centro de la cuerda como función del tiempo, y encuentre el valor máximo de la magnitud del tirón.

Sección 14.3 Energía en el movimiento armónico simple

14.22 •• Para el objeto oscilante de la figura E14.4, ¿cuáles son *a*) su velocidad máxima y *b*) su aceleración máxima?

14.23 • Un pequeño bloque está unido a un resorte ideal y se mueve con MAS sobre una superficie horizontal, sin fricción. La amplitud del movimiento es de 0.120 m. La rapidez máxima del bloque es 3.90 m/s. ¿Cuál es la magnitud máxima de la aceleración del bloque?

14.24 • Un pequeño bloque está unido a un resorte ideal y se mueve con MAS sobre una superficie horizontal, sin fricción. La amplitud del movimiento es de 0.250 m y el periodo es de 3.20 s. ¿Cuáles son la rapidez y la aceleración del bloque cuando $x = 0.160$ m?

14.25 •• Las dos puntas de un diapasón rotulado con 392 Hz están vibrando con una amplitud de 0.600 mm. *a*) ¿Qué rapidez máxima tiene una punta? *b*) Una mosca común (*Musca domestica*) con masa de 0.0270 g está sujeta en el extremo de una de las puntas. Al vibrar la punta, ¿qué energía cinética máxima tiene la mosca? Suponga que el efecto de la masa de la mosca sobre la frecuencia de oscilación es despreciable.

14.26 •• Un oscilador armónico tiene frecuencia angular ω y amplitud A. *a*) Calcule la magnitud del desplazamiento y de la velocidad cuando la energía potencial elástica es igual a la energía cinética. (Suponga que $U = 0$ en el equilibrio). *b*) ¿Cuántas veces sucede eso en cada ciclo? ¿Cada cuándo sucede? *c*) En un instante en que el desplazamiento es igual a $A/2$, ¿qué fracción de la energía total del sistema es cinética y qué fracción es potencial?

14.27 • Un deslizador de 0.500 kg, conectado al extremo de un resorte ideal con constante de fuerza $k = 450$ N/m, está en MAS con una amplitud de 0.040 m. Calcule *a*) la rapidez máxima del deslizador; *b*) su rapidez cuando está en $x = -0.015$ m; *c*) la magnitud de su aceleración máxima; *d*) su aceleración en $x = -0.015$ m; *e*) su energía mecánica total en cualquier punto de su movimiento.

14.28 •• Una porrista ondea un pompón en MAS con amplitud de 18.0 cm y frecuencia de 0.850 Hz. Calcule *a*) la magnitud máxima de la aceleración y de la velocidad; *b*) la aceleración y rapidez cuando la coordenada del pompón es $x = +9.0$ cm; *c*) el tiempo que tarda en moverse directamente de la posición de equilibrio a un punto situado a 12.0 cm de distancia. *d*) ¿Cuáles de las cantidades pedidas en los incisos *a*), *b*) y *c*) pueden obtenerse empleando el método de energía de la sección 14.3 y cuáles no? Explique su respuesta.

14.29 • **PA** Para la situación descrita en el inciso *a*) del ejemplo 14.5, ¿qué masa m deberá tener la masilla para que la amplitud después del choque sea la mitad de la amplitud original? Con ese valor de m, ¿qué fracción de la energía mecánica original se convierte en calor?

14.30 • Un juguete de 0.150 kg está en MAS en el extremo de un resorte horizontal con constante de fuerza $k = 300$ N/m. Cuando el objeto está a 0.0120 m de su posición de equilibrio, tiene una rapidez de 0.300 m/s. Calcule *a*) la energía total del objeto en cualquier punto de su movimiento; *b*) la amplitud del movimiento; *c*) la rapidez máxima alcanzada por el objeto durante su movimiento.

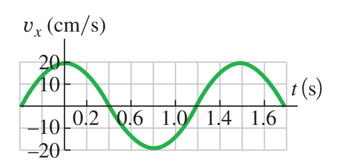
14.31 •• Usted observa un objeto que se mueve en MAS. Cuando dicho objeto está desplazado 0.600 m a la derecha de su posición de equilibrio, tiene una velocidad de 2.20 m/s a la derecha y una aceleración de 8.40 m/s^2 a la izquierda. ¿A qué distancia de este punto se desplazará el objeto, antes de detenerse momentáneamente para iniciar su movimiento a la izquierda?

14.32 •• En una mesa horizontal sin fricción, una caja de 5.20 kg abierta de arriba se sujeta a un resorte ideal, cuya constante de fuerza es de 375 N/m. Dentro de la caja hay una piedra de 3.44 kg. El sistema oscila con una amplitud de 7.50 cm. Cuando la caja ha alcanzado su rapidez máxima, la piedra se sale repentinamente de la caja hacia arriba sin tocarla. Calcule *a*) el periodo y *b*) la amplitud del movimiento resultante de la caja. *c*) Sin realizar cálculos, ¿el nuevo periodo es mayor o menor que el periodo original? ¿Cómo lo sabe?

14.33 •• Una masa oscila con amplitud A en el extremo de un resorte. ¿A qué distancia (en términos de A) se encuentra esta masa con respecto a la posición de equilibrio del resorte cuando la energía potencial elástica es igual a la energía cinética?

14.34 •• Una masa m está unida a un resorte de constante de fuerza 75 N/m y se deja oscilar. La figura E14.34 muestra una gráfica de la velocidad v_x como función del tiempo t. Determine *a*) el periodo, *b*) la frecuencia y *c*) la frecuencia angular de este movimiento. *d*) ¿Cuál es la amplitud (en cm), y en qué momento la masa alcanza esta posición? *e*) Determine la aceleración máxima de la masa y los momentos en que se produce. *f*) ¿Cuál es la masa m?

Figura **E14.34**



14.35 • Dentro de un vehículo de prueba de la NASA, se tira de una esfera de 3.50 kg mediante un resorte ideal horizontal que está unido a una mesa sin fricción. La constante de fuerza del resorte es de 225 N/m. El vehículo tiene una aceleración constante de 5.00 m/s^2, y la esfera no oscila. De repente, cuando la rapidez del vehículo llega a 45.0 m/s, sus motores se apagan, eliminando así su aceleración, pero no su velocidad. Calcule *a*) la amplitud y *b*) la frecuencia de las oscilaciones resultantes de la esfera. *c*) ¿Cuál será la rapidez máxima de la esfera en relación con el vehículo?

Sección 14.4 Aplicaciones del movimiento armónico simple

14.36 • Un orgulloso pescador de alta mar cuelga un pescado de 65.0 kg de un resorte ideal de masa despreciable. El pescado estira el resorte 0.120 m. *a*) Calcule la constante de fuerza del resorte. Ahora se tira del pez 5.00 cm hacia abajo y luego se suelta. *b*) ¿Qué periodo de oscilación tiene el pez? *c*) ¿Qué rapidez máxima alcanzará?

14.37 • Un deslizador de 175 g sobre una pista de aire horizontal sin fricción está unido a un resorte ideal fijo, cuya constante de fuerza es de 155 N/m. En el momento en que usted mide el deslizador, este se mueve a 0.815 m/s y se ubica a 3.00 cm de su posición de equilibrio. Utilice la *conservación de la energía* para calcular *a*) la amplitud del movimiento y *b*) la rapidez máxima del deslizador. *c*) ¿Cuál es la frecuencia angular de las oscilaciones?

14.38 • Un gato con masa de 4.00 kg que gusta de las emociones fuertes está unido mediante un arnés a un resorte ideal de masa despreciable y oscila verticalmente con MAS. La amplitud es de 0.050 m y,

en el punto más alto del movimiento, el resorte tiene su longitud natural sin estirarse. Calcule la energía potencial elástica del resorte (suponga que es cero cuando el resorte no está estirado); la energía cinética del gato; la energía potencial gravitacional del sistema relativa al punto más bajo del movimiento; y la suma de estas tres energías cuando el gato está *a*) en su punto más alto, *b*) en su punto más bajo y *c*) en su posición de equilibrio.

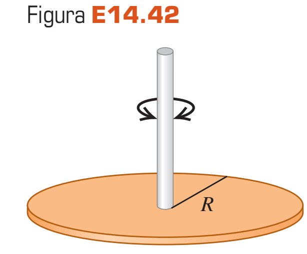
14.39 •• Una esfera de 1.50 kg y otra de 2.00 kg se pegan entre sí colocando la más ligera debajo de la más pesada. La esfera superior se conecta a un resorte ideal vertical, cuya constante de fuerza es de 165 N/m, y el sistema vibra verticalmente con una amplitud de 15.0 cm. El pegamento que une las esferas es poco resistente, y de repente falla cuando las esferas están en la posición más baja de su movimiento. *a*) ¿Por qué es más probable que el pegamento falle en el punto *más bajo* que en algún otro punto del movimiento? *b*) Calcule la amplitud y la frecuencia de las vibraciones después de que la esfera inferior se despega.

14.40 •• Un disco uniforme sólido de metal con masa de 6.50 kg y diámetro de 24.0 cm cuelga en un plano horizontal, apoyado en su centro con un alambre metálico vertical. Usted sabe que se requiere una fuerza horizontal de 4.23 N tangente al borde del disco para girarlo 3.34°, y así torcer el alambre. Ahora usted elimina esta fuerza y suelta el disco del reposo. *a*) ¿Cuál es la constante de torsión para el alambre metálico? *b*) ¿Cuáles son la frecuencia y el periodo de las oscilaciones de torsión del disco? *c*) Escriba la ecuación del movimiento para $\theta(t)$ del disco.

14.41 •• Cierto reloj despertador hace tic cuatro veces cada segundo, y cada tic representa medio periodo. La rueda de balance consiste en un aro delgado con 0.55 cm de radio, conectado al vástago de balance por rayos de masa despreciable. La masa total de la rueda es de 0.90 g. *a*) ¿Qué momento de inercia tiene la rueda con respecto a su eje? *b*) ¿Qué constante de torsión tiene la espiral (figura 14.19)?

14.42 • Un disco metálico delgado con masa de 2.00×10^{-3} kg y radio de 2.20 cm se une en su centro a una fibra larga (figura E14.42). Si el disco se tuerce y se suelta, oscilará con un periodo de 1.00 s. Calcule la constante de torsión de la fibra.

Figura **E14.42**



14.43 •• Usted desea determinar el momento de inercia de una pieza mecánica complicada, con respecto a un eje que pasa por su centro de masa, así que la cuelga de un alambre a lo largo de ese eje. El alambre tiene una constante de torsión de 0.450 N·m/rad. Usted gira un poco la pieza alrededor del eje y la suelta, cronometrando 125 oscilaciones en 265 s. ¿Cuánto vale el momento de inercia buscado??

14.44 •• **CALC** La rueda de balance de un reloj vibra con amplitud angular Θ, frecuencia angular ω y ángulo de fase $\phi = 0$. *a*) Deduzca expresiones para la velocidad angular $d\theta/dt$ y la aceleración angular $d^2\theta/dt^2$ en función del tiempo. *b*) Calcule la velocidad angular y la aceleración angular de la rueda de balance, cuando su desplazamiento angular sea Θ, y cuando su desplazamiento angular sea $\Theta/2$ y θ esté disminuyendo. (*Sugerencia:* Trace una gráfica de θ contra t).

Sección 14.5 El péndulo simple

14.45 •• Se tira de un péndulo simple de 0.240 m de longitud para moverlo 3.50° hacia un lado y luego se suelta. *a*) ¿Cuánto tarda la lenteja del péndulo en alcanzar su rapidez máxima? *b*) ¿Cuánto tarda si el péndulo se suelta a un ángulo de 1.75° en vez de 3.50°?

14.46 • Un alpinista de 85.0 kg planea balancearse, partiendo del reposo, desde una saliente utilizando una cuerda ligera de 6.50 m de largo. Sujeta un extremo de la cuerda, en tanto que el otro extremo está unido más arriba a la cara de una roca. Como la saliente no está muy lejos de la cara de la roca, la cuerda forma un ángulo pequeño con la vertical. En el punto más bajo de su balanceo, el alpinista planea soltarse y dejarse caer una distancia corta hacia el suelo. *a*) ¿Cuánto tiempo después de que comienza a balancearse el alpinista alcanzará su punto más bajo? *b*) Si falla en la primera oportunidad de soltarse, ¿cuánto tiempo después de iniciar su balanceo, el alpinista llegará a su punto más bajo por segunda vez?

14.47 • En San Francisco un edificio tiene aditamentos ligeros que consisten en bombillas pequeñas de 2.35 kg con pantallas, que cuelgan del techo en el extremo de cuerdas ligeras y delgadas de 1.50 m de longitud. Si ocurre un terremoto leve, ¿cuántas oscilaciones por segundo realizarán tales aditamentos?

14.48 • **Un péndulo en Marte.** En la Tierra cierto péndulo simple tiene un periodo de 1.60 s. ¿Qué periodo tendrá en la superficie de Marte, donde $g = 3.71$ m/s^2?

14.49 • Después de posarse en un planeta desconocido, un explorador espacial fabrica un péndulo simple con longitud de 50.0 cm y determina que efectúa 100 oscilaciones completas en 136 s. ¿Cuánto vale g en ese planeta?

14.50 •• Una esfera pequeña de masa m está unida a una varilla de masa despreciable de longitud L con un pivote en el extremo de arriba, formando un péndulo simple. Se tira del péndulo hacia un lado, hasta que la varilla forma un ángulo Θ con la vertical y se suelta desde el reposo. *a*) Dibuje un diagrama del péndulo justo después de soltarse; incluya vectores que representen las *fuerzas* que actúan sobre la esfera pequeña y la *aceleración* de esta última. ¡La exactitud es importante! En este punto, ¿qué aceleración lineal tiene la esfera? *b*) Repita el inciso *a*) para el instante en que el ángulo de la varilla con la vertical es $\Theta/2$. *c*) Repita el inciso *a*) para el instante en que la varilla del péndulo está vertical. En ese punto, ¿qué rapidez lineal tiene la esfera?

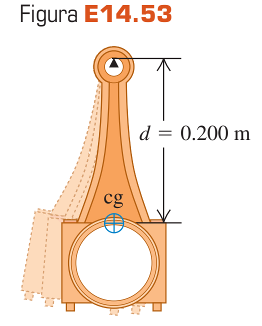
14.51 • Un péndulo simple de 2.00 m de largo oscila con un ángulo máximo de 30.0° con la vertical. Obtenga su periodo, *a*) suponiendo una amplitud pequeña, y *b*) utilizando los primeros tres términos de la ecuación (14.35). *c*) ¿Cuál de las respuestas a los incisos *a*) y *b*) es más exacta? Para la que es menos exacta, ¿de qué porcentaje es el error con respecto a la más exacta?

Sección 14.6 El péndulo físico

14.52 •• Queremos colgar un aro delgado de un clavo horizontal y hacer que tenga una oscilación completa con ángulo pequeño una vez cada 2.0 s. ¿Qué radio debe tener el aro?

14.53 • El filo de una navaja colocada horizontalmente actúa como pivote para una biela de 1.80 kg de un motor de combustión, como se muestra en la figura E14.53. El centro de gravedad de la biela se encontró por balanceo y está a 0.200 m del pivote. Cuando la biela se pone a oscilar con amplitud corta, completa 100 oscilaciones en 120 s. Calcule el momento de inercia de la biela con respecto al eje de rotación que pasa por el pivote.

Figura **E14.53**



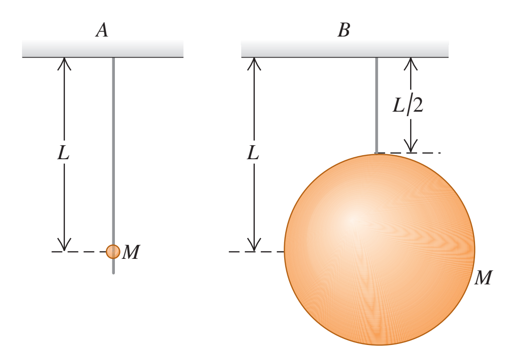
14.54 •• Una llave inglesa de 1.80 kg tiene su pivote a 0.250 m de su centro de masa y puede oscilar como péndulo físico. El periodo para oscilaciones de ángulo pequeño es de 0.940 s. *a*) ¿Qué momento de inercia tiene la llave con respecto a un eje que pasa por el pivote? *b*) Si la llave inicialmente se desplaza 0.400 rad de la posición de equilibrio, ¿qué rapidez angular tiene al pasar por la posición de equilibrio?

14.55 • Dos péndulos tienen las mismas dimensiones (longitud L) y masa total (m). El péndulo A es una esfera muy pequeña que oscila en el extremo de una varilla uniforme de masa despreciable. En el péndulo B, la mitad de la masa está en la esfera y la otra mitad en la varilla uniforme. Calcule el periodo de cada péndulo para oscilaciones pequeñas. ¿Cuál tarda más tiempo en una oscilación?

14.56 •• **PA** Un adorno navideño con forma de esfera hueca de masa $M = 0.015$ kg y radio $R = 0.050$ m se cuelga de una rama mediante una espira de alambre unida a la superficie de la esfera. Si el adorno se desplaza una distancia corta y se suelta, oscila como péndulo físico con fricción despreciable. Calcule su periodo. (*Sugerencia:* Use el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia de la esfera con respecto al pivote en la rama).

14.57 •• Cada uno de los dos péndulos que se ilustran en la figura E14.57 consiste en una esfera sólida uniforme de masa M sostenida por una varilla de masa despreciable; no obstante, la esfera del péndulo A es muy pequeña, en tanto que la esfera del péndulo B es mucho más grande. Obtenga el periodo de cada péndulo para desplazamientos cortos. ¿Qué esfera tarda más en completar una oscilación?

Figura **E14.57**



Sección 14.7 Oscilaciones amortiguadas

14.58 • Una roca de 2.50 kg está unida en el extremo de una delgada cuerda muy ligera de 1.45 m de largo. Es posible comenzar a balancearla soltándola cuando la cuerda forma un ángulo de 11° con la vertical. Usted registra la observación de que solo se eleva a un ángulo de 4.5° con la vertical después de 10 balanceos. *a*) ¿Cuánta energía ha perdido este sistema durante ese tiempo? *b*) ¿Qué pasó con la energía "perdida"? Explique *cómo* podría haberse "perdido".

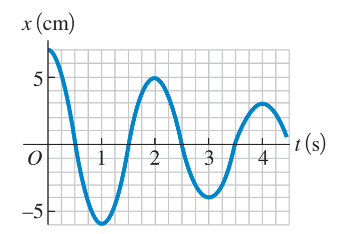
14.59 • Un ratón de 0.300 kg, nada contento, se mueve en el extremo de un resorte con constante de fuerza $k = 2.50$ N/m, sometido a la acción de una fuerza amortiguadora $F_x = -bv_x$. *a*) Si la constante $b = 0.900$ kg/s, ¿qué frecuencia de oscilación tiene el ratón? *b*) ¿Con qué valor de b el amortiguamiento será crítico?

14.60 •• Un huevo duro (cocido) de 50.0 g se mueve en el extremo de un resorte cuya constante de fuerza es $k = 25.0$ N/m. Su desplazamiento inicial es de 0.300 m. Una fuerza amortiguadora $F_x = -bv_x$ actúa sobre el huevo, y la amplitud del movimiento disminuye a 0.100 m en 5.00 s. Calcule la constante de amortiguamiento b.

14.61 •• **CALC** El movimiento de un oscilador subamortiguado está descrito mediante la ecuación (14.42). Sea el ángulo de fase $\phi = 0$. *a*) De acuerdo con la ecuación, ¿cuánto vale x en $t = 0$? *b*) ¿Qué magnitud y dirección tiene la velocidad en $t = 0$? ¿Qué nos dice el resultado acerca de la pendiente de la curva de x contra t cerca de $t = 0$? *c*) Deduzca una expresión para la aceleración a_x en $t = 0$. ¿Para qué valor o intervalo de valores de la constante de amortiguamiento b (en términos de k y m) en $t = 0$, la aceleración es negativa, cero y positiva? Analice cada caso en términos de la forma de la curva de x contra t cerca de $t = 0$.

14.62 •• Una masa está vibrando en el extremo de un resorte de constante de fuerza 225 N/m. La figura E14.62 muestra una gráfica de la posición x como una función del tiempo t. *a*) ¿En qué momentos no se mueve la masa? *b*) ¿Cuánta energía tenía este sistema originalmente? *c*) ¿Cuánta energía pierde el sistema entre $t = 1.0$ s y $t = 4.0$ s? ¿A dónde se fue esta energía?

Figura **E14.62**



Sección 14.8 Oscilaciones forzadas y resonancia

14.63 • Una fuerza impulsora que varía sinusoidalmente se aplica a un oscilador armónico amortiguado. *a*) ¿Qué unidades tiene la constante de amortiguamiento b? *b*) Demuestre que la cantidad $\sqrt{km}$ tiene las mismas unidades que b. *c*) Determine, en términos de $F_{\text{máx}}$ y k, la amplitud de $\omega_d = \sqrt{k/m}$ cuando **i.** $b = 0.2\sqrt{km}$ y **ii.** $b = 0.4\sqrt{km}$? Compare sus resultados con la figura 14.28.

14.64 • Una fuerza impulsora que varía sinusoidalmente se aplica a un oscilador armónico amortiguado con constante de fuerza k y masa m. Si la constante de amortiguamiento tiene el valor b_1, la amplitud es A_1 cuando la frecuencia angular impulsora es $\sqrt{k/m}$. En términos de A_1, ¿cuánto vale la amplitud con la misma frecuencia impulsora y la misma amplitud de la fuerza impulsora $F_{\text{máx}}$, si la constante de amortiguamiento es *a*) $3b_1$ y *b*) $b_1/2$?

PROBLEMAS

14.65 •• Un objeto experimenta un MAS con periodo de 1.200 s y amplitud de 0.600 m. En $t = 0$ el objeto está en $x = 0$ y se mueve en la dirección negativa x. ¿Qué tan lejos se encuentra el objeto con respecto a la posición de equilibrio cuando $t = 0.480$ s?

14.66 ••• Un objeto experimenta un MAS con periodo de 0.300 s y una amplitud de 6.00 cm. En $t = 0$ el objeto se encuentra instantáneamente en reposo en $x = 6.00$ cm. Calcule el tiempo que tarda el objeto en pasar de $x = 6.00$ cm a $x = -1.50$ cm.

14.67 • **PA** **MAS en un motor de combustión.** El movimiento del pistón de un motor de automóvil es aproximadamente armónico simple. *a*) Si la carrera del pistón (el doble de la amplitud) es de 0.100 m y el motor trabaja a 4500 rev/min, ¿qué aceleración tiene el pistón en el extremo de su carrera? *b*) Si el pistón tiene una masa de 0.450 kg, ¿qué fuerza neta debe ejercerse sobre él en ese punto? *c*) ¿Qué rapidez y energía cinética tiene el pistón en el punto medio de su carrera? *d*) ¿Qué potencia media se requiere para acelerar el pistón desde el reposo, hasta la rapidez determinada en el inciso *c*)? *e*) Repita los incisos *b*), *c*) y *d*) considerando que el motor trabaja a 7000 rev/min.

14.68 • Cuatro pasajeros, cuya masa combinada es de 250 kg, comprimen 4.00 cm los resortes de un automóvil con amortiguadores muy gastados cuando se suben en él. Modele el auto y a los pasajeros como un solo cuerpo sobre un solo resorte ideal. Si el automóvil cargado tiene un periodo de vibración de 1.92 s, ¿qué periodo tiene cuando está vacío?

14.69 • Un deslizador oscila con MAS y amplitud A_1 en un riel de aire. Usted lo frena hasta reducir la amplitud a la mitad. *a*) ¿Qué pasa con su periodo, frecuencia y frecuencia angular? *b*) ¿Y con su energía

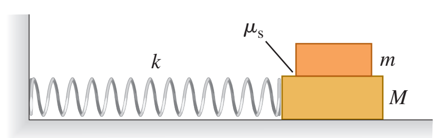
mecánica total? *c*) ¿Con su rapidez máxima? *d*) ¿Con su rapidez en $x = \pm A_1/4$? *e*) ¿Y con sus energías cinética y potencial en $x = \pm A_1/4$?

14.70 ••• PA Un niño malcriado está deslizando su plato de 250 g de un lado a otro, sobre una superficie horizontal en MAS con amplitud de 0.100 m. En un punto a 0.060 m de la posición de equilibrio, la rapidez del plato es de 0.400 m/s. *a*) Calcule el periodo. *b*) Encuentre el desplazamiento cuando la rapidez es de 0.160 m/s. *c*) En el centro del plato hay una rebanada de zanahoria de 10.0 g, que está a punto de resbalar en el extremo de la trayectoria. Calcule el coeficiente de fricción estática entre la rebanada de zanahoria y el plato.

14.71 ••• Una charola horizontal uniforme de 1.50 kg está unida a un resorte ideal vertical con constante de fuerza de 185 N/m, y una esfera metálica de 275 g está en la charola. El resorte está debajo de la charola, así que puede oscilar verticalmente. La charola se empuja hacia abajo al punto *A*, el cual está 15.0 cm por debajo de la posición de equilibrio, y se suelta del reposo. *a*) ¿Qué tan alto por encima del punto *A* estará la charola cuando la esfera metálica salga de la charola? (*Sugerencia:* Esto *no* ocurre cuando la esfera y la charola llegan a sus rapideces máximas). *b*) ¿Cuánto tiempo transcurre desde que el sistema se libera en el punto *A* hasta que la esfera sale de la charola? *c*) ¿Qué tan rápido se mueve la esfera justo cuando sale de la charola?

14.72 •• PA Un bloque de masa *M* descansa en una superficie sin fricción y está conectado a un resorte horizontal con constante de fuerza *k*. El otro extremo del resorte está fijo a una pared (figura P14.72). Un segundo bloque de masa *m* está sobre el primero. El coeficiente de fricción estática entre los bloques es μ_s. Determine la amplitud de oscilación *máxima* que no permite que el bloque superior resbale.

Figura **P14.72**



14.73 • PA Una masa de 10.0 kg viaja hacia la derecha con rapidez de 2.00 m/s sobre una superficie horizontal lisa, y choca contra una segunda masa de 10.0 kg que inicialmente está en reposo pero unida a un resorte ligero con constante de fuerza de 110.0 N/m. *a*) Calcule la frecuencia, la amplitud y el periodo de las oscilaciones subsiguientes. *b*) ¿Cuánto tiempo tarda el sistema en regresar por primera vez a la posición que tenía inmediatamente después del choque?

14.74 • PA Un cohete acelera hacia arriba a 4.00 m/s^2 desde la plataforma de lanzamiento en la Tierra. En su interior, una esfera pequeña de 1.50 kg cuelga del techo mediante un alambre ligero de 1.10 m. Si la esfera se desplaza 8.50° de la vertical y se suelta, encuentre la amplitud y el periodo de las oscilaciones resultantes de este péndulo.

14.75 ••• Una manzana pesa 1.00 N. Cuando se cuelga del extremo de un resorte largo con constante de fuerza 1.50 N/m y de masa despreciable, rebota hacia arriba y hacia abajo en MAS. Si se detiene el rebote y la manzana oscila de un lado al otro a través de un ángulo pequeño, la frecuencia de este péndulo simple es la mitad de la frecuencia de rebote. (Debido a que el ángulo es pequeño, las oscilaciones hacia adelante y hacia atrás no causan ningún cambio apreciable en la longitud del resorte). ¿Cuál es la longitud del resorte sin estirar (quitando la manzana)?

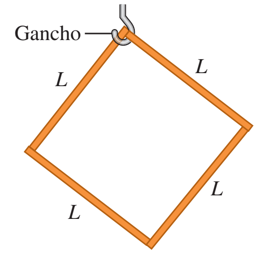
14.76 ••• PA MAS de un objeto flotante. Un objeto con altura *h*, masa *M* y área de sección transversal uniforme *A* flota en posición vertical en un líquido con densidad *r*. *a*) Calcule la distancia vertical desde la superficie del líquido a la parte inferior del objeto flotante en equilibrio. *b*) Una fuerza hacia abajo con magnitud *F* se aplica en la parte superior del objeto. En la nueva posición de equilibrio, ¿a qué distancia por debajo de la superficie del líquido está la parte inferior del objeto con respecto a su posición en el inciso *a*)? (Suponga que parte del objeto permanece por encima de la superficie del líquido). *c*) El resultado del inciso *b*) indica que si la fuerza se retira de repente, el objeto va a oscilar hacia arriba y abajo en MAS. Calcule el periodo de este movimiento en términos de la densidad ρ del líquido, la masa *M* y el área de sección transversal *A* del objeto. Puede despreciar el amortiguamiento debido a la fricción del fluido (véase la sección 14.7).

14.77 •• PA Una boya cilíndrica de 950 kg puede flotar verticalmente en agua salada. El diámetro de la boya es de 0.900 m. *a*) Calcule la distancia adicional que se hunde la boya cuando un hombre de 70.0 kg se coloca en la parte superior de la misma. [Utilice la expresión deducida en el inciso *b*) del problema 14.76]. *b*) Calcule el periodo del MAS vertical resultante cuando el hombre se zambulle. (Utilice la expresión derivada en el inciso *c*) del problema 14.76 y, al igual que en ese problema, se puede despreciar el amortiguamiento debido a la fricción del fluido).

14.78 ••• PA ¡Tarzán al rescate! Tarzán observa a un chimpancé de 35 kg en grave peligro, por lo que se balancea para rescatarlo. Se agarra de su fuerte pero muy ligera liana, la que por primera vez se detendrá 4.0 s después de comenzar su balanceo, y en ese momento su liana forma un ángulo de 12° con la vertical. *a*) ¿Qué longitud tiene la liana de Tarzán, suponiendo que se balancea del extremo inferior de la misma? *b*) ¿Cuáles son la frecuencia y la amplitud (en grados) de la oscilación de Tarzán? *c*) Cuando pasa por el punto más bajo de su oscilación, Tarzán agarra el chimpancé desde el suelo y lo salva de las fauces del peligro. Si la masa de Tarzán es de 65 kg, encuentre la frecuencia y la amplitud (en grados) de la oscilación con Tarzán cargando al agradecido chimpancé.

14.79 •• PA Un objeto cuadrado de masa *m* se construye con cuatro varas uniformes idénticas, cada una con longitud *L*, unidas entre sí. Este objeto se cuelga de su esquina superior en un gancho (figura P14.79). Si se gira ligeramente a la izquierda y luego se suelta, ¿con qué frecuencia oscilará de un lado a otro?

Figura **P14.79**



14.80 ••• A un objeto con masa 0.200 kg se le aplica una fuerza de restitución elástica con constante de fuerza de 10.0 N/m. *a*) Trace la gráfica de la energía potencial elástica *U* en función del desplazamiento *x* en un intervalo de *x* que va de −0.300 m a +0.300 m. En su gráfica, sea 1 cm = 0.05 J verticalmente y 1 cm = 0.05 m horizontalmente. El objeto se pone en oscilación con una energía potencial inicial de 0.140 J y una energía cinética inicial de 0.060 J. Conteste las siguientes preguntas en relación con la gráfica. *b*) ¿Cuál es la amplitud de la oscilación? *c*) ¿Cuál es la energía potencial cuando el desplazamiento es la mitad de la amplitud? *d*) ¿En qué desplazamiento son iguales las energías cinética y potencial? *e*) ¿Cuál es el valor del ángulo de fase ϕ si la velocidad inicial es positiva y el desplazamiento inicial es negativo?

14.81 • CALC Una cubeta de 2.00 kg que contiene 10.0 kg de agua cuelga de un resorte ideal vertical, cuya constante de fuerza es de 125 N/m, y oscila verticalmente con una amplitud de 3.00 cm. De repente, en la cubeta se registra una fuga en la base, goteando agua con una tasa constante de 2.00 g/s. Cuando la cubeta queda a la mitad de su capacidad,

calcule *a*) el periodo de oscilación y *b*) la razón con la que el periodo cambia con respecto al tiempo. ¿El periodo se vuelve más largo o más corto? *c*) ¿Cuál es el periodo de oscilación más corto que este sistema puede tener?

14.82 •• **PA** Un alambre colgante tiene 1.80 m de longitud. Cuando una bola de acero de 60.0 kg se suspende del alambre, este se estira 2.00 mm. Si se tira de la bola hacia abajo una distancia pequeña adicional y se le suelta, ¿con qué frecuencia vibrará? Suponga que el esfuerzo aplicado al alambre es menor que el límite proporcional (véase la sección 11.5).

14.83 •• Una perdiz de 5.00 kg cuelga de un peral mediante un resorte ideal de masa despreciable. Si se tira de la perdiz para bajarla 0.100 m con respecto a su posición de equilibrio y se suelta, vibra con un periodo de 4.20 s. *a*) ¿Qué rapidez tiene al pasar por su posición de equilibrio? *b*) ¿Qué aceleración tiene cuando está 0.050 m arriba de dicha posición? *c*) Cuando está subiendo, ¿qué tiempo tarda en moverse de un punto 0.050 m debajo de su posición de equilibrio a un punto que está 0.050 m arriba? *d*) La perdiz se detiene y se retira del resorte. ¿Cuánto se acorta este?

14.84 •• Un perno de 0.0200 kg se mueve en MAS con amplitud de 0.240 m y periodo de 1.500 s. El desplazamiento del perno es de +0.240 m cuando $t = 0$. Calcule *a*) el desplazamiento del perno cuando $t = 0.500$ s; *b*) la magnitud y dirección de la fuerza que actúa sobre el perno en $t = 0.500$ s; *c*) el tiempo mínimo que el perno tarda en moverse de su posición inicial al punto donde $x = -0.180$ m; *d*) la rapidez del perno cuando $x = -0.180$ m.

14.85 •• **PA** **MAS de una báscula de carnicero.** Un resorte de masa despreciable y constante de fuerza $k = 400$ N/m cuelga verticalmente, y una bandeja de 0.200 kg se suspende de su extremo inferior. Un carnicero deja caer un filete de 2.2 kg sobre la bandeja desde una altura de 0.40 m. El choque es totalmente inelástico y el sistema queda en MAS vertical. Calcule *a*) la rapidez de la bandeja y el filete justo después del choque; *b*) la amplitud del movimiento posterior; *c*) el periodo de ese movimiento.

14.86 •• Una viga uniforme de 225 kg se suspende horizontalmente de dos resortes verticales idénticos que sujetan cada extremo de la viga con el techo. Un saco de 175 kg de grava se coloca sobre el punto medio de la viga. Esta oscila en MAS con amplitud de 40.0 cm y frecuencia de 0.600 ciclos/s. *a*) El saco de grava se cae de la viga cuando esta tiene su desplazamiento máximo hacia arriba. Calcule la frecuencia y amplitud del MAS subsiguiente de la viga. *b*) Suponga ahora que el saco de grava se cae cuando la viga tiene su rapidez máxima. Calcule la frecuencia y amplitud del MAS subsiguiente de la viga.

14.87 ••• **PA** En el planeta Newtonia, un péndulo simple tiene una lenteja con masa de 1.25 kg y longitud de 185.0 cm. Cuando la lenteja se suelta del reposo, tarda 1.42 s en describir un ángulo de 12.5° hasta un punto donde otra vez tiene rapidez cero. Se determinó que la circunferencia de Newtonia es de 51,400 km. Calcule la masa del planeta.

14.88 •• Una fuerza de 40.0 N estira un resorte vertical 0.250 m. *a*) ¿Qué masa debe colgarse del resorte para que el sistema oscile con un periodo de 1.00 s? *b*) Si la amplitud del movimiento es de 0.050 m y el periodo es el especificado en *a*), ¿dónde está el objeto y en qué dirección se mueve 0.35 s después de haber pasado la posición de equilibrio cuando se dirige hacia abajo? *c*) ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) ejerce el resorte sobre el objeto cuando este se encuentra 0.030 m bajo la posición de equilibrio al subir?

14.89 •• **Que no lo deje el barco.** En una visita a Minnesota ("la Tierra de los 10,000 lagos"), un turista se inscribe en una excursión por uno de los lagos más grandes. Cuando llega al muelle donde está atracado el barco de 1500 kg, ve que la embarcación oscila verticalmente sobre las olas, en movimiento armónico simple con amplitud de 20 cm. El barco tarda 3.5 s en efectuar un ciclo completo de subida y bajada. Cuando se encuentra en su punto más alto, la cubierta está a la misma altura que el muelle estacionario. Al ver cómo se mece el barco, el turista (con masa de 60 kg) comienza a sentirse mareado, debido en parte a que la noche anterior cenó bacalao noruego, por lo que se niega a subir a bordo, a menos que la cubierta se encuentre a menos de 10 cm del nivel del muelle. ¿De cuánto tiempo dispone para abordar el barco cómodamente durante cada ciclo de movimiento vertical?

14.90 • **PA** Un ejemplo interesante, aunque muy poco práctico, de oscilación es el movimiento de un objeto que se deja caer por un agujero que va de un lado de la Tierra a otro pasando por el centro. Suponiendo que la Tierra es una esfera con densidad uniforme (una suposición que no es realista), demuestre que el movimiento es armónico simple y calcule el periodo. [*Nota:* La fuerza gravitacional sobre el objeto en función de la distancia r del objeto al centro de la Tierra se dedujo en el ejemplo 13.10 (sección 13.6). El movimiento es armónico simple si la aceleración a_x y el desplazamiento con respecto al equilibrio x están relacionados por la ecuación (14.8), y el periodo es entonces $T = 2\pi/\omega$].

14.91 ••• **PA** Una bala de un rifle con masa de 8.00 g y una velocidad horizontal inicial de 280 m/s se dispara y se incrusta en un bloque con masa de 0.992 kg, que descansa sobre una superficie sin fricción y está unido a un extremo de un resorte ideal. El otro extremo del resorte está unido a la pared. El impacto comprime el resorte una distancia máxima de 18.0 cm. Después del impacto, el bloque se mueve con MAS. Calcule el periodo de este movimiento.

14.92 •• **PA CALC** Para cierto oscilador, la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo de masa m está dada por $F_x = -cx^3$. *a*) ¿Qué función de energía potencial describe este oscilador, si tomamos $U = 0$ en $x = 0$? *b*) El cuerpo se mueve de $x = 0$ a $x = A$ en un cuarto de periodo. Calcule este tiempo y, por consiguiente, el periodo. [*Sugerencia:* Inicie con la ecuación (14.20), modificada para incluir la función de energía potencial que obtuvo en el inciso *a*), y despeje la velocidad v_x en función de x. Luego, sustituya v_x por dx/dt y separe la variable escribiendo todos los factores que contienen x de un lado y los que contienen t del otro, de manera que pueda integrarse cada lado. En la integral de x, haga el cambio de variable $u = x/A$. La integral resultante se puede evaluar usando métodos numéricos en una computadora y tiene el valor $\int_0^1 du/\sqrt{1 - u^4} = 1.31$]. *c*) De acuerdo con el resultado obtenido en el inciso *b*), ¿el periodo depende de la amplitud A del movimiento? ¿Las oscilaciones son armónicas simples?

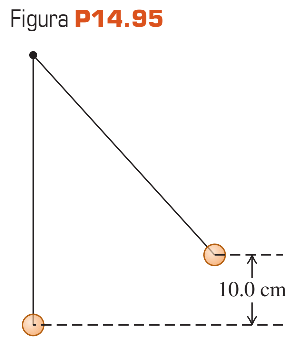
14.93 • **PA CALC** Una aproximación de la energía potencial de una molécula de KCl es $U = A[(R_0^7/8r^8) - 1/r]$, donde $R_0 = 2.67 \times 10^{-10}$ m, $A = 2.31 \times 10^{-28}$ J·m y r es la distancia entre los dos átomos. Use esto para *a*) demostrar que la componente radial de la fuerza sobre cada átomo es $F_r = A[(R_0^7/r^9) - 1/r^2]$. *b*) Demuestre que R_0 es la separación de equilibrio. *c*) Calcule la energía potencial mínima. *d*) Use $r = R_0 + x$ y los primeros dos términos del teorema binomial (ecuación 14.28) para demostrar que $F_r \approx -(7A/R_0^3)x$, de modo que la constante de fuerza de la molécula sea $k = 7A/R_0^3$. *e*) Si los átomos de K y Cl vibran en direcciones contrarias en lados opuestos del centro de masa de la molécula, $m_1m_2/(m_1 + m_2) = 3.06 \times 10^{-26}$ kg es la masa que debe usarse para calcular la frecuencia. Calcule la frecuencia de las vibraciones de amplitud pequeña.

14.94 ••• **PA** Dos esferas sólidas uniformes, cada una con masa $M = 0.800$ kg y radio $R = 0.0800$ m, están conectadas por una varilla corta ligera que pasa a lo largo de un diámetro de cada esfera y se encuentran en reposo sobre una mesa horizontal. Un resorte con constante de fuerza $k = 160$ N/m tiene un extremo fijo a la pared y el otro extremo unido a un anillo sin fricción que pasa por encima de la varilla en el centro de masa de las esferas, que está a la mitad de la distancia entre

los centros de las dos esferas. Se tira de cada una de las esferas la misma distancia desde la pared, estirando el resorte, y luego se suelta. Hay una fricción suficiente entre la mesa y las esferas para que estas rueden sin resbalar conforme se mueven hacia atrás y hacia adelante en el extremo del resorte. Demuestre que el movimiento del centro de masa de las esferas es armónico simple y calcule el periodo.

14.95 • PA En la figura P14.95, la esfera superior se suelta del reposo, choca contra la esfera inferior estacionaria y queda unida a ella. Ambas cuerdas tienen 50.0 cm de longitud. La esfera superior tiene una masa de 2.00 kg y está inicialmente 10.0 cm más alta que la inferior, cuya masa es de 3.00 kg. Calcule la frecuencia y el desplazamiento angular máximo del movimiento después del choque.

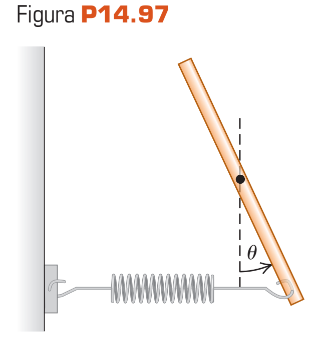
Figura **P14.95**



14.96 •• PA BIO *T. rex.* Modele la pierna del *T. rex* del ejemplo 14.10 (sección 14.6) como dos varillas uniformes con longitud de 1.55 m cada una y unidas rígidamente por un extremo. La varilla inferior tiene masa M, y la superior, $2M$. El objeto compuesto pivota en torno a la parte superior de la varilla de arriba. Calcule el periodo de oscilación de este objeto para oscilaciones de amplitud pequeña. Compare su resultado con el del ejemplo 14.10.

14.97 •• CALC Una varilla metálica delgada y uniforme con masa M pivota sin fricción sobre un eje que pasa por su punto medio y es perpendicular a la varilla. Un resorte horizontal con constante de fuerza k se conecta al extremo inferior de la varilla, y el otro extremo del resorte se fija a un soporte rígido. La varilla se desplaza un ángulo pequeño Θ con respecto a la vertical (figura P14.97) y se suelta. Demuestre que se mueve en MAS angular y calcule su periodo. (*Sugerencia:* Suponga que Θ es suficientemente pequeño para que las aproximaciones sen $\Theta \approx \Theta$ y cos $\Theta \approx 1$ sean válidas. El movimiento es armónico simple si $d^2\theta/dt^2 = -\omega^2\theta$ y el periodo es entonces $T = 2\pi/\omega$).

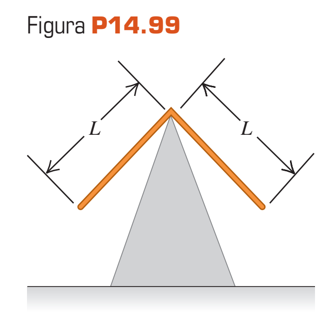
Figura **P14.97**



14.98 •• El problema de la campana que suena en silencio. Una campana grande de 34.0 kg cuelga de una viga de madera, de modo que puede oscilar con fricción despreciable. Su centro de masa está 0.60 m bajo el pivote, y su momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el pivote es de 18.0 kg · m^2. El badajo es pequeño, con una masa de 1.8 kg, y cuelga del extremo de una varilla delgada de longitud L y masa despreciable. El otro extremo de la varilla está sujeto al interior de la campana, de modo que puede oscilar libremente sobre el mismo eje de la campana. ¿Qué longitud L debe tener la varilla para que la campana suene en silencio, es decir, para que el periodo de oscilación de la campana sea igual al del badajo?

14.99 ••• Dos varillas delgadas idénticas, cada una con masa m y longitud L, se unen en ángulo recto para constituir un objeto en forma de L, el cual se balancea sobre la cúspide de un triángulo agudo (figura P14.99). El objeto en forma de L oscila cuando se desvía un poco. Calcule la frecuencia de oscilación.

Figura **P14.99**

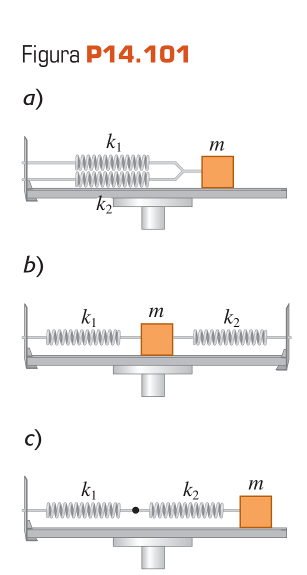


14.100 • PA CALC Una varilla uniforme de longitud L oscila con ángulo pequeño alrededor de un punto a una distancia x de su centro. *a)* Demuestre que su frecuencia angular es $\sqrt{gx/[(L^2/12) + x^2]}$. *b)* Demuestre que su frecuencia angular máxima se presenta cuando $x = L/\sqrt{12}$. *c)* ¿Qué longitud tiene la varilla si la frecuencia angular máxima es 2π rad/s?

PROBLEMAS DE DESAFÍO

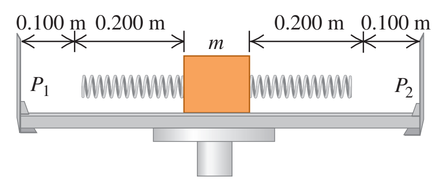
14.101 ••• Constante de fuerza efectiva de dos resortes. Dos resortes con la misma longitud, sin estirar, pero diferentes constantes de fuerza k_1 y k_2, se unen a un bloque de masa m en una superficie nivelada y sin fricción. Calcule la constante de fuerza efectiva k_{efe} en cada uno de los tres casos *a)*, *b)* y *c)* de la figura P14.101. (La constante de fuerza efectiva está definida por $\sum F_x = -k_{eff}\,x$). *d)* Un objeto de masa m, suspendido de un resorte uniforme con constante de fuerza k, vibra con una frecuencia f_1. Si el resorte se parte a la mitad y el mismo objeto se cuelga de una de las mitades, la frecuencia es f_2. Determine la relación f_2/f_1.

Figura **P14.101**



14.102 ••• Dos resortes, cada uno con una longitud de 0.200 m, sin estirar, pero con diferentes constantes de fuerza k_1 y k_2, están unidos a extremos opuestos de un bloque con masa m sobre una superficie nivelada y sin fricción. Los extremos exteriores de los resortes están ahora unidos a dos pernos P_1 y P_2, a 0.100 m de las posiciones originales de los extremos de los resortes (figura P14.102). Sean $k_1 = 2.00$ N/m, $k_2 = 6.00$ N/m y $m = 0.100$ kg. *a)* Encuentre la longitud de cada resorte, cuando el bloque está en su nueva posición de equilibrio después de que los resortes se han unido a los pernos. *b)* Determine el periodo de vibración del bloque si se desplaza ligeramente de su nueva posición de equilibrio y se libera.

Figura **P14.102**



14.103 ••• CALC Resorte con masa. En todos los problemas anteriores del capítulo, hemos supuesto que los resortes tienen masa despreciable, aunque, desde luego, ningún resorte carece por completo de masa. Para determinar el efecto de la masa de un resorte, considere un resorte de masa M, con longitud de equilibrio L_0 y constante de fuerza k. Si el resorte se estira o se comprime a una longitud L, la energía potencial es $\frac{1}{2}kx^2$, donde $x = L - L_0$. *a)* Considere un resorte como este con un extremo fijo y el otro en movimiento con rapidez v. Suponga que la rapidez de los puntos a lo largo del resorte varía linealmente con la distancia l al extremo fijo, y que la masa M del resorte está distribuida de manera uniforme a todo lo largo del resorte. Calcule la energía cinética del resorte en términos de M y v. (*Sugerencia:* Divida el resorte en partes de longitud dl; determine la rapidez de cada parte en términos de l, v y L; determine la masa de cada parte en términos de dl,

M y L; e integre de 0 a L. El resultado *no* es $\frac{1}{2}Mv^2$, ya que no todo el resorte se mueve con la misma rapidez). *b*) Obtenga la derivada de la ecuación de conservación de la energía (ecuación 14.21) con respecto al tiempo, para una masa m que se mueve en el extremo de un resorte de *masa despreciable*. Comparando sus resultados con la ecuación (14.8), que define ω, demuestre que la frecuencia angular de oscilación es $\omega = \sqrt{k/m}$. *c*) Aplique el procedimiento del inciso *b*) para obtener la frecuencia angular de oscilación ω del resorte considerado en el inciso *a*). Si la *masa efectiva* M' del resorte está definida por $\omega = \sqrt{k/M'}$, exprese M' en términos de M.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo



La longitud de la pierna es más importante. El movimiento hacia adelante y hacia atrás de una pierna al caminar es como un péndulo físico, para el que el periodo de oscilación es $T = 2\pi\sqrt{I/mgd}$ [véase la ecuación (14.39)]. En esta expresión I es el momento de inercia del péndulo, m es su masa y d es la distancia desde el eje de rotación en el centro de masa del péndulo. El momento de inercia I es proporcional a la masa m, por lo que la masa se elimina de esta expresión para el periodo T. Por consiguiente, solo importan las dimensiones de la pierna. (Véase los ejemplos 14.9 y 14.10).

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

14.1 **Respuestas: *a*) $x < 0$, *b*) $x > 0$, *c*) $x < 0$, *d*) $x > 0$, *e*) $x > 0$, *f*) $x = 0$** La figura 14.2 indica que la componente x de la fuerza total F_x y la aceleración a_x son positivas cuando $x < 0$ (así que el cuerpo se desplaza hacia la izquierda y el resorte se comprime); F_x y a_x son negativas cuando $x > 0$ (así que el cuerpo se desplaza hacia la derecha y el resorte se estira). Por lo tanto, x y a_x siempre tienen signos *opuestos*. Esto es válido si el objeto se mueve a la derecha ($v_x > 0$), a la izquierda ($v_x < 0$) o no se mueve ($v_x = 0$), ya que la fuerza ejercida por el resorte depende de si se comprime o se estira, y con qué distancia. Esto explica las respuestas de los incisos *a*) a *e*). Si la aceleración es cero como en *f*), la fuerza neta también debe ser cero y, por ello, el resorte debe estar relajado; por lo tanto, $x = 0$.

14.2 **Respuestas: *a*) $A > 0.10$ m, $\phi < 0$; *b*) $A > 0.10$ m, $\phi > 0$** En ambas situaciones, la velocidad v_{0x} inicial ($t = 0$) no es cero, de manera que de acuerdo con la ecuación (14.19), la amplitud $A = \sqrt{x_0{}^2 + (v_{0x}{}^2/\omega^2)}$ es mayor que la coordenada inicial $x_0 = 0.10$ m. Según la ecuación (14.18), el ángulo de fase es $\phi = \arctan(-v_{0x}/\omega x_0)$, el cual es positivo si la cantidad $-v_{0x}/\omega x_0$ (el argumento de la función arcotangente) es positiva, y es negativo si $-v_{0x}/\omega x_0$ es un valor negativo. En el inciso *a*) x_0 y v_{0x} son ambos positivos, así que $-v_{0x}/\omega x_0 < 0$ y $\phi < 0$. En el inciso *b*) x_0 es positivo y v_{0x} es negativo, por lo que $-v_{0x}/\omega x_0 > 0$ y $\phi > 0$.

14.3 **Respuestas: *a*) iii, *b*) v.** Para aumentar la energía total $E = \frac{1}{2}kA^2$ en un factor de 2, la amplitud A debe aumentar en un factor de $\sqrt{2}$. Puesto que se trata de MAS, un cambio de amplitud no afecta la frecuencia.

14.4 **Respuesta: i.** El periodo de oscilación de un cuerpo de masa m unido a un resorte colgante con constante de fuerza k está dado por $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, la misma expresión que para el cuerpo unido al resorte horizontal. Ni m ni k se modifican cuando el aparato se lleva a Marte, por lo que el periodo permanece inalterable. La única diferencia es que en el equilibrio, el resorte se estirará una distancia más corta en Marte que en la Tierra, debido a la fuerza de gravedad más débil.

14.5 **Respuesta: no** Al igual que para un objeto que oscila en un resorte, en la posición de equilibrio la *rapidez* de la lenteja del péndulo no cambia instantáneamente (aquí, la rapidez es máxima, así que su derivada en este tiempo es cero). Sin embargo, la *dirección* del movimiento es variable porque la lenteja del péndulo sigue una trayectoria circular. Por ello, la lenteja debe tener una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria y hacia el centro del círculo (véase la sección 3.4). Para originar esta aceleración en la posición de equilibrio cuando la cuerda es vertical, la fuerza de tensión hacia arriba en esta posición debe ser mayor que el peso de la lenteja. Esto provoca una fuerza neta hacia arriba sobre la lenteja y una aceleración hacia arriba, dirigida al centro de la trayectoria circular.

14.6 **Respuesta: i.** El periodo de un péndulo físico está dado por la ecuación (14.39), $T = 2\pi\sqrt{I/mgd}$. La distancia $d = L$ desde el pivote hasta el centro de gravedad es la misma tanto para la varilla como para el péndulo simple, cuando la masa es m. Esto significa que para cualquier ángulo de desplazamiento θ, actúa la misma torca de restitución sobre la varilla y sobre el péndulo simple. Sin embargo, la varilla tiene un momento de inercia mayor: $I_{\text{rod}} = \frac{1}{3}m(2L)^2 = \frac{4}{3}mL^2$ e $I_{\text{simple}} = mL^2$ (toda la masa del péndulo está a una distancia L del pivote). Por lo tanto, la varilla tiene un periodo mayor.

14.7 **Respuesta: ii.** Las oscilaciones son subamortiguadas con una amplitud decreciente en cada ciclo de oscilación, como las que se grafican en la figura 14.26. Si las oscilaciones fueran no amortiguadas, continuarían con la misma amplitud indefinidamente. Si fueran críticamente amortiguadas o sobreamortiguadas, la punta no se balancearía en forma vertical, sino que regresaría suavemente a su posición de equilibrio original sin sobrepasarla.

14.8 **Respuesta: i.** La figura 14.28 indica que la curva de amplitud contra frecuencia impulsora se mueve hacia arriba con *todas* las frecuencias, conforme el valor de la constante de amortiguamiento b disminuye. Así, para valores fijos de k y m, el oscilador con el amortiguamiento mínimo (el menor valor de b) tendrá la respuesta más grande en cualquier frecuencia impulsora.

Problema práctico

Respuesta: $T = 2\pi\sqrt{3M/2k}$

15 ONDAS MECÁNICAS



? Cuando se presenta un terremoto, las señales del suceso viajan por la masa del planeta en forma de ondas sísmicas. ¿Qué aspectos de una onda sísmica determinan la magnitud de la potencia que transporta la onda?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué se entiende por onda mecánica y cuáles son las diferentes variedades de estas.
- Cómo utilizar la relación entre rapidez, frecuencia y longitud de onda en una onda periódica.
- Cómo interpretar y utilizar la expresión matemática de una onda periódica sinusoidal.
- Cómo calcular la rapidez de las ondas en una cuerda.
- Cómo calcular la rapidez con la que una onda mecánica transporta energía.
- Qué sucede cuando las ondas mecánicas se superponen y se interfieren entre sí.
- Las propiedades de las ondas estacionarias en una cuerda y cómo analizar tales ondas.
- Cómo los instrumentos musicales de cuerda producen sonidos de frecuencias específicas.

Las olas pequeñas de un estanque, los sonidos musicales, los temblores sísmicos causados por un terremoto, todos estos son fenómenos *ondulatorios*. Las ondas se generan cuando se perturba el estado de equilibrio de un sistema, y tal perturbación viaja o se *propaga* de una región del sistema a otra. Al propagarse una onda, transporta energía. La energía de las ondas de la luz solar calienta la superficie terrestre; en tanto que la energía de las ondas sísmicas puede agrietar la corteza de nuestro planeta.

Este capítulo y el siguiente tratan de las ondas mecánicas, ondas que viajan por un material llamado *medio*. (El capítulo 16 se ocupa del sonido, que es un tipo importante de onda mecánica). Iniciaremos este capítulo deduciendo las ecuaciones básicas que describen las ondas, incluyendo el importante caso especial de las ondas *sinusoidales* (o senoidales) donde el patrón de la onda es una función repetitiva seno o coseno. Para entender mejor las ondas en general, examinaremos el caso sencillo de las ondas que viajan por una cuerda estirada.

Las ondas en una cuerda desempeñan un papel importante en la música. Cuando un individuo toca una guitarra o un violín, produce ondas que viajan en direcciones opuestas a lo largo de las cuerdas del instrumento. Al superponerse estas ondas de dirección opuesta, se genera *interferencia*. Descubriremos que, en una cuerda de guitarra o de violín, únicamente pueden darse ondas sinusoidales de ciertas frecuencias especiales, llamadas *frecuencias de modo normal*, determinadas por las propiedades de la cuerda. Las frecuencias de modo normal de los instrumentos de cuerda determinan el tono de los sonidos musicales que se producen. (En el capítulo siguiente veremos que la interferencia también ayuda a explicar los tonos de los instrumentos de *viento*, como las flautas y los órganos de tubos).

En la naturaleza no todas las ondas son mecánicas. Las ondas *electromagnéticas* (que incluyen la luz, las ondas de radio, las radiaciones infrarroja y ultravioleta y los rayos X) se pueden propagar incluso en el espacio vacío, donde *no* hay un medio. Exploraremos estas y otras ondas no mecánicas en capítulos posteriores.

15.1 Tipos de ondas mecánicas

Una **onda mecánica** es una perturbación que viaja a través de un material o una sustancia que es el **medio** de la onda. Al viajar la onda por el medio, las partículas que constituyen el medio experimentan desplazamientos de varios tipos, según la naturaleza de la onda.

La figura 15.1 muestra tres variedades de ondas mecánicas. En la figura 15.1*a*, el medio es una cuerda tensada. Si damos al extremo izquierdo un ligero impulso hacia arriba, el impulso viaja a lo largo de la cuerda. Secciones sucesivas de la cuerda repiten el mismo movimiento que dimos al extremo, pero en instantes posteriores sucesivos. Como los desplazamientos del medio son perpendiculares o *transversales* a la dirección en que la onda viaja por el medio, decimos que se trata de una **onda transversal**.

En la figura 15.1*b*, el medio es un líquido o un gas en un tubo con una pared rígida en el extremo derecho y un pistón móvil en el izquierdo. Si damos al pistón un solo movimiento hacia adelante y hacia atrás, el desplazamiento y las fluctuaciones de presión viajarán a lo largo del medio. En este caso, los movimientos de las partículas del medio son hacia adelante y hacia atrás en la *misma* dirección en que viaja la onda, y decimos que se trata de una **onda longitudinal**.

En la figura 15.1*c*, el medio es un líquido en un canal, como agua en una zanja de irrigación. Si movemos la tabla plana de la izquierda hacia adelante y hacia atrás una vez, una perturbación de onda viajará a lo largo del canal. En este caso, los desplazamientos del agua tienen componentes *tanto* longitudinales *como* transversales.

Cada uno de estos sistemas tiene un estado de equilibrio. En el caso de la cuerda, es el estado en que el sistema está en reposo, con la cuerda estirada en línea recta. Para el fluido en un tubo, es el estado en que el fluido está en reposo con presión uniforme; y para el agua en una zanja, es una superficie lisa y horizontal. En todos los casos, el movimiento ondulatorio es una perturbación del estado de equilibrio que viaja de una región del medio a otra, y siempre hay fuerzas que tienden a volver el sistema a su posición de equilibrio cuando se le desplaza, así como la gravedad tiende a llevar un péndulo hacia su posición de equilibrio directamente hacia abajo cuando se le desplaza.

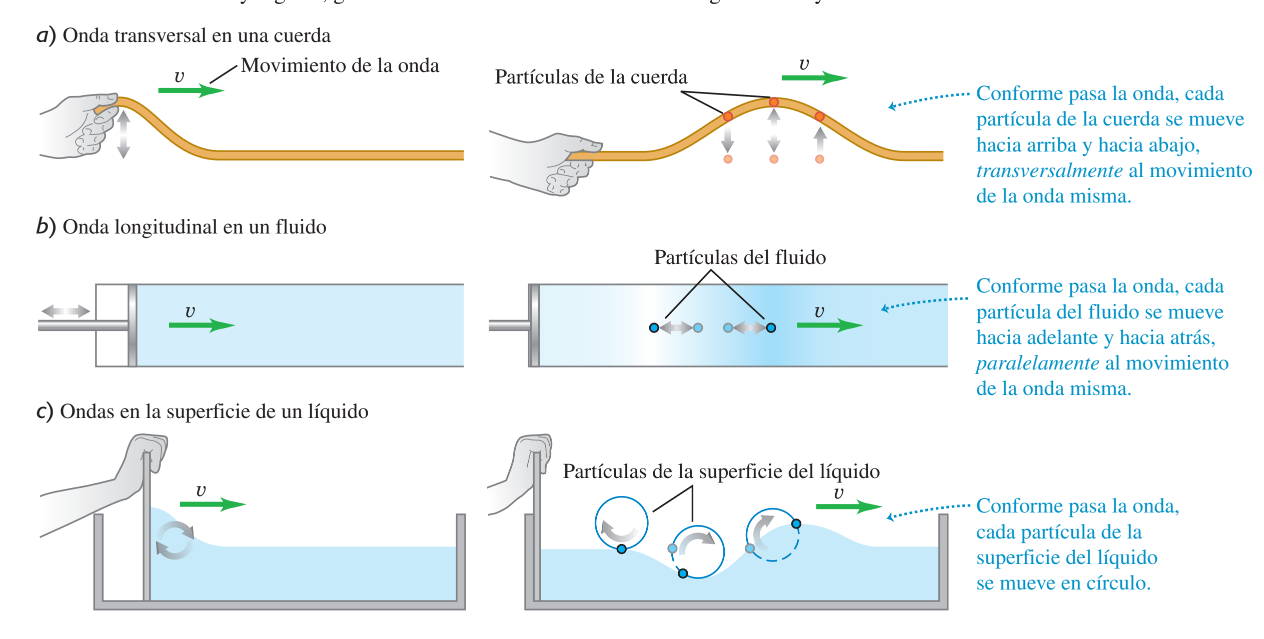
Aplicación Ondas en el cuerpo de una serpiente
Una serpiente se mueve en el suelo produciendo ondas que viajan hacia atrás de su cuerpo, desde su cabeza hasta su cola. Las ondas son estacionarias respecto del suelo cuando empujan contra él, de manera que la serpiente se mueve hacia adelante.



MasteringPHYSICS®

ActivPhysics 10.1: Properties of Mechanical Waves

15.1 Tres formas de producir una onda que se mueve hacia la derecha. *a*) La mano mueve la cuerda hacia arriba y luego regresa, produciendo una onda transversal. *b*) El pistón se mueve a la derecha, comprimiendo el líquido o gas, y regresa produciendo una onda longitudinal. *c*) La tabla se mueve a la derecha y regresa, generando una combinación de ondas longitudinales y transversales.



15.2 "Hacer la ola" en un estadio deportivo es un ejemplo de onda mecánica: la perturbación se propaga en la multitud, pero no transporta materia (ninguno de los espectadores se mueve de un asiento a otro).



Estos ejemplos tienen tres cuestiones en común. Primera, en todos los casos la perturbación viaja o se *propaga* por el medio con una rapidez definida llamada rapidez de propagación o, simplemente, **rapidez de la onda**, y su valor se determina, en cada caso, por las propiedades mecánicas del medio. Usaremos el símbolo v para identificar esta rapidez. (La rapidez de la onda *no* es la rapidez con que se mueven las partículas cuando son perturbadas por la onda. Volveremos a esto en la sección 15.3). Segunda, el medio mismo no viaja en el espacio; sus partículas individuales realizan movimientos hacia atrás y hacia adelante, o hacia arriba y hacia abajo, respecto de sus posiciones de equilibrio. Lo que viaja es el patrón completo de la perturbación ondulatoria. Tercera, para poner en movimiento cualquiera de tales sistemas, debemos aportar energía realizando trabajo mecánico sobre el sistema. El movimiento de la onda transporta esta energía de una región del medio a otra. *Las ondas transportan energía, pero no materia, de una región a otra* (figura 15.2).

Evalúe su comprensión de la sección 15.1 ¿Qué tipo de onda es "la ola" que se muestra en la figura 15.2? **i.** transversal, **ii.** longitudinal; **iii.** una combinación de transversal y longitudinal.

15.2 Ondas periódicas

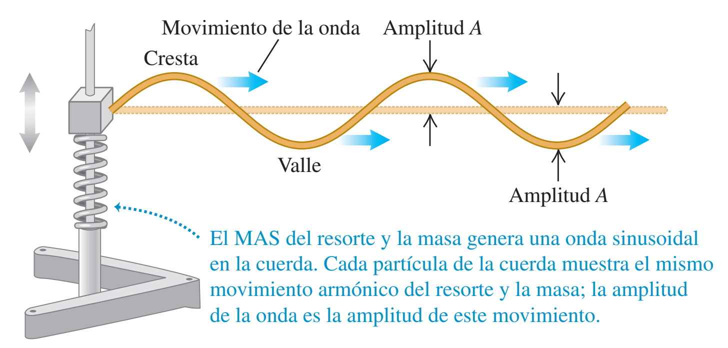
La onda transversal en la cuerda estirada de la figura 15.1*a* es un ejemplo de un *pulso de onda.* La mano sacude la cuerda verticalmente una vez, ejerciendo una fuerza transversal sobre ella. El resultado es una sola "sacudida" o pulso que viaja a lo largo de la cuerda. La tensión de la cuerda restablece su forma recta una vez que el pulso haya pasado.

Ocurre una situación más interesante cuando damos un movimiento repetitivo, o *periódico*, al extremo libre de la cuerda. (Quizás el lector desee repasar el análisis del movimiento periódico del capítulo 14 antes de continuar). Entonces, cada partícula de la cuerda también experimenta un movimiento periódico al propagarse la onda, y tenemos una **onda periódica**.

Ondas transversales periódicas

En particular, suponga que movemos la cuerda hacia arriba y hacia abajo con un *movimiento armónico simple* (MAS) de amplitud A, frecuencia f, frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ y periodo $T = 1/f = 2\pi/\omega$. En la figura 15.3 se ilustra una forma de hacerlo. La onda producida es una sucesión simétrica de *crestas* y *valles*. Como veremos, las

15.3 Un bloque con masa m unido a un resorte tiene un movimiento armónico simple y produce una onda sinusoidal que viaja a la derecha por la cuerda. (En un sistema real, se tendría que aplicar una fuerza impulsora al bloque para renovar la energía transportada por la onda).



ondas periódicas con movimiento armónico simple son especialmente fáciles de analizar; las llamamos **ondas sinusoidales** (o **senoidales**). Resulta también que *cualquier* onda periódica puede representarse como una combinación de ondas sinusoidales. Por lo tanto, este tipo específico de movimiento ondulatorio merece atención especial.

En la figura 15.3, la onda que avanza por la cuerda es una *sucesión continua* de perturbaciones sinusoidales transversales. La figura 15.4 muestra la forma de una parte de la cuerda cerca del extremo izquierdo a intervalos de tiempo de $\frac{1}{8}$ de periodo, en un tiempo total de un periodo. La forma de onda avanza uniformemente hacia la derecha, como indica el área sombreada. Al moverse la onda, cualquier punto de la cuerda (cualquiera de los puntos rojos, por ejemplo) oscila hacia arriba y hacia abajo respecto de su posición de equilibrio, con movimiento armónico simple. *Cuando una onda sinusoidal pasa a través de un medio, todas las partículas del medio experimentan movimiento armónico simple con la misma frecuencia.*

CUIDADO **Movimiento ondulatorio contra movimiento de las partículas** No confunda el movimiento de la *onda transversal* a lo largo de la cuerda con el de una *partícula* de la cuerda. La onda avanza con rapidez constante v *a lo largo* de la cuerda; mientras que el movimiento de la partícula es armónico simple y *transversal* (perpendicular) a la longitud de la cuerda.

En el caso de una onda periódica, la forma de la cuerda en cualquier instante es un patrón repetitivo. La longitud de un patrón de onda completo es la distancia entre una cresta y la siguiente, o bien, entre un valle y el siguiente, o de cualquier punto al punto correspondiente en la siguiente repetición de la forma de la onda. Llamamos a esta distancia **longitud de onda**, denotada por λ (la letra griega lambda). El patrón de onda viaja con rapidez constante v y avanza una longitud de onda λ en el lapso de un periodo T. Por lo tanto, la rapidez v de la onda está dada por $v = \lambda/T$, o bien, dado que $f = 1/T$,

$$v = \lambda f \qquad \text{(onda periódica)} \qquad (15.1)$$

La rapidez de propagación es igual al producto de la longitud de onda por la frecuencia. La frecuencia es una propiedad de *toda* la onda periódica, porque todos los puntos de la cuerda oscilan con la misma frecuencia f.

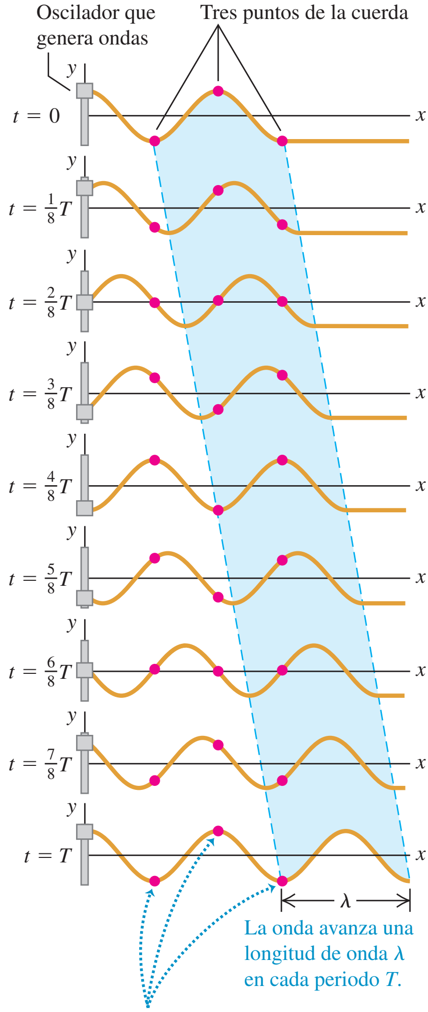
Las ondas en una cuerda se propagan en una sola dimensión (en la figura 15.4, a lo largo del eje x). No obstante, los conceptos de frecuencia, longitud de onda y amplitud son igualmente aplicables a las ondas que se propagan en dos o en tres dimensiones. La figura 15.5 ilustra una onda que se propaga en dos dimensiones en la superficie de un tanque de agua. Igual que en las ondas de una cuerda, la longitud de onda es la distancia entre una cresta y la siguiente, y la amplitud es la altura de una cresta sobre el nivel de equilibrio.

En muchas situaciones importantes, que involucran ondas en cuerdas, la rapidez de la onda v depende únicamente de las propiedades mecánicas del medio. En este caso, aumentar f hace que λ disminuya, de modo que el producto $v = \lambda f$ no cambia, y las ondas de *todas* las frecuencias se propagan con la misma rapidez. En este capítulo, *solo* consideraremos las ondas de este tipo. (En capítulos posteriores estudiaremos la propagación de las ondas de luz en sustancias donde la rapidez de la onda depende de la frecuencia; esta es la causa por la que los prismas descomponen la luz blanca en un espectro y por la cual las gotas de lluvia crean un arcoíris).

Ondas periódicas longitudinales

Para entender la mecánica de una onda periódica *longitudinal*, consideremos un tubo largo lleno con un fluido, con un pistón en el extremo izquierdo como en la figura 15.1*b*. Si empujamos el pistón, comprimimos el fluido cerca de él, aumentando la presión en

15.4 Onda sinusoidal transversal que viaja a la derecha por una cuerda. La escala vertical está exagerada.

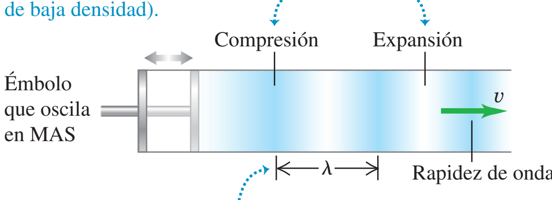


15.5 Una serie de gotas que cae en agua produce una onda periódica que se extiende radialmente hacia afuera. Las crestas y los valles de la onda son círculos concéntricos. La longitud de onda λ es la distancia radial entre crestas adyacentes o valles adyacentes.



15.6 Uso de un pistón que oscila para crear una onda longitudinal sinusoidal en un fluido.

El movimiento hacia adelante del émbolo crea una compresión (una zona de alta densidad); el movimiento hacia atrás crea una expansión (una zona de baja densidad).



La longitud de onda λ es la distancia entre los puntos correspondientes de ciclos sucesivos.

15.7 Onda sinusoidal longitudinal que viaja a la derecha en un fluido. La onda tiene la misma amplitud A y periodo T que la oscilación del pistón.

Se muestran ondas longitudinales en intervalos de $\frac{1}{8}$ de T durante un periodo T.

Émbolo que se mueve con MAS

Dos partículas en el medio, separadas una longitud de onda λ

$t = 0$, $t = \frac{1}{8}T$, $t = \frac{2}{8}T$, $t = \frac{3}{8}T$, $t = \frac{4}{8}T$, $t = \frac{5}{8}T$, $t = \frac{6}{8}T$, $t = \frac{7}{8}T$, $t = T$

Las partículas oscilan con amplitud A.

La onda avanza una longitud de onda λ en cada periodo T.

esta región. Luego, esta región empuja la región vecina de fluido, y así sucesivamente, de modo que un pulso de onda viaja por el tubo.

Ahora suponga que movemos el pistón hacia atrás y hacia adelante con un movimiento armónico simple a lo largo de una línea paralela al eje del tubo (figura 15.6). Este movimiento forma regiones en el fluido donde la presión y la densidad son mayores o menores que los valores de equilibrio. Llamamos *compresión* a una región donde se ha aumentado la densidad; y *expansión*, a una donde se ha reducido. En la figura 15.6 se muestran las compresiones con regiones oscuras y las expansiones con regiones claras. La longitud de onda es la distancia de una compresión a la siguiente, o de una expansión a la siguiente.

La figura 15.7 ilustra la onda que se propaga en el tubo lleno de fluido a intervalos de $\frac{1}{8}$ de un periodo, en un tiempo total de un periodo. El patrón de compresiones y expansiones se mueve uniformemente a la derecha, exactamente igual que el patrón de crestas y valles de una onda transversal sinusoidal (compare con la figura 15.4). Cada partícula en el fluido oscila con MAS paralelo a la dirección de la propagación de la onda (es decir, izquierda y derecha), con la misma amplitud A y periodo T que el pistón. Las partículas mostradas con los dos puntos rojos de la figura 15.7 están separadas una longitud de onda, por lo que oscilan en fase entre sí.

Al igual que la onda transversal sinusoidal de la figura 15.4, en un periodo T la onda longitudinal de la figura 15.7 viaja una longitud de onda λ a la derecha. Por lo tanto, la ecuación fundamental $v = \lambda f$ se cumple para las ondas longitudinales igual que para las transversales y, de hecho, para *todos* los tipos de ondas periódicas. Igual que con las ondas transversales, en este capítulo y en el siguiente, solamente consideraremos las situaciones en que la rapidez de las ondas longitudinales no depende de la frecuencia.

Ejemplo 15.1 Longitud de onda de un sonido musical



Las ondas sonoras son ondas longitudinales en el aire. La rapidez del sonido depende de la temperatura; a 20°C, es de 344 m/s (1130 ft/s). Calcule la longitud de onda de una onda sonora en el aire a 20°C, si la frecuencia es de 262 Hz (la frecuencia aproximada del do medio de un piano).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Este problema involucra la ecuación (15.1), $v = \lambda f$, que relaciona la rapidez de onda v, la longitud de onda λ y la frecuencia f de una onda periódica. La incógnita es la longitud de onda λ. Nos dan $v = 344$ m/s y $f = 262\ \text{Hz} = 262\ \text{s}^{-1}$.

EJECUTAR: Despejamos λ de la ecuación (15.1):

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{344\ \text{m/s}}{262\ \text{Hz}} = \frac{344\ \text{m/s}}{262\ \text{s}^{-1}} = 1.31\ \text{m}$$

EVALUAR: La rapidez v de las ondas sonoras *no* depende de la frecuencia, así que la relación $\lambda = v/f$ nos indica que la longitud de onda cambiará en proporción inversa con la frecuencia. Por ejemplo, el do alto que cantan las sopranos está dos octavas arriba del do medio. Cada octava corresponde a un factor de 2 en la frecuencia, así que la frecuencia del do alto es cuatro veces la del do medio: $f = 4(262\ \text{Hz}) = 1048$ Hz. Por lo tanto, la *longitud de onda* del do alto es la *cuarta parte* de la del do medio: $\lambda = (1.31\ \text{m})/4 = 0.328$ m.

Evalúe su comprensión de la sección 15.2 Si se duplica la longitud de onda en cierta cuerda, ¿qué sucede con la rapidez v de la onda? ¿Y con su frecuencia f? **i.** v se duplica y f no cambia; **ii.** v no cambia y f se duplica; **iii.** v disminuye a la mitad y f no cambia; **iv.** v no cambia y f disminuye a la mitad; **v**. ninguna de las opciones anteriores.



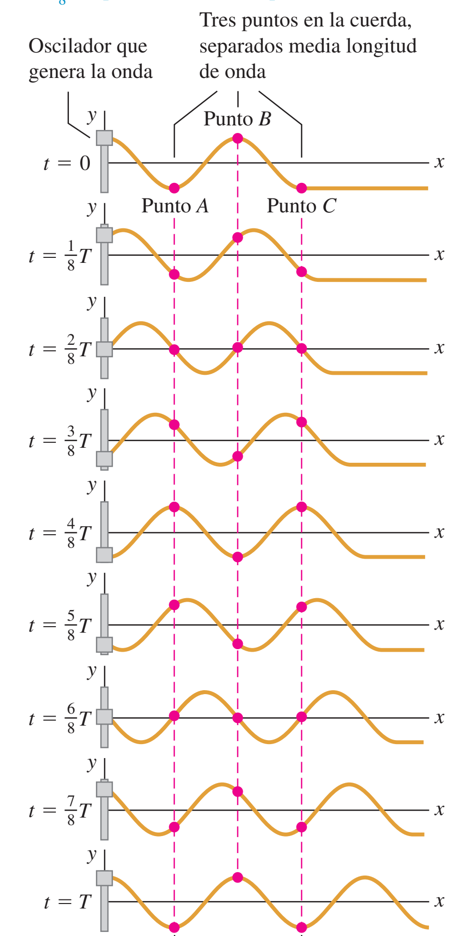
15.3 Descripción matemática de una onda

Muchas características de las ondas periódicas pueden describirse usando los conceptos de rapidez de onda, amplitud, periodo, frecuencia y longitud de onda; sin embargo, es común que necesitemos una descripción más detallada de las posiciones y los movimientos de las partículas individuales del medio en determinados instantes durante la propagación de la onda.

Como ejemplo específico, examinemos las ondas en una cuerda estirada. Si despreciamos la curvatura de la cuerda por la gravedad, su posición de equilibrio es una línea recta, la cual tomamos como el eje x de un sistema de coordenadas. Las ondas en una cuerda son *transversales*; durante el movimiento ondulatorio una partícula en la posición de equilibrio x se desplaza cierta distancia y en la dirección perpendicular al eje x. El valor de y depende de cuál partícula estemos considerando (es decir, y depende de x) y también del instante t en que la consideremos. Así, y es *función* tanto de x como de t; $y = y(x, t)$. Llamamos a $y(x, t)$ la **función de onda** que describe la onda. Si conocemos esta función para un movimiento ondulatorio específico, podemos usarla para calcular el desplazamiento (con respecto al equilibrio) de cualquier partícula en cualquier instante. A partir de esto podemos calcular la velocidad y la aceleración de cualquier partícula, la forma de la cuerda y todo lo que nos interese acerca del comportamiento de la cuerda en cualquier instante.

Función de onda de una onda sinusoidal

Veamos cómo se determina la forma de la función de onda para una onda sinusoidal. Supongamos que una onda sinusoidal viaja de izquierda a derecha (dirección de x creciente) en la cuerda, como en la figura 15.8. Cada partícula de la cuerda oscila con movimiento armónico simple con la misma amplitud y frecuencia; sin embargo, las oscilaciones de partículas en diferentes puntos de la cuerda *no* están todas en fase. La partícula marcada con el punto B en la figura 15.8 está en su máximo valor positivo de y en $t = 0$, y vuelve a $y = 0$ en $t = \frac{2}{8}T$; esto mismo sucede con una partícula en el punto A o en el punto C en $t = \frac{4}{8}T$ y $t = \frac{6}{8}T$, exactamente medio periodo después. Para cualesquiera dos partículas de la cuerda, el movimiento de la partícula de la derecha (en términos de la onda, la partícula "de bajada") se retrasa con respecto al movimiento de la partícula de la izquierda en una cantidad proporcional a la distancia entre las partículas.



15.8 Seguimiento de las oscilaciones de tres puntos en una cuerda, conforme la onda sinusoidal se propaga por ella.

Así, los movimientos cíclicos de diversos puntos de la cuerda están desfasados entre sí en diversas fracciones de un ciclo. Llamamos a tales diferencias, *diferencias de fase*, y decimos que la *fase* del movimiento es diferente para puntos distintos. Por ejemplo, si un punto tiene su desplazamiento positivo máximo al mismo tiempo que otro tiene su desplazamiento negativo máximo, ambos están desfasados medio ciclo. (Este es el caso de los puntos A y B, o de los puntos B y C).

Suponga que el desplazamiento de una partícula en el extremo izquierdo de la cuerda ($x = 0$), donde la onda se origina, está dado por

$$y(x = 0, t) = A\cos\omega t = A\cos 2\pi f t \tag{15.2}$$

Es decir, la partícula oscila con movimiento armónico simple con amplitud A, frecuencia f y frecuencia angular $\omega = 2\pi f$. La notación $y(x = 0, t)$ nos recuerda que el movimiento de esta partícula es un caso especial de la función de onda $y(x, t)$ que describe toda la onda. En $t = 0$, la partícula en $x = 0$ tiene su máximo desplazamiento positivo ($y = A$) y está en reposo por un instante (porque el valor de y es un máximo).

La perturbación ondulatoria viaja de $x = 0$ a algún punto x a la derecha del origen en un tiempo dado por x/v, donde v es la rapidez de la onda. Así, el movimiento del punto x en el instante t es el mismo que el movimiento del punto $x = 0$ en el instante anterior $t - x/v$. Por lo tanto, obtendremos el desplazamiento del punto x en el ins-

tante t con solo sustituir t en la ecuación (15.2) por $(t - x/v)$. Al hacerlo, obtenemos la siguiente expresión para la función de onda:

$$y(x, t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

Dado que $\cos(-\theta) = \cos\theta$, podemos rescribir la función de onda así:

$$y(x, t) = A\cos\left[\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)\right] = A\cos\left[2\pi f\left(\frac{x}{v} - t\right)\right] \quad \text{(onda sinusoidal que avanza en la dirección } +x) \tag{15.3}$$

El desplazamiento $y(x, t)$ es función tanto de la posición x del punto como del tiempo t. Podemos hacer más general la ecuación (15.3) considerando diferentes valores del ángulo de fase, como hicimos para el movimiento armónico simple en la sección 14.2, pero por ahora omitiremos esto.

Es posible rescribir la función de onda dada por la ecuación (15.3) de varias formas distintas pero útiles. Una es expresarla en términos del periodo $T = 1/f$ y la longitud de onda $\lambda = v/f$:

$$y(x, t) = A\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \quad \text{(onda sinusoidal que se mueve en la dirección } +x) \tag{15.4}$$

Obtenemos otra forma útil de la función de onda, si definimos una cantidad k llamada **número de onda**:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{(número de onda)} \tag{15.5}$$

Sustituyendo $\lambda = 2\pi/k$ y $f = \omega/2\pi$ en la relación longitud de onda-frecuencia $v = \lambda f$ obtenemos

$$\omega = vk \quad \text{(onda periódica)} \tag{15.6}$$

Ahora podemos rescribir la ecuación (15.4) como

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t) \quad \text{(onda sinusoidal que se mueve en la dirección } +x) \tag{15.7}$$

Cuál de estas formas de la función de onda $y(x, t)$ se usa en un problema específico es cuestión de conveniencia. Observe que ω está en rad/s, así que, por consistencia con las unidades, el número de onda k debe estar en rad/m en las ecuaciones (15.6) y (15.7). (Algunos físicos definen el número de onda como $1/\lambda$ en vez de $2\pi/\lambda$. Al leer otros textos, verifique cómo se definió este término).

Gráfica de la función de onda

En la figura 15.9*a*, se grafica la función de onda $y(x, t)$ en función de x para un instante específico t. Esta gráfica da el desplazamiento y de una partícula con respecto a su posición de equilibrio, en función de la coordenada x de la partícula. Si se trata de una onda transversal en una cuerda, la gráfica de la figura 15.9*a* representa la forma de la cuerda en ese instante, como una fotografía instantánea de la cuerda. En particular, en $t = 0$,

$$y(x, t = 0) = A\cos kx = A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}$$

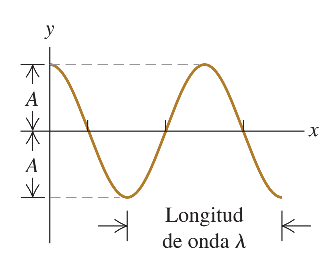
En la figura 15.9*b*, se muestra una gráfica de la función de onda contra el tiempo t para una coordenada x específica. Esta curva da el desplazamiento y de la partícula en esa coordenada en función del tiempo; es decir, describe el movimiento de la partícula. En particular, en la posición $x = 0$,

$$y(x = 0, t) = A\cos(-\omega t) = A\cos\omega t = A\cos 2\pi\frac{t}{T}$$

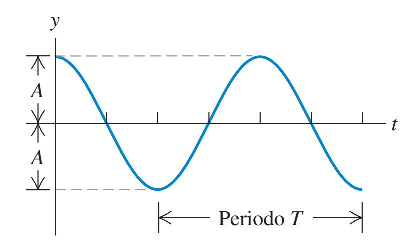
Esto es congruente con lo que dijimos originalmente acerca del movimiento en $x = 0$, ecuación (15.2).

15.9 Dos gráficas de la función de onda $y(x, t)$ en la ecuación (15.7). *a*) La gráfica de desplazamiento y contra la coordenada x en el tiempo $t = 0$. *b*) La gráfica de desplazamiento y contra el tiempo t en la coordenada $x = 0$. La escala vertical se exageró tanto en *a*) como en *b*).

a) Si usamos la ecuación (15.7) para graficar y en función de x para el tiempo $t = 0$, la curva *muestra* la forma de la cuerda en $t = 0$.



b) Si usamos la ecuación (15.7) para graficar y en función de t para la posición $x = 0$, la curva muestra el *desplazamiento* y de la partícula en $x = 0$ en función del tiempo.



CUIDADO **Gráficas de ondas** Aunque a primera vista las figuras 15.9*a* y 15.9*b* parecerían iguales, *no* son idénticas. La figura 15.9*a* es una imagen de la forma de la cuerda en $t = 0$, en tanto que la figura 15.9*b* es una gráfica del desplazamiento y de una partícula en $x = 0$ en función del tiempo.

Más acerca de la función de onda

Podemos modificar las ecuaciones (15.3) a (15.7) para representar una onda que viaja en la dirección x *negativa*. En este caso, el desplazamiento del punto x en el instante t es el mismo que el movimiento del punto $x = 0$ en un instante *posterior* $(t + x/v)$, así que sustituimos t por $(t + x/v)$ en la ecuación (15.2). Para una onda que viaja en la dirección $-x$,

$$y(x, t) = A\cos\left[2\pi f\left(\frac{x}{v} + t\right)\right] = A\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right)\right] = A\cos(kx + \omega t) \quad (15.8)$$

(onda sinusoidal que se mueve en la dirección $-x$)

En la expresión $y(x, t) = A\cos(kx \pm \omega t)$ para una onda que viaja en la dirección $-x$ o bien $+x$, la cantidad $(kx \pm \omega t)$ se denomina **fase**, y desempeña el papel de una cantidad angular (siempre en radianes) en la ecuación (15.7) o la (15.8); su valor para valores cualesquiera de x y t determina qué parte del ciclo sinusoidal está ocurriendo en un punto y tiempo particulares. Para una cresta (donde $y = A$ y la función coseno vale 1), la fase podría ser 0, 2π, 4π, etcétera; para un valle (donde $y = -A$ y el coseno tiene el valor -1), podría ser π, 3π, 5π, etcétera.

La rapidez de onda es la rapidez con que tenemos que movernos con la onda para mantenernos junto a un punto que tiene una fase dada, como una cresta específica de una onda en una cuerda. Para una onda que viaja en la dirección $+x$, eso implica $kx - \omega t =$ constante. Derivando con respecto a t, obtenemos $k\,dx/dt = \omega$, o bien,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

Si comparamos esto con la ecuación (15.6), vemos que dx/dt es igual a la rapidez v de la onda. Por esta relación, a veces v se denomina la *velocidad de fase* de la onda. (Aunque *rapidez de fase* sería más correcto).

Estrategia para resolver problemas 15.1 Ondas mecánicas



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Como siempre, identifique las incógnitas; estas podrían incluir *expresiones* matemáticas (por ejemplo, la función de onda para una situación específica). Los problemas de ondas se dividen en dos categorías. Los problemas de *cinemática* se ocupan de describir el movimiento de las ondas; en ellos intervienen la rapidez de onda v, la longitud de onda λ (o el número de onda k), la frecuencia f (o la frecuencia angular ω) y la amplitud A. También podrían intervenir la posición, la velocidad y la aceleración de partículas individuales del medio. En problemas de *dinámica*, también se usan conceptos de las leyes de Newton. Más adelante en este capítulo encontraremos problemas donde interviene la relación entre la rapidez de onda y las propiedades mecánicas del medio.

PLANTEAR *el problema siguiendo estos pasos:*

1. Elabore una lista de las cantidades conocidas. Dibuje gráficas de y contra x (como la figura 15.9*a*) y de y contra t (como la figura 15.9*b*), y anote en ellas los valores de las cantidades conocidas.
2. Identifique las ecuaciones útiles. Estas pueden ser la ecuación (15.1), $(v = \lambda f)$, la ecuación (15.6) $(\omega = vk)$, y las ecuaciones (15.3), (15.4) y (15.7), las cuales expresan la función de onda de varias formas. Con la definición de la función de onda, se obtiene el valor de y en cualquier punto (valor de x) y en cualquier tiempo t.
3. Si es necesario determinar la rapidez de onda v y no se conocen λ ni f, se utiliza una relación entre v y las propiedades mecánicas del sistema. (En la siguiente sección desarrollaremos esta relación para ondas en una cuerda).

EJECUTAR *la solución:* Despeje las incógnitas empleando las ecuaciones que seleccionó. Para determinar la función de onda con las ecuaciones (15.3), (15.4) o (15.7), se debe conocer A y dos cualesquiera de las cantidades v, λ y f (o bien, v, k y ω).

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que los valores de v, f y λ (o bien, v, ω y k) concuerden con las relaciones dadas en la ecuación (15.1) o la (15.6). Si calculó la función de onda, revise uno o más casos especiales para los cuales pueda predecir los resultados.



Ejemplo 15.2 Onda en un tendedero

Su primo Morton mantiene tenso el extremo de un tendedero y mueve el extremo hacia arriba y hacia abajo sinusoidalmente, con una frecuencia de 2.00 Hz y una amplitud de 0.075 m. La rapidez de onda es $v = 12.0$ m/s. En $t = 0$, el extremo de Morton tiene desplazamiento positivo máximo y está en reposo por un instante. Suponga que ninguna onda rebota del extremo lejano. *a*) Calcule la amplitud de onda A, la frecuencia angular ω, el periodo T, la longitud de onda λ y el número de onda k. *b*) Obtenga una función de onda que la describa. *c*) Escriba las ecuaciones para el desplazamiento, en función del tiempo, del extremo que Morton sujeta y de un punto a 3.00 m de ese extremo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se trata de un problema de cinemática acerca del movimiento ondulatorio de una cuerda. Morton genera una onda sinusoidal que se propaga por la cuerda, de modo que podemos usar todas las expresiones que desarrollamos en esta sección. Las incógnitas en el inciso *a*) son A, ω, T, λ y k, así que usaremos las relaciones $\omega = 2\pi f$, $f = 1/T$, $v = \lambda f$ y $k = 2\pi/\lambda$. En los incisos *b*) y *c*), las "incógnitas" son en realidad expresiones de desplazamiento; para obtenerlas, usaremos las ecuaciones adecuadas de la función de onda. Tomaremos la dirección de x positiva como la dirección en la cual se propaga la onda, de modo que cualquiera de las ecuaciones (15.4) o (15.7) producirá la expresión deseada. Una fotografía de la cuerda en el instante $t = 0$ se vería como la figura 15.9*a*, con el desplazamiento máximo en $x = 0$ (el extremo que sujeta Morton).

EJECUTAR: *a*) La amplitud y frecuencia de la onda son las mismas que las de las oscilaciones del extremo de Morton, $A = 0.075$ m y $f = 2.00$ Hz. Por lo que

$$\omega = 2\pi f = \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{ciclo}}\right)\left(2.00 \frac{\text{ciclos}}{\text{s}}\right)$$
$$= 4.00\pi \text{ rad/s} = 12.6 \text{ rad/s}$$

El periodo es $T = 1/f = 0.500$ s, y según la ecuación (15.1):

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{12.0 \text{ m/s}}{2.00 \text{ s}^{-1}} = 6.00 \text{ m}$$

Calculamos el número de onda con la ecuación (15.5) o la (15.6):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \text{ rad}}{6.00 \text{ m}} = 1.05 \text{ rad/m}$$

o

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{4.00\pi \text{ rad/s}}{12.0 \text{ m/s}} = 1.05 \text{ rad/m}$$

b) Escribimos la función de onda empleando la ecuación (15.4) y los valores de A, T y λ del inciso *a*):

$$y(x,t) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$
$$= (0.075 \text{ m})\cos 2\pi\left(\frac{x}{6.00 \text{ m}} - \frac{t}{0.500 \text{ s}}\right)$$
$$= (0.075 \text{ m})\cos[(1.05 \text{ rad/m})x - (12.6 \text{ rad/s})t]$$

Podemos obtener esta misma expresión de la ecuación (15.7) usando los valores de ω y k que obtuvimos del inciso *a*).

c) Determinamos el desplazamiento en función del tiempo en $x = 0$ y $x = +3.00$ m sustituyendo estos valores en la función de onda obtenida en el inciso *b*):

$$y(x = 0, t) = (0.075 \text{ m})\cos 2\pi\left(\frac{0}{6.00 \text{ m}} - \frac{t}{0.500 \text{ s}}\right)$$
$$= (0.075 \text{ m})\cos(12.6 \text{ rad/s})t$$

$$y(x = +3.00 \text{ m}, t) = (0.075 \text{ m})\cos 2\pi\left(\frac{3.00 \text{ m}}{6.00 \text{ m}} - \frac{t}{0.500 \text{ s}}\right)$$
$$= (0.075 \text{ m})\cos[\pi - (12.6 \text{ rad/s})t]$$
$$= -(0.075 \text{ m})\cos(12.6 \text{ rad/s})t$$

EVALUAR: En el inciso *b*), la cantidad $(1.05 \text{ rad/m})x - (12.6 \text{ rad/s})t$ es la *fase* de un punto x de la cuerda en el instante t. Los dos puntos del inciso *c*) oscilan con MAS con la misma frecuencia y amplitud; pero sus oscilaciones están desfasadas por (1.05 rad/m)(3.00 m) = 3.15 rad = *p* rad, es decir, medio ciclo, porque los puntos están separados por media longitud de onda: $\lambda/2 = (6.00 \text{ m})/2 = 3.00$ m. Así, mientras que una gráfica de y contra t para el punto en $x = 0$ es una curva de coseno (como la figura 15.9*b*), una gráfica de y contra t para el punto $x = 3.00$ m es una curva de coseno *negativo* (igual a una curva de coseno desplazada medio ciclo).

Utilizando la expresión para $y(x = 0,t)$ del inciso *c*), ¿puede demostrar que el extremo de la cuerda en $x = 0$ está en reposo por un instante en $t = 0$, como se indicó al inicio del ejemplo? (*Sugerencia:* Calcule la velocidad en este punto derivando y con respecto a t).

Velocidad y aceleración de partículas en una onda sinusoidal

Con la función de onda obtenemos una expresión para la velocidad transversal de cualquier *partícula* en una onda transversal, que llamaremos v_y para distinguirla de la rapidez v de propagación de la onda. Para calcular v_y en un punto x dado, derivamos la función de onda $y(x, t)$ con respecto a t, manteniendo x constante. Si la función de onda es

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$$

entonces,

$$v_y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \tag{15.9}$$

En esta expresión, ∂ es una *d* modificada para recordarnos que $y(x, t)$ es una función de *dos* variables y que solamente estamos permitiendo que una de ellas (t) varíe. La otra (x) es constante ya que estamos examinando un punto dado de la cuerda. Esta derivada se llama *derivada parcial.* Si no ha llegado a ese punto en sus cursos de cálculo, no se preocupe; es una idea sencilla.

La ecuación (15.9) muestra que la velocidad transversal de una partícula varía con el tiempo, como se espera en movimiento armónico simple. La rapidez máxima de una partícula es ωA; esta puede ser mayor, menor o igual que la rapidez de onda v, según la amplitud y la frecuencia de la onda.

La *aceleración* de cualquier partícula es la *segunda* derivada parcial de $y(x, t)$ con respecto a t:

$$a_y(x, t) = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(kx - \omega t) = -\omega^2 y(x, t) \qquad (15.10)$$

La aceleración de una partícula es igual a $-\omega^2$ veces su desplazamiento, que es el resultado que obtuvimos en la sección 14.2 para el movimiento armónico simple.

También podemos calcular las derivadas parciales de $y(x, t)$ con respecto a x, manteniendo t constante. La primera derivada $\partial y(x, t)/\partial x$ es la *pendiente* de la cuerda en el punto x en el tiempo t. La segunda derivada parcial con respecto a x es la *curvatura* de la cuerda:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(kx - \omega t) = -k^2 y(x, t) \qquad (15.11)$$

Por las ecuaciones (15.10) y (15.11), y la relación $\omega = vk$, vemos que

$$\frac{\partial^2 y(x, t)/\partial t^2}{\partial^2 y(x, t)/\partial x^2} = \frac{\omega^2}{k^2} = v^2 \quad \text{y}$$

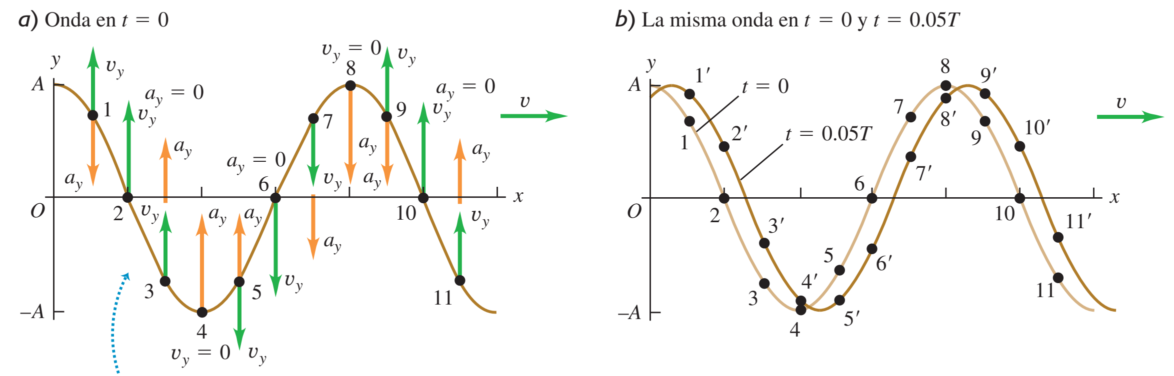
$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad \text{(ecuación de onda)} \qquad (15.12)$$

Dedujimos la ecuación (15.12) para una onda que viaja en la dirección $+x$. Se pueden seguir los mismos pasos para demostrar que la función de onda para una onda sinusoidal que se propaga en la dirección *x negativa*, $y(x, t) = A\cos(kx + \omega t)$, también satisface esta ecuación.

La ecuación (15.12), llamada **ecuación de onda**, es una de las más importantes en física. Siempre que se presenta, sabemos que una perturbación puede propagarse como onda a lo largo del eje x con rapidez v. La perturbación no tiene que ser una onda sinusoidal; veremos en la siguiente sección que *cualquier* onda en una cuerda cumple la ecuación (15.12), sea periódica o no (véase también el problema 15.65). En el capítulo 32 (volumen 2) veremos que los campos eléctricos y magnéticos satisfacen la ecuación de onda; la rapidez de la onda resultará ser la rapidez de la luz, lo cual nos llevará a la conclusión de que la luz es una onda electromagnética.

La figura 15.10*a* muestra la velocidad transversal v_y y la aceleración transversal a_y, dadas por las ecuaciones (15.9) y (15.10), para varios puntos de una cuerda cuando una onda sinusoidal pasa por ella. Observe que, en puntos donde la cuerda tiene curvatura hacia arriba ($\partial^2 y/\partial x^2 > 0$), la aceleración del punto es positiva ($a_y = \partial^2 y/\partial x^2 > 0$); esto se deduce de la ecuación de onda, ecuación (15.12). Por la misma razón, la aceleración es negativa ($a_y = \partial^2 y/\partial x^2 < 0$) en puntos donde la cuerda tiene curvatura hacia abajo ($\partial^2 y/\partial x^2 < 0$), y la aceleración es cero ($a_y = \partial^2 y/\partial x^2 = 0$) en los puntos de inflexión donde la curvatura es cero ($\partial^2 y/\partial x^2 = 0$). Nuevamente destacamos que v_y y a_y son la velocidad y la aceleración *transversales* de puntos en la cuerda; estos puntos se mueven en la dirección y, no en la dirección de propagación de la onda.

15.10 *a*) Otra vista de la onda en $t = 0$ de la figura 15.9*a*. Los vectores muestran la velocidad transversal v_y y la aceleración transversal a_y en varios puntos de la cuerda. *b*) Desde $t = 0$ hasta $t = 0.05T$, una partícula en el punto 1 se desplaza al punto 1′, una partícula en el punto 2 se desplaza al punto 2′, y así sucesivamente.



- La aceleración a_y en cada punto de la cuerda es proporcional al desplazamiento y en ese punto.
- La aceleración es hacia arriba donde la cuerda tiene curvatura hacia arriba, y hacia abajo donde la cuerda tiene curvatura hacia abajo.

Los movimientos transversales de varios puntos de la cuerda se observan en la figura 15.10*b*.

El concepto de función de onda es igualmente útil para las ondas *longitudinales*. La cantidad y sigue midiendo el desplazamiento de una partícula del medio con respecto a su posición de equilibrio; la diferencia es que, para una onda longitudinal, el desplazamiento es *paralelo* al eje x en lugar de perpendicular a él. Veremos las ondas longitudinales con detalle en el capítulo 16.

Evalúe su comprensión de la sección 15.3 La figura 15.8 muestra una onda sinusoidal de periodo T en una cuerda en los instantes $0, \frac{1}{8}T, \frac{2}{8}T, \frac{3}{8}T, \frac{4}{8}T, \frac{5}{8}T, \frac{6}{8}T, \frac{7}{8}T$ y T. *a*) ¿En qué instante el punto A de la cuerda se mueve hacia arriba con rapidez máxima? *b*) ¿En qué instante el punto B de la cuerda tiene la máxima aceleración hacia arriba? *c*) ¿En qué instante el punto C de la cuerda tiene aceleración hacia abajo, pero velocidad hacia arriba? ❙



MasteringPHYSICS

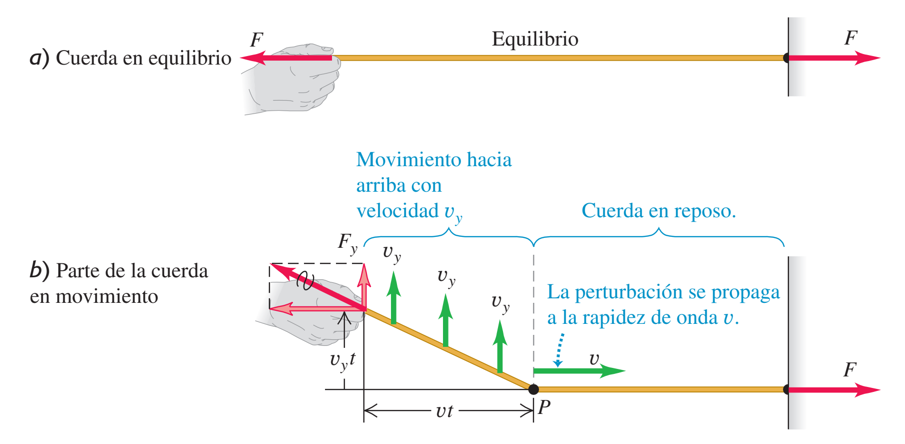
ActivPhysics 10.2: Speed of Waves on a String

15.4 Rapidez de una onda transversal

Una de las propiedades clave de cualquier onda es su *rapidez*. Las ondas de luz en el aire tienen una rapidez de propagación mucho mayor que las del sonido (3.00×10^8 m/s contra 344 m/s); por eso vemos el destello de un relámpago antes de escuchar el trueno. En esta sección veremos qué determina la rapidez de propagación de un tipo de onda específico: las ondas transversales en una cuerda. Es importante entender la rapidez de estas ondas porque es una parte fundamental del análisis de los instrumentos musicales de cuerda, como veremos más adelante en este capítulo. Asimismo, la rapidez de muchos tipos de ondas mecánicas tiene la misma expresión matemática básica de la rapidez de onda en una cuerda.

Las cantidades físicas que determinan la rapidez de las ondas transversales en una cuerda son la *tensión* de la cuerda y su *masa por unidad de longitud* (también llamada *densidad de masa lineal*). Podríamos suponer que aumentar la tensión debería aumentar las fuerzas de restitución que tienden a alinear la cuerda cuando se le perturba, aumentando así la rapidez de la onda. También supondríamos que aumentar la masa haría el movimiento más lento, reduciendo la rapidez. Resulta que ambas ideas son correctas. Desarrollaremos la relación exacta entre rapidez de onda, tensión y masa por unidad de longitud usando dos métodos distintos. El primero es conceptualmente sencillo y considera una forma de onda específica; el segundo es más general y también más académico. Seleccione el que más le guste.

15.11 Propagación de una onda transversal en una cuerda.



Rapidez de onda en una cuerda: primer método

Consideremos una cuerda perfectamente flexible (figura 15.11). En la posición de equilibrio, la tensión es F y la densidad lineal de masa (masa por unidad de longitud) es μ. (Cuando partes de la cuerda se desplazan con respecto al equilibrio, la masa por unidad de longitud disminuye un poco y la tensión aumenta un poco). Despreciamos el peso de la cuerda, de modo que cuando la cuerda está en reposo en la posición de equilibrio forma una línea perfectamente recta como en la figura 15.11*a*.

Comenzando en el instante $t = 0$, aplicamos una fuerza constante hacia arriba F_y al extremo izquierdo de la cuerda. Esperaríamos que el extremo se moviera con aceleración constante; eso sucedería si la fuerza se aplicara a una masa *puntual*. Pero aquí, el efecto de la fuerza F_y es poner sucesivamente cada vez más masa en movimiento. La onda viaja con rapidez constante v, así que el punto de división P entre las partes en movimiento y estáticas se mueve con la misma rapidez constante v (figura 15.11*b*).

La figura 15.11*b* muestra que todas las partículas de la parte en movimiento de la cuerda se mueven hacia arriba con *velocidad* constante v_y, pero no con aceleración constante. Para entender esto, observamos que el *impulso* de la fuerza F_y hasta el instante t es $F_y t$. Según el teorema del impulso y momento lineal (sección 8.1), el impulso es igual al cambio en la componente transversal total del momento lineal $(mv_y - 0)$ de la parte en movimiento de la cuerda. Como el sistema inició *sin* momento lineal transversal, esto es igual al momento lineal total en el instante t:

$$F_y t = mv_y$$

Así, el momento lineal total debe aumentar proporcionalmente con el tiempo. Sin embargo, dado que el punto de división P se mueve con rapidez constante, la longitud de la cuerda que está en movimiento y, por lo tanto, la masa total m en movimiento, también son proporcionales al tiempo t durante el cual la fuerza ha estado actuando. De esta manera, el *cambio* de momento lineal debe estar asociado únicamente a la cantidad creciente de masa en movimiento, no a una velocidad creciente de un elemento de masa individual. Es decir, mv_y cambia porque m cambia, no porque v_y cambie.

En el instante t, el extremo izquierdo de la cuerda ha subido una distancia $v_y t$ y el punto de frontera P ha avanzado una distancia vt. La fuerza total en el extremo izquierdo de la cuerda tiene componentes F y F_y. ¿Por qué F? No hay movimiento en la dirección a lo largo de la cuerda, así que no hay ninguna fuerza horizontal desbalanceada. Por lo tanto F, la magnitud de la componente horizontal, no cambia cuando la cuerda se desplaza. En la posición desplazada, la tensión es $(F^2 + F_y^2)^{1/2}$ (mayor que F), y la cuerda se estira un poco.

Para deducir una expresión para la rapidez de onda v, aplicamos otra vez el teorema del impulso y momento lineal a la parte en movimiento de la cuerda en el instante t, es decir, la parte a la izquierda de P en la figura 15.11*b*. El *impulso* transversal (fuerza transversal multiplicada por el tiempo) es igual al cambio de *momento lineal* transversal

de la parte en movimiento (masa multiplicada por la componente transversal de velocidad). El impulso de la fuerza transversal F_y en el instante t es $F_y t$. En la figura 15.11*b*, el triángulo rectángulo cuyo vértice está en P, con catetos $v_y t$ y vt, es semejante al triángulo rectángulo cuyo vértice está en la posición de la mano, con catetos F_y y F. Entonces,

$$\frac{F_y}{F} = \frac{v_y t}{vt} \qquad F_y = F\frac{v_y}{v}$$

e

$$\text{Impulso transversal} = F_y t = F\frac{v_y}{v}t$$

15.12 Estos cables tienen una cantidad relativamente grande de masa por unidad de longitud (μ) y una tensión (F) baja. Si los cables experimentan una perturbación (como cuando se posa una ave), viajarán ondas transversales en ellos con una rapidez pequeña $v = \sqrt{F/\mu}$.



La masa de la parte en movimiento de la cuerda es el producto de la masa por unidad de longitud μ y la longitud vt, es decir, μvt. El momento lineal transversal es el producto de esta masa y la velocidad transversal v_y:

$$\text{Momento lineal transversal} = (\mu vt)v_y$$

Observamos una vez más que el momento lineal aumenta con el tiempo, *no* porque la masa se mueva con mayor rapidez, como solía suceder en el capítulo 8, sino porque *más masa* se pone en movimiento. No obstante, el impulso de la fuerza F_y sigue siendo igual al cambio total en el momento lineal del sistema. Aplicando esta relación,

$$F\frac{v_y}{v}t = \mu vtv_y$$

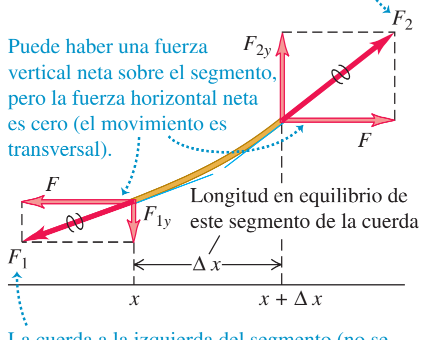
Despejando v,

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \text{(rapidez de una onda transversal en una cuerda)} \qquad (15.13)$$

La ecuación (15.13) confirma nuestra predicción de que la rapidez de onda v debería aumentar al incrementarse la tensión F, pero disminuir cuando la masa por unidad de longitud μ aumenta (figura 15.12).

Observe que v_y no aparece en la ecuación (15.13); por lo tanto, la rapidez de la onda no depende de v_y. Nuestro cálculo tomó en cuenta únicamente un tipo muy especial de pulso, pero podemos considerar *cualquier* forma de perturbación ondulatoria como una serie de pulsos con diferentes valores de v_y. Así, aunque dedujimos la ecuación (15.13) para un caso especial, es válida para *cualquier* movimiento ondulatorio transversal en una cuerda, incluidas la onda sinusoidal y otras ondas periódicas que vimos en la sección 15.3. Observe también que la rapidez de onda no depende de la amplitud ni la frecuencia de la onda, de acuerdo con nuestros supuestos de la sección 15.3.

15.13 Diagrama de cuerpo libre de un segmento de cuerda. La fuerza en cada extremo de la cuerda es tangente a la cuerda en el punto de aplicación.



Rapidez de onda en una cuerda: segundo método

Veamos una deducción alterna de la ecuación (15.13). Si el lector no maneja con confianza las derivadas parciales, puede omitirlas. Aplicamos la segunda ley de Newton, $\sum\vec{F} = m\vec{a}$, a un pequeño segmento de cuerda, cuya longitud en la posición de equilibrio es Δx (figura 15.13). La masa del segmento es $m = \mu\,\Delta x$; las fuerzas en los extremos se representan en términos de sus componentes x y y. Las componentes x tienen magnitud F igual y su suma es cero, porque el movimiento es transversal y no hay componente de aceleración en la dirección x. Para obtener F_{1y} y F_{2y}, observamos que el cociente F_{1y}/F es igual en magnitud a la *pendiente* de la cuerda en el punto x y que F_{2y}/F es igual a la pendiente en el punto $x + \Delta x$. Teniendo cuidado con los signos, vemos que

$$\frac{F_{1y}}{F} = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x \qquad \frac{F_{2y}}{F} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} \qquad (15.14)$$

La notación nos recuerda que las derivadas se evalúan en los puntos x y $x + \Delta x$, respectivamente. Por la ecuación (15.14), vemos que la componente y de fuerza neta es

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] \tag{15.15}$$

Ahora igualamos F_y de la ecuación (15.15) a la masa $\mu\,\Delta x$ multiplicada por la componente y de aceleración, $\partial^2 y/\partial t^2$. Obtenemos

$$F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] = \mu\,\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.16}$$

o bien, dividiendo entre $F\Delta x$,

$$\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x}{\Delta x} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.17}$$

Ahora tomamos el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$. En este límite, el lado izquierdo de la ecuación (15.17) se convierte en la derivada de $\partial y/\partial x$ con respecto a x (con t constante), es decir, la *segunda* derivada (parcial) de y con respecto a x:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.18}$$

Por fin llegamos al desenlace de nuestra historia. La ecuación (15.18) tiene exactamente la misma forma que la *ecuación de onda*, ecuación (15.12), que dedujimos al final de la sección 15.3. Esa ecuación y la (15.18) describen el mismo movimiento, así que deben ser idénticas. Si comparamos las dos ecuaciones, vemos que, para que suceda así, debemos tener

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{15.19}$$

que es la misma expresión de la ecuación (15.13).

En esta deducción no hicimos supuestos especiales acerca de la forma de la onda. Puesto que nuestra deducción nos llevó a redescubrir la ecuación (15.12), la ecuación de onda, concluimos que la ecuación de onda es válida para las ondas en una cuerda, que tienen *cualquier* forma.

Rapidez de las ondas mecánicas

La ecuación (15.13) o la (15.19) da la rapidez de onda únicamente para el caso especial de las ondas mecánicas en un alambre o una cuerda estirados. Curiosamente, para muchos tipos de ondas mecánicas, incluidas las ondas en una cuerda, la expresión para la rapidez de la onda tiene la misma forma general:

$$v = \sqrt{\frac{\text{Fuerza de restitución que vuelve el sistema al equililbrio}}{\text{Inercia que se opone a volver al equilibrio}}}$$

Para interpretar esta expresión, examinemos una vez más el caso, ahora conocido, de ondas en una cuerda. La tensión F en la cuerda desempeña el papel de la fuerza de restitución; tiende a hacer que la cuerda vuelva a su configuración de equilibrio: sin perturbación. La masa de la cuerda, o mejor dicho, la densidad lineal de masa μ, proporciona la inercia que se opone a que la cuerda regrese instantáneamente al equilibrio. Por lo tanto, tenemos que $v = \sqrt{F/\mu}$ para la rapidez de ondas en una cuerda.

En el capítulo 16 veremos una expresión similar para la rapidez de las ondas sonoras en un gas. A grandes rasgos, la presión del gas proporciona la fuerza que tiende a volver al gas a su estado no perturbado, después de que una onda sonora pasa por él. La inercia proviene de la densidad, o masa por unidad de volumen, del gas.



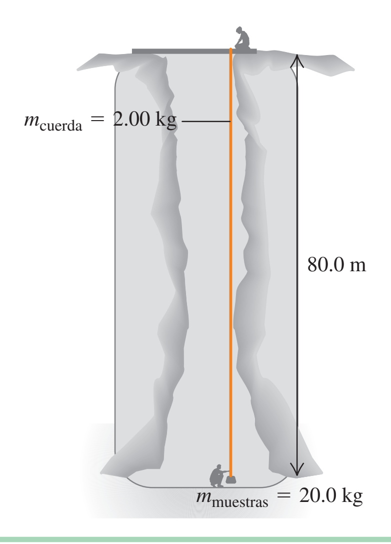
Ejemplo 15.3 Cálculo de la rapidez de onda

El extremo de una cuerda de 2.00 kg está atado a un soporte en la parte superior del tiro de una mina vertical de 80.0 m de profundidad (figura 15.14). La cuerda está tensada por una caja de rocas de 20.0 kg sujeta al extremo inferior. *a*) El geólogo que está en la parte inferior envía señales a su colega de arriba tirando lateralmente de la cuerda. Calcule la rapidez de una onda transversal en la cuerda. *b*) Si un punto de la cuerda tiene movimiento armónico simple transversal con $f = 2.00$ Hz, ¿cuántos ciclos de la onda hay en la longitud de la cuerda?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En el inciso *a*), se puede obtener la rapidez de la onda (la incógnita) mediante la relación de *dinámica* $v = \sqrt{F/\mu}$ [ecuación (15.13)]. En el inciso *b*) calculamos la longitud de onda a partir de la relación *cinemática* $v = f\lambda$, con lo cual obtenemos la incógnita, el número de longitudes de onda que caben en la longitud de 80.0 m de la cuerda. Supondremos que la cuerda no tiene masa (aun cuando su peso es del 10% del de la caja), de modo que únicamente la caja produce tensión en la cuerda.

15.14 Envío de señales mediante ondas transversales en una cuerda vertical.



EJECUTAR: *a*) La tensión en la cuerda debida a la caja es:

$$F = m_{\text{caja}}g = (20.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 196\ \text{N}$$

y la densidad lineal de masa de la cuerda es

$$\mu = \frac{m_{\text{cuerda}}}{L} = \frac{2.00\ \text{kg}}{80.0\ \text{m}} = 0.0250\ \text{kg/m}$$

Entonces, por la ecuación (15.13), la rapidez de la onda es:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{196\ \text{N}}{0.0250\ \text{kg/m}}} = 88.5\ \text{m/s}$$

b) Por la ecuación (15.1), la longitud de onda es

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{88.5\ \text{m/s}}{2.00\ \text{s}^{-1}} = 44.3\ \text{m}$$

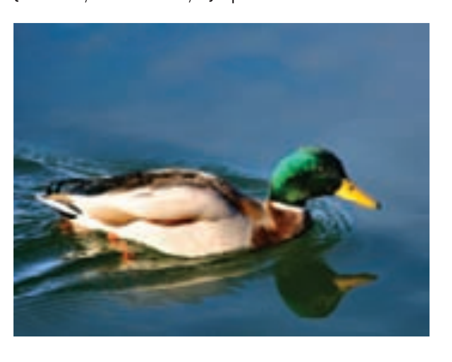
Hay (80.0 m)/(44.3 m) = 1.81 longitudes de onda (es decir, ciclos de la onda) en la cuerda.

EVALUAR: Debido al peso de la cuerda, la tensión es mayor en la parte superior de la cuerda que en la parte inferior. Por consiguiente, tanto la rapidez de la onda como la longitud de onda aumentan conforme la onda sube por la cuerda. Si toma en cuenta esto, ¿puede comprobar que la rapidez de la onda al llegar a la parte superior sea de 92.9 m/s?

Evalúe su comprensión de la sección 15.4 Las seis cuerdas de una guitarra tienen la misma longitud y están sometidas a una tensión muy similar, pero tienen diferente espesor. ¿En qué cuerda viajan con mayor rapidez las ondas? **i.** en la cuerda más gruesa; **ii.** en la cuerda más delgada; **iii.** la rapidez de onda es la misma en todas las cuerdas.



Aplicación Ondas superficiales y rapidez de nado de los patos
Cuando un pato nada, produce ondas en la superficie del agua. Cuanto más rápido nada el pato, más grande será la amplitud de las ondas y más energía debe utilizar el pato para producir tales ondas. La potencia máxima de los músculos de las patas limita la rapidez máxima de nado del pato a tan solo 0.7 m/s (2.5 km/h = 1.6 mi/h) aproximadamente.



15.5 Energía del movimiento ondulatorio

Todo movimiento ondulatorio tiene *energía* asociada a él. La energía que recibimos del Sol y los efectos destructivos del oleaje y los terremotos lo atestiguan. Para generar cualquiera de los movimientos ondulatorios que hemos visto en este capítulo, necesitamos aplicar una fuerza a una parte del medio de la onda; el punto de aplicación se mueve, así que efectuamos *trabajo* sobre el sistema. Al propagarse la onda, cada parte del medio ejerce una fuerza y realiza trabajo sobre la porción adyacente. De este modo, una onda transporta energía de una región del espacio a otra.

Como ejemplo de las consideraciones de energía en el movimiento ondulatorio, examinemos otra vez las ondas transversales en una cuerda. ¿Cómo se transfiere energía de una parte de la cuerda a otra? Imagine una onda que viaja de izquierda a derecha (dirección $+x$) y considere un punto *a* específico de la cuerda (figura 15.15*a*). La cuerda a la izquierda de *a* ejerce una fuerza sobre la cuerda a la derecha de *a*, y viceversa. En la figura 15.15*b*, se ha eliminado la cuerda a la izquierda de *a*, y la fuerza que ejerce en *a* se representa con las componentes F y F_y, como en las figuras 15.11 y 15.13.

Observamos de nuevo que F_y/F es igual al negativo de la *pendiente* de la cuerda en a, que también está dada por $\partial y/\partial x$. Juntando esto, tenemos

$$F_y(x, t) = -F\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \tag{15.20}$$

Necesitamos el signo negativo porque F_y es negativa cuando la pendiente es positiva. Escribimos la fuerza vertical como $F_y(x, t)$ para recordar que su valor puede variar en diferentes puntos de la cuerda y con el tiempo.

Cuando el punto a se mueve en la dirección y, la fuerza F_y efectúa *trabajo* sobre este punto y, por lo tanto, transfiere energía a la parte de la cuerda que está a la derecha de a. La potencia correspondiente P (rapidez con que se efectúa trabajo) en el punto a es la fuerza transversal $F_y(x, t)$ en a multiplicada por la velocidad transversal $v_y(x, t) = \partial y(x, t)/\partial t$ de ese punto:

$$P(x, t) = F_y(x, t)v_y(x, t) = -F\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \tag{15.21}$$

Esta potencia es la razón *instantánea* con que se transfiere energía a lo largo de la cuerda; su valor depende de la posición x en la cuerda y del tiempo t. Observe que tan solo se transfiere energía en los puntos donde la cuerda tiene pendiente distinta de cero ($\partial y/\partial x$ es diferente de cero), de modo que hay una componente transversal de la fuerza de tensión, y donde la cuerda tiene velocidad transversal distinta de cero ($\partial y/\partial t$ es diferente de cero), de modo que la fuerza transversal realiza trabajo.

La ecuación (15.21) es válida para *cualquier* onda en una cuerda, sea sinusoidal o no. Para una onda sinusoidal con función de onda dada por la ecuación (15.7),

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A\cos(kx - \omega t) \\ \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} &= -kA\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \\ \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} &= \omega A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \\ P(x, t) &= Fk\omega A^2\,\mathrm{sen}^2(kx - \omega t) \end{aligned} \tag{15.22}$$

Usando las relaciones $\omega = vk$ y $v^2 = F/\mu$, también podemos expresar la ecuación (15.22) en la forma alterna

$$P(x, t) = \sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2\,\mathrm{sen}^2(kx - \omega t) \tag{15.23}$$

La función sen^2 nunca es negativa, así que la potencia instantánea en una onda sinusoidal también es positiva (con flujo de energía en la dirección $+x$), o bien, cero (en los puntos donde no hay transferencia de energía). Nunca se transfiere energía en la dirección opuesta a la dirección de propagación de la onda (figura 15.16).

El valor máximo de la potencia instantánea $P(x, t)$ se da cuando la función sen^2 es igual a la unidad:

$$P_{\text{máx}} = \sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2 \tag{15.24}$$

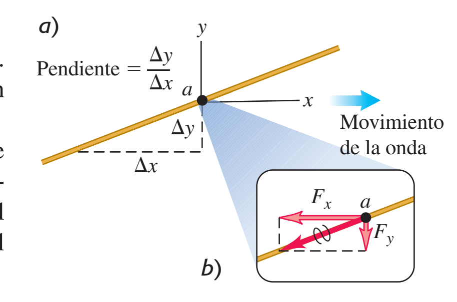
Para obtener la potencia *media* o *promedio* a partir de la ecuación (15.23), observamos que el valor *medio* de la función sen^2 en cualquier número entero de ciclos es $\frac{1}{2}$. Por consiguiente, la potencia media es

$$P_{\text{med}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2 \quad \text{(potencia media, onda sinusoidal en una cuerda)} \tag{15.25}$$

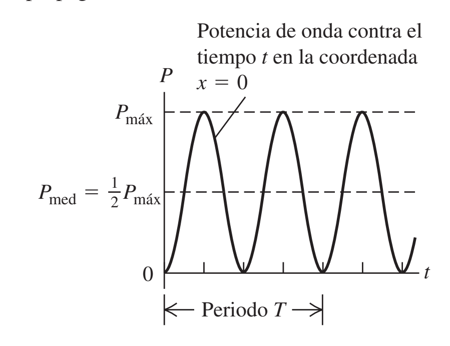
La potencia media es justamente la mitad de la potencia instantánea máxima (véase la figura 15.16).

La razón media de transferencia de energía es proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia. Esta proporcionalidad es un resultado general para ondas mecánicas de todo tipo, incluidas las ondas sísmicas (véase la fotografía inicial del capítulo). En el caso de una onda mecánica, la razón de transfe-

15.15 *a*) Punto *a* en una cuerda que lleva una onda de izquierda a derecha. *b*) Componentes de la fuerza ejercida sobre la parte derecha de la cuerda por la parte izquierda en el punto *a*.



15.16 La potencia instantánea $P(x, t)$ de una onda sinusoidal, dada por la ecuación (15.23), se muestra en función del tiempo en la coordenada $x = 0$. La potencia nunca es negativa, lo que implica que la energía nunca fluye en dirección opuesta a la de propagación de la onda.



rencia de energía se cuadruplica si la frecuencia se duplica (para la misma amplitud) o si la amplitud se duplica (para la misma frecuencia).

Las ondas electromagnéticas son un poco diferentes. Aunque la razón media de transferencia de energía en una onda electromagnética es proporcional al cuadrado de la amplitud, como sucede con las ondas mecánicas, es independiente del valor de ω.

Ejemplo 15.4 Potencia en una onda



a) En el ejemplos 15.2 (sección 15.3), ¿con qué rapidez máxima Morton aporta energía a la cuerda? Es decir, ¿cuál es su potencia instantánea máxima? La densidad lineal de masa de la cuerda es $\mu = 0.250$ kg/m y Morton aplica una tensión $F = 36.0$ N. *b*) ¿Cuál es su potencia media? *c*) Al cansarse Morton, la amplitud disminuye. Calcule la potencia media cuando la amplitud es de 7.50 mm.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La incógnita en el inciso *a*) es la potencia *instantánea máxima* $P_{máx}$, en tanto que en *b*) y en *c*) es la potencia *media*. En el inciso *a*) usaremos la ecuación (15.24); en *b*) y *c*), emplearemos la ecuación (15.25); el ejemplo 15.2 nos da todas las cantidades necesarias.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (15.24),

$$\begin{aligned} P_{máx} &= \sqrt{\mu F}\omega^2 A^2 \\ &= \sqrt{(0.250 \text{ kg/m})(36.0 \text{ N})}(4.00\pi \text{ rad/s})^2(0.075 \text{ m})^2 \\ &= 2.66 \text{ W} \end{aligned}$$

b) Por las ecuaciones (15.24) y (15.25), la potencia media es la mitad de la potencia instantánea máxima, así que

$$P_{med} = \tfrac{1}{2}P_{máx} = \tfrac{1}{2}(2.66 \text{ W}) = 1.33 \text{ W}$$

c) La nueva amplitud es $\frac{1}{10}$ del valor empleado en los incisos *a*) y *b*). Según la ecuación (15.25), la potencia media es proporcional a A^2, de modo que ahora es

$$P_{med} = \left(\tfrac{1}{10}\right)^2(1.33 \text{ W}) = 0.0133 \text{ W} = 13.3 \text{ mW}$$

EVALUAR: La ecuación (15.23) muestra que la $P_{máx}$ ocurre cuando $\text{sen}^2(kx - \omega t) = 1$. En cualquier valor de x, eso sucede dos veces durante cada periodo de la onda: una vez cuando la función seno es igual a $+1$ y otra vez cuando es igual a -1. La potencia instantánea *mínima* es cero; se da cuando $\text{sen}^2(kx - \omega t) = 0$, lo cual también sucede dos veces por periodo.

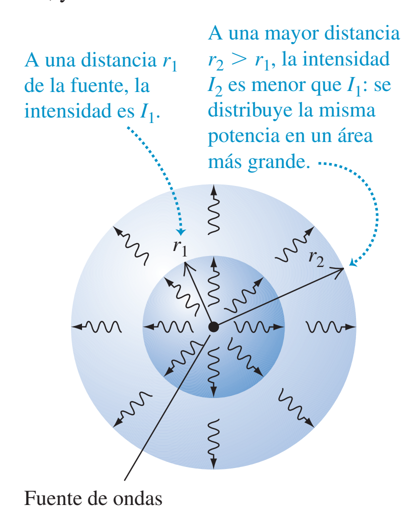
¿Puede usted confirmar que los valores dados de μ y F dan la rapidez de onda mencionada en el ejemplo 15.2?

Intensidad de las ondas

Las ondas en una cuerda transfieren energía en una sola dimensión del espacio (a lo largo de la cuerda). Sin embargo, otros tipos de ondas, como las ondas sonoras en el aire y las ondas sísmicas en la Tierra, transportan energía en las tres dimensiones espaciales. Para ondas que viajan en tres dimensiones, definimos su **intensidad** (denotada con I) como *la rapidez media con que la onda transporta energía, por unidad de área*, a través de una superficie perpendicular a la dirección de propagación. Es decir, la intensidad I es la potencia media por unidad de área. Por lo regular, se mide en watts por metro cuadrado (W/m^2).

Si las ondas se propagan igualmente en todas direcciones a partir de una fuente, la intensidad a una distancia r de la fuente es inversamente proporcional a r^2 (figura 15.17). Esto es consecuencia directa de la conservación de la energía. Si la potencia desarrollada por la fuente es P, entonces la intensidad media I_1 en una esfera con radio r_1 y superficie $4\pi r_1^2$ es

15.17 Cuanto mayor sea la distancia desde la fuente de una onda, mayor será el área sobre la cual se distribuye la potencia de la onda, y menor será la intensidad de la onda.



$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2}$$

La intensidad media I_2 en una esfera con diferente radio r_2 está dada por una expresión similar. Si no se absorbe energía entre las dos esferas, la potencia P deberá ser la misma en ambas, así que

$$4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad \text{(ley del cuadrado inverso de la intensidad)} \qquad (15.26)$$

Por lo tanto, la intensidad I a cualquier distancia r es inversamente proporcional a r^2. Esta relación se denomina *ley del cuadrado inverso* para la intensidad.

Ejemplo 15.5 La ley del cuadrado inverso

La alarma en un poste alto irradia ondas sonoras uniformemente en todas direcciones. A una distancia de 15.0 m, la intensidad del sonido es de 0.250 W/m^2. ¿A qué distancia de la sirena la intensidad es de 0.010 W/m^2?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Puesto que el sonido es radiado uniformemente en todas direcciones, podemos usar la ley del cuadrado inverso, ecuación (15.26). En $r_1 = 15.0$ m la intensidad es $I_1 = 0.250$ W/m^2 y la incógnita es la distancia r_2 a la cual la intensidad es $I_2 = 0.010$ W/m^2.

EJECUTAR: Despejamos r_2 de la ecuación (15.26):

$$r_2 = r_1\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = (15.0\ \text{m})\sqrt{\frac{0.250\ \text{W/m}^2}{0.010\ \text{W/m}^2}} = 75.0\ \text{m}$$

EVALUAR: Para comprobar nuestra respuesta, observamos que r_2 es cinco veces mayor que r_1. Por la ley del cuadrado inverso, la intensidad I_2 debería ser $1/5^2 = 1/25$ de la intensidad de I_1, y así es.

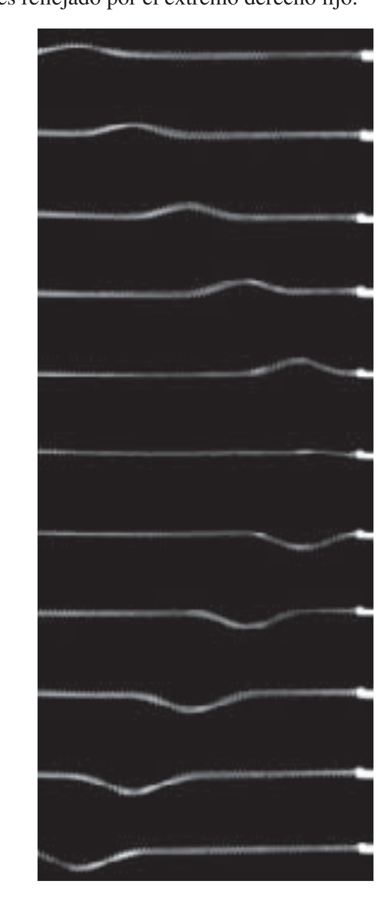
Al usar la ley del cuadrado inverso, hemos supuesto que las ondas sonoras viajan en línea recta desde la sirena. Una solución más realista, que está más allá de nuestro alcance, tomaría en cuenta la reflexión de las ondas sonoras en el suelo.

Evalúe su comprensión de la sección 15.5 Cada una de cuatro cuerdas idénticas transporta una onda sinusoidal con una frecuencia de 10 Hz. La tensión de la cuerda y la amplitud de onda son diferentes para diferentes cuerdas. Ordene de mayor a menor los valores de la potencia media de la onda en las siguientes cuerdas: **i.** tensión 10 N, amplitud 1.0 mm; **ii.** tensión 40 N, amplitud 1.0 mm; **iii.** tensión 10 N, amplitud 4.0 mm; **iv.** tensión 20 N, amplitud 2.0 mm.

15.6 Interferencia de ondas, condiciones de frontera y superposición

Hasta aquí, hemos hablado de ondas que se propagan continuamente en la misma dirección. Sin embargo, cuando una onda choca contra las fronteras de su medio, se *refleja* parcial o totalmente. Si gritamos hacia la pared de un edificio o de un acantilado que está a cierta distancia, la onda sonora se refleja en la superficie rígida, y escuchamos un eco. Si damos un impulso al extremo de una cuerda y el otro extremo está sujeto a un soporte rígido, una pulsación viajará a lo largo de la cuerda y se reflejará de regreso hacia nosotros. En ambos casos, la onda inicial y la reflejada se superponen en la misma región del medio. Esta superposición de ondas se denomina **interferencia**. (En general, el término "interferencia" se refiere a lo que sucede cuando dos o más ondas pasan por la misma región al mismo tiempo).

15.18 Serie de imágenes de un pulso de onda, tomadas a intervalos iguales de arriba abajo. El pulso comienza a la izquierda en la imagen superior, viaja a la derecha, y es reflejado por el extremo derecho fijo.

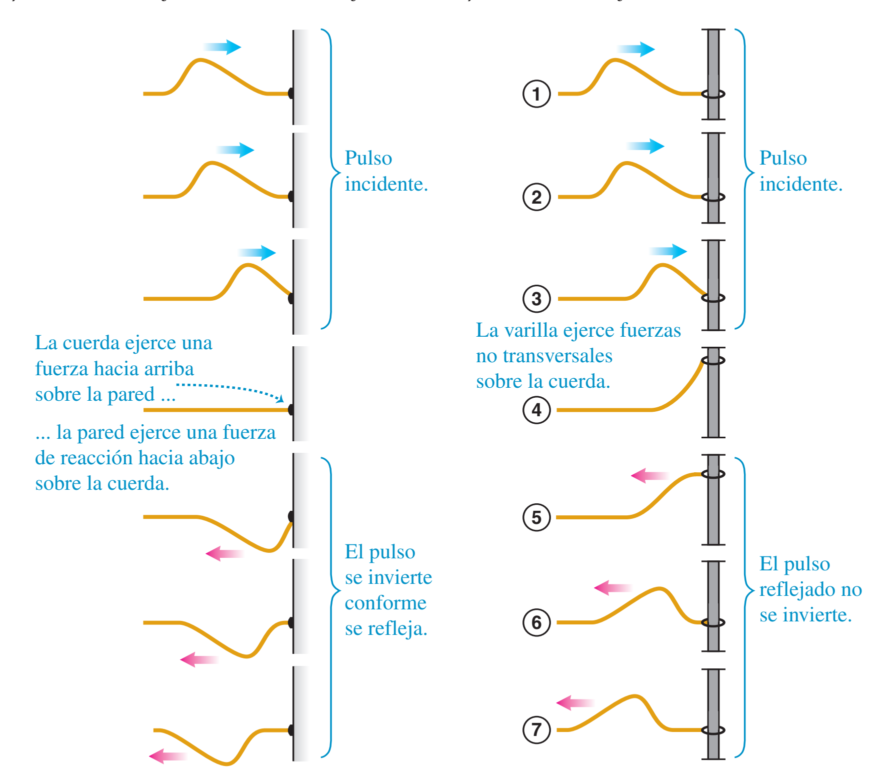


Como un ejemplo sencillo de reflexión de ondas y el papel de la frontera del medio de la onda, examinemos otra vez las ondas transversales en una cuerda estirada. ¿Qué sucede cuando un pulso de onda o una onda sinusoidal llegan al *extremo* de la cuerda?

Si el extremo está sujeto a un soporte rígido, es un extremo *fijo* que no puede moverse. La onda incidente ejerce una fuerza sobre el soporte; la reacción a esta fuerza, ejercida *por* el soporte *sobre* la cuerda, "regresa" sobre la cuerda y crea una pulsación u onda *reflejada* que viaja en la dirección opuesta. La figura 15.18 presenta una serie de fotografías que muestran la reflexión de un pulso en el extremo fijo de un resorte espiral largo. El pulso reflejado se mueve en la dirección opuesta a la del pulso inicial, o *incidente*, y su desplazamiento también es opuesto. En la figura 15.19*a* se ilustra esta situación para un pulso ondulatorio en una cuerda.

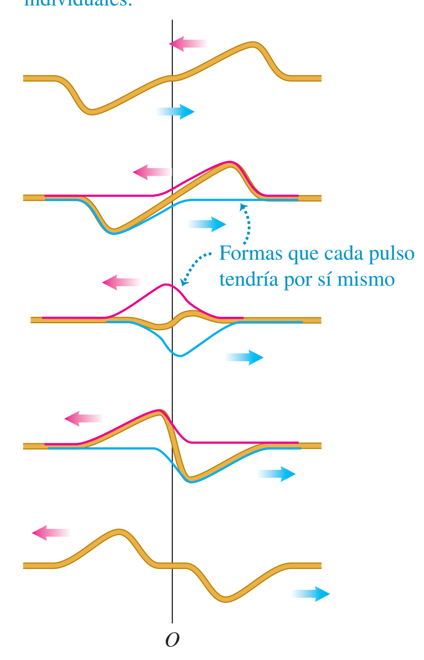
La situación opuesta a un extremo fijo es un extremo *libre* que puede moverse sin resistencia en la dirección perpendicular a la longitud de la cuerda. Por ejemplo, la cuerda podría estar atada a un anillo ligero que se desliza sin fricción en una varilla perpendicular a la cuerda, como en la figura 15.19*b*. El anillo y la varilla mantienen la tensión pero no ejercen una fuerza transversal. Cuando una onda llega a este extremo libre, el anillo se desliza a lo largo de la varilla. El anillo alcanza un desplazamiento máximo y tanto él como la cuerda se detienen momentáneamente, como en el caso 4 de la figura 15.19*b*. La cuerda ahora está estirada, aumentando la tensión, así que el extremo libre de la cuerda es llevado otra vez hacia abajo, produciéndose nuevamente





15.19 Reflexión de un pulso de onda *a*) en un extremo fijo de una cuerda y *b*) en un extremo libre. El tiempo aumenta hacia abajo en cada figura.

15.20 Superposición de dos pulsos de onda (uno hacia arriba, el otro invertido) que viajan en direcciones opuestas. El tiempo aumenta hacia abajo.



un pulso reflejado (caso 7). Como en la situación del extremo fijo, el pulso reflejado se mueve en dirección opuesta a la del pulso inicial, pero ahora la dirección del desplazamiento es la misma que en el pulso inicial. Las condiciones en el extremo de la cuerda, como un soporte rígido o la ausencia total de fuerza transversal, se denominan **condiciones de frontera**.

La formación del pulso reflejado es similar a la superposición de dos pulsos que viajan en direcciones opuestas. La figura 15.20 muestra dos pulsos con la misma forma, una invertida con respecto a la otra, que viajan en direcciones opuestas. Al superponerse los pulsos y pasarse mutuamente, el desplazamiento total de la cuerda es la *suma algebraica* de los desplazamientos en ese punto de los pulsos individuales. Puesto que estos dos pulsos tienen la misma forma, el desplazamiento total en el punto O a la mitad de la figura es cero en todo momento. Así, el movimiento de la mitad izquierda de la cuerda sería el mismo si cortáramos la cuerda en el punto O, desecháramos el lado derecho, y sostuviéramos el extremo en O fijo. Así, los dos pulsos del lado izquierdo corresponden a los pulsos incidente y reflejado, combinándose de modo que el desplazamiento total en O *siempre* es cero. Para que esto ocurra, el pulso reflejado debe estar invertido en relación con el pulso incidente.

La figura 15.21 muestra dos pulsos con la misma forma, que viajan en direcciones opuestas pero *no* invertidas entre sí. El desplazamiento en el punto O a la mitad de la figura no es cero, pero la pendiente de la cuerda en este punto siempre es cero. Según la ecuación (15.20), esto corresponde a la ausencia de fuerza transversal en este punto. Entonces, el movimiento de la mitad izquierda de la cuerda sería el mismo si cortáramos la cuerda en O y ancláramos el extremo con un anillo deslizante sin fricción (figura 15.19*b*) que mantiene la tensión sin ejercer fuerza transversal. En otras palabras, esta situación corresponde a la reflexión de un pulso en un extremo libre de una cuerda en el punto O. En esta situación, *no* se invierte el pulso reflejado.

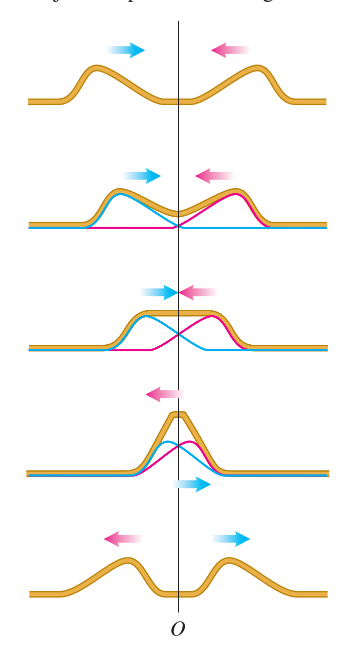
Principio de superposición

La combinación de los desplazamientos de los pulsos individuales en cada punto para obtener el desplazamiento real es un ejemplo del **principio de superposición**: cuando

dos ondas se superponen, el desplazamiento real de cualquier punto de la cuerda en cualquier instante se obtiene sumando el desplazamiento que tendría el punto si tan solo estuviera presente la primera onda, con el desplazamiento que tendría si únicamente estuviera presente la segunda. Dicho de otro modo, la función de onda $y(x, t)$ que describe el movimiento resultante en esta situación se obtiene *sumando* las dos funciones de onda de las ondas individuales.

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad \text{(principio de superposición)} \tag{15.27}$$

15.21 Superposición de dos pulsos de onda (ambos arriba de la cuerda) que viajan en direcciones opuestas. El tiempo aumenta hacia abajo. Compárelo con la figura 15.20.



Matemáticamente, esta propiedad aditiva es consecuencia de la forma de la ecuación de onda, ecuación (15.12) o (15.18), que debe satisfacer cualquier función de onda físicamente posible. En específico, la ecuación de onda es *lineal*; es decir, contiene la función $y(x,t)$ solo a la primera potencia (no hay términos en $y(x,t)^2$, $y(x,t)^{1/2}$, etcétera). Por lo tanto, si dos funciones cualesquiera $y_1(x,t)$ y $y_2(x,t)$ satisfacen por separado la ecuación de onda, su suma $y_1(x,t) + y_2(x,t)$ también la satisface y por ello es un movimiento físicamente posible. Como este principio depende de la linealidad de la ecuación de onda y la propiedad de combinación lineal correspondiente de sus soluciones, también se denomina *principio de superposición lineal*. En algunos sistemas físicos, como un medio que no obedece la ley de Hooke, la ecuación de onda *no* es lineal, y el principio no se cumple en estos sistemas.

El principio de superposición es muy importante para todo tipo de ondas. Si un amigo nos habla mientras escuchamos música, podemos distinguir el sonido de su voz del sonido de la música. Esto ocurre precisamente porque la onda sonora total que llega a nuestros oídos es la suma algebraica de la onda producida por la voz del amigo y la producida por los altavoces (bocinas) de su equipo modular. Si dos ondas sonoras *no* se combinaran de esta sencilla forma lineal, el sonido que oiríamos en esta situación sería una revoltura incomprensible. La superposición también se aplica a las ondas electromagnéticas (como la luz) y de muchos otros tipos.



Video Tutor Demo

Evalúe su comprensión de la sección 15.6 La figura 15.22 muestra dos pulsos de onda con diferente forma que viajan en direcciones opuestas por una cuerda. Haga una serie de dibujos como los de la figura 15.21 que muestren la forma de la cuerda al aproximarse, superponerse y pasarse los dos pulsos.

15.22 Dos pulsos de onda con diferente forma.

15.7 Ondas estacionarias en una cuerda

Hemos hablado de la reflexión de un *pulso* de onda en una cuerda cuando llega a una frontera (un extremo fijo o libre). Veamos ahora lo que sucede cuando una onda *sinusoidal* es reflejada por el extremo fijo de una cuerda. Otra vez enfocaremos el problema considerando la superposición de dos ondas que se propagan a través de la cuerda, una que representa la onda original o incidente, y otra que representa la onda reflejada en el extremo fijo.

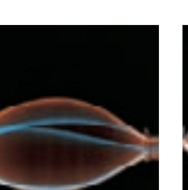
La figura 15.23 muestra una cuerda fija en su extremo izquierdo. El extremo derecho sube y baja con movimiento armónico simple para producir una onda que viaja a la izquierda; la onda reflejada del extremo fijo viaja a la derecha. El movimiento resultante cuando se combinan las dos ondas ya no se observa como dos ondas que viajan en direcciones opuestas. La cuerda parece subdividirse en varios segmentos, como en las exposiciones en diferentes tiempos de las figuras 15.23*a*, 15.23*b*, 15.23*c* y 15.23*d*. La figura 15.23*e* muestra dos formas instantáneas de la cuerda de la figura 15.23*b*. Comparemos este comportamiento con las ondas que estudiamos en las secciones 15.1 a 15.5. En una onda que viaja a través de la cuerda, la amplitud es constante y el patrón de la onda se mueve con rapidez igual a la rapidez de la onda. Aquí, en cambio, el patrón de la onda permanece en la misma posición a lo largo de la cuerda,

15.23 *a*) a *d*) Exposiciones sucesivas de ondas estacionarias en una cuerda estirada. De *a*) a *d*), aumenta la frecuencia de oscilación del extremo derecho, en tanto que disminuye la longitud de onda de la onda estacionaria. *e*) Los extremos del movimiento de la onda estacionaria de *b*), con nodos en el centro y en los extremos. El extremo derecho de la cuerda se mueve muy poco en comparación con los antinodos, así que es prácticamente un nodo.

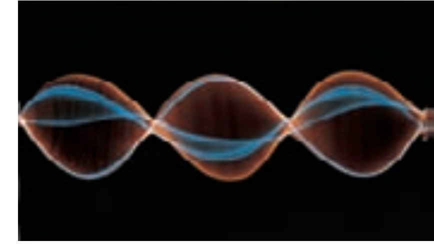
a) La cuerda tiene media longitud de onda.



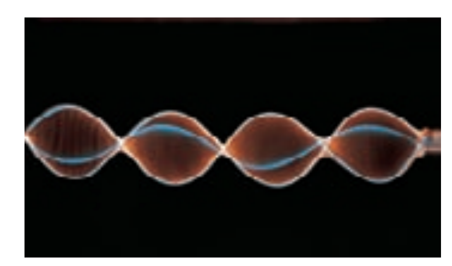
b) La cuerda es de una longitud de onda.



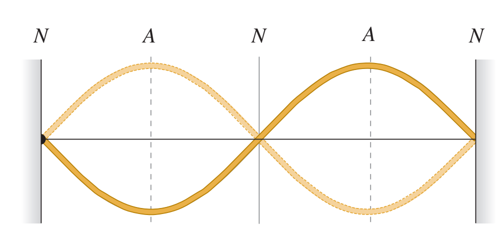
c) La cuerda es de una y media longitudes de onda.



d) La cuerda es de dos longitudes de onda.



e) La forma de la cuerda en *b*) en dos instantes diferentes.

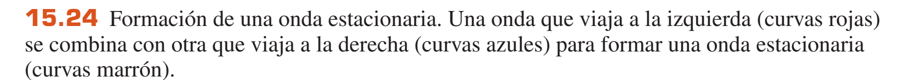


y su amplitud fluctúa. Existen ciertos puntos llamados **nodos** (identificados con N en la figura 15.23*e*) que nunca se mueven. A la mitad del camino entre los nodos hay puntos llamados **antinodos** (identificados con A en la figura 15.23*e*) donde la amplitud de movimiento es máxima. Dado que el patrón de onda no parece estarse moviendo a lo largo de la cuerda, se denomina **onda estacionaria**. (Para enfatizar la diferencia, una onda que *sí* se mueve por la cuerda es una **onda viajera**).

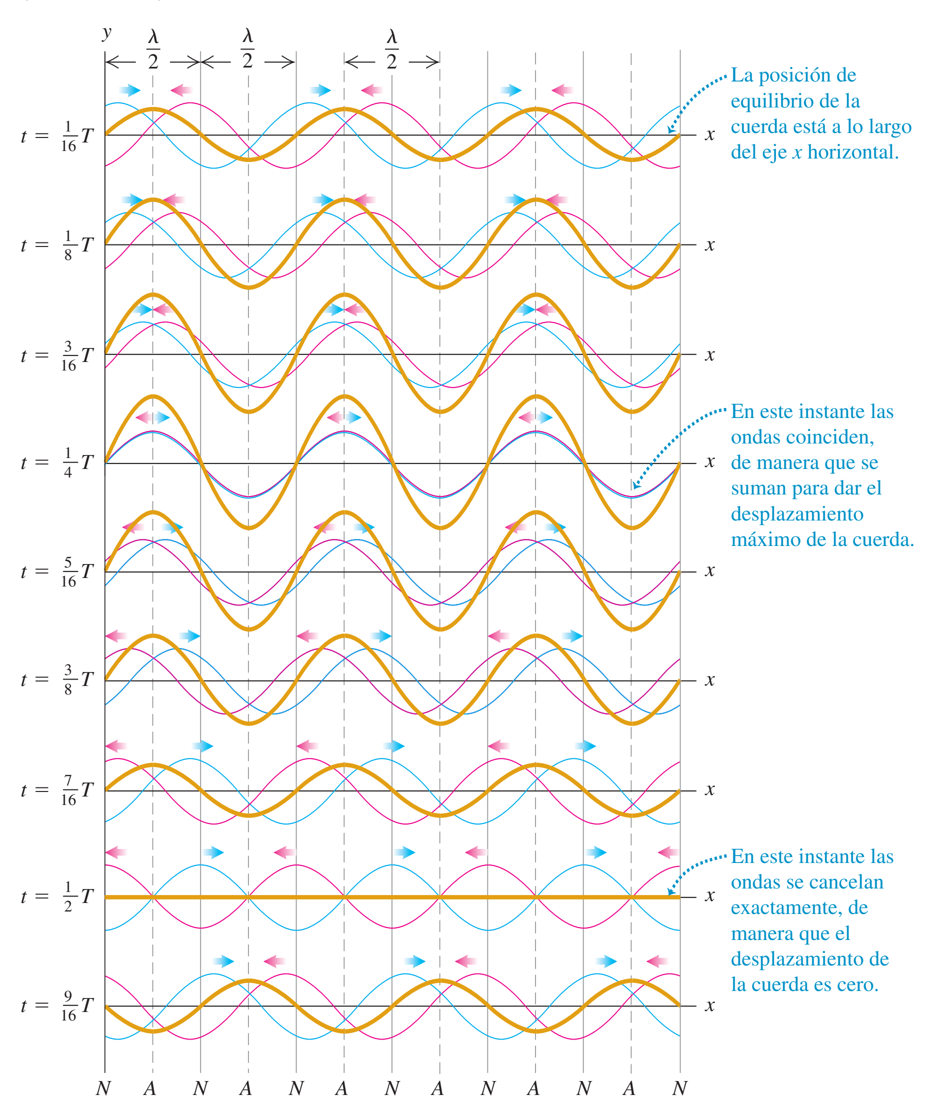
El principio de superposición explica cómo las ondas incidente y reflejada se combinan para formar una onda estacionaria. En la figura 15.24, las curvas rojas indican una onda que viaja a la izquierda. Las curvas azules muestran una onda que viaja a la derecha con la misma rapidez de propagación, longitud de onda y amplitud. Las ondas se muestran en nueve instantes, separados por $\frac{1}{16}$ de periodo. En cada punto de la cuerda, sumamos los desplazamientos (valores de y) para las dos ondas individuales; el resultado es la onda total en la cuerda, dibujada en color marrón.

En ciertos instantes, como $t = \frac{1}{4}T$, los dos patrones de onda están exactamente en fase entre sí, y la forma de la cuerda es una curva sinusoidal con el doble de amplitud de las ondas individuales. En otros instantes, como $t = \frac{1}{2}T$, las dos ondas están totalmente desfasadas y la onda total en ese instante es cero. El desplazamiento resultante *siempre* es cero en los lugares marcados con N en la parte inferior de la figura 15.24. Estos son los *nodos*, donde los desplazamientos de las dos ondas en rojo y azul siempre son iguales y opuestos, y se cancelan. Esta cancelación se llama **interferencia destructiva**. A la mitad del camino entre los nodos están los puntos de *máxima* amplitud o *antinodos*, marcados con A. En los antinodos, los desplazamientos de las dos ondas en rojo y azul siempre son idénticos, dando un desplazamiento resultante grande; este fenómeno se llama **interferencia constructiva**. Podemos ver en la figura que la distancia entre nodos o antinodos sucesivos es media longitud de onda, $\lambda/2$.

Podemos deducir una función de onda para la onda estacionaria de la figura 15.24, sumando las funciones de onda $y_1(x,t)$ y $y_2(x,t)$ de dos ondas con amplitud, periodo y longitud de onda iguales que viajan en direcciones opuestas. Aquí, $y_1(x,t)$ (las curvas rojas de la figura 15.24) representa una onda *incidente* que viaja a la izquierda por el



15.24 Formación de una onda estacionaria. Una onda que viaja a la izquierda (curvas rojas) se combina con otra que viaja a la derecha (curvas azules) para formar una onda estacionaria (curvas marrón).



eje $+x$, llegando al punto $x = 0$ y reflejándose; $y_2(x, t)$ (las curvas azules de la figura 15.24) representan la onda *reflejada* que viaja a la derecha desde $x = 0$. En la sección 15.6 señalamos que la onda reflejada del extremo fijo de una cuerda se invierte, así que anteponemos un signo negativo a una de las ondas:

$$y_1(x, t) = -A\cos(kx + \omega t) \qquad \text{(onda incidente que viaja a la izquierda)}$$

$$y_2(x, t) = A\cos(kx - \omega t) \qquad \text{(onda reflejada que viaja a la derecha)}$$

Observe también que el cambio de signo corresponde a un *desfasamiento* de 180° o π radianes. En $x = 0$, el movimiento de la onda reflejada es $A \cos \omega t$; y el de la incidente, $-A \cos \omega t$, que también podemos escribir como $A \cos(\omega t + \pi)$. Por la ecuación (15.27), la función de onda para la onda estacionaria es la suma de las funciones de onda individuales:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A[-\cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t)]$$

Podemos replantear los términos coseno usando las identidades para el coseno de la suma y la diferencia de dos ángulos: $\cos(a \mp b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$. Haciéndolo y

combinando términos, obtenemos la función de la onda estacionaria:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = (2A \operatorname{sen} kx) \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{o bien,}$$

$$y(x, t) = (A_{SW} \operatorname{sen} kx) \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{(onda estacionaria en una cuerda, extremo fijo en } x = 0) \qquad (15.28)$$

La amplitud de la onda estacionaria, A_{SW}, es dos veces la amplitud A de cualquiera de las ondas viajeras originales:

$$A_{SW} = 2A$$

La ecuación (15.28) tiene dos factores: una función de x y una de t. El factor A_{SW} sen kx indica que, en cada instante, la forma de la cuerda es una curva sinusoidal. No obstante, a diferencia de una onda que viaja por una cuerda, la forma de la onda permanece en la misma posición, oscilando verticalmente según el factor sen ωt. Este comportamiento se muestra gráficamente en las curvas de color marrón de la figura 15.24. Todos los puntos de la cuerda tienen movimiento armónico simple, pero todos los que están entre cualquier par sucesivo de nodos oscilan *en fase.* Esto contrasta con las diferencias de fase entre oscilaciones de puntos adyacentes, que vemos en las ondas que viajan en una dirección.

Podemos usar la ecuación (15.28) para determinar las posiciones de los nodos; estos son los puntos donde sen $kx = 0$, de modo que el desplazamiento *siempre* es cero. Esto sucede cuando $kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, es decir, usando $k = 2\pi/\lambda$,

$$\begin{aligned} x &= 0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \ldots \\ &= 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \ldots \end{aligned} \qquad \text{(nodos de una onda estacionaria en una cuerda, extremo fijo en } x = 0) \qquad (15.29)$$

En particular, hay un nodo en $x = 0$, como debería ser, ya que este punto es un extremo fijo de la cuerda.

A diferencia de una onda viajera, una onda estacionaria *no* transfiere energía de un extremo al otro. Las dos ondas que la forman transportarían individualmente cantidades iguales de energía en direcciones opuestas. Hay un flujo local de energía de cada nodo a los antinodos adyacentes, y de regreso; pero la razón *media* de transferencia de energía es cero en todos los puntos. Si se evalúa la potencia de onda dada por la ecuación (15.21) usando la función de onda de la ecuación (15.28), encontrará que la potencia media es cero.

Estrategia para resolver problemas 15.2 Ondas estacionarias



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Identifique las incógnitas. Luego, determine si el problema es únicamente *cinemático* (solo involucra cantidades como la rapidez de onda v, la longitud de onda λ y la frecuencia f) o incluye también propiedades *dinámicas* del medio (como F y μ para ondas transversales en una cuerda).

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Dibuje la forma de la onda estacionaria en un instante específico. Esto le ayudará a visualizar los nodos (identificados con N) y los antinodos (A). La distancia entre nodos (o antinodos) adyacentes es $\lambda/2$; y entre un nodo y el antinodo adyacente es $\lambda/4$.
2. Decida qué ecuaciones utilizará. La función de onda para la onda estacionaria casi siempre es útil, como la ecuación (15.28).
3. Se calcula la rapidez de onda si se conocen λ y f (o, lo que es equivalente, $k = 2\pi/\lambda$ y $\omega = 2\pi f$) o las propiedades importantes del medio (en el caso de una cuerda, F y μ).

EJECUTAR *la solución:* Despeje las incógnitas. Una vez que tenga la función de onda, podrá obtener el valor del desplazamiento y en cualquier punto x y en cualquier instante t. Se puede calcular la velocidad y aceleración de una partícula en el medio, obteniendo la primera y segunda derivadas parciales de y con respecto al tiempo.

EVALUAR *la respuesta:* Compare sus respuestas numéricas con su diagrama. Compruebe que la función de onda satisfaga las condiciones de frontera (por ejemplo, el desplazamiento debería ser cero en un extremo fijo).



Ejemplo 15.6 Ondas estacionarias en una cuerda de guitarra

La cuerda de una guitarra está en el eje x cuando está en equilibrio. El extremo en $x = 0$ (el puente de la guitarra) está fijo. Una onda sinusoidal de amplitud $A = 0.750$ mm $= 7.50 \times 10^{-4}$ m y frecuencia $f = 440$ Hz, correspondiente a las curvas rojas de la figura 15.24, viaja por la cuerda en la dirección $-x$ a 143.0 m/s. Esta onda se refleja del extremo fijo, y la superposición de las ondas incidente y reflejada forma una onda estacionaria. *a*) Determine la ecuación que da el desplazamiento de un punto de la cuerda en función de la posición y el tiempo. *b*) Ubique los nodos. *c*) Calcule la amplitud de la onda estacionaria, así como la velocidad y la aceleración transversales máximas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se trata de un problema de *cinemática* (véase la Estrategia para resolver problemas 15.1 de la sección 15.3). Las incógnitas son: en el inciso *a*), la función de onda de la onda estacionaria; en el inciso *b*), la ubicación de los nodos, y en el inciso *c*), el desplazamiento máximo y, la velocidad transversal v_y y la aceleración transversal a_y. Como hay un extremo fijo en $x = 0$, podemos usar las ecuaciones (15.28) y (15.29) para describir esta onda estacionaria. También usaremos las relaciones $\omega = 2\pi f$, $v = \omega/k$ y $v = \lambda f$.

EJECUTAR: *a*) La amplitud de la onda estacionaria es $A_{SW} = 2A = 1.50 \times 10^{-3}$ m (el doble de la amplitud de cualquiera de las ondas incidente o reflejada). La frecuencia angular y el número de onda

$$\omega = 2\pi f = (2\pi \text{ rad})(440 \text{ s}^{-1}) = 2760 \text{ rad/s}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2760 \text{ rad/s}}{143 \text{ m/s}} = 19.3 \text{ rad/m}$$

Entonces, la ecuación (15.28) da

$$\begin{aligned} y(x, t) &= (A_{SW} \operatorname{sen} kx) \operatorname{sen} \omega t \\ &= [(1.50 \times 10^{-3} \text{ m}) \operatorname{sen}(19.3 \text{ rad/m})x] \operatorname{sen}(2760 \text{ rad/s})t \end{aligned}$$

b) Según la ecuación (15.29), las posiciones de los nodos son $x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, \ldots$ La longitud de onda es $\lambda = v/f = (143 \text{ m/s})/(440 \text{ Hz}) = 0.325$ m, de modo que los nodos están en $x = 0$, 0.163 m, 0.325 m, 0.488 m, …

c) Según la expresión del inciso *a*) para $y(x, t)$, vemos que el desplazamiento máximo con respecto al equilibrio es $A_{SW} = 1.50 \times 10^{-3}$ m $= 1.50$ mm. Esto ocurre en los *antinodos*, que están a medio camino entre los nodos adyacentes (es decir, en $x = 0.081$ m, 0.244 m, 0.406 m, …).

Para una partícula de la cuerda en cualquier punto x, la velocidad transversal (en la dirección y) es

$$\begin{aligned} v_y(x, t) &= \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \\ &= [(1.50 \times 10^{-3} \text{ m}) \operatorname{sen}(19.3 \text{ rad/m})x] \\ &\quad \times [(2760 \text{ rad/s}) \cos(2760 \text{ rad/s})t] \\ &= [(4.15 \text{ m/s}) \operatorname{sen}(19.3 \text{ rad/m})x] \cos(2760 \text{ rad/s})t \end{aligned}$$

En un antinodo, $\operatorname{sen}(19.3 \text{ rad/m})x = \pm 1$ y el valor de la velocidad transversal varía entre +4.15 m/s y −4.15 m/s. Como sucede siempre en movimiento armónico simple, la velocidad máxima se da cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio ($y = 0$).

La aceleración transversal $a_y(x, t)$ es la *segunda* derivada parcial de $y(x, t)$ con respecto al tiempo. Usted puede demostrar que

$$\begin{aligned} a_y(x, t) &= \frac{\partial v_y(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \\ &= [(-1.15 \times 10^4 \text{ m/s}^2) \operatorname{sen}(19.3 \text{ rad/m})x] \\ &\quad \times \operatorname{sen}(2760 \text{ rad/s})t \end{aligned}$$

En los antinodos, la aceleración transversal varía entre $+1.15 \times 10^4$ m/s^2 y -1.15×10^4 m/s^2.

EVALUAR: La velocidad transversal máxima en un antinodo es muy respetable (unos 15 km/h o unas 9.3 mi/h); pero la aceleración transversal máxima es formidable: ¡1170 veces la aceleración debida a la gravedad! En realidad, las cuerdas de guitarra se fijan en *ambos* extremos. Veremos las consecuencias de esto en la sección siguiente.

Evalúe su comprensión de la sección 15.7 Suponga que se duplica la frecuencia de la onda estacionaria del ejemplo 15.6, de 440 a 880 Hz. ¿Todos los nodos con $f = 440$ Hz serían también nodos con $f = 880$ Hz? Si es así, ¿habría nodos adicionales con $f = 880$ Hz? Si no, ¿qué nodos están ausentes con $f = 880$ Hz?

15.8 Modos normales de una cuerda

MasteringPHYSICS®

PhET: Fourier: Making Waves
PhET: Waves on a String
ActivPhysics 10.4: Standing Waves on Strings
ActivPhysics 10.5: Tuning a Stringed Instrument: Standing Waves
ActivPhysics 10.6: String Mass and Standing Waves

Cuando describimos las ondas estacionarias en una cuerda sujeta rígidamente por un extremo, como en la figura 15.23, no hicimos suposiciones acerca de la longitud de la cuerda ni de lo que sucedía en el otro extremo. Consideremos ahora una cuerda de longitud definida L, sujeta rígidamente en *ambos* extremos. Este tipo de cuerdas se encuentran en muchos instrumentos musicales, como pianos, violines y guitarras. Cuando se pulsa una cuerda de guitarra, se produce una onda en ella; esta onda se refleja una y otra vez en los extremos de la cuerda, formando una onda estacionaria. Esta, a la vez, produce una onda sonora en el aire, cuya frecuencia está determinada por las propiedades de la cuerda. Es la causa de que los instrumentos de cuerda sean tan adecuados para hacer música.

Para entender estas propiedades de las ondas estacionarias en una cuerda fija en ambos extremos, veamos primero lo que sucede cuando se genera una onda sinusoidal en una cuerda así. La onda estacionaria que resulta tiene un nodo en *ambos* extremos de la cuerda. En la sección anterior, vimos que los nodos adyacentes están separados

media longitud de onda ($\lambda/2$), así que la longitud de la cuerda debe ser $\lambda/2$, o $2(\lambda/2)$, o $3(\lambda/2)$ o, en general, un número entero de medias longitudes de onda:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{(cuerda fija en ambos extremos)} \tag{15.30}$$

Esto es, si una cuerda de longitud L está fija en ambos extremos, solamente puede existir una onda estacionaria si su longitud de onda satisface la ecuación (15.30).

Despejando λ de esta ecuación y denotando los valores posibles de λ con λ_n, entonces,

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{(cuerda fija en ambos extremos)} \tag{15.31}$$

Pueden existir ondas en la cuerda si la longitud de onda *no* es igual a uno de estos valores; sin embargo, no puede haber un patrón de onda estacionaria con nodos y antinodos, y la onda total no puede ser estacionaria. Las ondas estacionarias de las figuras 15.23*a*, 15.23*b*, 15.23*c* y 15.23*d* ilustran la ecuación (15.31); estas representan $n = 1$, 2, 3 y 4, respectivamente.

15.25 Cada cuerda de un violín oscila naturalmente en una o más de sus frecuencias armónicas, produciendo en el aire ondas sonoras con las mismas frecuencias.



A la serie de posibles longitudes de onda estacionaria λ_n corresponde una serie de posibles frecuencias de onda estacionaria f_n, cada una relacionada con su longitud de onda correspondiente por $f_n = v/\lambda_n$. La frecuencia f_1 más pequeña corresponde a la longitud de onda más grande (el caso $n = 1$), $\lambda_1 = 2L$:

$$f_1 = \frac{v}{2L} \quad \text{(cuerda fija en ambos extremos)} \tag{15.32}$$

Esta se llama **frecuencia fundamental**. Las otras frecuencias de onda estacionaria son $f_2 = 2v/2L$, $f_3 = 3v/2L$, etcétera. Todas estas son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental f_1, como $2f_1$, $3f_1$, $4f_1$ y así sucesivamente, y expresamos *todas* las frecuencias como

$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{(cuerda fija en ambos extremos)} \tag{15.33}$$

Estas frecuencias se conocen como **armónicos**, y la serie es una **serie armónica**. En ocasiones, los músicos llaman a f_2, f_3, etcétera, **sobretonos**; f_2 es el segundo armónico o el primer sobretono, f_3 es el tercer armónico o el segundo sobretono, y así sucesivamente. El primer armónico es igual a la frecuencia fundamental (figura 15.25).

Para una cuerda con extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$, la función de onda $y(x, t)$ de la n-ésima onda estacionaria está dada por la ecuación (15.28) (que satisface la condición de que haya un nodo en $x = 0$), con $\omega = \omega_n = 2\pi f_n$ y $k_n = 2\pi/\lambda_n$:

$$y_n(x, t) = A_{SW} \operatorname{sen} k_n x \operatorname{sen} \omega_n t \tag{15.34}$$

Es fácil demostrar que esta función de onda tiene nodos en $x = 0$ y en $x = L$, como debe ser.

15.26 Los primeros cuatro modos normales de una cuerda fija en ambos extremos. (Compare estos con las fotografías de la figura 15.23).

a) $n = 1$: frecuencia fundamental, f_1

N A N

$\frac{\lambda}{2} = L$

b) $n = 2$: segundo armónico, f_2 (primer sobretono)

N A N A N

$2\frac{\lambda}{2} = L$

c) $n = 3$: tercer armónico, f_3 (segundo sobretono)

N A N A N A N

$3\frac{\lambda}{2} = L$

d) $n = 4$: cuarto armónico, f_4 (tercer sobretono)

N A N A N A N A N

$4\frac{\lambda}{2} = L$

El **modo normal** de un sistema oscilante es un movimiento en el cual todas las partículas del sistema se mueven sinusoidalmente con la misma frecuencia. En el caso de un sistema compuesto por una cuerda de longitud L fija en ambos extremos, cada una de las longitudes de onda dadas por la ecuación (15.31) corresponde al patrón y a la frecuencia de un posible modo normal. Hay un número infinito de modos normales, cada uno con su frecuencia y patrón de vibración característicos. La figura 15.26 muestra los primeros cuatro patrones de modo normal, así como sus respectivas frecuencias y longitudes de onda, que corresponden a la ecuación (15.34) con $n = 1$, 2, 3 y 4. En contraste, un oscilador armónico, con solo una partícula oscilante, tiene un solo modo normal y una sola frecuencia característica. La cuerda fija en ambos extremos tiene un número infinito de modos normales, ya que se compone de un número muy grande (efectivamente infinito) de partículas. La mayoría de los sistemas oscilantes más complejos también tienen una infinidad de modos normales, aunque con patrones más complejos de modo normal que una cuerda (figura 15.27).

Ondas estacionarias complejas

Si pudiéramos desplazar una cuerda de modo que su forma tuviera la de uno de los patrones de modo normal, y luego soltarla, vibraría con la frecuencia de ese modo. Tal cuerda vibratoria desplazaría el aire circundante con la misma frecuencia, produciendo una onda sonora sinusoidal viajera que nuestro oído percibiría como un tono puro. Sin embargo, cuando una cuerda se golpea (como en un piano) o se pulsa (como en una guitarra), la forma de la cuerda desplazada *no* es tan sencilla como uno de los patrones de la figura 15.26. En la vibración resultante están presentes la frecuencia fundamental y muchos sobretonos. Por lo tanto, este movimiento es una combinación o *superposición* de muchos modos normales. Varios movimientos armónicos simples de diferentes frecuencias están presentes simultáneamente, y el desplazamiento de cualquier punto de la cuerda es la suma (o superposición) de los desplazamientos asociados con los modos individuales. El sonido producido por la cuerda vibratoria es igualmente una superposición de ondas sonoras sinusoidales viajeras, que percibimos como un tono rico y complejo con la frecuencia fundamental f_1. La onda estacionaria en la cuerda y la onda sonora viajera en el aire tienen el mismo **contenido armónico** (la presencia de frecuencias más altas que la fundamental). El contenido armónico depende de cómo se pone inicialmente en movimiento la cuerda. Si pulsamos las cuerdas de una guitarra acústica en el lugar normal sobre el hueco, el sonido tiene diferente contenido armónico, que si las pulsamos cerca del extremo fijo en el cuerpo de la guitarra.

Cada movimiento posible de la cuerda se presenta como una superposición de movimientos de modo normal. Encontrar tal representación para un patrón de vibración dado se denomina *análisis armónico*. La suma de funciones sinusoidales que representa una onda compleja se llama *serie de Fourier*. La figura 15.28 ilustra cómo una onda estacionaria que se produce pulsando una cuerda de guitarra de longitud L, en un punto a una distancia $L/4$ de un extremo, se representa como una combinación de funciones sinusoidales.

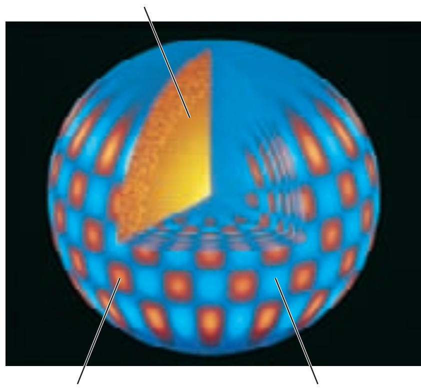
Ondas estacionarias e instrumentos de cuerda

Como hemos visto, la frecuencia fundamental de una cuerda que vibra es $f_1 = v/2L$. La rapidez v de las ondas en la cuerda está determinada por la ecuación (15.13), $v = \sqrt{F/\mu}$. Combinando éstas, vemos que

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \text{(cuerda fija en ambos extremos)} \tag{15.35}$$

Esta también es la frecuencia fundamental de la onda sonora creada en el aire circundante por la cuerda al vibrar. Los instrumentos musicales comunes muestran cómo f_1 depende de las propiedades de la cuerda. Las cuerdas largas de la sección grave (de baja frecuencia) de un piano o de un contrabajo, comparadas con las cuerdas más cortas de la sección soprano de un piano o del violín, ilustran la dependencia inversa de la frecuencia con respecto a la longitud L (figura 15.29). El tono de un violín o una

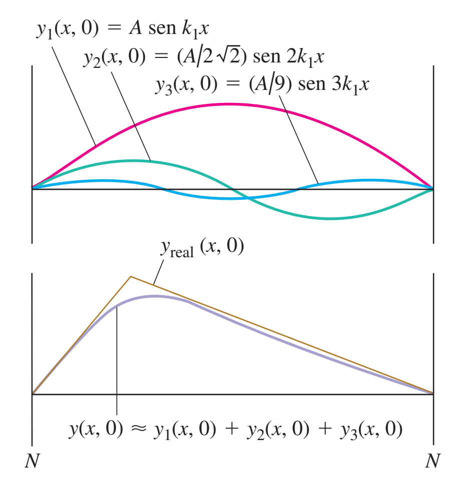
15.27 Los astrónomos han descubierto que el Sol oscila en varios modos normales distintos. Esta simulación por computadora muestra uno de esos modos.

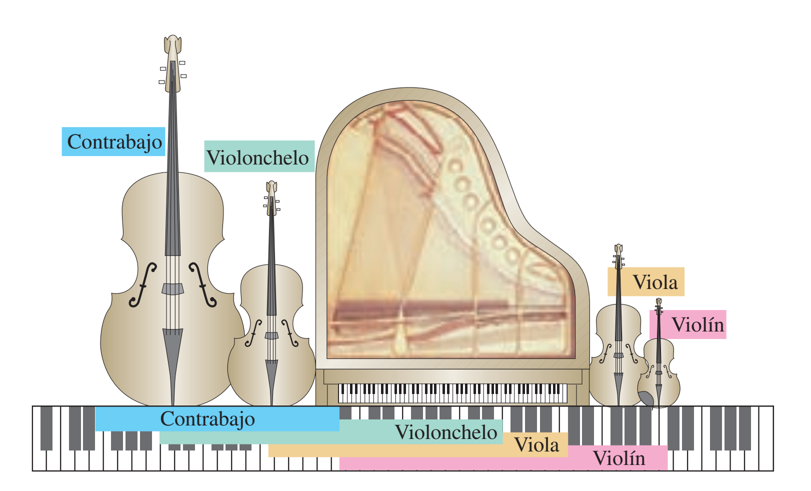


MasteringPHYSICS

ActivPhysics 10.10: Complex Waves: Fourier Analysis

15.28 Cuando se pulsa una cuerda de guitarra (dándole una forma triangular) y se suelta, se produce una onda estacionaria, la cual se representa bien (excepto en el punto agudo máximo) con la suma de tres funciones sinusoidales. Si incluimos funciones sinusoidales adicionales, mejora aún más la representación.





15.29 Comparación de la gama de un piano de cola para concierto, con las gamas de un contrabajo, un violonchelo, una viola y un violín. En todos los casos, las cuerdas más largas producen notas graves y las más cortas producen notas agudas.

guitarra normalmente se varía presionando las cuerdas con los dedos contra el diapasón (bastidor) para cambiar la longitud L de la parte vibrante de la cuerda. Al aumentar la tensión F, aumenta la rapidez de la onda v y, por lo tanto, la frecuencia (y el tono). Todos los instrumentos de cuerda se "afinan" a las frecuencias correctas variando la tensión; se tensa cada vez más la cuerda para aumentar el tono. Por último, al aumentar la masa por unidad de longitud μ, disminuye la rapidez de la onda y, por lo tanto, la frecuencia. Las notas más bajas de una guitarra se producen con cuerdas más gruesas, y un motivo para enrollar con alambre las cuerdas graves de un piano es obtener la baja frecuencia deseada de una cuerda relativamente corta.

Los instrumentos de viento, como los saxofones y los trombones, tienen también modos normales. Como en los instrumentos de cuerda, las frecuencias de estos modos normales determinan los tonos musicales que producen estos instrumentos. En el capítulo 16 estudiaremos estos instrumentos y muchos otros aspectos del sonido.

Ejemplo 15.7 Contrabajo gigante



En un intento por entrar en el *Libro Guiness de récords mundiales*, usted se propone construir un contrabajo con cuerdas de 5.00 m de longitud entre puntos fijos. Una cuerda tiene una densidad lineal de masa de 40.0 g/m y una frecuencia fundamental de 20.0 Hz (la frecuencia más baja que logra detectar el oído humano). Calcule *a*) la tensión de esta cuerda, *b*) la frecuencia y la longitud de onda del segundo armónico en la cuerda y *c*) la frecuencia y la longitud de onda del segundo sobretono en la cuerda.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La incógnita en el inciso *a*) es la tensión F de la cuerda; usaremos la ecuación (15.35) que relaciona F con los valores conocidos $f_1 = 20.0$ Hz, $L = 5.00$ m y $\mu = 40.0$ g/m. En los incisos *b*) y *c*), las incógnitas son la frecuencia y la longitud de onda de un armónico y un sobretono conocidos. Las determinaremos a partir de la longitud dada de la cuerda y la frecuencia fundamental, usando las ecuaciones (15.31) y (15.33).

EJECUTAR: *a*) Despejamos F de la ecuación (15.35):

$$F = 4\mu L^2 {f_1}^2 = 4(40.0 \times 10^{-3}\ \text{kg/m})(5.00\ \text{m})^2(20.0\ \text{s}^{-1})^2$$
$$= 1600\ \text{N} = 360\ \text{lb}$$

b) Según las ecuaciones (15.33) y (15.31), la frecuencia y longitud de onda del segundo armónico ($n = 2$) son:

$$f_2 = 2f_1 = 2(20.0\ \text{Hz}) = 40.0\ \text{Hz}$$
$$\lambda_2 = \frac{2L}{2} = \frac{2(5.00\ \text{m})}{2} = 5.00\ \text{m}$$

c) El segundo sobretono es el "segundo tono sobre" (por arriba de) la fundamental, es decir, $n = 3$. Su frecuencia y longitud de onda son

$$f_3 = 3f_1 = 3(20.0\ \text{Hz}) = 60.0\ \text{Hz}$$
$$\lambda_3 = \frac{2L}{3} = \frac{2(5.00\ \text{m})}{3} = 3.33\ \text{m}$$

EVALUAR: La tensión en la cuerda de un contrabajo real es normalmente de unos cuantos cientos de newtons; en el inciso *a*) la tensión es un poco mayor que esa. Las longitudes de onda de los incisos *b*) y *c*) son iguales a la longitud de la cuerda y dos tercios de esa longitud, respectivamente; estos resultados concuerdan con los dibujos de ondas estacionarias de la figura 15.26.

Ejemplo 15.8 De ondas en una cuerda a ondas sonoras en el aire



Calcule la frecuencia y longitud de onda de las ondas sonoras que se producen en el aire cuando la cuerda del ejemplo anterior vibra a su frecuencia fundamental. La rapidez del sonido en el aire a 20°C es de 344 m/s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Las incógnitas son la frecuencia y la longitud de onda de la *onda sonora* producida por la cuerda del contrabajo. La frecuencia de la onda sonora es la misma que la de la frecuencia fundamental f_1 de la onda estacionaria, ya que la cuerda obliga al aire circundante a vibrar a la misma frecuencia. La longitud de onda de la onda de sonido es $\lambda_{1(\text{sonido})} = v_{\text{sonido}}/f_1$.

EJECUTAR: Tenemos que $f = f_1 = 20.0$ Hz, entonces,

$$\lambda_{1(\text{sonido})} = \frac{v_{\text{sonido}}}{f_1} = \frac{344\ \text{m/s}}{20.0\ \text{Hz}} = 17.2\ \text{m}$$

EVALUAR: En el ejemplo 15.7, la longitud de onda fundamental de la cuerda fue $\lambda_{1(\text{cuerda})} = 2L = 2(5.00\ \text{m}) = 10.0$ m. Aquí $\lambda_{1(\text{sonido})} = 17.2$ m es más grande por un factor de $17.2/10.0 = 1.72$. Esto debe ser así: ya que las frecuencias de las ondas sonoras y la de la onda estacionaria son iguales, $\lambda = v/f$ nos indica que las longitudes de onda en el aire y en la cuerda tienen la misma razón que las rapideces de onda correspondientes; aquí $v_{\text{sonido}} = 344$ m/s es mayor que $v_{\text{cuerda}} = (10.0\ \text{m})(20.0\ \text{Hz}) = 200$ m/s por exactamente el factor 1.72.

Evalúe su comprensión de la sección 15.8 Mientras vibra una cuerda de guitarra, se toca suavemente el punto medio de la cuerda para asegurar que la cuerda no vibre en ese punto. ¿Cuáles modos normales *no pueden* estar presentes en la cuerda, cuando se está tocando de este modo?

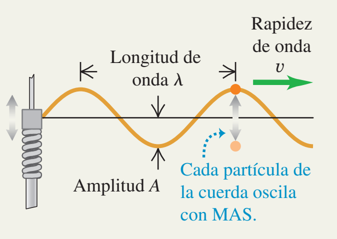
RESUMEN



Ondas y sus propiedades: Una onda es cualquier perturbación que se propaga de una región a otra. Una onda mecánica viaja dentro de un material llamado medio. La rapidez de onda v depende del tipo de onda y de las propiedades del medio.

En una onda periódica, el movimiento de cada punto del medio es periódico con frecuencia f y periodo T. La longitud de onda λ es la distancia en la que se repite el patrón de la onda, y la amplitud A es el desplazamiento máximo de una partícula en el medio. El producto de λ por f es igual a la rapidez de la onda. Una onda sinusoidal es un caso especial de onda periódica donde un punto se mueve con movimiento armónico simple. (Véase el ejemplo 15.1).

$$v = \lambda f \quad (15.1)$$



Funciones de onda y dinámica de onda: La función de onda $y(x, t)$ describe los desplazamientos de partículas individuales del medio. Las ecuaciones (15.3), (15.4) y (15.7) dan la ecuación de una onda sinusoidal que viaja en la dirección $+x$. Si la onda se mueve en la dirección $-x$, el signo menos en las funciones coseno se cambia por un signo más. (Véase el ejemplo 15.2).

La función de onda obedece a una ecuación diferencial parcial llamada ecuación de onda, ecuación (15.12).

La rapidez de una onda transversal en una cuerda depende de la tensión F y de la masa por unidad de longitud μ. (Véase el ejemplo 15.3).

$$y(x, t) = A\cos\left[\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)\right] = A\cos 2\pi f\left(\frac{x}{v} - t\right) \quad (15.3)$$

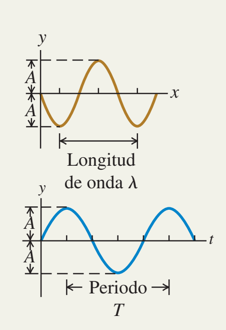
$$y(x, t) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) \quad (15.4)$$

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t) \quad (15.7)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ y $\omega = 2\pi f = vk$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (15.12)$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \text{ (ondas en una cuerda)} \quad (15.13)$$



Potencia de onda: El movimiento ondulatorio transporta energía de una región a otra. En el caso de una onda mecánica sinusoidal, la potencia media P_{med} es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda y al cuadrado de la frecuencia. En el caso de ondas que se propagan en tres dimensiones, la intensidad de onda I es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la fuente. (Véase los ejemplos 15.4 y 15.5).

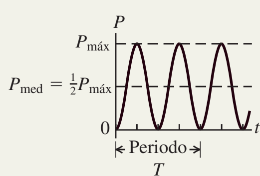
$$P_{med} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2 \quad (15.25)$$

(potencia media, onda sinusoidal)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (15.26)$$

(ley del cuadrado inverso para la intensidad)

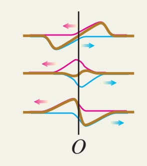
Potencia de onda contra tiempo t en la coordenada $x = 0$



Superposición de ondas: Una onda que llega a una frontera del medio de propagación se refleja. El desplazamiento de onda total, en cualquier punto donde se superponen dos o más ondas, es la suma de los desplazamientos de las ondas individuales (principio de superposición).

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad (15.27)$$

(principio de superposición)



Ondas estacionarias sobre una cuerda: Cuando una onda sinusoidal se refleja de un extremo fijo o libre de una cuerda estirada, las ondas incidente y reflejada se combinan para formar una onda sinusoidal estacionaria que contiene nodos y antinodos. Los nodos adyacentes están separados una distancia $\lambda/2$, lo mismo que dos antinodos adyacentes. (Véase el ejemplo 15.6).

Si ambos extremos de una cuerda con longitud L están fijos, solo puede haber ondas estacionarias si L es un múltiplo entero de $\lambda/2$. Cada frecuencia con su patrón de vibración asociado se denomina modo normal. (Véase los ejemplos 15.7 y 15.8).

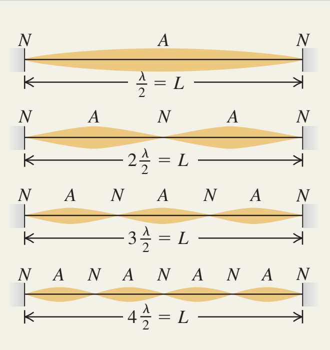
$$y(x, t) = (A_{SW}\operatorname{sen} kx)\operatorname{sen}\omega t \quad (15.28)$$

(onda estacionaria en una cuerda, extremo fijo en $x = 0$)

$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad (15.33)$$

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (15.35)$$

(cuerda fija en ambos extremos)





PROBLEMA PRÁCTICO Ondas en una cuerda que gira

Una cuerda uniforme con longitud L y masa m se sujeta por un extremo y se gira en un círculo horizontal con velocidad angular ω. Desprecie el efecto de la fuerza de gravedad sobre la cuerda. *a*) En un punto de la cuerda a una distancia r del extremo fijo, ¿cuál es la tensión F? *b*) ¿Cuál es la rapidez de las ondas transversales en este punto? *c*) Calcule el tiempo que una onda transversal tarda en viajar de un extremo de la cuerda al otro.

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Elabore un bosquejo de la situación e identifique las distancias r y L. La tensión en la cuerda es distinta en diferentes valores de r. ¿Sabe por qué? ¿Dónde espera que la tensión sobre la cuerda sea máxima? ¿Y mínima?
2. ¿En qué parte de la cuerda espera usted que la rapidez sea máxima? ¿Dónde espera que sea mínima?
3. Piense en el trozo de la cuerda más alejado de r a partir del extremo fijo. ¿Qué fuerzas actúan en esta parte? (Recuerde que la gravedad se ignora). ¿Cuál es la masa de esta parte? ¿A qué distancia está el centro de masa del eje de rotación?
4. Haga una lista de las cantidades desconocidas e identifique las incógnitas.

EJECUTAR

5. Elabore un diagrama de cuerpo libre de la parte de la cuerda que está más allá de r a partir del extremo fijo.
6. Utilice el diagrama de cuerpo libre para determinar la tensión en la cuerda a una distancia r.
7. Use el resultado del paso 6 para calcular la rapidez de la onda a una distancia r.
8. Utilice el resultado del paso 7 para determinar el tiempo que debe viajar una onda de un extremo al otro. (*Sugerencia:* La rapidez de onda es $v = dr/dt$, de modo que el tiempo para que la onda viaje una distancia dr a lo largo de la cuerda es $dt = dr/v$. Integre esto para calcular el tiempo total. Véase el apéndice B).

EVALUAR

9. ¿Los resultados de los incisos *a*) y *b*) están de acuerdo con los esperados de los pasos 1 y 2? ¿Las unidades son correctas?
10. Verifique el resultado del inciso *a*) considerando la fuerza neta sobre un segmento pequeño de la cuerda a una distancia r con una longitud dr y masa $dm = (m/L)dr$. [*Sugerencia:* Las fuerzas de tensión sobre este segmento son $F(r)$ sobre un lado y $F(r + dr)$ sobre el otro. Usted obtendrá una ecuación para dF/dr que puede integrar para calcular F en función de r].

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P15.1 Dos ondas viajan en la misma cuerda. ¿Es posible para ambas tener *a*) diferentes frecuencias, *b*) diferentes longitudes de onda, *c*) diferentes rapideces, *d*) diferentes amplitudes, *e*) la misma frecuencia, pero diferentes longitudes de onda? Explique su razonamiento.

P15.2 Bajo una tensión F, un pulso tarda 2.00 s en recorrer la longitud de un alambre tensado. ¿Qué tensión se requiere (en términos de F) para que el pulso tarde 6.00 s en hacer ese recorrido?

P15.3 ¿Qué tipos de energía se asocian con las ondas en una cuerda estirada? ¿Cómo podría detectarse experimentalmente tal energía?

P15.4 La amplitud de una onda disminuye gradualmente a medida que la onda viaja por una cuerda larga y estirada. ¿Qué sucede con la energía de la onda en ese caso?

P15.5 Para los movimientos ondulatorios estudiados en el capítulo, ¿la rapidez de propagación depende de la amplitud? ¿Cómo lo sabe?

P15.6 La rapidez de las olas oceánicas depende de la profundidad del agua; cuanto más profunda sea esta, más rápidamente viajará la ola. Use esto para explicar por qué las olas forman crestas y "rompen" al acercarse a la costa.

P15.7 ¿Es posible tener una onda longitudinal en una cuerda estirada? ¿Por qué? ¿Es posible tener una onda transversal en una varilla de acero? ¿Por qué? En caso de una respuesta afirmativa, explique cómo crearía tal onda.

P15.8 Un eco es sonido reflejado en un objeto distante, como una pared o un risco. Explique cómo determinaría la distancia al objeto cronometrando el eco.

P15.9 ¿Por qué vemos el relámpago antes de escuchar el trueno? Una regla práctica común es comenzar a contar lentamente, una vez por segundo, al ver el relámpago; cuando se oye el trueno, se divide el número entre 3 para obtener la distancia a la que cayó el relámpago, en kilómetros (o dividiendo entre 5 para calcularla en millas). ¿Por qué funciona esto? ¿O no funciona?

P15.10 En el caso de ondas transversales en una cuerda, ¿Es la rapidez de la onda la misma que la rapidez de cualquier parte de la cuerda? Explique la diferencia entre ambas rapideces. ¿Cuál de ellas es constante?

P15.11 Los niños hacen teléfonos de juguete introduciendo cada extremo de un hilo largo por un agujero en la base de un vaso de cartón, y anudándolo para que no se salga. Si el hilo se tensa, es posible transmitir sonido de un vaso al otro. ¿Cómo funciona esto? ¿Por qué es más fuerte el sonido transmitido que el que viaja la misma distancia por aire?

P15.12 Las cuatro cuerdas de un violín tienen diferente espesor, pero aproximadamente la misma tensión. ¿Las ondas viajan más rápidamente en las cuerdas gruesas o en las delgadas? ¿Por qué? Compare la frecuencia fundamental de vibración de las cuerdas gruesas y las delgadas.

P15.13 Una onda sinusoidal se puede describir con una función coseno, que es tan frecuentemente negativa como es positiva. Entonces, ¿por qué la potencia media suministrada por esta onda no es cero?

P15.14 Dos cuerdas con diferente masa por unidad de longitud μ_1 y μ_2 se unen y se estiran con una tensión F. Una onda viaja por la cuerda

y pasa por la discontinuidad de μ. Indique cuáles de las siguientes propiedades de la onda serán iguales en ambos lados de la discontinuidad y cuáles cambiarán: rapidez de la onda, frecuencia, longitud de onda. Justifique con argumentos físicos cada respuesta.

P15.15 Una cuerda larga con masa *m* se sujeta del techo y cuelga verticalmente. Se produce un pulso de onda en el extremo inferior, el cual viaja hacia arriba. ¿La rapidez del pulso cambia al subir por la cuerda y, si lo hace, aumenta o disminuye?

P15.16 En una onda transversal en una cuerda, el movimiento de la cuerda es perpendicular a la longitud de la cuerda. ¿Cómo es posible entonces que se transporte energía a lo largo de la cuerda?

P15.17 Tanto la intensidad de onda como la gravitación obedecen leyes del cuadrado inverso. ¿Lo hacen por la misma razón? Analice la razón de cada una de estas leyes del cuadrado inverso tan bien como sea posible.

P15.18 Podemos transferir energía por una cuerda con un movimiento ondulatorio; sin embargo, en una onda estacionaria en una cuerda, nunca podremos transferir energía más allá de un nodo. ¿Por qué?

P15.19 ¿Podemos producir una onda estacionaria en una cuerda superponiendo dos ondas que viajan en direcciones opuestas con la misma frecuencia, pero diferente amplitud? ¿Por qué? ¿Podemos producirla superponiendo dos ondas que viajen en direcciones opuestas con diferente frecuencia, pero la misma amplitud? ¿Por qué?

P15.20 Si estiramos una liga de hule y la pulsamos, oímos un tono (más o menos) musical. ¿Cómo cambia la frecuencia de este tono, si estiramos más la liga? (¡Inténtelo!) ¿Concuerda esto con la ecuación (15.35) para una cuerda fija en ambos extremos? Explique su respuesta.

P15.21 El intervalo musical de una *octava* corresponde a un factor de 2 en frecuencia. ¿En qué factor debe aumentarse la tensión en una cuerda de guitarra o violín para aumentar su tono una octava? ¿Y dos octavas? Explique su razonamiento. ¿Se corre algún riesgo al intentar esos cambios de tono?

P15.22 Si toca una cuerda levemente en su centro mientras la frota con el arco, un violinista puede producir una nota exactamente una octava arriba de aquella para la cual se afinó la cuerda, es decir, una nota con una frecuencia exactamente duplicada. ¿Cómo es posible esto?

P15.23 Como vimos en la sección 15.1, las olas en el agua son una combinación de ondas longitudinales y transversales. Defienda la siguiente afirmación: "Cuando las olas chocan contra una pared vertical, ese punto es un nodo del desplazamiento longitudinal, pero un antinodo del desplazamiento transversal".

P15.24 Los violines son instrumentos cortos, en tanto que los violonchelos y los contrabajos son largos. Explique por qué esto es así en términos de la frecuencia de las ondas que producen.

P15.25 ¿Para qué sirven los trastes de una guitarra? Explique su uso en términos de la frecuencia de la vibración de las cuerdas.

EJERCICIOS

Sección 15.2 Ondas periódicas

15.1 • La rapidez del sonido en el aire a 20°C es de 344 m/s. *a*) Calcule la longitud de onda de una onda sonora con frecuencia de 784 Hz, que corresponde a la nota sol de la quinta octava (G_5) de un piano, y cuántos milisegundos dura cada vibración. *b*) Calcule la longitud de onda de una onda sonora una octava más alta que la nota del inciso *a*).

15.2 • **BIO** **Sonido audible.** Siempre que la amplitud sea lo suficientemente grande, el oído humano puede responder a ondas longitudinales dentro de un intervalo de frecuencias que aproximadamente va de los 20.0 Hz a los 20.0 kHz. *a*) Si usted tuviera que marcar el comienzo de cada patrón de onda completo con un punto rojo para el sonido de longitud de onda larga, y con un punto azul para el sonido de longitud de onda corta, ¿qué distancia habría entre los puntos rojos y qué distancia habría entre los puntos azules? *b*) En realidad, ¿los puntos adyacentes en cada conjunto estarían suficientemente alejados para que usted pudiera medir fácilmente su distancia de separación con una cinta métrica? *c*) Suponga que repite el inciso *a*) en agua, donde el sonido viaja a 1480 m/s. ¿Qué tan alejados estarían los puntos en cada conjunto? ¿Podría medir fácilmente su separación con una cinta métrica?

15.3 • **¡Tsunami!** El 26 de diciembre de 2004 ocurrió un gran terremoto en las costas de Sumatra, y desencadenó olas inmensas (un tsunami) que provocaron la muerte de 200,000 personas. Gracias a los satélites que observaron esas olas desde el espacio, se pudo establecer que había 800 km de la cresta de una ola a la siguiente, y que el periodo entre una y otra fue de 1.0 hora. ¿Cuál fue la rapidez de esas olas en m/s y en km/h? ¿Su respuesta le ayudaría a comprender por qué las olas causaron tal devastación?

15.4 • **BIO** **Imágenes por ultrasonido.** Se llama *ultrasonido* a las frecuencias más arriba de la gama que puede detectar el oído humano, (aproximadamente 20,000 Hz). Se pueden usar ondas de ultrasonido para penetrar en el cuerpo y producir imágenes al reflejarse en las superficies. En una exploración típica con ultrasonido, las ondas viajan a través de los tejidos del cuerpo con una rapidez de 1500 m/s. Para obtener una buena imagen detallada, la longitud de onda no debería ser mayor que 1.0 mm. ¿Qué frecuencia se requiere entonces?

15.5 • **BIO** *a*) **Longitudes de onda audibles.** El rango de frecuencias audibles es de 20 a 20,000 Hz aproximadamente. ¿Cuál es el rango de las longitudes de onda audibles en el aire? *b*) **Luz visible.** El rango de luz visible va de 400 a 700 nm. ¿Cuál es el rango de las frecuencias visibles de la luz? *c*) **Cirugía en el cerebro.** Los cirujanos pueden eliminar tumores cerebrales usando un aspirador quirúrgico ultrasónico, que produce ondas de sonido de 23 kHz de frecuencia. ¿Cuál es la longitud de onda de estas ondas en el aire? *d*) **Sonido en el cuerpo.** ¿Cuál sería la longitud de onda del sonido del inciso *c*) en los fluidos corporales, si la rapidez del sonido es de 1480 m/s pero la frecuencia es la misma?

15.6 •• Un pescador observa que su bote se mueve periódicamente hacia arriba y hacia abajo, debido a las olas en la superficie del agua. Al bote le toma 2.5 s pasar de su punto más alto al más bajo, una distancia total de 0.62 m. El pescador nota que las crestas de las olas están separadas 6.0 m. *a*) ¿Con qué rapidez se mueven las olas? *b*) ¿Cuál es la amplitud de cada ola? *c*) Si la distancia vertical total que viaja el bote fuera de 0.30 m y los otros datos fueran los mismos, ¿cómo variarían las respuestas de los incisos *a*) y *b*).

Sección 15.3 Descripción matemática de una onda

15.7 • Ciertas ondas transversales en una cuerda tienen rapidez de 8.00 m/s, amplitud de 0.0700 m y longitud de onda de 0.320 m. Las ondas viajan en la dirección $-x$, y en $t = 0$ el extremo $x = 0$ de la cuerda tiene su máximo desplazamiento hacia arriba. *a*) Calcule la frecuencia, el periodo y el número de onda de estas ondas. *b*) Escriba una función de onda que describa la onda. *c*) Calcule el desplazamiento transversal de una partícula en $x = 0.360$ m en el instante $t = 0.150$ s. *d*) ¿Cuánto tiempo debe pasar después de $t = 0.150$ s para que la partícula en $x = 0.360$ m vuelva a tener su desplazamiento máximo hacia arriba?

15.8 • La ecuación de cierta onda transversal es

$$y(x, t) = (6.50\text{ mm})\cos 2\pi\left(\frac{x}{28.0\text{ cm}} - \frac{t}{0.0360\text{ s}}\right)$$

Determine *a*) amplitud, *b*) longitud de onda, *c*) frecuencia, *d*) rapidez de propagación y *e*) dirección de propagación de la onda.

15.9 • **CALC** ¿Cuál de las siguientes funciones de onda satisfacen la ecuación (15.12)? *a*) $y(x, t) = A\cos(kx + \omega t)$; *b*) $y(x, t) = A\,\text{sen}(kx + \omega t)$; *c*) $y(x, t) = A(\cos kx + \cos \omega t)$. *d*) Para la onda del inciso *b*), escriba las ecuaciones de la velocidad y aceleración transversales de una partícula en el punto *x*.

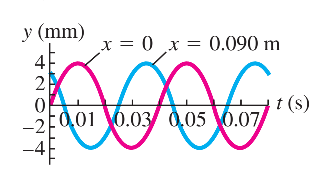
15.10 • Una onda de agua que viaja en línea recta en un lago queda descrita por la ecuación

$$y(x, t) = (3.75 \text{ cm}) \cos(0.450 \text{ cm}^{-1} x + 5.40 \text{ s}^{-1} t)$$

donde y es el desplazamiento perpendicular a la superficie tranquila del lago. *a*) ¿Cuánto tiempo tarda un patrón de onda completo en pasar por un pescador en un bote anclado, y qué distancia horizontal viaja la cresta de la onda en ese tiempo? *b*) ¿Cuál es el número de onda y el número de ondas por segundo que pasan por el pescador? *c*) ¿Qué tan rápido pasa una cresta de onda por el pescador y cuál es la rapidez máxima de su flotador de corcho cuando la onda provoca que este oscile verticalmente?

15.11 • Una onda sinusoidal se propaga por una cuerda estirada en el eje x. El desplazamiento de la cuerda en función del tiempo se grafica en la figura E15.11 para partículas en $x = 0$ y en $x = 0.0900$ m. *a*) Calcule la amplitud de la onda. *b*) Calcule el periodo de la onda. *c*) Se sabe que los puntos en $x = 0$ y $x = 0.0900$ m están separados una longitud de onda. Si la onda se mueve en la dirección $+x$, determine la longitud de onda y la rapidez de la onda. *d*) Si ahora la onda se mueve en la dirección $-x$, determine la longitud de onda y la rapidez de la onda. *e*) ¿Sería posible determinar de manera definitiva la longitud de onda en los incisos *c*) y *d*), si no supiéramos que los dos puntos están separados una longitud de onda? ¿Por qué?

Figura **E15.11**



15.12 •• **CALC** **Rapidez de propagación contra rapidez de las partículas.** *a*) Demuestre que la ecuación (15.3) puede escribirse como

$$y(x, t) = A \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

b) Utilice $y(x, t)$ para obtener una expresión para la velocidad transversal v_y de una partícula de la cuerda en la que viaja la onda. *c*) Calcule la rapidez máxima de una partícula de la cuerda. ¿En qué circunstancias esta rapidez es igual a la rapidez de propagación v? ¿Menor que v? ¿Y mayor que v?

15.13 •• Una onda transversal que viaja en una cuerda tiene amplitud de 0.300 cm, longitud de onda de 12.0 cm y rapidez de 6.00 cm/s y se representa mediante la $y(x, t)$ dada en el ejercicio 15.12. *a*) En el tiempo $t = 0$, calcule y a intervalos de x de 1.5 cm (es decir, en $x = 0$, $x = 1.5$ cm, $x = 3.0$ cm, etcétera) desde $x = 0$ a $x = 12.0$ cm. Muestre los resultados en una gráfica. Esta es la forma de la cuerda en el tiempo $t = 0$. *b*) Repita los cálculos para los mismos valores de x en $t = 0.400$ s y $t = 0.800$ s. Muestre gráficamente la forma de la cuerda en esos instantes. ¿En qué dirección viaja la onda?

15.14 • Para una onda en una cuerda descrita por $y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$, *a*) Grafique y, v_y y a_y en función de x para $t = 0$. *b*) Considere los siguientes puntos de la cuerda: **i.** $x = 0$; **ii.** $x = \pi/4k$; **iii.** $x = \pi/2k$; **iv.** $x = 3\pi/4k$; **v.** $x = \pi/k$; **vi.** $x = 5\pi/4k$; **vii.** $x = 3\pi/2k$; **viii.** $x = 7\pi/4k$. Para una partícula en cada uno de estos puntos en $t = 0$, describa con palabras si la partícula se está moviendo y en qué dirección, y si se está acelerando, frenando o no tiene aceleración instantánea.

Sección 15.4 Rapidez de una onda transversal

15.15 • El extremo de una cuerda horizontal se conecta a la punta de un diapasón eléctrico que hace vibrar transversalmente una cuerda a 120 Hz. El otro extremo pasa por una polea y sostiene una masa de 1.50 kg. La densidad lineal de masa de la cuerda es de 0.0550 kg/m. *a*) ¿Qué rapidez tiene una onda transversal en la cuerda? *b*) ¿Cuál es su longitud de onda? *c*) ¿Cómo cambian las respuestas de los incisos *a*) y *b*), si la masa aumenta a 3.00 kg?

15.16 • ¿Con qué tensión debe estirarse una cuerda de 2.50 m de longitud y masa de 0.120 kg, para que ondas transversales con frecuencia de 40.0 Hz tengan una longitud de onda de 0.750 m?

15.17 •• El extremo superior de un alambre de acero de 3.80 m de longitud está sujeto al techo, y del extremo inferior se suspende un objeto de 54.0 kg. Usted observa que a un pulso transversal le toma 0.0492 s viajar de la parte inferior a la parte superior del alambre. ¿Cuál es la masa del alambre?

15.18 •• Una cuerda de 1.50 m que pesa 0.0125 N está atada al techo por su extremo superior, mientras que el extremo inferior sostiene un peso W. Desprecie la pequeña variación de la tensión a lo largo de la cuerda producida por el peso de la misma. Cuando usted da un leve pulso a la cuerda, las ondas que viajan hacia arriba de esta obedecen la ecuación

$$y(x, t) = (8.50 \text{ mm}) \cos(172 \text{ m}^{-1} x - 4830 \text{ s}^{-1} t)$$

Suponga que la tensión de la cuerda es constante e igual a W. *a*) ¿Cuánto tiempo tarda un pulso en recorrer toda la cuerda? *b*) ¿Cuál es el peso W? *c*) ¿Cuántas longitudes de onda hay en la cuerda en cualquier instante? *d*) ¿Cuál es la ecuación para las ondas que viajan *hacia abajo* de la cuerda?

15.19 • Un alambre delgado de 75.0 cm tiene una masa de 16.5 g. Un extremo está sujeto a un clavo y el otro a un tornillo que puede ajustarse para variar la tensión en el alambre. *a*) ¿A qué tensión (en newtons) debe ajustarse el tornillo para que una onda transversal cuya longitud de onda es de 3.33 cm ejecute 875 vibraciones por segundo? *b*) ¿Con qué rapidez viajaría esta onda?

15.20 • **Cuerda pesada.** Si en el ejemplo 15.3 (sección 15.4) *no* se desprecia el peso de la cuerda, ¿qué rapidez tiene la onda *a*) en la parte inferior de la cuerda? *b*) ¿En la parte media? *c*) ¿En la parte superior?

15.21 • Un oscilador armónico simple en el punto $x = 0$ genera una onda en una cuerda. El oscilador opera con una frecuencia de 40.0 Hz y una amplitud de 3.00 cm. La cuerda tiene una densidad lineal de masa de 50.0 g/m y se estira con una tensión de 5.00 N. *a*) Determine la rapidez de la onda. *b*) Calcule la longitud de onda. *c*) Escriba la función $y(x, t)$ de la onda. Suponga que el oscilador tiene su desplazamiento máximo hacia arriba en el instante $t = 0$. *d*) Determine la aceleración transversal máxima de los puntos de la cuerda. *e*) En el análisis de las ondas transversales en este capítulo, despreciamos la fuerza de la gravedad. ¿Esa aproximación es razonable en el caso de esta onda? Explique su respuesta.

Sección 15.5 Energía del movimiento ondulatorio

15.22 •• La cuerda de un piano con masa de 3.00 g y longitud de 80.0 cm se estira con una tensión de 25.0 N. Una onda con frecuencia de 120.0 Hz y amplitud de 1.6 mm viaja por la cuerda. *a*) Calcule la potencia media que transporta esta onda. *b*) ¿Qué sucede con la potencia media si la amplitud de la onda se reduce a la mitad?

15.23 • Un alambre horizontal se estira con una tensión de 94.0 N, y la rapidez de las ondas transversales en el alambre es de 492 m/s. ¿Cuál debe ser la amplitud de una onda viajera de 69.0 Hz de frecuencia para que la potencia media transportada sea de 0.365 W?

15.24 •• Un alambre ligero se estira firmemente con una tensión F. Las ondas que viajan transversalmente, de amplitud A y longitud de onda λ_1, transportan una potencia media $P_{med,1} = 0.400$ W. Si la longitud de onda se duplica, de modo que $\lambda_2 = 2\lambda_1$, mientras que la tensión F y la amplitud A no se alteran, ¿cuál es entonces la potencia media $P_{med,2}$ transportada por la onda?

15.25 •• Cuando despega un avión a propulsión, produce un sonido con intensidad de 10.0 W/m^2 a 30.0 m de distancia. No obstante, usted

prefiere el tranquilo sonido de la conversación normal, que es de 1.0 $\mu W/m^2$. Suponga que el avión se comporta como una fuente puntual de sonido. *a*) ¿Cuál es la distancia mínima a la pista de aterrizaje a la que usted podría vivir para conservar su estado de paz mental? *b*) ¿Qué intensidad del sonido experimenta un amigo suyo, quien vive a una distancia de la pista de aterrizaje que es el doble de la distancia a la que usted vive? *c*) ¿Qué potencia de sonido produce el avión en el despegue?

15.26 •• Umbral de dolor. Imagine que investiga un informe del aterrizaje de un OVNI en una región despoblada de Nuevo México, y encuentra un objeto extraño que radia ondas sonoras uniformemente en todas direcciones. Suponga que el sonido proviene de una fuente puntual y que puede ignorar las reflexiones. Camina lentamente hacia la fuente y cuando está a 7.5 m de ella, determina que la intensidad es de 0.11 W/m^2. Comúnmente, se considera que una intensidad de 1.0 W/m^2 es el "umbral de dolor". ¿Cuánto más podrá acercarse a la fuente, antes de que la intensidad del sonido alcance ese umbral?

15.27 • Energía de salida. Usando mediciones determina que se están propagando ondas sonoras igualmente en todas direcciones desde una fuente puntual y que la intensidad es de 0.026 W/m^2 a una distancia de 4.3 m de la fuente. *a*) Calcule la intensidad a una distancia de 3.1 m de la fuente. *b*) ¿Cuánta energía sonora emite la fuente en una hora, si su emisión se mantiene constante?

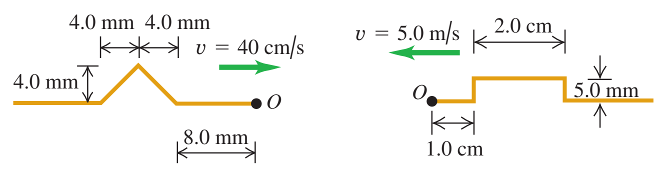
15.28 • Un compañero con dotes matemáticas le dice que la función de onda de una onda que viaja en una cuerda delgada es $y(x, t) = 2.30$ mm $\cos[(6.98 \text{ rad/m})x + (742 \text{ rad/s})t]$. Usted, que es más práctico, efectúa mediciones y determina que la cuerda tiene una longitud de 1.35 m y una masa de 0.00338 kg. Ahora le piden determinar lo siguiente: *a*) amplitud, *b*) frecuencia, *c*) longitud de onda, *d*) rapidez de la onda, *e*) dirección en que viaja la onda, *f*) tensión en la cuerda, *g*) potencia media transmitida por la onda.

15.29 • A una distancia de 7.00×10^{12} m de una estrella, la intensidad de su radiación es de 15.4 W/m^2. Suponiendo que la estrella irradia uniformemente en todas direcciones, ¿cuál es la potencia total de salida de la estrella?

Sección 15.6 Interferencia de ondas, condiciones de frontera y superposición

15.30 • Reflexión. Un pulso de onda en una cuerda tiene las dimensiones que se muestran en la figura E15.30 en $t = 0$. La rapidez de la onda es de 40 cm/s. *a*) Si el punto *O* es el extremo fijo, dibuje la onda completa en t = 15 ms, 20 ms, 25 ms, 30 ms, 35 ms, 40 ms y 45 ms. *b*) Repita el inciso *a*) para el caso en que *O* es el extremo libre.

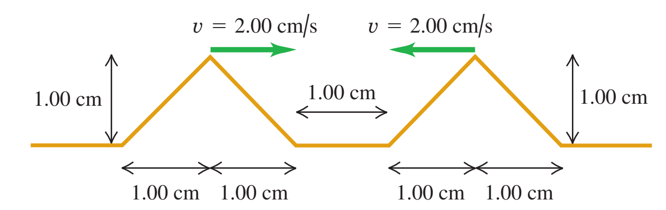
Figura **E15.30** Figura **E15.31**



15.31 • Reflexión. Un pulso ondulatorio en una cuerda tiene las dimensiones que se indican en la figura E15.31 en $t = 0$. La rapidez de la onda es de 5.0 m/s. *a*) Si el punto *O* es el extremo fijo, dibuje la onda completa en t = 1.0 ms, 2.0 ms, 3.0 ms, 4.0 ms, 5.0 ms, 6.0 ms y 7.0 ms. *b*) Repita el inciso *a*) para el caso en que el punto *O* es el extremo libre.

15.32 • Interferencia de pulsos triangulares. Dos pulsos ondulatorios triangulares viajan uno hacia el otro por una cuerda estirada, como se ilustra en la figura E15.32. Los pulsos son idénticos y viajan a 2.00 cm/s. Los bordes delanteros de los pulsos están separados 1.00 cm en $t = 0$. Dibuje la forma de la cuerda en t = 0.250 s, t = 0.500 s, t = 0.750 s, t = 1.000 s y t = 1.250 s.

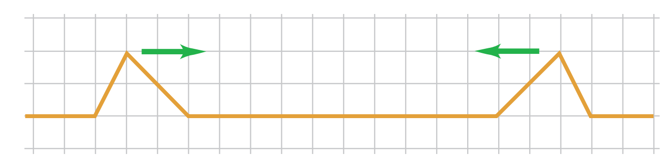
Figura **E15.32**



15.33 • Suponga que el pulso que viaja hacia la izquierda en el ejercicio 15.32 está por *debajo* del nivel de la cuerda sin estirar y no por encima. Trace los mismos dibujos que realizó en aquel ejercicio.

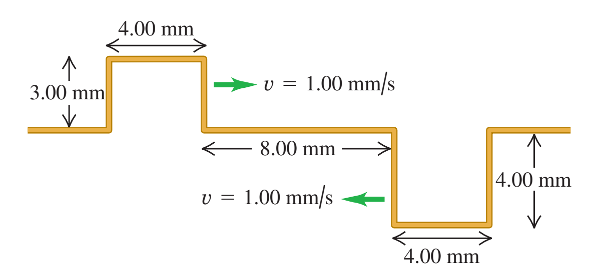
15.34 •• Dos pulsos se desplazan en sentidos opuestos a 1.0 cm/s en una cuerda tensada, como se ilustra en la figura E15.34. Cada cuadro representa 1.0 cm. Dibuje la forma de la cuerda al final de *a*) 6.0 s, *b*) 7.0 s, *c*) 8 s.

Figura **E15.34**



15.35 •• Interferencia de pulsos rectangulares. La figura E15.35 muestra dos pulsos ondulatorios rectangulares en una cuerda estirada, que viajan uno hacia el otro. Su rapidez es de 1.00 mm/s, y su altura y anchura se indican en la figura. Los bordes delanteros de los pulsos están separados 8.00 mm en $t = 0$. Dibuje la forma de la cuerda en t = 4.00 s, t = 6.00 s y t = 10.0 s.

Figura **E15.35**



Sección 15.7 Ondas estacionarias en una cuerda
Sección 15.8 Modos normales de una cuerda

15.36 •• CALC Los antinodos adyacentes de una onda estacionaria en una cuerda están separados 15.0 cm. Una partícula en un antinodo oscila con movimiento armónico simple de amplitud igual a 0.850 cm y periodo de 0.0750 s. La cuerda está en el eje $+x$, fija en $x = 0$. *a*) ¿Qué tan separados están los nodos adyacentes? *b*) ¿Cuáles son la longitud de onda, la amplitud y la rapidez de las dos ondas viajeras que forman este patrón? *c*) Calcule las rapideces transversales máxima y mínima de un punto en un antinodo. *d*) ¿Cuál es la distancia mínima en la cuerda entre un nodo y un antinodo?

15.37 • Ciertas ondas estacionarias en un alambre se describen con la ecuación (15.28), con A_{SW} = 2.50 mm, ω = 942 rad/s y k = 0.750π rad/m. El extremo izquierdo del alambre está en $x = 0$. ¿A qué distancias de ese extremo están *a*) los nodos y *b*) los antinodos de la onda estacionaria?

15.38 • CALC Ecuación de onda y ondas estacionarias. *a*) Por sustitución directa demuestre que $y(x, t) = (A_{SW} \text{ sen } kx) \text{ sen } \omega t$ es una

solución de la ecuación de onda, ecuación (15.12), para $v = \omega/k$. *b*) Explique por qué la relación $v = \omega/k$ para ondas *viajeras* también es válida para ondas *estacionarias*.

15.39 • **CALC** Sean $y_1(x, t) = A\cos(k_1x - \omega_1t)$ y $y_2(x, t) = A\cos(k_2x - \omega_2t)$ dos soluciones de la ecuación de onda (ecuación 15.12) para la misma v. Demuestre que $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$ también es una solución de la ecuación de onda.

15.40 • Una cuerda de 1.50 m de largo se estira entre dos soportes con una tensión que hace que la rapidez de las ondas transversales sea de 48.0 m/s. ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia *a*) fundamental, *b*) del segundo sobretono y *c*) del cuarto armónico?

15.41 • Un alambre con masa de 40.0 g está estirado de modo que sus extremos están fijos en puntos separados 80.0 cm. El alambre vibra en su modo fundamental con frecuencia de 60.0 Hz y amplitud en los antinodos de 0.300 cm. *a*) Calcule la rapidez de propagación de las ondas transversales en el alambre. *b*) Calcule la tensión en el alambre. *c*) Determine la velocidad y aceleración transversales máximas de las partículas del alambre.

15.42 • Un afinador de pianos estira la cuerda de acero de un piano, con una tensión de 800 N. La cuerda tiene 0.400 m de longitud y una masa de 3.00 g. *a*) Calcule la frecuencia de su modo fundamental de vibración. *b*) Determine el número del armónico más alto que podría escuchar una persona capaz de oír frecuencias de hasta 10,000 Hz.

15.43 • **CALC** La forma de una cuerda delgada tensa sujeta por ambos extremos y que oscila en su tercer armónico se describe con la ecuación $y(x, t) = (5.60\text{ cm})\,\text{sen}[(0.0340\text{ rad/cm})x]\text{sen}[(50.0\text{ rad/s})t]$, donde el origen está en el extremo izquierdo de la cuerda, el eje x está a lo largo de la cuerda y el eje y es perpendicular a la misma. *a*) Dibuje el patrón de onda estacionaria. *b*) Calcule la amplitud de las dos ondas viajeras que forman esta onda estacionaria. *c*) ¿Qué longitud tiene la cuerda? *d*) Calcule la longitud de onda, la frecuencia, el periodo y la rapidez de las ondas viajeras. *e*) Calcule la rapidez transversal máxima de un punto de la cuerda. *f*) ¿Qué ecuación $y(x, t)$ tendría esta cuerda si vibrara en su octavo armónico?

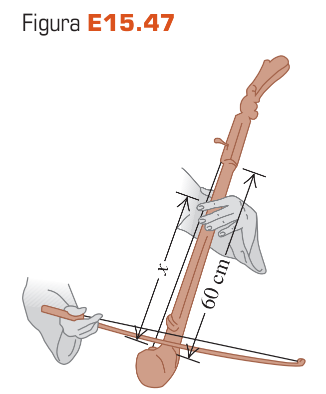
15.44 • La función de onda de una onda estacionaria es $y(x, t) = 4.44\text{ mm}\,\text{sen}[(32.5\text{ rad/m})x]\text{sen}[(754\text{ rad/s})t]$. Para las dos ondas viajeras que forman esta onda estacionaria, determine *a*) la amplitud, *b*) la longitud de onda, *c*) la frecuencia, *d*) la rapidez, *e*) las funciones de onda. *f*) Con la información dada, ¿puede determinar de qué armónico se trata? Explique su respuesta.

15.45 •• Considere otra vez la cuerda y la onda viajera del ejercicio 15.28. Suponga que los extremos de la cuerda se mantienen fijos, y que tanto la onda viajera como la onda reflejada viajan por la cuerda en direcciones opuestas. *a*) Determine la función de onda $y(x, t)$ de la onda estacionaria que se produce. *b*) ¿En qué armónico está oscilando la onda estacionaria? *c*) Calcule la frecuencia de la oscilación fundamental.

15.46 •• La cuerda de cierto instrumento musical mide 75.0 cm de longitud y tiene una masa de 8.75 g. Se utiliza en una habitación donde la rapidez del sonido es de 344 m/s. *a*) ¿A qué tensión debe ajustarse la cuerda de manera que, cuando vibre en su segundo sobretono, produzca un sonido cuya longitud de onda sea de 0.765 m? (Suponga que el esfuerzo de rotura de la cuerda es muy grande y no se rebasa). *b*) ¿Qué frecuencia de sonido produce la cuerda en su modo fundamental de vibración?

15.47 • La parte de una cuerda de cierto instrumento musical que está entre el puente y el extremo superior del dedo en el tablero (es decir, la parte que puede vibrar libremente) mide 60.0 cm y tiene una masa de 2.00 g. La cuerda produce una nota A_4 (440 Hz) al tocarse. *a*) ¿A qué distancia x del puente debe una ejecutante poner un dedo para tocar una nota D_5 (587 Hz)? (Véase la figura E15.47). En ambos casos, la cuerda vibra en su modo fundamental. *b*) Sin afinar de nuevo, ¿es posible tocar una nota G_4 (392 Hz) en esta cuerda? ¿Por qué?

Figura **E15.47**



15.48 •• *a*) Una cuerda horizontal atada en ambos extremos vibra en su modo fundamental. Las ondas viajeras tienen rapidez v, frecuencia f, amplitud A y longitud de onda λ. Calcule la velocidad y la aceleración transversales máximas de puntos situados en **i.** $x = \lambda/2$, **ii.** $x = \lambda/4$ y **iii.** $x = \lambda/8$ del extremo izquierdo. *b*) En cada uno de los puntos del inciso *a*), ¿qué amplitud tiene el movimiento? *c*) En cada uno de los puntos del inciso *a*), ¿cuánto tarda la cuerda en ir desde su desplazamiento máximo hacia arriba, hasta su desplazamiento máximo hacia abajo?

15.49 • **Cuerda de guitarra.** Una de las cuerdas de 63.5 cm de una guitarra normal se afina para producir la nota B_3 (frecuencia de 245 Hz) vibrando en su modo fundamental. *a*) Calcule la rapidez de las ondas transversales en esta cuerda. *b*) Si la tensión de la cuerda se aumenta en 1.0%, ¿cuál será su nueva frecuencia fundamental? *c*) Si la rapidez del sonido en el aire circundante es de 344 m/s, calcule la frecuencia y la longitud de onda de la onda sonora producida en el aire por la vibración de la cuerda en el tono B_3. Compárelas con la frecuencia y longitud de onda de la onda estacionaria en la cuerda.

15.50 • **Ondas en una vara.** Una vara flexible de 2.0 m de longitud no está fija de ningún modo y está libre para vibrar. Elabore dibujos claros de esta vara cuando vibra en sus primeros tres armónicos y, luego, utilice sus dibujos para determinar las longitudes de onda de cada uno de estos armónicos. (*Sugerencia:* Pregúntese si los extremos deben ser nodos o antinodos).

PROBLEMAS

15.51 • **CALC** Una onda sinusoidal transversal con amplitud de 2.50 mm y longitud de onda de 1.80 m viaja de izquierda a derecha por una cuerda horizontal larga y estirada, con una rapidez de 36.0 m/s. Tome como origen el extremo izquierdo de la cuerda no perturbada. En $t = 0$ el extremo izquierdo de la cuerda tiene su desplazamiento máximo hacia arriba. *a*) Calcule la frecuencia, la frecuencia angular y el número de onda. *b*) ¿Qué función $y(x, t)$ describe la onda? *c*) Determine $y(t)$ para una partícula en el extremo izquierdo de la cuerda. *d*) Determine $y(t)$ para una partícula situada 1.35 m a la derecha del origen. *e*) Calcule la magnitud máxima de la velocidad transversal de cualquier partícula de la cuerda. *f*) Calcule el desplazamiento transversal y la velocidad transversal de una partícula que está 1.35 m a la derecha del origen en $t = 0.0625$ s.

15.52 • La onda transversal de una onda que viaja por una cuerda está dada por

$$y(x, t) = (0.750\text{ cm})\cos\pi[(0.400\text{ cm}^{-1})x + (250\text{ s}^{-1})t]$$

a) Calcule la amplitud, el periodo, la frecuencia, la longitud de onda y la rapidez de propagación. *b*) Dibuje la forma de la cuerda en los siguientes valores de t: 0, 0.0005 s y 0.0010 s. *c*) ¿La onda viaja en la dirección $+x$ o $-x$? *d*) La masa por unidad de longitud de la cuerda es de 0.0500 kg/m. Calcule la tensión. *e*) Determine la potencia media de esta onda.

15.53 •• Tres pedazos de cuerdas, cada una con longitud L, se atan extremo con extremo para formar una cuerda combinada de longitud $3L$.

La masa por unidad de longitud de los tres trozos es, respectivamente, μ_1, $\mu_2 = 4\mu_1$ y $\mu_3 = \mu_1/4$. *a*) Si la cuerda combinada tiene una tensión F, ¿cuánto tiempo tarda una onda transversal en recorrer la longitud total $3L$? Dé su respuesta en términos de L, F y μ_1. *b*) ¿Su respuesta al inciso *a*) depende del orden en que se unieron las tres cuerdas? Explique su respuesta.

15.54 •• PA Una viga irregular de 1750 N cuelga horizontalmente del techo sujeta por sus extremos mediante dos alambres verticales (A y B), cada uno de los cuales mide 1.25 m de longitud y pesa 0.360 N. El centro de gravedad de esta viga está a un tercio de la viga a partir del extremo donde el alambre A está atado. Si usted da un tirón a ambas cuerdas en la viga al mismo tiempo, ¿cuál es la diferencia entre las llegadas de los dos pulsos al techo? ¿Qué pulso llega primero? (Ignore el efecto del peso de los alambres sobre la tensión en los mismos).

15.55 • CALC La hormiga alegre que cabalga. Imagine que tiene como mascota una hormiga llamada Chepina (masa m) y la coloca sobre una cuerda horizontal estirada, donde se sostiene firmemente. La cuerda tiene masa M y longitud L, y está sometida a una tensión F. Usted inicia una onda transversal sinusoidal con longitud de onda λ y amplitud A que se propaga por la cuerda, cuyo movimiento es en un plano vertical. La masa de Chepina es tan pequeña que no afecta la propagación de la onda. *a*) Calcule la rapidez máxima de Chepina al oscilar verticalmente. *b*) A Chepina le gusta el movimiento y quiere más. Usted decide aumentar al doble su rapidez máxima alterando la tensión, sin variar la longitud de onda ni la amplitud. ¿Deberá aumentar o disminuir la tensión, y en qué factor?

15.56 •• Hormiga en ingravidez. Una hormiga con masa m está parada tranquilamente sobre una cuerda horizontal con masa por unidad de longitud μ y estirada mediante una tensión F. Repentinamente, su primo Morton comienza a propagar por la cuerda una onda sinusoidal transversal con longitud de onda λ. El movimiento de la cuerda es en un plano vertical. ¿Qué amplitud mínima de la onda hará que la hormiga sienta momentáneamente que no pesa nada? Suponga que m es tan pequeña que la presencia de la hormiga no afecta la propagación de la onda.

15.57 • PA Cuando hay una onda transversal sinusoidal en una cuerda, las partículas de la cuerda están en MAS. Este es el mismo movimiento que el de una masa m unida a un resorte ideal con constante de fuerza k' cuya frecuencia angular de oscilación, como determinamos en el capítulo 14, es $\omega = \sqrt{k'/m}$. Considere una cuerda con tensión F y masa por unidad de longitud μ por la cual se propaga una onda sinusoidal con amplitud A y longitud de onda λ. *a*) Calcule la "constante de fuerza" k' de la fuerza de restitución que actúa sobre un segmento corto de la cuerda de longitud Δx (donde $\Delta x \ll \lambda$). *b*) Determine la dependencia de la "constante de fuerza" calculada en *a*) con respecto a F, μ, A y λ. Explique las razones físicas de tal dependencia.

15.58 •• Música. Imagine que diseña un instrumento de dos cuerdas con dos cuerdas metálicas de 35.0 cm de longitud, como se ilustra en la figura P15.58. Ambas cuerdas están bajo la *misma tensión*. La cuerda S_1 tiene una masa de 8.00 g y produce la nota do central (frecuencia de 262 Hz) en su modo fundamental. *a*) ¿Cuál debería ser la tensión en la cuerda? *b*) ¿Cuál debería ser la masa en la cuerda S_2 de modo que produzca un la sostenido (frecuencia de 466 Hz) como su frecuencia fundamental? *c*) Para ampliar el rango de su instrumento, incluye un traste ubicado exactamente bajo las cuerdas pero sin tocarlas. ¿A qué distancia del extremo superior debería usted colocar el traste, de modo que cuando presione S_1 firmemente contra él, esta cuerda produzca un do sostenido (frecuencia de 277 Hz) en su fundamental? Es decir, ¿cuál es x en la figura? *d*) Si usted presiona S_2 contra el traste, que frecuencia de sonido producirá en su fundamental?

Figura **P15.58**

x
Traste
35.0 cm
S_1 (C)
S_2 (A#)

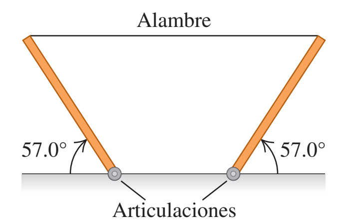
15.59 ••• PA El extremo inferior de una barra uniforme con masa de 45.0 kg está sujeto a una pared por una bisagra sin fricción. La barra está sostenida por un alambre horizontal sujeto en su parte superior, de modo que la barra forma un ángulo de 30.0° con la pared. El alambre tiene una longitud de 0.330 m y masa de 0.0920 kg. ¿Cuál es la frecuencia de la onda estacionaria fundamental de las ondas transversales en el alambre?

15.60 ••• PA Imagine que está explorando un planeta descubierto recientemente. El radio del planeta es de 7.20×10^7 m. Usted sostiene una pesa de plomo del extremo inferior de una cuerda ligera de 4.00 m de longitud y masa de 0.0280 kg. Luego determina que a un pulso transversal le toma 0.0600 s viajar del extremo inferior al extremo superior de la cuerda. En la tierra, para la misma cuerda y la misma pesa, a un pulso transversal le toma 0.0390 s recorrer la longitud de la cuerda. El peso de la cuerda es tan pequeño que se puede ignorar su efecto sobre la tensión de la cuerda. Suponiendo que la masa del planeta tiene simetría esférica, ¿cuál es su masa?

15.61 •• En una cuerda estirada entre dos soportes, dos frecuencias sucesivas de ondas estacionarias son de 525 Hz y 630 Hz. También hay otras frecuencias de ondas estacionarias menores de 525 Hz y mayores de 630 Hz. Si la rapidez de las ondas transversales de la cuerda es de 384 m/s, ¿cuál es la longitud de la cuerda? Suponga que la masa de la cuerda es lo suficientemente pequeña que se puede ignorar su efecto sobre la tensión de la cuerda.

15.62 ••• PA Un alambre de 5.00 m y 0.732 kg se utiliza para sostener dos postes uniformes de 235 N de igual longitud (figura P15.62). Suponga que, en esencia, el alambre es horizontal y que la rapidez del sonido es de 344 m/s. Está soplando un fuerte viento, lo cual provoca que el alambre vibre en su quinto sobretono. ¿Cuáles son la frecuencia y la longitud de onda del sonido que produce el alambre?

Figura **P15.62**



15.63 ••• PA Una barra uniforme de 1.80 m de longitud que pesa 536 N está sostenida en posición horizontal por dos alambres verticales sujetos al techo. Un alambre es de aluminio y el otro es de cobre. El alambre de aluminio está sujeto al extremo izquierdo de la barra, y el de cobre está sujeto a 0.40 m a la izquierda del extremo derecho. Cada alambre tiene una longitud de 0.600 m y una sección transversal circular con radio de 0.280 mm. ¿Cuál es la frecuencia fundamental de las ondas estacionarias transversales en cada alambre?

15.64 •• Se produce una sucesión continua de pulsos ondulatorios sinusoidales en un extremo de una cuerda muy larga, y los pulsos viajan a lo largo de aquella. La onda tiene una frecuencia de 70.0 Hz, amplitud de 5.00 mm y longitud de onda de 0.600 m. *a*) ¿Cuánto tarda la onda en recorrer una distancia de 8.00 m a lo largo de la cuerda? *b*) ¿Cuánto tarda un punto de la cuerda en recorrer una distancia de 8.00 m, una vez que el tren de ondas ha llegado al punto y lo ha puesto en movimiento? *c*) En los incisos *a*) y *b*), ¿cómo cambia el tiempo si se duplica la amplitud?

15.65 ••• CALC Ondas de forma arbitraria. *a*) Explique por qué *cualquier* onda descrita por una función de la forma $y(x, t) = f(x - vt)$ se mueve en la dirección $+x$ con rapidez v. *b*) Demuestre que $y(x, t) = f(x - vt)$ satisface la ecuación de onda, sea cual fuere la forma funcional de f. Para hacerlo, escriba $y(x, t) = f(u)$, donde $u = x - vt$.

Luego, para derivar parcialmente $y(x, t)$, utilice la regla de la cadena:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df(u)}{du}(-v)$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df(u)}{du}$$

c) Un pulso de onda está descrito por la función $y(x, t) = De^{-(Bx - Ct)^2}$, donde B, C y D son constantes positivas. Calcule la rapidez de esta onda.

15.66 ••• **PA** Un alambre de cobre vertical, de 1.20 m de largo y de calibre 18 (diámetro de 1.024 mm) tiene atada una esfera de 100.0 N. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda del tercer armónico para este alambre? *b*) Ahora una esfera de 500.0 N *sustituye* la esfera original. ¿Cuál es el cambio en la longitud de onda del tercer armónico provocado por la sustitución de la esfera ligera por la más pesada? (*Sugerencia:* Véase la tabla 11.1 sobre el módulo de Young).

15.67 • *a*) Demuestre que la ecuación (15.25) también puede escribirse como $P_{\text{med}} = \frac{1}{2}Fk\omega A^2$, donde k es el número de onda. *b*) Si la tensión F en la cuerda se cuadruplica en tanto que la amplitud A se mantiene igual, ¿cómo deberán cambiar k y ω para mantener constante la potencia media? [*Sugerencia:* Recuerde la ecuación (15.6)].

15.68 ••• **CALC** La ecuación (15.7) para una onda sinusoidal puede hacerse más general incluyendo un ángulo de fase ϕ, donde $0 \le \phi \le 2\pi$ (en radianes), de modo que la función de onda $y(x, t)$ se convierte en

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t + \phi)$$

a) Dibuje la onda en función de x en $t = 0$ para $\phi = 0$, $\phi = \pi/4$, $\phi = \pi/2$, $\phi = 3\pi/4$ y $\phi = 3\pi/2$. *b*) Calcule la velocidad transversal $v_y = \partial y/\partial t$. *c*) En $t = 0$, una partícula de la cuerda que está en $x = 0$ tiene un desplazamiento de $y = A/\sqrt{2}$. ¿Basta esta información para determinar el valor de ϕ? Si además sabemos que una partícula en $x = 0$ se mueve hacia $y = 0$ en $t = 0$, ¿qué valor tiene ϕ? *d*) Explique en una forma general qué debe saber acerca del comportamiento de la onda en un instante dado, para determinar el valor de ϕ.

15.69 ••• Una onda sinusoidal transversal viaja por una cuerda con longitud de 8.00 m y masa de 6.00 g. Su rapidez es de 30.0 m/s y su longitud de onda es de 0.200 m. *a*) ¿Qué amplitud debe tener la onda para que su potencia media sea de 50.0 W? *b*) En esta misma cuerda, si la amplitud y la longitud de onda son las del inciso *a*), ¿qué potencia media tendrá la onda si la tensión se aumenta de modo que la rapidez de la onda sea el doble?

15.70 ••• **CALC** **Energía en un pulso triangular.** Un pulso ondulatorio triangular en una cuerda tensada viaja en la dirección $+x$ con rapidez v. La tensión en la cuerda es F y la densidad lineal de masa de la cuerda es μ. En $t = 0$, la forma del pulso está dada por

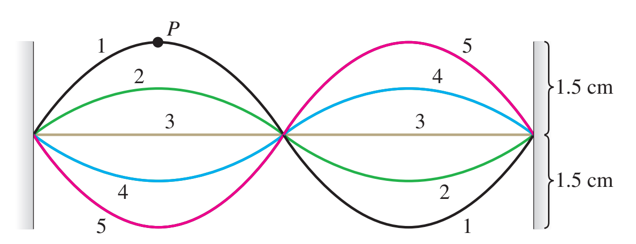
$$y(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -L \\ h(L + x)/L & \text{para } -L < x < 0 \\ h(L - x)/L & \text{para } 0 < x < L \\ 0 & \text{para } x > L \end{cases}$$

a) Dibuje el pulso en $t = 0$. *b*) Determine la función de onda $y(x, t)$ en todos los instantes t. *c*) Calcule la potencia instantánea de la onda. Demuestre que la potencia es cero excepto cuando $-L < (x - vt) < L$ y que es constante en este intervalo. Determine el valor de esta potencia constante.

15.71 ••• **CALC** **Potencia instantánea en una onda.** *a*) Elabore una gráfica de $y(x, t)$ dada por la ecuación (15.7) como función de x para un instante dado t (digamos, $t = 0$). En los mismos ejes, grafique la potencia instantánea $P(x, t)$ dada por la ecuación (15.23). *b*) Explique la conexión entre la pendiente de la gráfica de $y(x, t)$ contra x y el valor de $P(x, t)$. En particular, explique qué está sucediendo en los puntos donde $P = 0$, donde no hay transferencia instantánea de energía. *c*) La cantidad $P(x, t)$ siempre tiene el mismo signo. ¿Qué implica esto acerca de la dirección del flujo de energía? *d*) Considere una onda que avanza en la dirección $-x$, para la cual $y(x, t) = A\cos(kx + \omega t)$. Calcule $P(x, t)$ para esta onda, y grafique $y(x, t)$ y $P(x, t)$ en función de x para un instante dado t (digamos, $t = 0$). ¿Qué diferencias surgen al invertir la dirección de la onda?

15.72 •• Una cuerda de 50.0 cm de longitud vibra sometida a una tensión de 1.00 N. La figura P15.72 muestra cinco imágenes estroboscópicas sucesivas de la cuerda. La lámpara produce 5000 destellos por minuto y las observaciones revelan que el desplazamiento máximo se dio en los destellos 1 y 5, sin otros máximos intermedios. *a*) Calcule el periodo, la frecuencia y la longitud de onda de las ondas que viajan por esta cuerda. *b*) ¿En qué modo normal (armónico) vibra la cuerda? *c*) Calcule la rapidez de las ondas viajeras en la cuerda. *d*) ¿Con qué rapidez se está moviendo el punto P cuando la cuerda está en **i.** la posición 1 y **ii.** la posición 3? *e*) Calcule la masa de la cuerda (véase la sección 15.3).

Figura **P15.72**



15.73 • **Nodos en el tendedero.** El primo Morton está jugando otra vez con la cuerda del ejemplo 15.2 (sección 15.3). Un extremo está sujeto a un poste vertical. Morton sostiene con la mano el otro extremo y produce ondas relativamente lentas, de 0.720 m/s, en la cuerda. Él encuentra varias frecuencias con las que puede oscilar el extremo de la cuerda, de modo que una pinza ligera que está a 45.0 cm del poste no se mueva. Determine esas frecuencias.

15.74 ••• **CALC** Una cuerda de guitarra vibra en su modo fundamental, con nodos en sus extremos. La longitud del segmento de cuerda que vibra libremente es de 0.386 m. La aceleración transversal máxima de un punto en el punto medio del segmento es de 8.40×10^3 m/s^2, y la velocidad transversal máxima es de 3.80 m/s. *a*) Calcule la amplitud de esta onda estacionaria. *b*) ¿Qué rapidez tienen las ondas viajeras transversales en esta cuerda?

15.75 •• **CALC** Una cuerda que está en el eje $+x$ tiene un extremo libre en $x = 0$. *a*) Siguiendo pasos similares a los usados para deducir la ecuación (15.28), demuestre que una onda viajera incidente de la forma $y(x, t) = A\cos(kx + \omega t)$ genera una onda estacionaria $y(x, t) = 2A\cos\omega t\cos kx$. *b*) Demuestre que la onda estacionaria tiene un antinodo en su extremo libre ($x = 0$). *c*) Calcule el desplazamiento, la rapidez y la aceleración máximos del extremo libre de la cuerda.

15.76 •• Una cuerda con ambos extremos fijos está vibrando en su tercer armónico. Las ondas tienen una rapidez de 192 m/s y una frecuencia de 240 Hz. La amplitud de la onda estacionaria en un antinodo es de 0.400 cm. *a*) Calcule la amplitud del movimiento de los puntos de la cuerda a una distancia de **i.** 40.0 cm; **ii.** 20.0 cm, y **iii.** 10.0 cm del extremo izquierdo de la cuerda. *b*) En cada uno de los puntos del inciso *a*), ¿cuánto tiempo tarda la cuerda en ir de su mayor desplazamiento hacia arriba, hasta su mayor desplazamiento hacia abajo?

c) Calcule la velocidad y la aceleración transversales máximas de la cuerda en cada uno de los puntos del inciso *a*).

15.77 ••• Un alambre de acero, uniforme y cilíndrico, de 55.0 cm de largo y 1.14 mm de diámetro, está fijo por ambos extremos. ¿A qué tensión debe ajustarse de manera que, cuando vibre en su primer sobretono, produzca la nota re sostenido cuya frecuencia es de 311 Hz? Suponga que el alambre se estira una cantidad insignificante. (*Sugerencia:* Véase la tabla 12.1).

15.78 • **Resistencia al esfuerzo.** Un hilo o una cuerda se rompen si se someten a un esfuerzo de tensión excesivo [ecuación (11.8)]. Las cuerdas más gruesas pueden resistir una mayor tensión sin romperse ya que, cuanto mayor sea el grosor, mayor será el área transversal y menor será el esfuerzo. Un tipo de acero tiene densidad de 7800 kg/m^3 y se rompe si el esfuerzo de tensión excede 7.0×10^8 N/m^2. Se desea hacer una cuerda para guitarra con 4.0 g de este tipo de acero. En uso la cuerda debe soportar una tensión de 900 N sin romperse. *a*) Determine la longitud máxima y el radio mínimo que puede tener la cuerda. *b*) Calcule la frecuencia fundamental posible más alta de las ondas estacionarias en esta cuerda, si la longitud total de la cuerda puede vibrar.

15.79 ••• **Ondas estacionarias combinadas.** Una cuerda de guitarra de longitud L se pulsa, de modo que la onda total producida es la suma de la fundamental y el segundo armónico. Es decir, la onda estacionaria está dada por:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

donde

$$y_1(x, t) = C \operatorname{sen} \omega_1 t \operatorname{sen} k_1 x$$
$$y_2(x, t) = C \operatorname{sen} \omega_2 t \operatorname{sen} k_2 x$$

siendo $\omega_1 = vk_1$ y $\omega_2 = vk_2$. *a*) ¿En qué valores de x están los nodos de y_1? *b*) ¿Y los de y_2? *c*) Grafique la onda total en $t = 0$, $t = \frac{1}{8}f_1$, $t = \frac{1}{4}f_1$, $t = \frac{3}{8}f_1$ y $t = \frac{1}{2}f_1$. *d*) ¿La suma de las dos ondas estacionarias y_1 y y_2 produce una onda estacionaria? Explique su respuesta.

15.80 •• PA Una pesada escultura de aluminio sólido se cuelga de un alambre de acero, la frecuencia fundamental para ondas estacionarias transversales en el alambre es de 250.0 Hz. Luego, la escultura (no el alambre) se sumerge totalmente en agua. *a*) Calcule la nueva frecuencia fundamental. (*Sugerencia:* Véase la tabla 12.1). *b*) ¿Por qué es una buena aproximación tratar el alambre como si estuviera fijo en ambos extremos?

15.81 ••• PA Una gran roca que pesa 164.0 N está suspendida del extremo inferior de un alambre delgado de 3.00 m de longitud. La densidad de la roca es de 3200 kg/m^3. La masa del alambre es lo suficientemente pequeña para ignorar su efecto sobre la tensión en el alambre. El extremo superior del alambre está fijo. Cuando la roca está en el aire, la frecuencia fundamental de las ondas estacionarias transversales en el alambre es de 42.0 Hz. Cuando la roca está completamente sumergida en un líquido, con la parte superior debajo de la superficie, la frecuencia fundamental del alambre es de 28.0 Hz. ¿Cuál es la densidad del líquido?

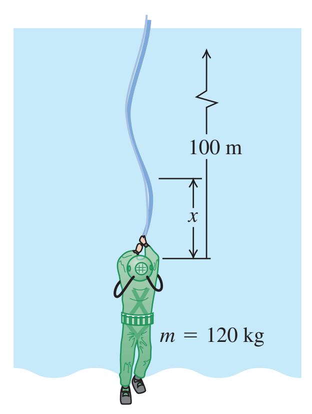
15.82 •• **Afinación de un instrumento.** Una músico afina la cuerda correspondiente al do de su instrumento a una frecuencia fundamental de 65.4 Hz. La parte vibrante de la cuerda tiene una longitud de 0.600 m y una masa de 14.4 g. *a*) ¿Con qué tensión debe estirarse? *b*) ¿Qué porcentaje se debe aumentar la tensión para elevar la frecuencia de 65.4 a 73.4 Hz, correspondiente a un aumento de tono de do a re?

15.83 ••• Un tipo de acero tiene densidad de 7.8×10^3 kg/m^3 y un esfuerzo de rotura de 7.0×10^8 N/m^2. Se desea hacer una cuerda cilíndrica para guitarra con 4.00 g de este tipo de acero. *a*) ¿Cuáles son la longitud y el radio de la cuerda más larga y delgada que puede soportar una tensión de 900 N sin romperse? *b*) Calcule la mayor frecuencia fundamental que esta cuerda puede tener.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

15.84 ••• PA CALC Un buzo está suspendido bajo la superficie del lago Loch Ness por un cable de 100 m conectado a una lancha en la superficie (figura P15.84). El buzo y su traje tienen una masa total de 120 kg y un volumen de 0.0800 m^3. El cable tiene un diámetro de 2.00 cm y una densidad lineal de masa $\mu = 1.10$ kg/m. El buzo cree ver algo que se mueve en las profundidades turbias y tira del extremo del cable horizontalmente para enviar ondas transversales por el cable, como señal para sus compañeros en el yate. *a*) Calcule la tensión en el cable en el punto donde está conectado al buzo. No olvide incluir la fuerza de flotabilidad que el agua (densidad de 1000 kg/m^3) ejerce sobre él. *b*) Calcule la tensión en el cable a una distancia x arriba del buzo, incluyendo en el cálculo la fuerza de flotabilidad sobre el cable. *c*) La rapidez de las ondas transversales en el cable está dada por $v = \sqrt{F/\mu}$ (ecuación 15.13). Por lo tanto, la rapidez varía a lo largo del cable, ya que la tensión no es constante. (Esta expresión no considera la fuerza de amortiguación que el agua ejerce sobre el cable en movimiento). Integre para obtener el tiempo requerido para que la primera señal llegue a la superficie.

Figura **P15.84**



15.85 ••• CALC *a*) Demuestre que, para una onda en una cuerda, la energía cinética *por unidad de longitud de la cuerda* es

$$u_k(x, t) = \tfrac{1}{2}\mu v_y{}^2(x, t) = \tfrac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t}\right)^2$$

donde μ es la masa por unidad de longitud. *b*) Calcule $u_k(x, t)$ para una onda sinusoidal dada por la ecuación (15.7). *c*) También hay energía potencial elástica en la cuerda, asociada con el trabajo requerido para deformar y estirar la cuerda. Considere un segmento corto de la cuerda en la posición x cuya longitud no estirada es Δx, como en la figura 15.13. Si despreciamos la (pequeña) curvatura del segmento, su pendiente es $\partial y(x, t)/\partial x$. Suponga que el desplazamiento de la cuerda con respecto al equilibrio es pequeño, así que $\partial y/\partial x$ tiene magnitud mucho menor que 1. Demuestre que la longitud estirada del segmento es aproximadamente

$$\Delta x\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}\right)^2\right]$$

(*Sugerencia:* Use la relación $\sqrt{1 + u} \approx 1 + \frac{1}{2}u$, válida para $|u| \ll 1$.) *d*) La energía potencial almacenada en el segmento es igual al trabajo efectuado por la tensión de la cuerda F (que actúa a lo largo de la cuerda) para estirar el segmento de su longitud no estirada Δx a la longitud determinada en el inciso *c*). Calcule este trabajo, y demuestre que la energía potencial *por unidad de longitud de la cuerda* es

$$u_p(x, t) = \tfrac{1}{2}F\left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}\right)^2$$

e) Calcule $u_p(x, t)$ para una onda sinusoidal dada por la ecuación (15.7). *f*) Demuestre que $u_k(x, t) = u_p(x, t)$ para toda x y t. *g*) Grafique $y(x, t)$, $u_k(x, t)$ y $u_p(x, t)$ en función de x para $t = 0$; use los mismos ejes para las tres funciones. Explique por qué u_k y u_p son máximos donde y es cero, y viceversa. *h*) Demuestre que la potencia instantánea en la onda, dada por la ecuación (15.22), es igual a la energía total por unidad de longitud multiplicada por la rapidez de onda v. Explique por qué este resultado es lógico.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

La potencia de una onda mecánica depende de su frecuencia y su amplitud [véase la ecuación (15.25)].

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

15.1 Respuesta: i. La "ola" viaja horizontalmente de un espectador al siguiente en cada fila del estadio, pero el desplazamiento de cada espectador es verticalmente hacia arriba. Puesto que el desplazamiento es perpendicular a la dirección en que la onda viaja, la onda es transversal.

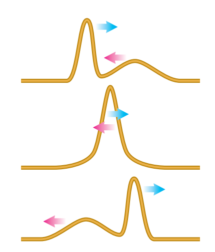
15.2 Respuesta: iv. La rapidez v de las ondas en una cuerda no depende de su longitud de onda. Podemos rescribir la relación $v = \lambda f$ como $f = v/\lambda$, la cual nos indica que si se duplica la longitud de onda λ, la frecuencia f se reduce a la mitad.

15.3 Respuestas: *a)* $\frac{2}{8}T$, *b)* $\frac{4}{8}T$, *c)* $\frac{5}{8}T$ Puesto que la onda es sinusoidal, cada punto en la cuerda oscila con movimiento armónico simple (MAS). Por lo que podemos aplicar todas las ideas del capítulo 14 acerca del MAS a la onda descrita en la figura 15.8. *a)* Una partícula con MAS tiene su rapidez máxima cuando pasa por la posición de equilibrio ($y = 0$ en la figura 15.8). La partícula en el punto A se mueve hacia arriba en esta posición en $t = \frac{2}{8}T$. *b)* En MAS vertical la aceleración máxima *hacia arriba* ocurre cuando una partícula está en su desplazamiento máximo *hacia abajo*. Esto sucede para la partícula en el punto B en $t = \frac{4}{8}T$. *c)* Una partícula en MAS vertical tiene una aceleración *hacia abajo* cuando su desplazamiento es *hacia arriba*. La partícula en C tiene un desplazamiento hacia arriba y se mueve hacia abajo en $t = \frac{5}{8}T$.

15.4 Respuesta: ii. La relación $v = \sqrt{F/\mu}$ [ecuación (15.13)] indica que la rapidez de onda es máxima en una cuerda con densidad lineal de masa mínima. Esa es la cuerda más delgada, que tiene menor masa m y, por lo tanto, menor densidad lineal de masa $\mu = m/L$ (todas las cuerdas tienen la misma longitud).

15.5 Respuesta: iii, iv, ii, i. La ecuación (15.25) indica que la potencia media en una onda sinusoidal en una cuerda es $P_{med} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\omega^2 A^2$. Las cuatro cuerdas son idénticas, así que todas tienen la misma masa, la misma longitud y la misma densidad de masa lineal μ. la frecuencia f es la misma para cada onda, así como la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$. Por lo tanto, la potencia media de onda para cada cuerda es proporcional a la raíz cuadrada de la tensión de la cuerda F y el cuadrado de la amplitud A. En comparación con la cuerda **i**, la potencia media en cada cuerda es **ii.** $\sqrt{4} = 2$ veces mayor; **iii.** $4^2 = 16$ veces mayor; y **iv.** $\sqrt{2}(2)^2 = 4\sqrt{2}$ veces mayor.

15.6 Respuesta:



15.7 Respuestas: sí, sí Un aumento de la frecuencia al doble reduce la longitud de onda a la mitad. Por lo tanto, el espaciado entre nodos (igual a $\lambda/2$) también es de la mitad. Hay nodos en todas las posiciones anteriores, aunque también hay un nuevo nodo entre cada par de nodos anteriores.

15.8 Respuestas: n = 1, 3, 5, … Al tocar la cuerda en el centro, se está provocando que haya un nodo en el centro. Por ello, solamente estarán permitidas ondas estacionarias que tengan un nodo en $x = L/2$. Por la figura 15.26, se observa que se excluyen los modos normales $n = 1, 3, 5, \ldots$

Problema práctico

Respuestas: *a)* $F(r) = \dfrac{m\omega^2}{2L}(L^2 - r^2)$

b) $v(r) = \omega\sqrt{\dfrac{L^2 - r^2}{2}}$

c) $\dfrac{\pi}{\omega\sqrt{2}}$

SONIDO Y OÍDO





? A la mayoría de las personas les gusta escuchar música, pero difícilmente a alguien le agrada oír ruido. ¿Cuál es la diferencia física entre el sonido musical y el ruido?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir una onda sonora en términos de los desplazamientos de una partícula o de las fluctuaciones de presión.
- Cómo calcular la rapidez de las ondas sonoras en diferentes materiales.
- Cómo determinar la intensidad de una onda sonora.
- Qué determina la frecuencia del sonido producido por un órgano o una flauta.
- Cómo ocurre la resonancia en los instrumentos musicales.
- Qué sucede cuando se traslapan las ondas sonoras de diferentes fuentes.
- Cómo describir lo que ocurre cuando se combinan dos ondas sonoras de frecuencias ligeramente diferentes.
- Por qué el tono de una sirena cambia conforme se va alejando.

De todas las ondas mecánicas que se dan en la naturaleza, las más importantes en nuestra vida diaria son las ondas longitudinales en un medio (generalmente aire) llamadas ondas *sonoras*. La razón es que el oído humano es muy sensible y puede detectar ondas sonoras incluso de muy baja intensidad. Además de su uso en la comunicación verbal, nuestros oídos nos permiten captar una multitud de señales de nuestro entorno, desde el grato sonido de la preparación de alimentos, hasta el sonido de advertencia de un vehículo que se acerca. La capacidad para escuchar a un depredador nocturno fue fundamental para la supervivencia de nuestros antepasados, así que no es exagerado decir que los seres humanos debemos la existencia a nuestro sentido del oído altamente evolucionado.

Hasta ahora, hemos descrito las ondas mecánicas primordialmente en términos de desplazamiento; no obstante, en general, resulta más adecuado describir las ondas sonoras en términos de fluctuaciones de *presión*, sobre todo porque el oído es sensible, principalmente, a cambios de presión. Examinaremos las relaciones entre desplazamiento, fluctuación de presión e intensidad, así como los vínculos entre estas cantidades y la percepción humana del sonido.

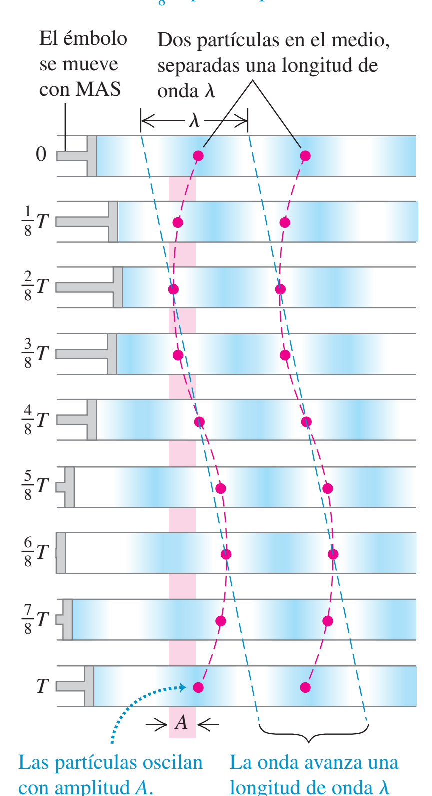
Cuando una fuente de sonido o un receptor se mueven en el aire, el receptor podría registrar una frecuencia distinta de la emitida por la fuente. Este es el efecto Doppler, el cual tiene aplicaciones importantes en medicina y en tecnología.

16.1 Ondas sonoras

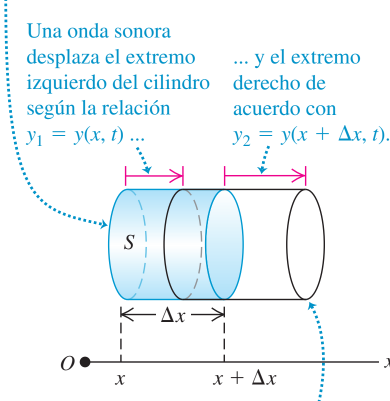
La definición más general del **sonido** es una onda longitudinal en un medio. Lo que más nos interesa en este capítulo son las ondas sonoras en el aire; aunque el sonido puede viajar a través de cualquier gas, líquido o sólido. Quizás el lector conozca muy bien la propagación del sonido a través de un sólido, si los altavoces del aparato de sonido del vecino están junto a la pared de su casa.

Las ondas sonoras más sencillas son las sinusoidales (o senoidales), las cuales tienen frecuencia, amplitud y longitud de onda definidas. El oído humano es sensible a las ondas en el intervalo de frecuencias de 20 a 20,000 Hz, llamado **gama audible**, pero

16.1 Onda sinusoidal longitudinal que viaja hacia la derecha en un fluido. (Compare con la figura 15.7).



16.2 Al propagarse una onda sonora a lo largo del eje x, los extremos izquierdo y derecho experimentan desplazamientos distintos y_1 y y_2.



también usamos el término "sonido" para ondas similares con frecuencias mayores (**ultrasónicas**) y menores (**infrasónicas**).

Las ondas sonoras suelen dispersarse en todas direcciones a partir de la fuente de sonido, con una amplitud que depende de la dirección y la distancia de la fuente. Volveremos a este asunto en la siguiente sección. Por ahora, nos concentraremos en el caso idealizado de una onda sonora que se propaga solo en la dirección $+x$. Como vimos en la sección 15.3, esta onda se describe con una función de onda $y(x, t)$, que da información del desplazamiento instantáneo y de una partícula en el medio, en la posición x en el instante t. Si la onda es sinusoidal, podemos expresarla usando la ecuación (15.7):

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t) \quad \text{(onda sonora que se propaga en la dirección } +x\text{)} \tag{16.1}$$

Recuerde que, en una onda longitudinal, los desplazamientos son *paralelos* a la dirección en que viaja, así que las distancias x y y se miden paralelas entre sí, no perpendicularmente como en las ondas transversales. La amplitud A es el desplazamiento máximo de una partícula en el medio con respecto a su posición de equilibrio (figura 16.1). Por eso, A también se conoce como **amplitud de desplazamiento**.

Ondas sonoras como fluctuaciones de presión

Las ondas sonoras también pueden describirse en términos de variaciones de *presión* en varios puntos. En una onda sonora sinusoidal en el aire, la presión fluctúa por arriba y por debajo de la presión atmosférica p_a en forma sinusoidal con la misma frecuencia que los movimientos de las partículas de aire. El oído humano funciona detectando estas variaciones de presión. Una onda sonora que entra en el canal auditivo ejerce una presión variable sobre un lado del tímpano; el aire del otro lado, comunicado con el exterior por la trompa de Eustaquio, está a presión atmosférica. La diferencia de presión entre ambos lados del tímpano lo pone en movimiento. Los micrófonos y dispositivos similares por lo regular también detectan diferencias de presión, no desplazamientos, así que resulta muy útil establecer una relación entre estas dos descripciones.

Sea $p(x, t)$ la variación de presión instantánea en una onda sonora en cualquier punto x en el instante t. Es decir, $p(x, t)$ es la cantidad en que la presión *difiere* de la presión atmosférica normal p_a. Pensemos en $p(x, t)$ como la *presión manométrica* definida en la sección 12.2, que puede ser positiva o negativa. La presión *absoluta* en un punto es entonces $p_a + p(x, t)$.

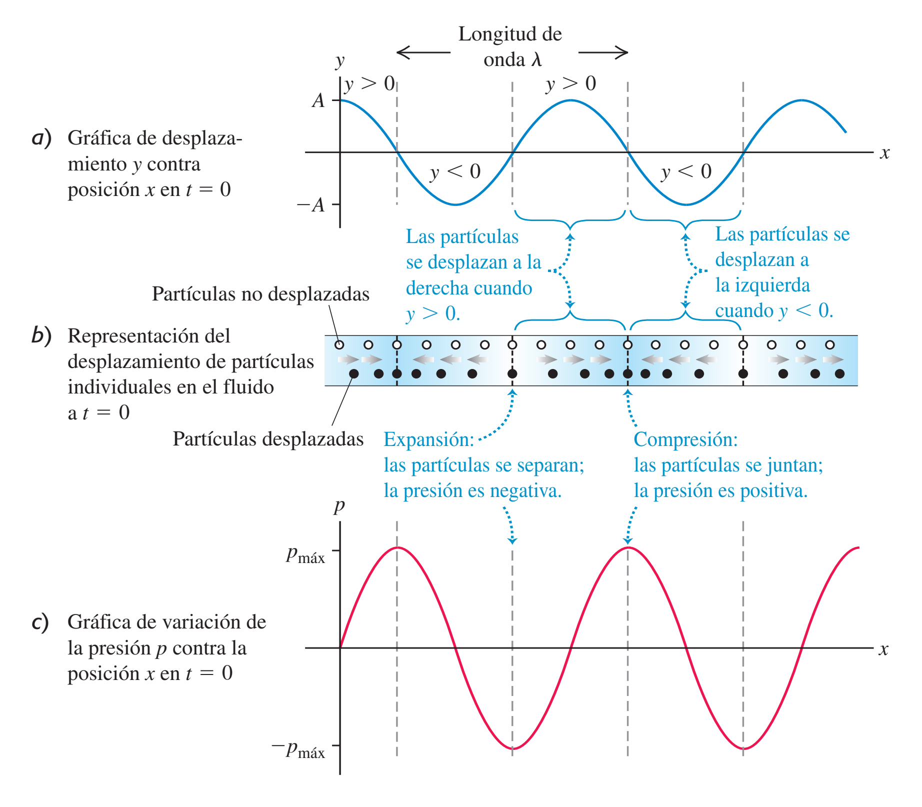
Para ver el vínculo entre la variación de presión $p(x, t)$ y el desplazamiento $y(x, t)$ en una onda sonora que se propaga en la dirección $+x$, considere un cilindro imaginario de un material (gas, líquido o sólido) con área transversal S y su eje a lo largo de la dirección de propagación (figura 16.2). Si no está presente una onda sonora, el cilindro tiene longitud Δx y volumen $V = S\,\Delta x$, el volumen sombreado en la figura 16.2. Si una onda está presente, en el tiempo t el extremo del cilindro que inicialmente estaba en x tiene un desplazamiento dado por $y_1 = y(x, t)$, y el extremo que estaba en $x + \Delta x$ experimenta un desplazamiento dado por $y_2 = y(x + \Delta x, t)$; esto se indica con líneas rojas. Si $y_2 > y_1$ como en la figura 16.2, el volumen del cilindro aumentó, originando una disminución de la presión. Si $y_2 < y_1$, el volumen disminuyó, y la presión aumentó. Si $y_2 = y_1$, el cilindro simplemente se desplazó a la izquierda o a la derecha; no hay cambio de volumen ni variación de presión. La fluctuación de presión depende de la *diferencia* entre el desplazamiento de puntos vecinos del medio.

Cuantitativamente, el cambio de volumen ΔV del cilindro es

$$\Delta V = S(y_2 - y_1) = S[y(x + \Delta x, t) - y(x, t)]$$

En el límite en que $\Delta x \to 0$, el cambio fraccionario de volumen dV/V (cambio de volumen dividido entre volumen original) es

$$\frac{dV}{V} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S[y(x + \Delta x, t) - y(x, t)]}{S\,\Delta x} = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \tag{16.2}$$



16.3 Tres formas de describir una onda sonora.

El cambio de volumen fraccionario se relaciona con la variación de presión mediante el módulo volumétrico B que, por definición [ecuación (11.13)], es $B = -p(x, t)/(dV/V)$ (véase la sección 11.4). Despejando $p(x, t)$, tenemos

$$p(x, t) = -B\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \tag{16.3}$$

El signo negativo se debe a que, cuando $\partial y(x, t)/\partial x$ es positiva, el desplazamiento es mayor en $x + \Delta x$ que en x, lo cual implica un aumento de volumen y una *disminución* de la presión.

Al evaluar $\partial y(x, t)/\partial x$ para la onda sinusoidal de la ecuación (16.1), vemos que

$$p(x, t) = BkA \operatorname{sen}(kx - \omega t) \tag{16.4}$$

La figura 16.3 muestra a $y(x, t)$ y $p(x, t)$ para una onda sonora sinusoidal en $t = 0$. También muestra cómo partículas individuales de la onda se desplazan en ese instante. Si bien $y(x, t)$ y $p(x, t)$ describen la misma onda, estas funciones están desfasadas un cuarto de ciclo; en un instante dado, el desplazamiento es máximo donde la variación de presión es cero, y viceversa. En particular, observe que las compresiones (puntos de máxima presión y densidad) y las expansiones (puntos de mínima presión y densidad) son puntos con desplazamiento igual a *cero*.

CUIDADO **Gráficas de una onda sonora** Recuerde que las gráficas de la figura 16.3 muestran la onda en *un* instante. Puesto que la onda se está propagando en la dirección $+x$, conforme pasa el tiempo, los patrones de onda de las funciones $y(x, t)$ y $p(x, t)$ se desplazan a la derecha con la rapidez de onda $v = \omega/k$. Por lo tanto, las posiciones de las compresiones y expansiones también se desplazan a la derecha con la misma rapidez. Las partículas, en cambio, simplemente oscilan hacia adelante y hacia atrás con movimiento armónico simple, como se observa en la figura 16.1.

La ecuación (16.4) indica que la cantidad BkA representa la variación máxima de presión, que llamamos **amplitud de presión** y denotamos con $p_{máx}$:

$$p_{máx} = BkA \qquad \text{(onda sonora sinusoidal)} \tag{16.5}$$

La amplitud de presión es directamente proporcional al desplazamiento A, como esperaríamos, y también depende de la longitud de onda. Las ondas con longitud de onda λ más corta (número de onda $k = 2\pi/\lambda$ más grande) tienen mayores variaciones de presión para una amplitud dada porque los máximos y mínimos están más cerca unos de otros. Un medio con un módulo volumétrico B grande requiere una amplitud de presión relativamente grande, para una amplitud de desplazamiento dada, si B es grande, implica un medio menos compresible; es decir, requiere un cambio mayor en la presión para un cambio de volumen determinado.

Ejemplo 16.1 Amplitud de una onda sonora en el aire



En una onda sonora sinusoidal de intensidad moderada, las variaciones máximas de presión son del orden de 3.0×10^{-2} Pa por arriba y por debajo de la presión atmosférica. Calcule el desplazamiento máximo correspondiente, si la frecuencia es de 1000 Hz. En el aire, a presión atmosférica y densidad normales, la rapidez del sonido es de 344 m/s y el módulo volumétrico es de 1.42×10^5 Pa.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema implica la relación entre dos formas de describir una onda sonora: en términos del desplazamiento y en términos de la presión. La incógnita es la amplitud del desplazamiento A. Nos dan la amplitud de presión $p_{\text{máx}}$, la rapidez v de la onda, la frecuencia f y el módulo volumétrico B. La incógnita A está relacionada con $p_{\text{máx}}$ en la ecuación (16.5). Usamos la relación $\omega = vk$ [ecuación (15.6)] para determinar el número de onda k a partir de v y la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (15.6),

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{(2\pi \text{ rad})(1000 \text{ Hz})}{344 \text{ m/s}} = 18.3 \text{ rad/m}$$

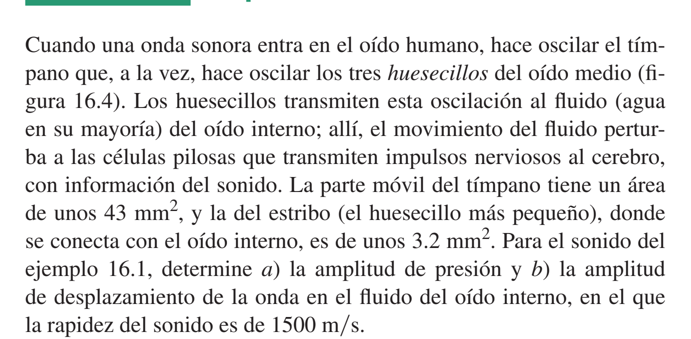
Entonces, según la ecuación (16.5), el desplazamiento máximo es

$$A = \frac{p_{\text{máx}}}{Bk} = \frac{3.0 \times 10^{-2} \text{ Pa}}{(1.42 \times 10^5 \text{ Pa})(18.3 \text{ rad/m})} = 1.2 \times 10^{-8} \text{ m}$$

EVALUAR: La amplitud de este desplazamiento es de solo $\frac{1}{100}$ del tamaño de una célula humana aproximadamente. El oído en realidad detecta variaciones de presión; la detección de estos minúsculos desplazamientos es indirecta.

Ejemplo 16.2 Amplitud de una onda sonora en el oído interno



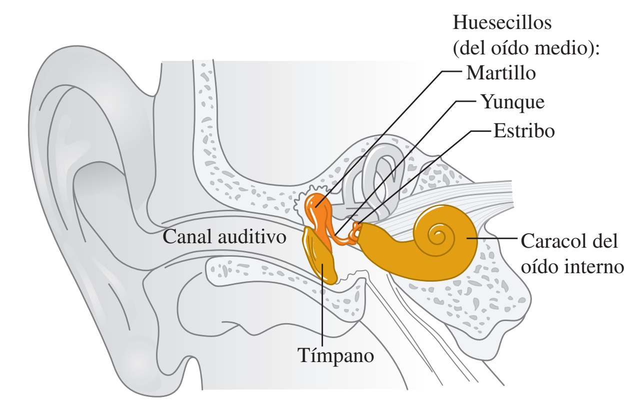


Cuando una onda sonora entra en el oído humano, hace oscilar el tímpano que, a la vez, hace oscilar los tres *huesecillos* del oído medio (figura 16.4). Los huesecillos transmiten esta oscilación al fluido (agua en su mayoría) del oído interno; allí, el movimiento del fluido perturba a las células pilosas que transmiten impulsos nerviosos al cerebro, con información del sonido. La parte móvil del tímpano tiene un área de unos 43 mm^2, y la del estribo (el huesecillo más pequeño), donde se conecta con el oído interno, es de unos 3.2 mm^2. Para el sonido del ejemplo 16.1, determine *a*) la amplitud de presión y *b*) la amplitud de desplazamiento de la onda en el fluido del oído interno, en el que la rapidez del sonido es de 1500 m/s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Aunque la onda sonora ahora viaja por un líquido y no por el aire, son válidos los mismos principios y relaciones entre las propiedades de la onda. Podemos despreciar la masa de los huesecillos (unos 58 mg = 5.8×10^{-5} kg), así que la fuerza ejercida por ellos sobre el fluido del oído interno es la misma que la ejercida sobre el tímpano y los huesecillos por la onda sonora incidente. (Usamos esta misma idea en los capítulos 4 y 5, cuando dijimos que la tensión es la misma en los dos extremos de una cuerda de masa despreciable). Por lo tanto, la amplitud de presión en el oído interno, $p_{\text{máx (oído interno)}}$, es mayor que en el aire exterior, $p_{\text{máx (aire)}}$, porque se ejerce la misma fuerza sobre un área menor (el área del estribo en lugar del área del tímpano). Teniendo $p_{\text{máx (oído interno)}}$, obtendremos la amplitud del desplazamiento $A_{\text{oído interno}}$ empleando la ecuación (16.5).

16.4 Anatomía del oído humano. El oído medio tiene el tamaño de una canica pequeña; los huesecillos (martillo, yunque y estribo) son los huesos más pequeños del cuerpo humano.



EJECUTAR: *a*) Utilizando el área del tímpano y la amplitud de presión en el aire obtenida en el ejemplo 16.1, vemos que la fuerza máxima ejercida por la onda sonora en el aire sobre el tímpano es $F_{\text{máx}} = p_{\text{máx (aire)}} S_{\text{tímpano}}$. Por lo tanto,

$$p_{\text{máx (oído interno)}} = \frac{F_{\text{máx}}}{S_{\text{estribo}}} = p_{\text{máx (aire)}} \frac{S_{\text{tímpano}}}{S_{\text{estribo}}}$$

$$= (3.0 \times 10^{-2} \text{ Pa}) \frac{43 \text{ mm}^2}{3.2 \text{ mm}^2} = 0.40 \text{ Pa}$$

b) Para calcular el desplazamiento máximo $A_{\text{oído interno}}$, usamos $A = p_{\text{máx}}/Bk$ como en el ejemplo 16.1. El fluido del oído interno es principalmente agua, que tiene un módulo volumétrico B mucho mayor que el del aire. De acuerdo con la tabla 11.2, la compresibilidad del agua (desafortunadamente también llamada k) es de $45.8 \times 10^{-11}\ \text{Pa}^{-1}$, así que $B_{\text{fluido}} = 1/(45.8 \times 10^{-11}\ \text{Pa}^{-1}) = 2.18 \times 10^{9}$ Pa.

La onda en el oído interno tiene la misma frecuencia angular ω que la onda en el aire, porque el aire, el tímpano, los huesecillos y el fluido del oído interno oscilan juntos (véase el ejemplo 15.8 de la sección 15.8). Pero como la rapidez v de la onda es mayor en el oído interno que en el aire (1500 m/s contra 344 m/s), el número de onda $k = \omega/v$ es más pequeño. Utilizando el valor de ω del ejemplo 16.1

$$k_{\text{oído interno}} = \frac{\omega}{v_{\text{oído interno}}} = \frac{(2\pi\ \text{rad})(1000\ \text{Hz})}{1500\ \text{m/s}} = 4.2\ \text{rad/m}$$

Relacionando todo, tenemos

$$A_{\text{oído interno}} = \frac{p_{\text{máx (oído interno)}}}{B_{\text{fluido}}\,k_{\text{oído interno}}} = \frac{0.40\ \text{Pa}}{(2.18 \times 10^{9}\ \text{Pa})(4.2\ \text{rad/m})}$$
$$= 4.4 \times 10^{-11}\ \text{m}$$

EVALUAR: En el inciso *a*) vimos que los huesecillos aumentan la amplitud de la presión por un factor de $(43\ \text{mm}^2)/(3.2\ \text{mm}^2) = 13$. Esta amplificación contribuye a la sensibilidad del oído humano.

La amplitud de desplazamiento en el oído interno es aún menor que en el aire; sin embargo, lo que mueve las células pilosas son las variaciones de *presión* en el fluido; de este modo, lo que importa es que la amplitud de presión sea mayor en el oído interno que en el aire.

Percepción de las ondas sonoras

Las características físicas de una onda sonora tienen una relación directa con la percepción de ese sonido por un receptor. Para una frecuencia dada, cuanto mayor sea la amplitud de presión de una onda sonora sinusoidal, mayor será el **volumen** percibido. La relación entre la amplitud de presión y el volumen no es sencilla, y varía de una persona a otra. Un factor importante es que el oído no es igualmente sensible a todas las frecuencias de la gama audible. Un sonido de cierta frecuencia puede parecer más fuerte que otro con igual amplitud de presión pero distinta frecuencia. A 1000 Hz, la amplitud de presión mínima perceptible por un oído normal es de aproximadamente 3×10^{-5} Pa; para producir el mismo volumen a 200 o 15,000 Hz, se requieren cerca de 3×10^{-4} Pa. El volumen percibido también depende de la salud del oído. Es natural que con la edad se pierda la sensibilidad a altas frecuencias, pero esto puede agravarse por niveles excesivos de ruido.

La frecuencia de una onda sonora es el factor principal que determina el **tono** de un sonido, la característica que nos permite clasificarlo como "agudo" o "grave". Cuanto más alta sea la frecuencia de un sonido (dentro de la gama audible), más agudo será el tono percibido. La amplitud de presión también ayuda a determinar el tono. Cuando un receptor compara dos ondas sonoras sinusoidales con la misma frecuencia pero diferente amplitud de presión, la de mayor amplitud suele percibirse más fuerte, pero también con un tono ligeramente más grave.

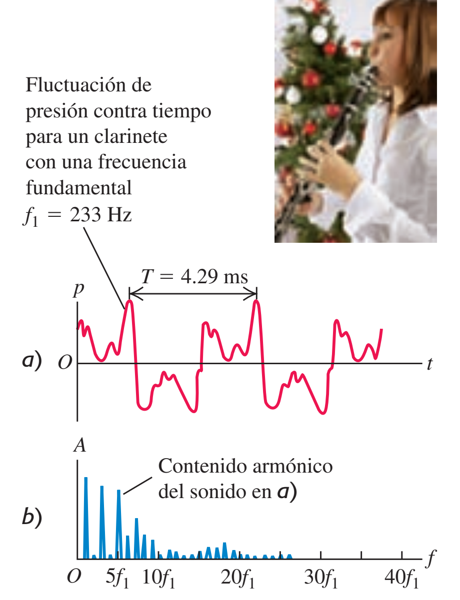
Los sonidos musicales tienen funciones de onda más complicadas que una función seno sencilla. En la figura 16.5*a* se muestra la variación de presión en la onda sonora producida por un clarinete. El patrón es muy complejo porque la columna de aire de un instrumento de aliento como el clarinete vibra con la frecuencia fundamental y muchos armónicos al mismo tiempo. (En la sección 15.8, describimos el mismo comportamiento en una cuerda punteada, frotada o golpeada. Examinaremos la física de los instrumentos de viento en la sección 16.5). La onda sonora producida en el aire circundante tiene la misma cantidad de cada armónico, es decir, un *contenido armónico* similar. La figura 16.5*b* muestra el contenido armónico del sonido de un clarinete. El proceso matemático de traducir una gráfica de presión-tiempo (figura 16.5*a*) en una gráfica de contenido armónico (figura 16.5*b*) se denomina *análisis de Fourier*.

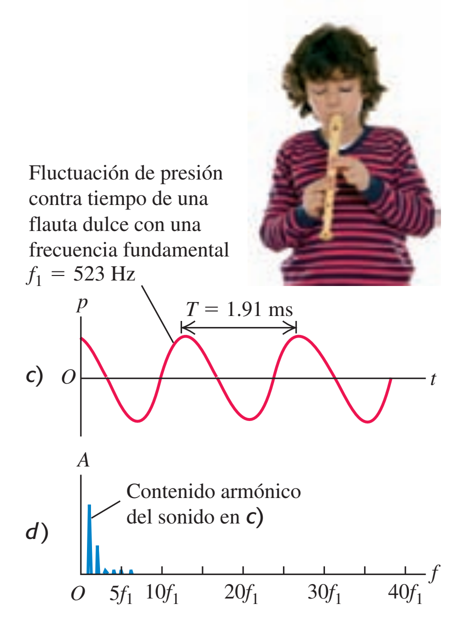
Dos tonos producidos por diferentes instrumentos podrían tener la misma frecuencia fundamental (y por lo tanto el mismo tono), pero sonar distinto debido al contenido de diversos armónicos. La diferencia se llama *color de tono*, *calidad* o **timbre**, y a menudo se describe con términos subjetivos como delgado, dorado, redondo, suave y débil. Un tono rico en armónicos, como el del clarinete (figuras 16.5*a* y *b*), suele sonar "delgado"; mientras que uno que contiene principalmente una fundamental, como el tono de registro alto de las figuras 16.5*c* y *d* es más suave y parecido al de una flauta. El mismo principio se aplica a la voz humana, que es otro ejemplo de instrumento de viento; las vocales "a" y "e" suenan distinto por las diferencias en su contenido armónico.

Aplicación Pérdida del oído por la amplificación del sonido
Debido a la exposición a música considerablemente amplificada, muchos músicos jóvenes populares han sufrido un daño auditivo permanente y tienen el oído característico de individuos de 65 años de edad. Los auriculares de los reproductores musicales personales usados con volumen alto tienen resultados similares en los oídos. ¡Tenga cuidado!



16.5 Diferentes representaciones del sonido de un clarinete [figuras *a*) y *b*)] y una flauta dulce o vertical [*c*) y *d*)]. (Gráficas adaptadas de R. E. Berg y D. G. Stork, *The Physics of Sound*, Prentice-Hall, 1982).





Otro factor que determina la calidad de un tono es el comportamiento al principio (*ataque*) y al final (*decaimiento*) del tono. Un tono de piano comienza con un golpe y luego se desvanece alejándose gradualmente. Un tono de clavicordio, además de tener diferente contenido armónico, comienza mucho más rápido con un chasquido, y los armónicos más altos comienzan antes que los más bajos. Al soltarse la tecla, el sonido se desvanece alejándose con mucho mayor rapidez que en un piano. Se presentan efectos similares en otros instrumentos musicales. En los instrumentos de viento y cuerda, el ejecutante tiene un control considerable sobre el ataque y el decaimiento del tono, y estas características ayudan a definir las cualidades únicas de cada instrumento.

A diferencia de los tonos creados por instrumentos musicales o las vocales del habla humana, el **ruido** es una combinación de *todas* las frecuencias, no solo las que son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental. (Un caso extremo es el "ruido blanco", que contiene cantidades iguales de todas las frecuencias de la gama audible). Como ejemplos están el sonido del viento y el siseo que hacemos al pronunciar la consonante "s".

Evalúe su comprensión de la sección 16.1 Se produce una onda sonora sinusoidal en el aire con un generador de señales electrónico. Luego, se aumenta la frecuencia de la onda de 100 a 400 Hz manteniendo constante la amplitud de presión. ¿Qué efecto tiene esto sobre la amplitud de desplazamiento de la onda sonora?
i. Se cuadruplica; **ii.** se duplica; **iii.** permanece sin cambio; **iv.** se reduce a la mitad; **v.** se reduce a la cuarta parte.



16.2 Rapidez de las ondas sonoras

En la sección 15.4, vimos que la rapidez v de una onda transversal en una cuerda depende de la tensión F en la cuerda y la densidad lineal de masa μ: $v = \sqrt{F/\mu}$. ¿Cuál es la expresión correspondiente para la rapidez de las ondas sonoras en un gas o un líquido? ¿De qué propiedades del medio depende la rapidez?

Podemos hacer una conjetura acertada acerca de estas cuestiones, recordando algo que dijimos en la sección 15.4: para las ondas mecánicas en general, la expresión de la rapidez de onda tiene la forma

$$v = \sqrt{\frac{\text{Fuerza de restitución que vuelve el sistema al equilibrio}}{\text{Inercia que se opone al retorno al equilibrio}}}$$

Una onda sonora en un volumen de fluido genera compresiones y expansiones en el fluido, de modo que el término de fuerza de restitución en la expresión anterior debe tener que ver con lo fácil o difícil que es comprimir el fluido. Esto es precisamente lo que nos dice el módulo volumétrico B del medio. Según la segunda ley de Newton, la inercia está relacionada con la masa. Lo "masivo" de un fluido se describe con su densidad o masa por unidad de volumen, ρ. (La cantidad correspondiente para una cuerda es la masa por unidad de longitud, μ). Por lo tanto, cabe esperar que la rapidez de las ondas sonoras tenga la forma $v = \sqrt{B/\rho}$.

Para verificar nuestra conjetura, deduciremos la rapidez de las ondas sonoras en un fluido dentro de un tubo. Este tema es importante, ya que todos los instrumentos musicales de viento son básicamente tubos, en los que una onda longitudinal (sonido) se propaga en un fluido (aire) (figura 16.6). La voz funciona con el mismo principio: ondas sonoras que se propagan en el tracto vocal, que es básicamente un tubo lleno de aire conectado a los pulmones en un extremo (la laringe) y al aire exterior en el otro (la boca). Los pasos de nuestra deducción son similares a los que usamos en la sección 15.4 para obtener la rapidez de ondas transversales, así que sería útil repasar esa sección.

Rapidez del sonido en un fluido

La figura 16.7 muestra un fluido (líquido o gas) con densidad ρ en un tubo con área transversal A. En el estado de equilibrio, el fluido está sometido a una presión uni-

forme p. En la figura 16.7*a* el fluido está en reposo. Tomamos el eje x a lo largo del tubo. Esta es también la dirección en que hacemos que se propague una onda longitudinal, así que el desplazamiento y se mide a lo largo del tubo, igual que en la sección 16.1 (véase la figura 16.2).

En el instante $t = 0$, el pistón del extremo izquierdo comienza a moverse hacia la derecha con rapidez constante v_y. Esto inicia un movimiento ondulatorio que viaja a la derecha a lo largo del tubo, donde secciones sucesivas de fluido comienzan a moverse y a comprimirse en instantes sucesivamente posteriores.

La figura 16.7*b* muestra el fluido en el instante t. Todas las porciones del fluido a la izquierda de P se mueven hacia la derecha con rapidez v_y, y todas las porciones a la derecha de P están aún en reposo. La frontera entre la porción en movimiento y la porción estacionaria viaja a la derecha con una rapidez igual a la rapidez de propagación o rapidez de onda v. En el tiempo t, el pistón se ha movido una distancia $v_y t$ y la frontera se ha movido una distancia vt. Al igual que con las perturbaciones transversales en una cuerda, podemos calcular la rapidez de propagación a partir del teorema de impulso y momento lineal.

La cantidad de fluido puesta en movimiento en el tiempo t es la cantidad que originalmente ocupaba una sección del cilindro de longitud vt, área transversal A y volumen vtA. La masa de este fluido es ρvtA, y su momento lineal longitudinal (es decir, a lo largo del tubo) es

$$\text{Momento lineal longitudinal} = (\rho vtA)v_y$$

Ahora calculamos el aumento de presión, Δp, en el fluido en movimiento. El volumen original de este fluido en movimiento, Avt, disminuyó en una cantidad $Av_y t$. Por la definición del módulo volumétrico B, ecuación (11.13) de la sección 11.5,

$$B = \frac{-\text{Cambio de presión}}{\text{Cambio fraccionario de volumen}} = \frac{-\Delta p}{-Av_y t/Avt}$$

$$\Delta p = B\frac{v_y}{v}$$

La presión en el fluido en movimiento es $p + \Delta p$, y la fuerza ejercida sobre él por el pistón es $(p + \Delta p)A$. La fuerza neta sobre el fluido en movimiento (véase la figura 16.7*b*) es ΔpA, y el impulso longitudinal es

$$\text{Impulso longitudinal} = \Delta pAt = B\frac{v_y}{v}At$$

Como el fluido estaba en reposo en $t = 0$, el cambio de momento lineal hasta el instante t es igual al momento lineal en t. Aplicando el teorema de impulso y momento lineal (sección 8.1), obtenemos

$$B\frac{v_y}{v}At = \rho vtAv_y \qquad (16.6)$$

Cuando despejamos v, obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad \text{(rapidez de una onda longitudinal en un fluido)} \qquad (16.7)$$

lo que concuerda con nuestra conjetura. Así, la rapidez de propagación de un pulso longitudinal en un fluido únicamente depende del módulo volumétrico B y de la densidad ρ del medio.

Aunque dedujimos la ecuación (16.7) para ondas en un tubo, también es válida para ondas longitudinales en un gran volumen de fluido. Así, la rapidez de las ondas sonoras que viajan en el aire o en el agua se obtiene con esta ecuación.

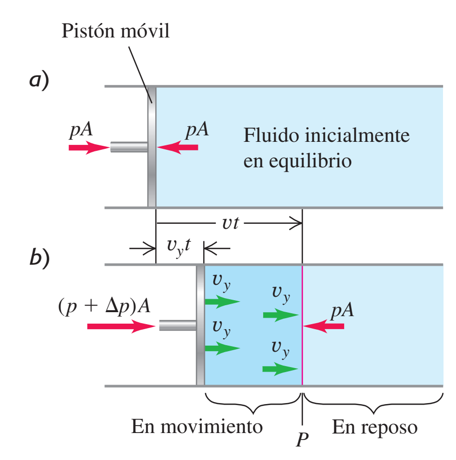
Rapidez del sonido en un sólido

Si una onda longitudinal se propaga en una varilla o barra *sólida*, la situación es un tanto diferente. La varilla se expande un poco a los lados cuando se comprime longi-

16.6 Cuando se toca un instrumento de viento como este corno francés, las ondas sonoras se propagan por el aire dentro de los tubos del instrumento. Las propiedades del sonido que sale del pabellón dependen de la rapidez de estas ondas.



16.7 Propagación de una onda sonora en un fluido confinado en un tubo. *a*) Fluido en equilibrio. *b*) Un tiempo t después de que el pistón comienza a moverse a la derecha con rapidez v_y, el fluido entre el pistón y el punto P está en movimiento. La rapidez de las ondas sonoras es v.



tudinalmente; mientras que un fluido en un tubo con sección transversal constante no puede hacerlo. Usando el mismo razonamiento que nos llevó a la ecuación (16.7), podemos demostrar que la rapidez de un pulso longitudinal en la varilla está dada por

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad \text{(rapidez de una onda longitudinal en una varilla sólida)} \tag{16.8}$$

donde Y es el módulo de Young, definido en la sección 11.4.

CUIDADO **Varillas sólidas contra sólidos voluminosos** La ecuación (16.8) es válida solo para una varilla o barra, cuyos lados pueden arquearse y encogerse libremente un poco al viajar la onda; no es válida para ondas longitudinales en un sólido *voluminoso*, ya que en estos materiales el movimiento lateral de cualquier elemento es impedido por el material circundante. La rapidez de las ondas longitudinales en un material sólido voluminoso depende de la densidad, el módulo volumétrico y el módulo de *corte*; un análisis completo rebasa el alcance de este libro.

Tabla 16.1 Rapidez del sonido en varios materiales

Material	Rapidez del sonido (m/s)
Gases	
Aire (20°C)	344
Helio (20°C)	999
Hidrógeno (20°C)	1330
Líquidos	
Helio líquido (4 K)	211
Mercurio (20°C)	1451
Agua (0°C)	1402
Agua (20°C)	1482
Agua (100°C)	1543
Sólidos	
Aluminio	6420
Plomo	1960
Acero	5941

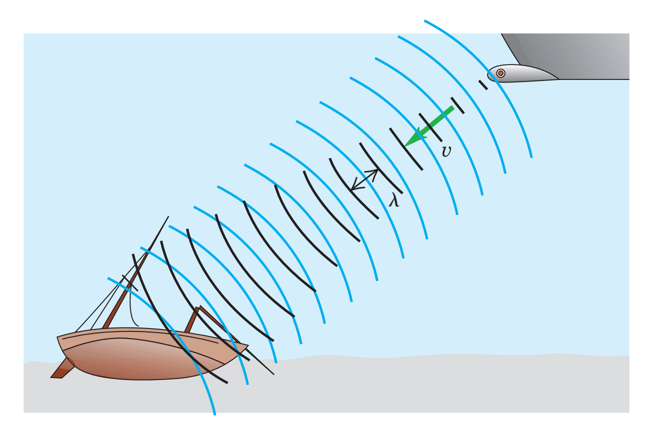
Al igual que en la deducción para una onda transversal en una cuerda, las ecuaciones (16.7) y (16.8) son válidas para ondas sinusoidales y otras ondas periódicas, no solo para el caso especial que vimos aquí.

La tabla 16.1 muestra los valores de la rapidez del sonido en varios materiales. Las ondas sonoras viajan más lentamente en plomo que en aluminio o acero, ya que el plomo tiene módulos volumétrico y de corte menores, y mayor densidad.



Ejemplo 16.3 Longitud de onda de las ondas del sonar

Un barco usa un sistema de sonar para detectar objetos bajo el agua (figura 16.8). Determine la rapidez del sonido en el agua con la ecuación (16.7) y calcule la longitud de onda de una onda de 262 Hz.



16.8 Un sistema de sonar usa ondas sonoras submarinas para detectar y localizar objetos bajo el agua.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Nuestras incógnitas son la rapidez y la longitud de onda de una onda sonora en el agua. En la ecuación (16.7) se usa la densidad del agua, $\rho = 1.00 \times 10^3$ kg/m^3, y el módulo volumétrico del agua que calculamos a partir de la compresibilidad (tabla 11.2). Dadas la rapidez y la frecuencia $f = 262$ Hz, calculamos la longitud de onda a partir de $v = f\lambda$.

EJECUTAR: En el ejemplo 16.2 se usó la tabla 11.2 para calcular $B = 2.18 \times 10^9$ Pa. Entonces,

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.18 \times 10^9 \text{ Pa}}{1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}} = 1480 \text{ m/s}$$

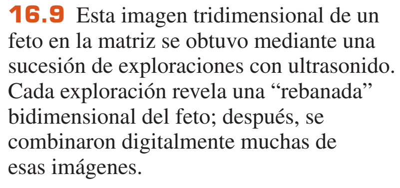
y

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1480 \text{ m/s}}{262 \text{ s}^{-1}} = 5.65 \text{ m}$$

EVALUAR: El valor calculado de v concuerda con el valor de la tabla 16.1. Aunque el agua es más densa que el aire (ρ es mayor), también es mucho más incompresible (B es mucho mayor); de modo que la rapidez $v = \sqrt{B/\rho}$ es mayor que los 344 m/s del sonido en el aire a temperatura ambiente. La relación $\lambda = v/f$ nos dice que una onda de sonido en el agua debe tener mayor longitud de onda que una onda de la misma frecuencia en el aire. Efectivamente, en el ejemplo 15.1 (sección 15.2) calculamos que una onda sonora de 262 Hz en el aire tiene longitud de onda de solo 1.31 m.

Los delfines emiten ondas sonoras de alta frecuencia (del orden de 100,000 Hz) y usan los ecos para guiarse y cazar. La longitud de onda correspondiente en el agua es de 1.48 cm. Con este sistema de "sonar" de alta frecuencia, pueden detectar objetos del tamaño de la longitud de onda (pero no mucho menores). La *imagen ultrasónica* es una técnica médica que usa el mismo principio físico: ondas sonoras de muy alta frecuencia y longitud de onda muy corta, llamadas *ultrasonido*, barren el cuerpo humano,

y se usan los "ecos" de los órganos internos para crear una imagen. Con ultrasonido de frecuencia de 5 MHz $= 5 \times 10^6$ Hz, la longitud de onda en agua (principal constituyente del cuerpo) es de 0.3 mm, así que pueden distinguirse rasgos de este tamaño en la imagen. El ultrasonido se usa para estudiar la operación de las válvulas cardiacas y detectar tumores, así como en exámenes prenatales (figura 16.9); el ultrasonido es más sensible que los rayos x para distinguir los diversos tipos de tejidos y no presenta los riesgos de radiación de esos rayos.



16.9 Esta imagen tridimensional de un feto en la matriz se obtuvo mediante una sucesión de exploraciones con ultrasonido. Cada exploración revela una "rebanada" bidimensional del feto; después, se combinaron digitalmente muchas de esas imágenes.



Rapidez del sonido en un gas

Casi todas las ondas sonoras que escuchamos cotidianamente se propagan en el aire. Al usar la ecuación (16.7) para obtener la rapidez de ondas sonoras en el aire, debemos tener presente que el módulo volumétrico de un gas depende de la presión del gas: cuanto mayor sea la presión que se aplica a un gas para comprimirlo, mayor resistencia opondrá a una compresión adicional, y mayor será su módulo volumétrico. (Por esa razón, no se dan valores específicos del módulo volumétrico para gases en la tabla 11.1). La expresión del módulo volumétrico de un gas para su uso en la ecuación (16.7) es

$$B = \gamma p_0 \tag{16.9}$$

donde p_0 es la presión de equilibrio del gas. La cantidad γ (la letra griega gamma) se denomina la *razón de capacidades caloríficas*. Es un número adimensional que caracteriza las propiedades térmicas del gas. (Aprenderemos más acerca de esta cantidad en el capítulo 19). Por ejemplo, la razón de capacidades caloríficas del aire es $\gamma = 1.40$. A presión atmosférica normal $p_0 = 1.013 \times 10^5$ Pa, de manera que $B = (1.40)(1.013 \times 10^5 \text{ Pa}) = 1.42 \times 10^5$ Pa. Este valor es minúsculo en comparación con el módulo volumétrico de un sólido típico (tabla 11.1), que es del orden de 10^{10} a 10^{11} Pa. Esto es lógico: simplemente nos indica que el aire es mucho más fácil de comprimir que el acero.

La densidad ρ de un gas también depende de la presión que, a la vez, depende de la temperatura. Resulta que la razón B/ρ para un tipo dado de gas ideal *no* depende de la presión, solo de la temperatura. De acuerdo con la ecuación (16.7), esto significa que la rapidez del sonido en un gas es fundamentalmente función de la temperatura T:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad \text{(rapidez del sonido en un gas ideal)} \tag{16.10}$$

Esta expresión incorpora varias cantidades que el lector posiblemente reconoce por su estudio de los gases ideales en química y que veremos en los capítulos 17, 18 y 19. La temperatura T es la temperatura *absoluta* en kelvins (K), que es igual a la temperatura Celsius más 273.15; por lo tanto, 20.00°C corresponde a $T = 293.15$ K. La cantidad M es la *masa molar*, o masa por mol de la sustancia de que se compone el gas. La *constante R de los gases* tiene el mismo valor para todos los gases. El valor numérico actualmente aceptado de R es

$$R = 8.314472(15) \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

aunque en cálculos prácticos usaremos 8.314 J/mol·K.

Para un gas dado, γ, R y M son constantes, y la rapidez de la onda es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta. En el capítulo 18 veremos que la ecuación (16.10) es casi idéntica a la expresión para la rapidez media de las moléculas en un gas ideal. Esto demuestra que las rapideces de sonido y las rapideces moleculares están íntimamente relacionadas.

Ejemplo 16.4 Rapidez del sonido en el aire



Calcule la rapidez del sonido en el aire a $T = 20°C$ y determine el rango de longitudes de onda en el aire a la que es sensible el oído humano (que puede escuchar frecuencias de entre 20 y 20,000 Hz). La masa molar media del aire (cuyos componentes principales son nitrógeno y oxígeno) es $M = 28.8 \times 10^{-3}$ kg/mol y la razón de capacidades caloríficas es $\gamma = 1.40$.

Continúa

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos la ecuación (16.10) para obtener la rapidez del sonido a partir de γ, T y M, y la relación $v = f\lambda$ para determinar las longitudes de onda correspondientes a los límites de frecuencia. Observe que en la ecuación (16.10) la temperatura T se *debe* expresar en kelvins, no en grados Celsius.

EJECUTAR: A $T = 20°\text{C} = 293$ K, vemos que

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{(1.40)(8.314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(293\ \text{K})}{28.8 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol}}} = 344\ \text{m/s}$$

Si usamos este valor de v en la expresión $\lambda = v/f$, vemos que, a 20°C, la frecuencia de 20 Hz corresponde a una $\lambda = 17$ m, y una frecuencia de 20,000 Hz corresponde a una λ de 1.7 cm.

EVALUAR: El valor de v que calculamos coincide con la rapidez medida del sonido a $T = 20°\text{C}$, con un error de menos del 0.3%.

En este análisis, hemos tratado los gases como un medio continuo. En realidad, los gases se componen de moléculas con movimiento aleatorio, separadas por distancias grandes en comparación con su diámetro. Las vibraciones que constituyen una onda en un gas se superponen en el movimiento térmico aleatorio. A la presión atmosférica, una molécula recorre una distancia media del orden de 10^{-7} m entre una colisión y otra; mientras que la amplitud de desplazamiento de un sonido tenue podría ser de solo 10^{-9} m. Podríamos comparar un gas por el que pasa una onda sonora con un enjambre de abejas; el enjambre en conjunto oscila levemente, mientras que los insectos individuales se mueven dentro del enjambre, aparentemente al azar.

Evalúe su comprensión de la sección 16.2 El mercurio es 13.6 veces más denso que el agua. De acuerdo con la tabla 16.1, a 20°C, ¿cuál de estos líquidos tiene el mayor módulo volumétrico? **i.** El mercurio; **ii.** el agua; **iii.** ambos tienen el mismo; **iv.** no se dispone de suficiente información para determinarlo.



16.3 Intensidad del sonido

Las ondas sonoras viajeras, al igual que todas las ondas viajeras, transfieren energía de una región del espacio a otra. En la sección 15.5 vimos que una forma útil de describir la energía transportada por una onda sonora es a través de la *intensidad I de la onda*, que es igual a la rapidez media con que la onda transporta energía, por unidad de área, a través de una superficie perpendicular a la dirección de propagación. Veamos cómo expresar la intensidad de una onda sonora en términos de la amplitud A de desplazamiento o la amplitud de presión $p_{\text{máx}}$.

Intensidad y amplitud de desplazamiento

Por sencillez, consideremos una onda sonora que se propaga en la dirección $+x$, de modo que se pueden usar las expresiones de la sección 16.1 para el desplazamiento $y(x, t)$ y la variación de la presión $p(x, t)$, expresadas en las ecuaciones (16.1) y (16.4), respectivamente. En la sección 6.4 vimos que la potencia es el producto de la fuerza por la velocidad [véase la ecuación (6.18)]. Por lo tanto, la potencia por unidad de área en esta onda sonora es igual al producto de $p(x, t)$ (fuerza por unidad de área) por la velocidad de la *partícula*, $v_y(x, t)$. Esta última es la velocidad en el tiempo t de la porción del medio que está en la coordenada x. Utilizando las ecuaciones (16.1) y (16.4), tenemos

$$v_y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \,\text{sen}(kx - \omega t)$$

$$p(x, t)v_y(x, t) = [BkA \,\text{sen}(kx - \omega t)][\omega A \,\text{sen}(kx - \omega t)]$$

$$= B\omega k A^2 \,\text{sen}^2(kx - \omega t)$$

CUIDADO **Velocidad de onda contra velocidad de partículas** Recuerde que la velocidad de la onda como un todo *no* es igual a la velocidad de las partículas. Mientras que la onda se sigue moviendo en la dirección de propagación, las partículas individuales del medio simplemente oscilan hacia adelante y hacia atrás, como se muestra en la figura (16.1). Además, la rapidez máxima de una partícula del medio puede ser muy diferente de la rapidez de la onda.

La intensidad es, por definición, el valor promedio en el tiempo de $p(x, t)v_y(x, t)$. Para cualquier valor de x, el valor medio de la función $\text{sen}^2(kx - \omega t)$ durante un periodo $T = 2\pi/\omega$ es $\frac{1}{2}$, así que

$$I = \tfrac{1}{2}B\omega kA^2 \tag{16.11}$$

Utilizando las relaciones $\omega = vk$ y $v^2 = B/\rho$, transformamos la ecuación (16.11) a

$$I = \tfrac{1}{2}\sqrt{\rho B}\,\omega^2A^2 \quad \text{(intensidad de una onda sonora sinusoidal)} \tag{16.12}$$

Esta ecuación muestra por qué en un sistema estereofónico, un altavoz de baja frecuencia (*woofer*) debe vibrar con mucha mayor amplitud que un altavoz de alta frecuencia (*tweeter*) para producir la misma intensidad de sonido.

Intensidad y amplitud de presión

Por lo regular, es más útil expresar I en términos de la amplitud de presión $p_{\text{máx}}$. Usando la ecuación (16.5) y la relación $\omega = vk$, vemos que

$$I = \frac{\omega p_{\text{máx}}{}^2}{2Bk} = \frac{vp_{\text{máx}}{}^2}{2B} \tag{16.13}$$

Utilizando la relación de rapidez de onda $v^2 = B/\rho$, también podemos escribir la ecuación (16.13) de formas alternativas:

$$I = \frac{p_{\text{máx}}{}^2}{2\rho v} = \frac{p_{\text{máx}}{}^2}{2\sqrt{\rho B}} \quad \text{(intensidad de una onda sonora sinusoidal)} \tag{16.14}$$

Invitamos al lector a verificar estas expresiones. Al comparar las ecuaciones (16.12) y (16.14), vemos que ondas sonoras sinusoidales con la misma intensidad y diferente frecuencia tienen diferente amplitud A de desplazamiento, pero la *misma* amplitud de presión $p_{\text{máx}}$. Esta es otra razón por la que suele ser más útil describir una onda sonora en términos de variaciones de presión, no del desplazamiento.

La potencia media *total* transportada a través de una superficie por una onda sonora es igual al producto de la intensidad en la superficie por el área de la misma, si la intensidad sobre la superficie es uniforme. La potencia sonora total media emitida por una persona que habla con voz normal es del orden de 10^{-5} W, en tanto que un grito fuerte corresponde a 3×10^{-2} W aproximadamente. Si todos los residentes de Nueva York hablaran al mismo tiempo, la potencia sonora total sería de unos 100 W, equivalentes al consumo de potencia eléctrica de una bombilla mediana. Por otro lado, la potencia requerida para llenar un auditorio grande o un estadio con sonido fuerte es considerable (véase el ejemplo 16.7).

Si la fuente de sonido emite ondas en todas direcciones por igual, la intensidad disminuye al aumentar la distancia r de la fuente, según la ley del cuadrado inverso: la intensidad es proporcional a $1/r^2$. Ya vimos esta ley y sus consecuencias en la sección 15.5. Cuando el sonido viaja predominantemente en una dirección, la ley del cuadrado inverso no es válida y la intensidad disminuye con la distancia más lentamente que $1/r^2$ (figura 16.10).

16.10 Al ahuecar las manos cerca del rostro, como en la imagen, las ondas sonoras que salen de la boca se dirigen de manera que no se propagan lateralmente. Así, la intensidad disminuye con la distancia más lentamente de lo que predice la ley del cuadrado inverso, y el sonido se puede escuchar a mayores distancias.



La relación del cuadrado inverso no es válida en interiores porque la energía sonora también puede llegar a un receptor reflejada por las paredes y el techo. Efectivamente, una parte de la labor del arquitecto al diseñar un auditorio es adaptar las reflexiones de modo que la intensidad sea lo más constante posible en todo el recinto.

Estrategia para resolver problemas 16.1 Intensidad del sonido



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Las relaciones entre la intensidad y la amplitud de una onda sonora son relativamente sencillas. No obstante, intervienen otras cantidades en esas relaciones, por lo que es muy importante identificar cuál es la incógnita.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Clasifique las cantidades físicas en categorías. Las propiedades de la onda incluyen las amplitudes de desplazamiento y presión, A y $p_{máx}$, y la frecuencia f, que puede determinarse a partir de la frecuencia angular ω, el número de onda k o la longitud de onda λ. Estas cantidades se relacionan mediante la rapidez de onda v, que a la vez depende de las propiedades del medio (B y ρ en el caso de un líquido, y γ, T y M en el caso de un gas).
2. Ordene las cantidades que se dan e identifique las incógnitas. Elija relaciones que lo lleven adonde desea ir.

EJECUTAR *la solución:* Use las ecuaciones que seleccionó para despejar las incógnitas. Exprese la temperatura en kelvins (temperatura Celsius más 273.15) para calcular la rapidez del sonido en un gas.

EVALUAR *la respuesta:* Si es posible, use una relación alternativa para comprobar los resultados.

Ejemplo 16.5 Intensidad de una onda sonora en el aire



Calcule la intensidad de la onda sonora del ejemplo 16.1, con $p_{máx} = 3.0 \times 10^{-2}$ Pa, suponiendo que la temperatura es de 20°C, de modo que la densidad del aire es $\rho = 1.20\ \text{kg/m}^3$ y la rapidez del sonido es $v = 344$ m/s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La incógnita es la intensidad I de la onda sonora. Nos dan la amplitud de presión, $p_{máx}$, la densidad ρ y la rapidez de onda v en el medio. Se puede calcular I con $p_{máx}$, ρ y v con la ecuación (16.14).

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (16.14),

$$I = \frac{p_{máx}{}^2}{2\rho v} = \frac{(3.0 \times 10^{-2}\ \text{Pa})^2}{2(1.20\ \text{kg/m}^3)(344\ \text{m/s})}$$
$$= 1.1 \times 10^{-6}\ \text{J/(s}\cdot\text{m}^2) = 1.1 \times 10^{-6}\ \text{W/m}^2$$

EVALUAR: Esta parece una intensidad muy baja, pero está dentro del intervalo de intensidades de sonido que percibimos a diario. Una onda sonora muy fuerte en el umbral del dolor tiene una amplitud de presión de cerca de 30 Pa y una intensidad de 1 W/m^2 aproximadamente. La amplitud de presión de la onda sonora más tenue que puede escucharse es del orden de 3×10^{-5} Pa, y la intensidad correspondiente es de cerca de 10^{-12} W/m^2. (Pruebe estos valores de $p_{máx}$ en la ecuación (16.14) para verificar que las intensidades correspondientes sean las que mencionamos).

Ejemplo 16.6 Misma intensidad, diferentes frecuencias



¿Cuáles son la amplitud de desplazamiento y de presión de una onda sonora de 20 Hz con la misma intensidad de la onda sonora de 1000 Hz de los ejemplos 16.1 y 16.5?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En los ejemplos 16.1 y 16.5 determinamos que para una onda sonora de 1000 Hz con $p_{máx} = 3.0 \times 10^{-2}$ Pa, $A = 1.2 \times 10^{-8}$ m e $I = 1.1 \times 10^{-6}$ W/m^2. Nuestras incógnitas son $p_{máx}$ y A para una onda sonora de 20 Hz de la misma intensidad I. Esto se puede calcular usando las ecuaciones (16.14) y (16.12), respectivamente.

EJECUTAR: Podemos reagrupar las ecuaciones (16.14) y (16.12) como $p_{máx}{}^2 = 2I\sqrt{\rho B}$ y $\omega^2 A^2 = 2I/\sqrt{\rho B}$, respectivamente. Esto nos dice que para una intensidad sonora I dada en un medio determinado (ρ y B constantes), las cantidades $p_{máx}$ y ωA (o, de manera equivalente, fA) son *constantes* que no dependen de la frecuencia. Del primer resultado obtenemos inmediatamente $p_{máx} = 3.0 \times 10^{-2}$ Pa para $f = 20$ Hz, lo mismo que para $f = 1000$ Hz. Si escribimos el segundo resultado como $f_{20}A_{20} = f_{1000}A_{1000}$, tenemos

$$A_{20} = \left(\frac{f_{1000}}{f_{20}}\right)A_{1000}$$
$$= \left(\frac{1000\ \text{Hz}}{20\ \text{Hz}}\right)(1.2 \times 10^{-8}\ \text{m}) = 6.0 \times 10^{-7}\ \text{m} = 0.60\ \mu\text{m}$$

EVALUAR: Nuestro resultado refuerza la idea de que la amplitud de presión es una descripción más conveniente de una onda sonora y de su intensidad que la amplitud de desplazamiento.



Ejemplo 16.7 **¡Que se oiga!**

En un concierto al aire libre, se desea que la intensidad del sonido a 20 m de los altavoces sea de 1 W/m^2. Si la intensidad del sonido tiene la misma intensidad en todas direcciones, ¿qué potencia de salida acústica debe tener el conjunto de altavoces?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: Aquí se usa la definición de intensidad del sonido como potencia por unidad de área. La potencia total es la incógnita, y el área en cuestión es un hemisferio centrado en el arreglo de altavoces. Suponemos que los altavoces están en el suelo y que no se dirige potencia acústica hacia el suelo, de modo que la potencia acústica se dispersa uniformemente en un hemisferio de 20 m de radio. El área superficial de este hemisferio es $\left(\frac{1}{2}\right)(4\pi)(20\text{ m})^2$, o aproximadamente 2500 m^2. La potencia acústica requerida es el producto de esta área por la intensidad: (1 W/m^2)(2500 m^2) = 2500 W = 2.5 kW.

EVALUAR: La entrada de potencia eléctrica a los altavoces tendría que ser mucho mayor que 2.5 kW, porque su eficiencia no es muy alta (normalmente un pequeño porcentaje para altavoces normales, y de hasta el 25% para los de tipo de bocina).

Escala de decibeles

Puesto que el oído es sensible a una amplia gama de intensidades, suele usarse una escala de intensidad *logarítmica*. El **nivel de intensidad de sonido** β de una onda sonora está definido por la ecuación

$$\beta = (10\text{ dB})\log\frac{I}{I_0} \quad \text{(definición de nivel de intensidad de sonido)} \qquad (16.15)$$

En esta ecuación, I_0 es una intensidad de referencia que se toma como 10^{-12} W/m^2, aproximadamente el umbral de la audición humana a 1000 Hz. Recuerde que “log” significa logaritmo de base 10. Los niveles de intensidad de sonido se expresan en **decibeles**, cuya abreviatura es dB. Un decibel es $\frac{1}{10}$ de un *bel*, unidad llamada así en honor de Alexander Graham Bell (el inventor del teléfono). El bel es demasiado grande para casi todos los fines, así que el decibel es la unidad usual de nivel de intensidad de sonido.

Si la intensidad de una onda sonora es igual a I_0 o 10^{-12} W/m^2, su nivel de intensidad de sonido es de 0 dB. Una intensidad de 1 W/m^2 corresponde a 120 dB. La tabla 16.2 da los niveles de intensidad de sonido en decibeles de varios sonidos comunes. Se puede usar la ecuación (16.15) para verificar el valor del nivel de intensidad de sonido b dado para cada intensidad en la tabla.

Como el oído no tiene la misma sensibilidad para todas las frecuencias de la gama audible, algunos medidores de nivel de sonido ponderan de manera diferente las diversas frecuencias. Un esquema de ese tipo da origen a la llamada escala dBA, la cual otorga menos importancia a las frecuencias bajas y muy altas, donde el oído es menos sensible, que a las frecuencias del rango medio.

Tabla 16.2 Niveles de intensidad de sonido de diversas fuentes (valores representativos)

Fuente o descripción del sonido	Nivel de intensidad del sonido, β (dB)	Intensidad, I (W/m^2)
Avión militar a reacción a 30 m	140	10^2
Umbral de dolor	120	1
Remachador	95	3.2×10^{-3}
Tren elevado	90	10^{-3}
Tráfico urbano intenso	70	10^{-5}
Conversación ordinaria	65	3.2×10^{-6}
Automóvil silencioso	50	10^{-7}
Radio con volumen bajo en el hogar	40	10^{-8}
Murmullo normal	20	10^{-10}
Susurro de hojas	10	10^{-11}
Umbral del oído a 1000 Hz	0	10^{-12}

Ejemplo 16.8 Sordera temporal (o permanente)



Una exposición de 10 min a un sonido de 120 dB suele desplazar temporalmente el umbral del oído a 1000 Hz, de 0 a 28 dB. Diez años de exposición al sonido de 92 dB causan un desplazamiento *permanente* a 28 dB. ¿Qué intensidades corresponden a 28 y 92 dB?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se nos dan dos niveles de intensidades de sonido β; nuestras incógnitas son las intensidades correspondientes. Despejaremos la intensidad I de la ecuación (16.15) para cada valor de β.

EJECUTAR: Despejamos I de la ecuación (16.15), dividiendo ambos miembros entre 10 dB y usando la relación $10^{\log x} = x$:

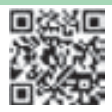
$$I = I_0 10^{\beta/(10\text{ dB})}$$

Cuando $\beta = 28$ dB y $\beta = 92$ dB, los exponentes son $\beta/(10\text{ dB}) = 2.8$ y 9.2, respectivamente, de modo que

$$I_{28\text{ dB}} = (10^{-12}\text{ W/m}^2)10^{2.8} = 6.3 \times 10^{-10}\text{ W/m}^2$$
$$I_{92\text{ dB}} = (10^{-12}\text{ W/m}^2)10^{9.2} = 1.6 \times 10^{-3}\text{ W/m}^2$$

EVALUAR: Si sus respuestas son demasiado grandes por un factor de 10, tal vez haya introducido 10×10^{-12} en su calculadora en lugar de 1×10^{-12}. ¡Tenga cuidado!

Ejemplo 16.9 Un pájaro canta en una pradera



Considere un modelo idealizado en el que un pájaro (considerado como fuente puntual) emite una potencia de sonido constante, cuya intensidad cumple con la ley del cuadrado inverso (figura 16.11). ¿Cuántos decibeles bajará el nivel de intensidad del sonido si nos alejamos al doble de la distancia del ave?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Puesto que la escala de decibeles es logarítmica, la *diferencia* entre dos niveles de intensidad de sonido (la incógnita) corresponde a la *razón* de las intensidades correspondientes, la cual está determinada por la ley del cuadrado inverso. Identificamos los dos puntos P_1 y P_2 (figura 16.11) y usamos la ecuación (16.15), la definición de nivel de intensidad de sonido, en cada punto. Usaremos la ecuación (15.26), la ley del cuadrado inverso, para relacionar las intensidades en los dos puntos.

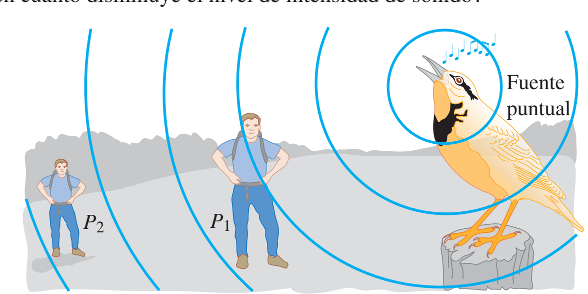
EJECUTAR: La diferencia $\beta_2 - \beta_1$ entre dos niveles de intensidad de sonido cualesquiera está relacionada con las intensidades correspondientes por

$$\begin{aligned}\beta_2 - \beta_1 &= (10\text{ dB})\left(\log\frac{I_2}{I_0} - \log\frac{I_1}{I_0}\right)\\ &= (10\text{ dB})[(\log I_2 - \log I_0) - (\log I_1 - \log I_0)]\\ &= (10\text{ dB})\log\frac{I_2}{I_1}\end{aligned}$$

Para esta fuente, que se ajusta a la ley del cuadrado inverso, la ecuación (15. 26) produce $I_2/I_1 = r_1^2/r_2^2 = \frac{1}{4}$, por lo que

$$\beta_2 - \beta_1 = (10\text{ dB})\log\frac{I_1}{I_2} = (10\text{ dB})\log\tfrac{1}{4} = -6.0\text{ dB}$$

16.11 Si duplicamos la distancia a una fuente puntual de sonido, ¿en cuánto disminuye el nivel de intensidad de sonido?



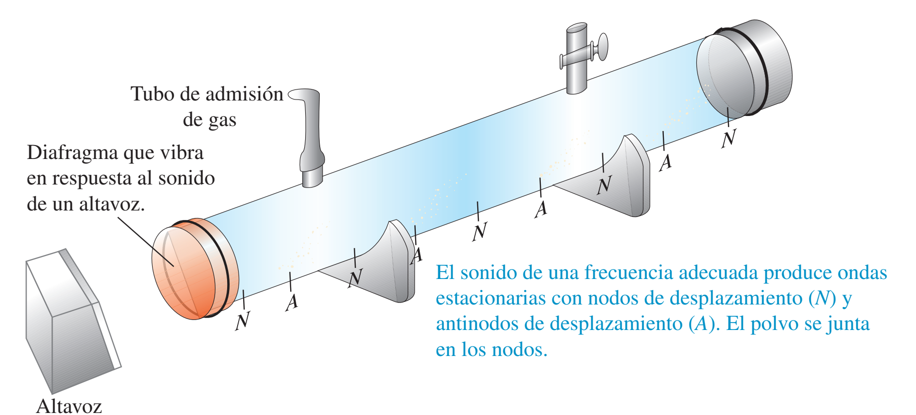
EVALUAR: El resultado es negativo, lo cual nos indica (correctamente) que el nivel de intensidad de sonido es menor en P_2 que P_1. La diferencia de 6 dB no depende del nivel de intensidad del sonido en P_1; para *cualquier* duplicación de la distancia desde la fuente, la ley del cuadrado inverso reduce el nivel de intensidad del sonido en 6 dB.

Observe que el *volumen* percibido de un sonido no es directamente proporcional a su intensidad. Por ejemplo, la mayoría de las personas interpretan un aumento de 8 a 10 dB en el nivel de intensidad del sonido (que corresponde a un aumento de la intensidad por un factor de 6 a 10), como un aumento al doble del volumen.

Evalúe su comprensión de la sección 16.3 Se duplica la intensidad de una onda sonora en el aire, sin alterar su frecuencia. (La presión, la densidad y la temperatura del aire también permanecen constantes). ¿Qué efecto tiene esto sobre la amplitud de desplazamiento, la amplitud de presión, el módulo volumétrico, la rapidez del sonido y el nivel de intensidad del sonido?

16.4 Ondas sonoras estacionarias y modos normales

Cuando ondas longitudinales (de sonido) se propagan en un fluido dentro de un tubo con longitud finita, se reflejan en los extremos igual que las ondas transversales en una cuerda. La superposición de las ondas que viajan en direcciones opuestas forma también una onda estacionaria. Al igual que las ondas estacionarias transversales en



16.12 Representación de ondas sonoras estacionarias en un tubo de Kundt. El sombreado azul representa la densidad del gas en un instante en que la presión del gas en los nodos de desplazamiento es máxima o mínima.

una cuerda (sección 15.7), las ondas sonoras estacionarias (modos normales) en un tubo pueden servir para crear ondas de sonido en el aire circundante. Este es el principio de operación de la voz humana y de muchos instrumentos musicales, incluidos los de viento de madera y de metal, y los órganos.

Las ondas transversales en una cuerda, incluidas las estacionarias, suelen describirse solo en términos del desplazamiento de la cuerda. En cambio, ya vimos que las ondas sonoras en un fluido pueden describirse en términos del desplazamiento del fluido, o bien, en términos de variaciones en la presión del fluido. Para evitar confusiones, usaremos los términos **nodo de desplazamiento** y **antinodo de desplazamiento** para referirnos a puntos donde las partículas del fluido tienen cero desplazamiento y máximo desplazamiento, respectivamente.

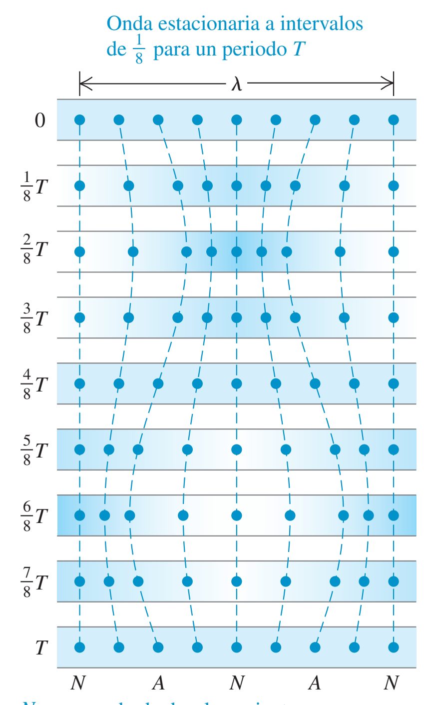
Podemos mostrar las ondas sonoras estacionarias en una columna de gas con un aparato llamado tubo de Kundt (figura 16.12). Se trata de un tubo horizontal de vidrio de aproximadamente 1 m de longitud cerrado en un extremo; en el otro se instala un diafragma flexible que puede transmitir vibraciones. Un altavoz cercano se conecta a un oscilador y amplificador de audio, y produce ondas sonoras que obligan al diafragma a vibrar sinusoidalmente con una frecuencia que podemos variar. Las ondas sonoras dentro del tubo se reflejan en el extremo cerrado. Esparcimos uniformemente un poco de polvo fino en el interior del tubo. Al variar la frecuencia del sonido, pasamos por frecuencias en las que la amplitud de las ondas estacionarias es lo bastante grande para que el polvo sea barrido a lo largo del tubo en los puntos donde se mueve el gas. Por lo tanto, el polvo se acumula en los nodos de desplazamiento (donde el gas no se mueve). Los nodos adyacentes están separados una distancia igual a $\lambda/2$, la cual podemos medir. Conociendo la longitud de onda, podemos usar este experimento para determinar la rapidez de las ondas: leemos la frecuencia f del oscilador y así podemos calcular la rapidez v de las ondas usando la relación $v = \lambda f$.

La figura 16.13 muestra los movimientos de nueve partículas diferentes dentro de un tubo lleno de gas, donde hay una onda estacionaria. Una partícula en un nodo de desplazamiento (N) no se mueve; mientras que una partícula en un antinodo de desplazamiento (A) oscila con amplitud máxima. Observe que las partículas en lados opuestos del nodo de desplazamiento vibran en fase opuesta. Cuando estas partículas se acercan entre sí, el gas entre ellas se comprime y la presión aumenta; cuando se alejan, hay una expansión y la presión baja. Así, en un *nodo* de desplazamiento el gas experimenta compresión y expansión máximas, y las variaciones de presión y densidad arriba y abajo de la media tienen su valor máximo. En contraste, las partículas en lados opuestos de un *antinodo* de desplazamiento vibran *en fase*; la distancia entre ellas es casi constante, y la presión y la densidad *no* varían en el antinodo.

Usamos el término **nodo de presión** para describir un punto de una onda sonora estacionaria en el que la presión y la densidad no varían, y el término **antinodo de presión**, para describir un punto donde las variaciones de presión y densidad son máximas. Con estos términos, podemos resumir nuestras observaciones acerca de las ondas sonoras estacionarias como sigue:

Un nodo de presión siempre es un antinodo de desplazamiento, y un antinodo de presión siempre es un nodo de desplazamiento.

16.13 En una onda sonora estacionaria, un nodo de desplazamiento N es un antinodo de presión (un punto en el que la fluctuación de la presión es máxima) y un antinodo de desplazamiento A es un nodo de presión (un punto donde la presión no fluctúa).



La figura 16.12 muestra la onda sonora estacionaria en el instante en que las variaciones de presión son máximas; el sombreado azul indica que la densidad y presión del gas tienen sus máximos y mínimos en los nodos de desplazamiento.

Cuando hay reflexión en el extremo *cerrado* de un tubo (con una barrera o un tapón rígido), el desplazamiento de las partículas en ese extremo siempre debe ser cero, como en el extremo fijo de una cuerda. Así, el extremo cerrado del tubo es un nodo de desplazamiento y un antinodo de presión; las partículas no se mueven, pero las variaciones de presión son máximas. El extremo *abierto* de un tubo es un nodo de presión porque está abierto a la atmósfera, donde la presión es constante. Por ello, este extremo siempre es un *antinodo* de desplazamiento, análogo al extremo libre de una cuerda; las partículas oscilan con amplitud máxima, pero la presión no varía. (En sentido estricto, el nodo de presión realmente se presenta un poco más allá del extremo abierto de un tubo; pero si el diámetro del tubo es pequeño en comparación con la longitud de onda, como en casi todos los instrumentos musicales, podemos despreciar este efecto). Así, las ondas longitudinales en una columna de fluido se reflejan en los extremos cerrado y abierto de un tubo, igual que las ondas transversales en una cuerda se reflejan en los extremos fijo y libre, respectivamente.

Ejemplo conceptual 16.10 El sonido del silencio

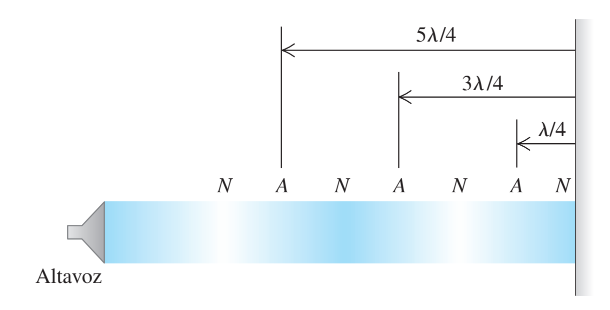
Un altavoz direccional dirige una onda sonora de longitud de onda λ a una pared (figura 16.14). ¿A qué distancias de la pared podríamos ubicarnos y no escuchar nada?

SOLUCIÓN

El oído detecta variaciones de presión en el aire; por lo tanto, no escucharemos ningún sonido si los oídos están en un *nodo de presión*, que es un antinodo de desplazamiento. La pared está en un nodo de desplazamiento; la distancia de un nodo a un antinodo adyacente es $\lambda/4$, y entre un antinodo y el siguiente, $\lambda/2$ (figura 16.14). Por consiguiente, los antinodos de desplazamiento (nodos de presión), en los que no se oirá el sonido, son las distancias $d = \lambda/4$, $d = \lambda/4 + \lambda/2 = 3\lambda/4$, $d = 3\lambda/4 + \lambda/2 = 5\lambda/4$, . . . con respecto a la pared. Si el altavoz no es perfectamente direccional, este efecto es difícil de notar debido a las reflexiones de las ondas sonoras en el piso, techo y otras paredes.



16.14 Cuando una onda sonora se dirige a una pared, interfiere con la onda reflejada para formar una onda estacionaria. Las N y A son nodos y antinodos de *desplazamiento*.



16.15 Tubos de órgano de distinto tamaño producen tonos de diferente frecuencia.



Tubos de órganos e instrumentos de viento

La aplicación más importante de las ondas sonoras estacionarias es la producción de tonos musicales con instrumentos de viento. Los tubos de órgano son uno de los ejemplos más sencillos (figura 16.15). Un fuelle suministra aire a una presión manométrica del orden de 10^3 Pa (10^{-2} atm) en el extremo inferior del tubo (figura 16.16). Una corriente de aire sale por la abertura angosta en el borde de la superficie horizontal y se dirige hacia el borde superior de la abertura, llamada *boca* del tubo. La columna de aire en el tubo comienza a vibrar, y hay una serie de modos normales posibles, igual que en una cuerda estirada. La boca siempre actúa como extremo abierto, así que es un nodo de presión y un antinodo de desplazamiento. El otro extremo del tubo (arriba en la figura 16.16) puede estar abierto o cerrado.

En la figura 16.17, ambos extremos del tubo están abiertos, así que son nodos de presión y antinodos de desplazamiento. Un tubo de órgano abierto en ambos extremos se llama *tubo abierto*. La frecuencia fundamental f_1 corresponde a un patrón de onda estacionaria con un antinodo de desplazamiento en cada extremo y un nodo de desplazamiento en medio (figura 16.17*a*). La distancia entre antinodos adyacentes siempre

es igual a media longitud de onda que, en este caso, es igual a la longitud L del tubo: $\lambda/2 = L$. La frecuencia correspondiente, obtenida de la relación $f = v/\lambda$, es

$$f_1 = \frac{v}{2L} \quad \text{(tubo abierto)} \tag{16.16}$$

Las figuras 16.17*b* y 16.17*c* muestran el segundo y tercer armónicos (primer y segundo sobretonos); sus patrones de vibración tienen dos y tres nodos de desplazamiento, respectivamente. Para estos, media longitud de onda es igual a $L/2$ y $L/3$, respectivamente, y las frecuencias son dos y tres veces la fundamental, respectivamente. Es decir, $f_2 = 2f_1$ y $f_3 = 3f_1$. Para *todo* modo normal de un tubo abierto, la longitud L debe ser un número entero de medias longitudes de onda, y las longitudes de onda posibles λ_n están dadas por

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \quad \text{o bien,} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{(tubo abierto)} \tag{16.17}$$

Las frecuencias correspondientes f_n están dadas por $f_n = v/\lambda_n$, así que todas las frecuencias de modo normal para un tubo abierto por ambos extremos están dadas por

$$f_n = \frac{nv}{2L} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{(tubo abierto)} \tag{16.18}$$

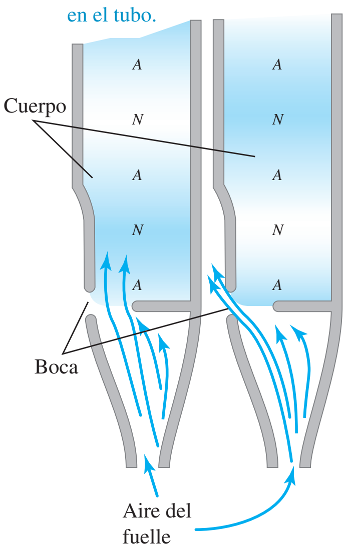
El valor $n = 1$ corresponde a la frecuencia fundamental, $n = 2$ al segundo armónico (o primer sobretono), etcétera. O bien, podemos decir

$$f_n = nf_1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{(tubo abierto)} \tag{16.19}$$

con f_1 dada por la ecuación (16.16).

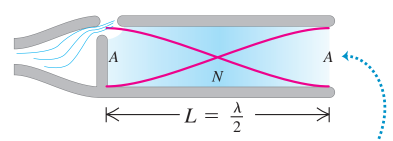
La figura 16.18 muestra un tubo abierto en el extremo izquierdo, pero cerrado en el derecho; se llama *tubo cerrado*. El extremo izquierdo (abierto) es un antinodo de desplazamiento (nodo de presión), pero el derecho (cerrado) es un nodo de desplazamiento (antinodo de presión). La distancia entre un nodo y el antinodo adyacente siempre es $1/4$ de longitud de onda. La figura 16.18*a* muestra el modo de más baja frecuencia;

16.16 Cortes transversales de un tubo de órgano en dos instantes separados medio periodo. Las N y A son nodos y antinodos de *desplazamiento*; como indica el sombreado azul, estos son puntos de variación máxima de presión y cero variación de presión, respectivamente.

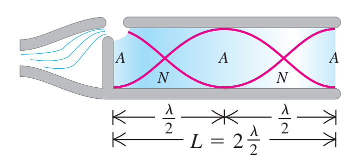


16.17 Corte transversal de un tubo abierto en el que se muestran los primeros tres modos normales. El sombreado indica las variaciones de presión. Las curvas rojas indican el desplazamiento a lo largo del eje del tubo en dos instantes separados por medio periodo. Las N y A son los nodos y antinodos de *desplazamiento*; intercámbielos para ver los nodos y antinodos de *presión*.

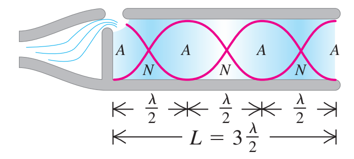
a) Fundamental: $f_1 = \frac{v}{2L}$



b) Segundo armónico: $f_2 = 2\frac{v}{2L} = 2f_1$

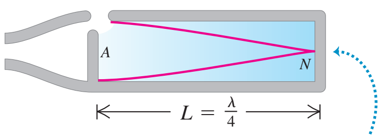


c) Tercer armónico: $f_3 = 3\frac{v}{2L} = 3f_1$

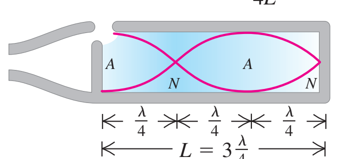


16.18 Corte transversal de un tubo cerrado que muestra los primeros tres modos normales, así como los nodos y antinodos de *desplazamiento*. Solo son posibles armónicos impares.

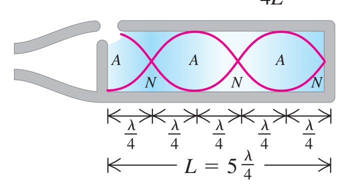
a) Fundamental: $f_1 = \frac{v}{4L}$



b) Tercer armónico: $f_3 = 3\frac{v}{4L} = 3f_1$



c) Quinto armónico: $f_5 = 5\frac{v}{4L} = 5f_1$



la longitud del tubo es un cuarto de longitud de onda ($L = \lambda_1/4$). La frecuencia fundamental es $f_1 = v/\lambda_1$, o bien,

$$f_1 = \frac{v}{4L} \qquad \text{(tubo cerrado)} \tag{16.20}$$

Esta es la mitad de la frecuencia fundamental de un tubo *abierto* de la misma longitud. En el lenguaje musical, el *tono* de un tubo cerrado es una octava más bajo (un factor de 2 en la frecuencia) que el de un tubo abierto con la misma longitud. La figura 16.18*b* muestra el siguiente modo, para el cual la longitud del tubo es *tres cuartas partes* de una longitud de onda, correspondiente a una frecuencia de $3f_1$. Para la figura 16.18*c*, $L = 5\lambda/4$ y la frecuencia es $5f_1$. Las posibles longitudes de onda están dadas por

$$L = n\frac{\lambda_n}{4} \quad \text{o bien,} \quad \lambda_n = \frac{4L}{n} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots) \qquad \text{(tubo cerrado)} \tag{16.21}$$

Las frecuencias de modo normal están dadas por $f_n = v/\lambda_n$, es decir,

$$f_n = \frac{nv}{4L} \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots) \qquad \text{(tubo cerrado)} \tag{16.22}$$

o bien,

$$f_n = nf_1 \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots) \qquad \text{(tubo cerrado)} \tag{16.23}$$

donde f_1 está dada por la ecuación (16.20). Vemos que faltan el segundo, cuarto y todos los demás armónicos *pares*. En un tubo cerrado por un extremo, la frecuencia fundamental es $f_1 = v/4L$, y solo son posibles los armónicos impares de la serie ($3f_1$, $5f_1$, …).

Una última posibilidad es un tubo cerrado por *ambos* extremos, con nodos de desplazamiento y antinodos de presión en esos extremos. Esto no sería útil como instrumento musical porque las vibraciones no podrían salir del tubo.

Ejemplo 16.11 La historia de dos tubos

En un día en que la rapidez del sonido es de 345 m/s, la frecuencia fundamental de un tubo de órgano cerrado es 220 Hz. *a*) ¿Qué longitud tiene el tubo? *b*) El segundo *sobretono* de este tubo tiene la misma longitud de onda que el tercer *armónico* de un tubo *abierto*. ¿Qué longitud tiene el tubo abierto?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema utiliza la relación entre la longitud y las frecuencias de modo normal de un tubo abierto (figura 16.17) y un tubo cerrado (figura 16.18). En el inciso *a*) determinaremos la longitud del tubo cerrado con la ecuación (16.22). En el inciso *b*), debemos determinar la longitud de un tubo abierto, cuyas frecuencias están dadas por la ecuación (16.18).

EJECUTAR: *a*) Para un tubo cerrado, $f_1 = v/4L$, de modo que

$$L_{\text{cerrado}} = \frac{v}{4f_1} = \frac{345\ \text{m/s}}{4(220\ \text{s}^{-1})} = 0.392\ \text{m}$$

b) La frecuencia del segundo sobretono de un tubo cerrado (la *tercera* frecuencia posible) es $f_5 = 5f_1 = 5(220\ \text{Hz}) = 1100\ \text{Hz}$. Si las longitudes de onda para los dos tubos son iguales, las frecuencias también son iguales y la frecuencia del tercer armónico del tubo abierto que está en $3f_1 = 3(v/2L)$ es igual a 1100 Hz. Entonces,

$$1100\ \text{Hz} = 3\left(\frac{345\ \text{m/s}}{2L_{\text{abierto}}}\right) \qquad \text{y} \qquad L_{\text{abierto}} = 0.470\ \text{m}$$

EVALUAR: El tubo cerrado tiene una longitud de 0.392 m y una frecuencia fundamental de 220 Hz; el abierto es *más largo* (0.470 m), pero tiene una frecuencia fundamental *más alta*, (1100 Hz)/3 = 367 Hz. Esto no es una contradicción, como se observa al comparar las figuras 16.17*a* y 16.18*a*.

En un tubo de órgano real, siempre están presentes simultáneamente varios modos; el movimiento del aire es una superposición de estos modos. Esta situación es similar a una cuerda golpeada o punteada, como en la figura 15.28. Al igual que en una cuerda vibrante, una onda estacionaria compleja en el tubo produce una onda sonora viajera en el aire circundante con un contenido armónico similar al de la onda estacionaria.

Un tubo muy angosto produce una onda sonora rica en armónicos altos, que oímos como un tono delgado “tipo cuerda”; un tubo más grueso produce principalmente el modo fundamental, que suena más suave, “como flauta”. El contenido armónico también depende de la forma de la boca del tubo.

Hemos hablado de tubos de órgano, pero este análisis también es válido para otros instrumentos de viento. La flauta común y la flauta dulce son directamente análogas. La diferencia más importante es que esos instrumentos tienen agujeros a lo largo del tubo. Al taparse y destaparse esos agujeros con los dedos, se modifica la longitud efectiva L de la columna de aire y, por consiguiente, el tono. Un tubo de órgano, en cambio, solo puede tocar una nota. Las flautas se comportan como tubos *abiertos*, mientras que el clarinete actúa como tubo *cerrado* (cerrado en el extremo de la lengüeta, abierto en el pabellón).

Las ecuaciones (16.18) y (16.22) indican que las frecuencias de cualquier instrumento de viento son proporcionales a la rapidez v del sonido en la columna de aire dentro del instrumento. Como indica la ecuación (16.10), v depende de la temperatura; aumenta cuando se incrementa la temperatura. Por lo tanto, el tono de los instrumentos de viento aumenta con la temperatura. Un órgano que tiene algunos tubos a una temperatura y otros a una temperatura distinta sonará desafinado.

Evalúe su comprensión de la sección 16.4 Si se conecta una manguera a un extremo de un tubo metálico y se introduce por ella aire comprimido, el tubo producirá un tono musical. Si en el tubo se inyecta helio comprimido a la misma presión y temperatura, ¿el tubo producirá **i.** el mismo tono, **ii.** un tono más alto o **iii.** un tono más bajo?



16.5 Resonancia y sonido

Muchos sistemas mecánicos tienen modos normales de oscilación. Como vimos, estos sistemas incluyen columnas de aire (como en un tubo de órgano) y cuerdas estiradas (como en una guitarra; véase la sección 15.8). En cada modo, todas las partículas del sistema oscilan con movimiento armónico simple con la misma frecuencia que la del modo. Las columnas de aire y las cuerdas estiradas tienen una serie infinita de modos normales; pero el concepto básico está íntimamente relacionado con el oscilador armónico simple, descrito en el capítulo 14, que solo tiene un modo normal (es decir, solo una frecuencia con la que oscila cuando se le perturba).

Suponga que aplicamos una fuerza que varía periódicamente a un sistema que puede oscilar. Así que se fuerza a este a oscilar con una frecuencia igual a la frecuencia de la fuerza aplicada (llamada *frecuencia impulsora*). Este movimiento se denomina *oscilación forzada*. Ya hablamos de oscilaciones forzadas del oscilador armónico en la sección 14.8, y sugerimos repasar esa explicación. En particular, describimos el fenómeno de **resonancia** mecánica. Un ejemplo sencillo de resonancia es empujar al primo Morton en un columpio. El columpio es un péndulo; solo tiene un modo normal, con una frecuencia determinada por su longitud. Si empujamos el columpio periódicamente con esta frecuencia, podemos incrementar la amplitud del movimiento; pero si empujamos con una frecuencia muy distinta, el columpio casi no se moverá.

También hay resonancia cuando una fuerza que varía periódicamente se aplica a un sistema con muchos modos normales. Se muestra un ejemplo en la figura 16.19*a*. Un tubo de órgano abierto se coloca junto a un altavoz alimentado por un amplificador que emite ondas sonoras sinusoidales puras con frecuencia f, la cual puede variarse ajustando el amplificador. El aire del tubo es forzado a vibrar con la misma frecuencia f de la *fuerza impulsora* provista por el altavoz. En general, la amplitud de este movimiento es relativamente pequeña y el movimiento del aire dentro del tubo no corresponderá a ninguno de los patrones de modo normal de la figura 16.17; no obstante, si la frecuencia f de la fuerza es cercana a la frecuencia de uno de los modos normales, el aire en el tubo se moverá según el patrón de modo normal para esa frecuencia, y la amplitud puede aumentar mucho. La figura 16.19*b* muestra la amplitud

16.19 *a*) Se obliga al aire dentro de un tubo abierto a oscilar a la misma frecuencia que las ondas sonoras sinusoidales provenientes del altavoz. *b*) La curva de resonancia del tubo abierto representa la amplitud de la onda sonora estacionaria en el tubo en función de la frecuencia impulsora.

a)

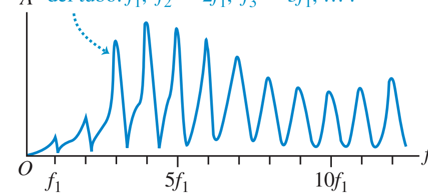
El altavoz emite una frecuencia f

Tubo de órgano abierto

• El aire en el tubo oscila con la misma frecuencia f emitida por el altavoz.
• La amplitud A de la onda depende de la frecuencia.

Amplificador

b) Curva de resonancia: gráfica de amplitud A contra frecuencia impulsora f. Los picos ocurren en las frecuencias de modo normal del tubo: f_1, $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1$, … .



Aplicación Resonancia y la sensibilidad del oído
El canal auditivo del oído humano (véase la figura 16.4) es un tubo lleno de aire, abierto por uno de sus extremos y cerrado en el otro (tímpano). El tubo mide aproximadamente 2.5 cm = 0.025 m de longitud, de modo que tiene una resonancia en su frecuencia fundamental $f_1 = v/4L = (344 \text{ m/s})/[4(0.025 \text{ m})] = 3440$ Hz. La resonancia significa que un sonido en esta frecuencia produce una oscilación considerable del tímpano. Por eso, el oído es más sensible cerca de los 3440 Hz.



16.20 La frecuencia del sonido de esta trompeta coincide exactamente con una de las frecuencias de modo normal de la copa. Las vibraciones de resonancia de la copa tienen una amplitud tan grande que el cristal se hace añicos.



de oscilación del aire en el tubo en función de la frecuencia impulsora f. La forma de esta gráfica se denomina **curva de resonancia** del tubo; tiene picos donde f es igual a las frecuencias de los modos normales del tubo. La forma detallada de la curva de resonancia depende de la geometría del tubo.

Si la frecuencia de la fuerza es exactamente *igual* a una frecuencia de modo normal, el sistema está en resonancia, y la amplitud de la oscilación forzada es máxima. Si no hubiera fricción ni otro mecanismo de disipación de la energía, una fuerza impulsora a una frecuencia de modo normal continuaría agregando energía al sistema, y la amplitud aumentaría indefinidamente. En tal caso idealizado, los picos de la curva de resonancia de la figura 16.19*b* serían infinitamente altos. En un sistema real, sin embargo, siempre hay disipación de energía, o amortiguamiento, como vimos en la sección 14.8; la amplitud de oscilación en resonancia puede ser grande, pero no infinita.

El "sonido del océano" que escuchamos cuando acercamos el oído a un caracol grande se debe a la resonancia. El ruido del aire exterior que roza el caracol es una mezcla de ondas sonoras de casi todas las frecuencias audibles, que obliga al aire dentro del caracol a oscilar. El caracol se comporta como un tubo de órgano, con una serie de frecuencias de modos normales; por ello, el aire interior oscila con más fuerza a esas frecuencias, produciendo el sonido característico del caracol. Para escuchar un fenómeno similar, destape una botella llena de su bebida preferida y sople al ras de la abertura. El ruido lo produce su aliento soplando a través de la boca de la botella, y el "tubo de órgano" es la columna de aire dentro de la botella arriba de la superficie del líquido. Si toma un trago y repite el experimento, oirá un tono más bajo porque el "tubo" es más largo y las frecuencias de modos normales son más bajas.

También hay resonancia cuando se hace oscilar una cuerda estirada (sección 15.8). Suponga que un extremo de la cuerda estirada se mantiene fijo, mientras al otro se le imparte un movimiento sinusoidal transversal de amplitud pequeña, creando así ondas estacionarias. Si la frecuencia del mecanismo impulsor *no* es igual a una de las frecuencias de modo normal de la cuerda, la amplitud en los antinodos es pequeña; pero si la frecuencia es igual a cualquiera de las frecuencias de modo normal, la cuerda estará en resonancia y la amplitud en los antinodos será mucho mayor que en el extremo impulsado. Este último no es precisamente un nodo, aunque está mucho más cerca de un nodo que de un antinodo cuando la cuerda está en resonancia. Las fotografías de la figura 15.23 se obtuvieron así, con el extremo izquierdo de la cuerda fijo y el derecho oscilando verticalmente con amplitud pequeña; se obtuvieron ondas estacionarias de amplitud grande cuando la frecuencia de oscilación del extremo derecho fue igual a la frecuencia fundamental o a uno de los primeros tres sobretonos.

Es fácil demostrar la resonancia con un piano. Pise el pedal del amortiguador (el derecho) para que los amortiguadores se levanten y las cuerdas puedan vibrar libremente; luego, cante con un tono constante hacia el piano. Cuando deje de cantar, parecerá que el piano sigue generando la misma nota. Las ondas sonoras de su voz excitan vibraciones en las cuerdas, cuyas frecuencias naturales son cercanas a las frecuencias (fundamental y armónica) que estaban presentes en la nota que usted emitió.

Un ejemplo más espectacular es cuando una cantante rompe una copa de cristal con su voz amplificada. Una copa de buena calidad tiene frecuencias de modo normal que podemos escuchar dándole un golpecito. Si la cantante emite una nota fuerte con una frecuencia exactamente igual a una de estas frecuencias de modo normal, se pueden crear oscilaciones de gran amplitud y romper el cristal (figura 16.20).



Ejemplo 16.12 Dueto órgano-guitarra

El tubo cerrado de un órgano se hace sonar cerca de una guitarra, haciendo que una de las cuerdas vibre con gran amplitud. Variamos la tensión de la cuerda hasta obtener la amplitud máxima. La longitud de la cuerda es el 80% de la del tubo. Si tanto el tubo como la cuerda vibran en su frecuencia fundamental, calcule la razón entre la rapidez de la onda en la cuerda y la del sonido en el aire.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La gran respuesta de la cuerda es un ejemplo de resonancia; se da porque el tubo y la cuerda tienen la misma frecuencia fundamental. Si usamos los subíndices a y s para identificar el aire dentro del tubo y la cuerda, respectivamente, la condición de reso-

nancia es $f_{1a} = f_{1s}$. La ecuación (16.20) da la frecuencia fundamental de un tubo cerrado; y la frecuencia fundamental de una cuerda de guitarra sujeta por ambos extremos está dada por la ecuación (15.32). En estas expresiones interviene la rapidez de la onda en el aire (v_a) y en la cuerda (v_s), así como las longitudes del tubo y de la cuerda; nos dicen que $L_s = 0.80L_a$, y la incógnita es la razón v_s/v_a.

EJECUTAR: Por las ecuaciones (16.20) y (15.32), $f_{1a} = v_a/4L_a$ y $f_{1s} = v_s/2L_s$. Estas frecuencias son iguales, por lo que

$$\frac{v_a}{4L_a} = \frac{v_s}{2L_s}$$

Sustituyendo $L_s = 0.80L_a$ y reacomodando, obtenemos $v_s/v_a = 0.40$.

EVALUAR: Como ejemplo, si la rapidez del sonido en el aire es de 345 m/s, la rapidez de la onda en la cuerda es (0.40)(345 m/s) = 138 m/s. Observe que, si bien las ondas estacionarias en el tubo y en la cuerda tienen la misma frecuencia, tienen diferente *longitud de onda* $l = v/f$ porque los dos medios tienen diferente rapidez de onda v. ¿Cuál onda estacionaria tiene mayor longitud de onda?

Evalúe su comprensión de la sección 16.5 Un tubo de órgano cerrado, de longitud L, tiene una frecuencia fundamental de 220 Hz. ¿En cuál de los siguientes tubos de órgano habrá resonancia, si un diapasón afinado con una frecuencia de 660 Hz se hace sonar cerca del tubo? (Hay más de una respuesta correcta). **i.** Un tubo de órgano cerrado de longitud L; **ii.** un tubo de órgano cerrado de longitud $2L$; **iii.** un tubo de órgano abierto de longitud L; **iv.** un tubo de órgano abierto de longitud $2L$.



16.6 Interferencia de ondas

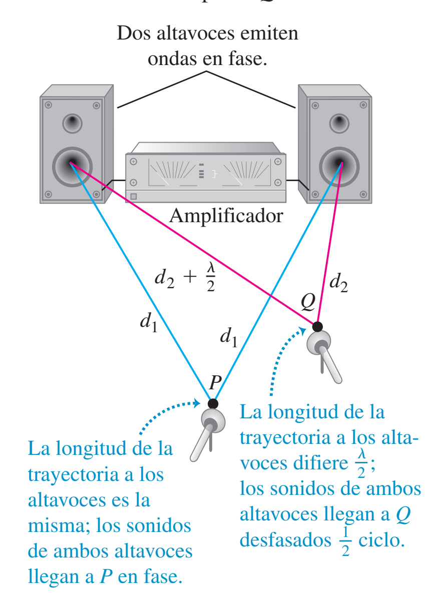
MasteringPHYSICS
PhET: Sound
PhET: Wave Interference

Los fenómenos ondulatorios que se presentan cuando dos o más ondas se traslapan en la misma región del espacio integran el concepto de *interferencia*. Como hemos visto, las ondas estacionarias son un ejemplo sencillo de un efecto de interferencia: dos ondas que viajan en direcciones opuestas en un medio se combinan para producir un patrón de onda estacionaria con nodos y antinodos que no se mueven.

La figura 16.21 muestra un ejemplo de otro tipo de interferencia, que implica ondas que se propagan en el espacio. Los altavoces, alimentados en fase por el mismo amplificador, emiten ondas sonoras sinusoidales idénticas con la misma frecuencia constante. Colocamos un micrófono en el punto P, equidistante de los altavoces. Las crestas de las ondas emitidas por los dos altavoces al mismo tiempo viajan distancias iguales y llegan a P al mismo tiempo; por lo tanto, las ondas llegan en fase, y hay interferencia constructiva. La amplitud total de la onda en P es el doble de la amplitud de cada onda individual, y podemos medir esta amplitud combinada con el micrófono.

Movamos ahora el micrófono al punto Q, donde las distancias de los altavoces al micrófono difieren en media longitud de onda. Las dos ondas llegan *desfasadas* medio ciclo; una cresta positiva de un altavoz llega al mismo tiempo que una cresta negativa del otro. Hay interferencia destructiva, y la amplitud medida por el micrófono es mucho *menor* que cuando solo está presente un altavoz. Si las amplitudes de los dos altavoces son iguales, las dos ondas se cancelan por completo en el punto Q, y la amplitud total ahí es cero.

16.21 Dos altavoces alimentados por el mismo amplificador. Hay interferencia constructiva en el punto P, e interferencia destructiva en el punto Q.

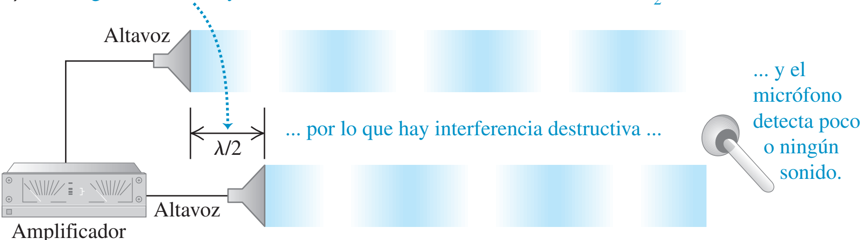


CUIDADO Interferencia y ondas viajeras Aunque esta situación se parece un poco a las ondas estacionarias en un tubo, la onda total de la figura 16.21 es una onda *viajera*, no una estacionaria. Para entender por qué, recuerde que en una onda estacionaria no hay flujo neto de energía en ninguna dirección. En cambio, en la figura 16.21 hay un flujo total de energía de los altavoces al aire circundante; esto es característico de las ondas viajeras. La interferencia entre las ondas de los dos altavoces simplemente hace que el flujo de energía se *canalice* en ciertas direcciones (por ejemplo, hacia P), alejándolo de otras direcciones (por ejemplo, de Q). Podemos ver otra diferencia entre la figura 16.21 y una onda estacionaria si consideramos un punto, como Q, donde se presenta una interferencia destructiva. Este punto es *tanto* un nodo de desplazamiento *como* un nodo de presión, ya que no hay onda en este punto. Compare esto con una onda estacionaria, en la que un nodo de presión es un antinodo de desplazamiento, y viceversa.

Hay interferencia constructiva siempre que las distancias recorridas por las dos ondas difieren en un número entero de longitudes de onda, 0, λ, 2λ, 3λ, …; en todos estos casos, las ondas llegan al micrófono en fase (figura 16.22*a*). Si las distancias de los dos altavoces al micrófono difieren en cualquier número semientero de longitudes de onda, $\lambda/2$, $3\lambda/2$, $5\lambda/2$, …, las ondas llegan al micrófono desfasadas y habrá interferencia destructiva (figura 16.22*b*). En este caso, poca o ninguna energía sonora fluye hacia el micrófono directamente enfrente de los altavoces. En lugar de esto, la energía se dirige hacia los lados, donde hay interferencia constructiva.

16.22 Dos altavoces, alimentados por el mismo amplificador, que emiten ondas en fase. Solo se muestran las ondas dirigidas hacia el micrófono, y se han separado por claridad. *a*) Hay interferencia constructiva cuando la diferencia de las trayectorias es 0, λ, 2λ, 3λ, … *b*) Hay interferencia destructiva cuando la diferencia de las trayectorias es $\lambda/2$, $3\lambda/2$, $5\lambda/2$, …







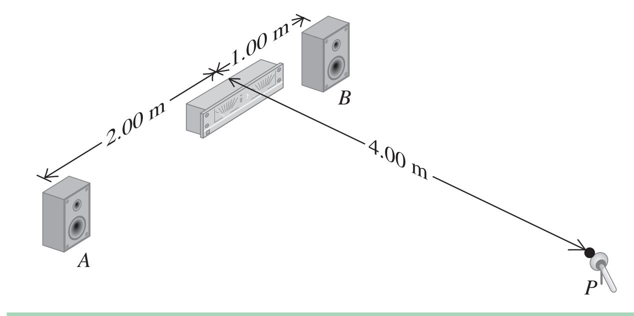
Ejemplo 16.13 Interferencia de altavoces

Dos altavoces pequeños, A y B (figura 16.23), son alimentados por el mismo amplificador y emiten ondas sinusoidales puras en fase. *a*) ¿En qué frecuencias se presenta interferencia constructiva en el punto P? *b*) ¿E interferencia destructiva? La rapidez del sonido es de 350 m/s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La naturaleza de la interferencia en P depende de la diferencia d en las longitudes de las trayectorias de los puntos A y B a P. Calculamos las longitudes de las trayectorias usando el teorema de Pitágoras. Hay interferencia constructiva cuando d es un número entero de longitudes de onda, mientras que hay interferencia destructiva cuando d es un número semientero de longitudes de onda.

16.23 ¿Qué clase de interferencia se presenta en P?



Para obtener las frecuencias correspondientes, usamos la relación $v = f\lambda$.

EJECUTAR: La distancia de A a P es $[(2.00\text{ m})^2 + (4.00\text{ m})^2]^{1/2} = 4.47$ m; la distancia de B a P es $[(1.00\text{ m})^2 + (4.00\text{ m})^2]^{1/2} = 4.12$ m. La diferencia entre las trayectorias es $d = 4.47\text{ m} - 4.12\text{ m} = 0.35$ m.

a) Hay interferencia constructiva cuando $d = 0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ es decir, $d = 0, v/f, 2v/f, \ldots = nv/f$. Por lo tanto, las posibles frecuencias son

$$f_n = \frac{nv}{d} = n\frac{350\text{ m/s}}{0.35\text{ m}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
$$= 1000\text{ Hz}, 2000\text{ Hz}, 3000\text{ Hz}, \ldots$$

b) Hay interferencia destructiva cuando $d = \lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \ldots$ es decir, $d = v/2f, 3v/2f, 5v/2f, \ldots$ Las posibles frecuencias son

$$f_n = \frac{nv}{2d} = n\frac{350\text{ m/s}}{2(0.35\text{ m})} \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots)$$
$$= 500\text{ Hz}, 1500\text{ Hz}, 2500\text{ Hz}, \ldots$$

EVALUAR: Conforme aumentemos la frecuencia, el sonido en P alternará entre amplitudes grandes y pequeñas (cerca de cero), con los máximos y mínimos en las frecuencias que calculamos. Este efecto podría no ser considerable en un recinto ordinario debido a las reflexiones en paredes, piso y techo. Es más fuerte en exteriores o en una cámara anecoica, cuyas paredes absorben casi todo el sonido y así eliminan las reflexiones.

Se usan efectos de interferencia para controlar el ruido de fuentes de sonido muy ruidosas como las plantas de electricidad de turbinas de gas o las celdas de prueba de motores a reacción. La idea es usar fuentes de sonido adicionales que, en algunas regiones del espacio, interfieren destructivamente con el sonido indeseable y lo cancelan. Micrófonos en el área controlada alimentan señales de vuelta a las fuentes de sonido, que se ajustan continuamente para una cancelación óptima del ruido en el área controlada.

Evalúe su comprensión de la sección 16.6 Suponga que el altavoz A en la figura 16.23 emite una onda sonora sinusoidal con frecuencia de 500 Hz, y el altavoz B emite una onda sonora sinusoidal con frecuencia de 1000 Hz. ¿Qué clase de interferencia habrá entre estas dos ondas? **i.** Interferencia constructiva en varios puntos, incluyendo el punto P, y destructiva en otros puntos; **ii.** interferencia destructiva en varios puntos, incluyendo el punto P, y constructiva en otros varios puntos; **iii.** ninguna de las opciones **i.** o **ii.**

16.7 Pulsos

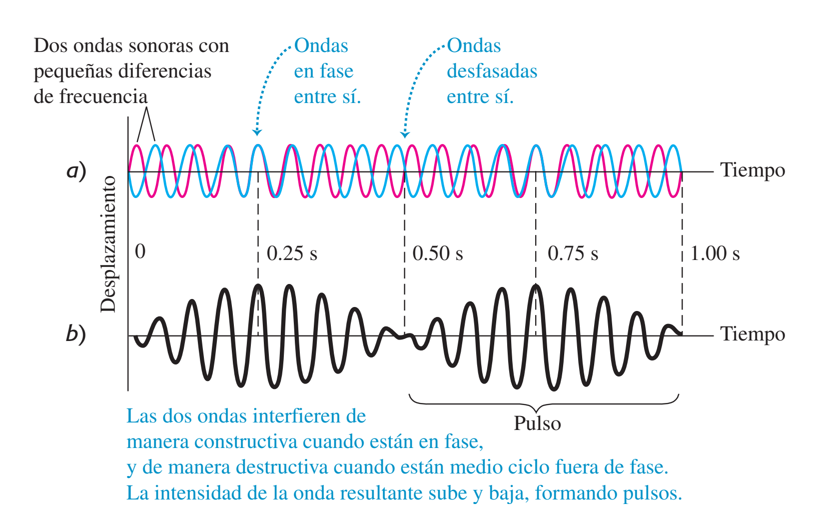


ActivPhysics 10.7: Beats and Beat Frequency

En la sección 16.6 hablamos de efectos de *interferencia* que se presentan cuando dos ondas distintas con la misma frecuencia se traslapan en la misma región del espacio. Veamos ahora lo que sucede cuando tenemos dos ondas de la misma amplitud, pero frecuencias ligeramente distintas. Esto ocurre, por ejemplo, cuando dos diapasones afinados con frecuencias un poco diferentes suenan juntos, o cuando dos tubos de órgano que deberían tener la misma frecuencia están un poco "desafinados".

Considere un punto en el espacio donde las dos ondas se traslapan. En la figura 16.24*a*, se grafican los desplazamientos de las ondas individuales en este punto en función del tiempo. La longitud total del eje del tiempo representa un segundo, y las frecuencias son de 16 Hz (azul) y de 18 Hz (rojo). Aplicando el principio de superposición, sumamos los dos desplazamientos en cada instante para obtener el desplazamiento total en ese instante. El resultado es la curva de la figura 16.24*b*. En ciertos momentos, las ondas están en fase; sus máximos coinciden y sus amplitudes se suman. Sin embargo, debido a la pequeña diferencia entre sus frecuencias, las dos ondas no pueden estar en fase todo el tiempo. Efectivamente, en ciertos instantes (como $t = 0.50$ s en la figura 16.24), las dos ondas están completamente *desfasadas*. Las ondas se cancelan y la amplitud total es cero.

La onda resultante en la figura 16.24*b* parece una onda sinusoidal con amplitud variable que va de un máximo a cero y de regreso. En este ejemplo, la amplitud pasa por dos máximos y dos mínimos en 1 s, así que la frecuencia de esta variación de amplitud es de 2 Hz. La variación de amplitud causa variaciones de volumen llamadas **pulsos**, y la frecuencia con que varía el volumen es la **frecuencia del pulso**. En este ejemplo,



16.24 Los pulsos son fluctuaciones de la amplitud producidas por dos ondas sonoras con pequeñas diferencias de frecuencia, en este caso de 16 y 18 Hz. *a*) Ondas individuales. *b*) Onda resultante formada por superposición de las dos ondas. La frecuencia del pulso es 18 Hz − 16 Hz = 2 Hz.

la frecuencia del pulso es la *diferencia* de las dos frecuencias. Si la frecuencia del pulso es de unos cuantos hertz, la oímos temblorosa, o como un pulso del tono.

Podemos demostrar que la frecuencia del pulso *siempre* es la diferencia de las dos frecuencias f_a y f_b. Suponga que f_a es mayor que f_b; los periodos correspondientes son T_a y T_b, con $T_a < T_b$. Si las dos ondas inician desfasadas en $t = 0$, volverán a estar en fase cuando la primera onda haya pasado por exactamente un ciclo más que la segunda. Esto sucederá en $t = T_{pulso}$, el *periodo* del pulso. Sea n el número de ciclos de la primera onda en un tiempo T_{pulso}; entonces el número de ciclos de la segunda onda en el mismo tiempo es $(n - 1)$, y tenemos las relaciones

$$T_{pulso} = nT_a \qquad \text{y} \qquad T_{pulso} = (n - 1)T_b$$

Eliminando n en estas dos ecuaciones:

$$T_{pulso} = \frac{T_a T_b}{T_b - T_a}$$

El recíproco del periodo de pulso es la *frecuencia* del pulso, $f_{pulso} = 1/T_{pulso}$; así que

$$f_{pulso} = \frac{T_b - T_a}{T_a T_b} = \frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_b}$$

y por último

$$f_{pulso} = f_a - f_b \qquad \text{(frecuencia del pulso)} \qquad (16.24)$$

Como dijimos, la frecuencia del pulso es la diferencia de las dos frecuencias. Al usar la ecuación (16.24), recuerde que f_a es la frecuencia más alta.

Otra forma de deducir la ecuación (16.24) es escribir funciones que describan las curvas de la figura 16.24*a* y luego sumarlas. Suponga que, en cierta posición, las dos ondas están dadas por $y_a(t) = A \operatorname{sen} 2\pi f_a t$ y $y_b(t) = -A \operatorname{sen} 2\pi f_b t$. Usamos la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(a - b) \cos \tfrac{1}{2}(a + b)$$

Ahora podemos expresar la onda total $y(t) = y_a(t) + y_b(t)$ como

$$y_a(t) + y_b(t) = \left[2A \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(2\pi)(f_a - f_b)t\right] \cos \tfrac{1}{2}(2\pi)(f_a + f_b)t$$

El factor de amplitud (en corchetes) varía lentamente con la frecuencia $\frac{1}{2}(f_a - f_b)$. El factor coseno varía con la frecuencia *media* $\frac{1}{2}(f_a + f_b)$. El *cuadrado* del factor de amplitud, que es proporcional a la intensidad que el oído percibe, pasa por dos máximos y dos mínimos por ciclo. Así, la frecuencia del pulso f_{pulso} que se escucha es dos veces la cantidad $\frac{1}{2}(f_a - f_b)$, es decir, $f_a - f_b$, en concordancia con la ecuación (16.24).

Se pueden escuchar pulsaciones entre dos tonos hasta una frecuencia del pulso de 6 o 7 Hz. Las cuerdas de piano o dos tubos de órgano que difieren en su frecuencia en 2 o 3 Hz emiten sonidos temblorosos y "desafinados", aunque algunos órganos contienen dos juegos de tubos deliberadamente afinados a frecuencias de pulso de 1 o 2 Hz, para dar un efecto suave sin temblores. La identificación de pulsos es una técnica importante al afinar todos los instrumentos musicales.

Con diferencias de frecuencia mayores que 6 o 7 Hz, ya no oímos pulsos individuales, y la sensación se funde en una de *consonancia* o *disonancia*, según la relación de frecuencia de los dos tonos. En algunos casos, el oído percibe un tono llamado *tono de diferencia*, igual a la frecuencia del pulso de los dos tonos. Por ejemplo, si escuchamos un silbato que produce sonidos a 1800 y 1900 Hz, oiremos no solo estos tonos, sino también un tono mucho más bajo de 100 Hz.

Los motores de avión con varias hélices deben sincronizarse de modo que los sonidos de hélice no causen pulsos molestos, que se escuchan como fuertes sonidos pulsantes (figura 16.25). En algunos aviones, esto se hace por medios electrónicos; en otros, el piloto lo hace por oído, como si afinara un piano.

16.25 Si las dos hélices de este avión no se sincronizan con precisión, los pilotos, pasajeros y escuchas en tierra escucharán pulsos.



Evalúe su comprensión de la sección 16.7 Un diapasón afinado vibra a 440 Hz, mientras que otro lo hace a una frecuencia desconocida. Cuando ambos diapasones afinados se hacen sonar de modo simultáneo, se escucha un tono que sube y baja en intensidad tres veces cada segundo. ¿Cuál es la frecuencia del segundo diapasón? **i.** 434 Hz; **ii.** 437 Hz; **iii.** 443 Hz; **iv.** 446 Hz **v**. ya sea 434 o 446 Hz; **vi.** ya sea 437 o 443 Hz.

16.8 Efecto Doppler

MasteringPHYSICS®

ActivPhysics 10.8: Doppler Effect: Conceptual Introduction
ActivPhysics 10.9: Doppler Effect: Problems

Quizás usted ha notado que cuando un automóvil se acerca tocando el claxon, el tono parece bajar conforme el vehículo se aleja. Este fenómeno, descrito por primera vez por el científico austriaco del siglo XIX Christian Doppler, se llama **efecto Doppler**. Cuando una fuente de sonido y un receptor están en movimiento relativo, la frecuencia del sonido que escucha el receptor no es la misma que la frecuencia fuente. Se presenta un efecto similar con las ondas de luz y radio; volveremos a esto más adelante en esta sección.

Para analizar el efecto Doppler en el caso del sonido, deduciremos una relación entre el cambio de frecuencia y las velocidades de la fuente y el receptor relativas al medio (usualmente aire) por el que se propagan las ondas sonoras. Por sencillez, solo consideraremos el caso especial en que las velocidades de la fuente y el receptor se encuentran a lo largo de la línea que los une. Sean v_S y v_L las componentes de velocidad en esta línea entre la fuente y el receptor, respectivamente, relativas al medio. Elegimos como dirección positiva la que va del receptor L a la fuente S. La rapidez del sonido v relativa al medio siempre se considera positiva.

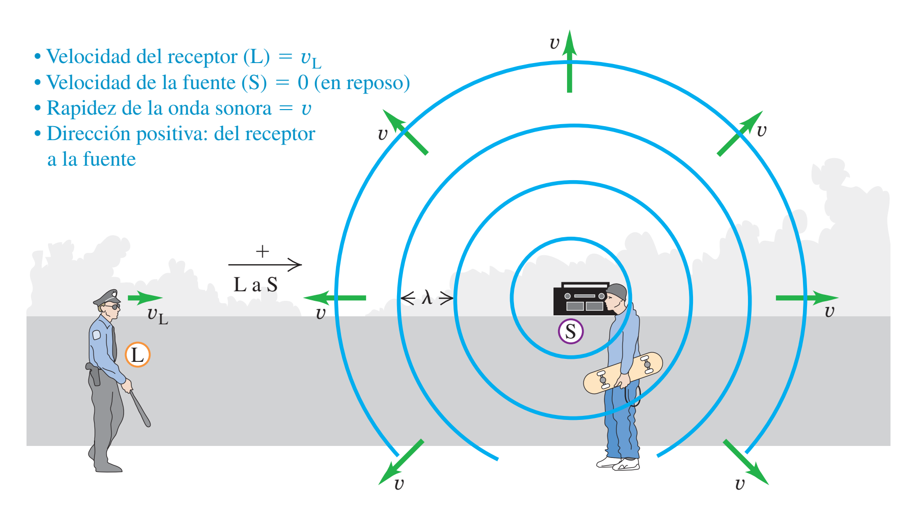
Receptor en movimiento y fuente estacionaria

Imaginemos primero un receptor L que se mueve con velocidad v_L hacia una fuente estacionaria S (figura 16.26). La fuente emite una onda sonora con frecuencia f_S y longitud de onda $\lambda = v/f_S$. La figura muestra varias crestas de onda, separadas por distancias iguales λ. Las crestas que se acercan al receptor en movimiento tienen una rapidez de propagación *relativa al receptor* de $(v + v_L)$, así que la frecuencia f_L con que llegan a la posición del receptor (esto es, la frecuencia que el receptor oye) es

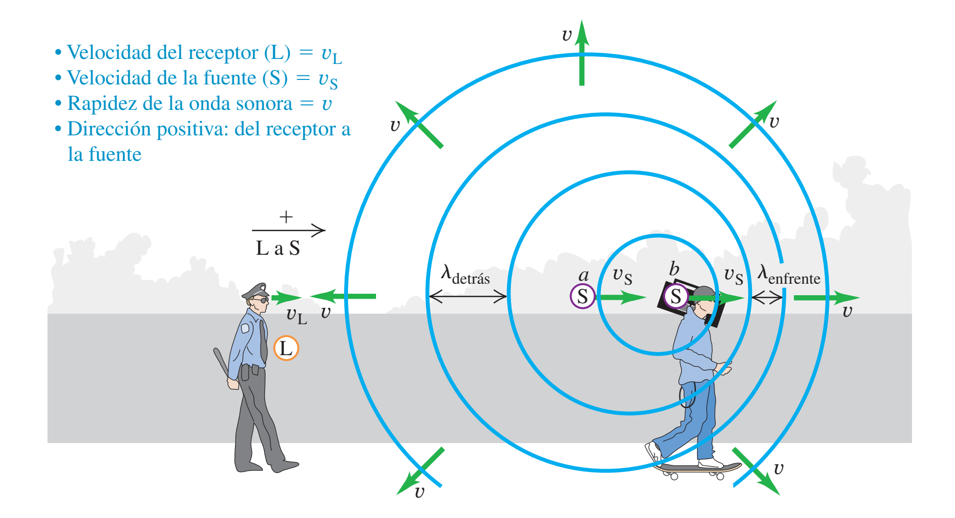
$$f_L = \frac{v + v_L}{\lambda} = \frac{v + v_L}{v/f_S} \qquad (16.25)$$

o bien,

$$f_L = \left(\frac{v + v_L}{v}\right) f_S = \left(1 + \frac{v_L}{v}\right) f_S \qquad \text{(receptor móvil, fuente estacionaria)} \qquad (16.26)$$



16.26 Un receptor que se mueve hacia una fuente estacionaria oye una frecuencia más alta que la frecuencia fuente, porque la rapidez relativa del receptor y de la onda es mayor que la rapidez v de la onda.



16.27 Las crestas de ondas emitidas por una fuente móvil se juntan al frente de la fuente (a la derecha en este caso) y se separan detrás (a la izquierda aquí).

Así, un receptor que se mueve hacia una fuente ($v_L > 0$), como en la figura 16.26, oye una frecuencia más alta (tono más agudo) que un receptor estacionario. Un receptor que se aleja de la fuente ($v_L < 0$) oye una frecuencia más baja (tono más grave).

Fuente en movimiento y receptor en movimiento

Suponga ahora que la fuente también se mueve, con velocidad v_S (figura 16.27). La rapidez de la onda relativa al medio (aire) sigue siendo v; está determinada por las propiedades del medio y no cambia por el movimiento de la fuente. Sin embargo, la longitud de onda ya no es igual a v/f_S; veamos por qué. El tiempo que tarda en emitirse un ciclo de la onda es el periodo $T = 1/f_S$. Δurante este tiempo, la onda viaja una distancia $vT = v/f_S$ y la fuente se mueve una distancia $v_S T = v_S/f_S$. La longitud de onda es la distancia entre crestas sucesivas, y depende del desplazamiento *relativo* de la fuente y la onda. Como muestra la figura 16.27, este es diferente adelante y atrás de la fuente. En la región a la derecha de la fuente en la figura 16.27 (es decir, adelante de la fuente), la longitud de onda es

$$\lambda_{enfrente} = \frac{v}{f_S} - \frac{v_S}{f_S} = \frac{v - v_S}{f_S} \quad \text{(longitud de onda enfrente de una fuente móvil)} \tag{16.27}$$

En la región a la izquierda de la fuente (es decir, atrás de ella), es

$$\lambda_{atrás} = \frac{v + v_S}{f_S} \quad \text{(longitud de onda atrás de una fuente móvil)} \tag{16.28}$$

Las ondas adelante y atrás de la fuente se comprimen y se estiran, respectivamente, por el movimiento de la fuente.

Para obtener la frecuencia que oye el receptor detrás de la fuente, sustituimos la ecuación (16.28) en la primera forma de la ecuación (16.25):

$$f_L = \frac{v + v_L}{\lambda_{atrás}} = \frac{v + v_L}{(v + v_S)/f_S}$$

$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S \quad \text{(efecto Doppler, fuente móvil y receptor móvil)} \tag{16.29}$$

Esto expresa la frecuencia f_L que escucha el receptor en términos de la frecuencia f_S de la fuente.

Aunque la dedujimos para la situación específica de la figura 16.27, la ecuación (16.29) incluye *todas* las posibilidades de movimiento de la fuente y el receptor (rela-

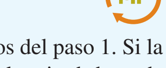
tivas al medio) a lo largo de la línea que los une. Si el receptor está en reposo en el medio, $v_L = 0$. Cuando la fuente y el receptor están en reposo o tienen la misma velocidad relativa al medio, entonces $v_L = v_S$ y $f_L = f_S$. Siempre que la dirección de la velocidad de la fuente o del receptor sea opuesta a la dirección del receptor a la fuente (que definimos como positiva), la velocidad correspondiente que debemos usar en la ecuación (16.29) es negativa.

Como ejemplo, la frecuencia que oye un receptor en reposo ($v_L = 0$) es $f_L = [v/(v + v_S)]f_S$. Si la fuente se mueve hacia el receptor (en la dirección negativa), entonces $v_S < 0$, $f_L > f_S$, y el receptor escucha una frecuencia mayor que la emitida por la fuente. En cambio, si la fuente se mueve alejándose del receptor (en la dirección positiva), entonces $v_S > 0$, $f_L < f_S$, y el receptor oye una frecuencia menor. Esto explica el cambio de tono de la sirena que se escucha conforme una ambulancia pasa cerca de usted y lo rebasa (figura 16.28).

16.28 El efecto Doppler explica por qué la sirena de un carro de bomberos o de una ambulancia tiene un tono alto ($f_L > f_S$) cuando se acerca ($v_S < 0$) y un tono bajo ($f_L < f_S$) cuando se aleja ($v_S > 0$).



Estrategia para resolver problemas 16.2 Efecto Doppler



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* El efecto Doppler se presenta siempre que una fuente de ondas, el detector de las ondas (receptor) o ambos están en movimiento.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Defina un sistema de coordenadas, con la dirección positiva, del receptor a la fuente. Determine cuidadosamente los signos de todas las velocidades relevantes. Una velocidad en la dirección del receptor a la fuente es positiva; la velocidad en la dirección opuesta es negativa. Todas las velocidades deben medirse en relación con el aire en el que viaja el sonido.
2. Use subíndices de manera consistente para identificar las diferentes cantidades: subíndice S para la fuente, y L para el receptor.
3. Determine cuáles de las cantidades desconocidas son las incógnitas.

EJECUTAR *la solución* de la siguiente manera:

1. Use la ecuación (16.29) para relacionar las frecuencias de la fuente y del receptor, la rapidez del sonido y las velocidades de la fuente y el receptor de acuerdo con la convención de signos del paso 1. Si la fuente está en movimiento, se puede obtener la longitud de onda medida por el receptor empleando la ecuación (16.27) o la (16.28).
2. Si una onda se refleja en una superficie, sea estacionaria o móvil, resuelva el problema en dos pasos. En el primero, la superficie hace las veces de receptor; la frecuencia con que las crestas de onda llegan a la superficie es f_L. En el segundo, la superficie es la "fuente" que emite ondas con esta misma frecuencia f_L. Por último, determine qué frecuencia oye un receptor que detecta esta nueva onda.

EVALUAR *la respuesta:* ¿La *dirección* del cambio de frecuencia es lógica? Si la fuente y el receptor se están acercando entre sí, $f_L > f_S$; si se están alejando, $f_L < f_S$. Si la fuente y el receptor no tienen movimiento relativo, $f_L = f_S$.

Ejemplo 16.14 Efecto Doppler I: longitudes de onda



La sirena de una patrulla emite una onda sinusoidal con una frecuencia $f_S = 300$ Hz. La rapidez del sonido es de 340 m/s y el aire está tranquilo. *a*) Calcule la longitud de onda de las ondas de la sirena si está en reposo. *b*) Si la sirena se mueve a 30 m/s, calcule las longitudes de onda para las ondas enfrente y atrás de la fuente.

16.29 Diagrama de este problema.

Patrulla

$v_S = 30$ m/s

$\lambda_{detrás} = ?$

$\lambda_{enfrente} = ?$

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El efecto Doppler no interviene en el inciso *a*), ya que ni la fuente ni el receptor están en movimiento con respecto al aire; $v = \lambda f$ proporciona la longitud de onda. La figura 16.29 muestra la situación del inciso *b*): la fuente está en movimiento, así que obtenemos las longitudes de onda usando las ecuaciones (16.27) y (16.28) para el efecto Doppler.

EJECUTAR: *a*) Cuando la fuente está en reposo,

$$\lambda = \frac{v}{f_S} = \frac{340\ \text{m/s}}{300\ \text{Hz}} = 1.13\ \text{m}$$

b) Según la ecuación (16.27), enfrente de la sirena,

$$\lambda_{enfrente} = \frac{v - v_S}{f_S} = \frac{340\ \text{m/s} - 30\ \text{m/s}}{300\ \text{Hz}} = 1.03\ \text{m}$$

De acuerdo con la ecuación (16.28), detrás de la sirena,

$$\lambda_{detrás} = \frac{v + v_S}{f_S} = \frac{340\ \text{m/s} + 30\ \text{m/s}}{300\ \text{Hz}} = 1.23\ \text{m}$$

EVALUAR: La longitud de onda es menor enfrente de la sirena y mayor detrás de ella, como se esperaba.



Ejemplo 16.15 Efecto Doppler II: frecuencias

Si un receptor L está en reposo y la sirena del ejemplo 16.14 se aleja de L a 30 m/s, ¿qué frecuencia oye el receptor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Nuestra incógnita es la frecuencia f_L que escucha el receptor, quien está detrás de la fuente móvil. La figura 16.30 ilustra la situación. Tenemos $v_L = 0$ y $v_S = +30$ m/s (positiva porque la velocidad de la fuente va del receptor a la fuente).

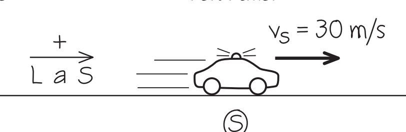
EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (16.29),

$$f_L = \frac{v}{v + v_S} f_S = \frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} + 30 \text{ m/s}} (300 \text{ Hz}) = 276 \text{ Hz}$$

EVALUAR: La fuente y el receptor se están alejando, así que $f_L < f_S$. Veamos la comprobación de nuestro resultado numérico. Por el ejemplo 16.14, la longitud de onda detrás de la fuente (que es donde se encuentra el receptor de la figura 16.30) es 1.23 m. La rapidez de la onda en relación con el receptor estacionario es $v = 340$ m/s aunque la fuente se esté moviendo, así que

$$f_L = \frac{v}{\lambda} = \frac{340 \text{ m/s}}{1.23 \text{ m}} = 276 \text{ Hz}$$

16.30 Diagrama de este problema.





Ejemplo 16.16 Efecto Doppler III: un receptor móvil

Si la sirena está en reposo y el receptor se mueve alejándose de la sirena a 30 m/s, ¿qué frecuencia oye?

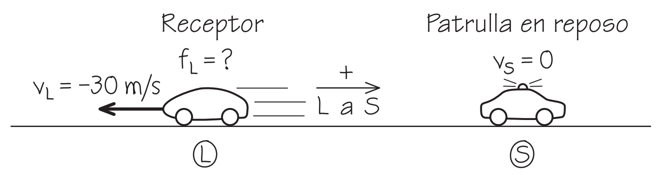
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: De nuevo nuestra incógnita es la frecuencia f_L, pero ahora L está en movimiento y S en reposo. La figura 16.31 ilustra la situación. La velocidad del receptor es $v_L = -30$ m/s (negativa porque el movimiento es de la fuente al receptor).

EJECUTAR: Según la ecuación (16.29),

$$f_L = \frac{v + v_L}{v} f_S = \frac{340 \text{ m/s} + (-30 \text{ m/s})}{340 \text{ m/s}} (300 \text{ Hz}) = 274 \text{ Hz}$$

16.31 Diagrama de este problema.



EVALUAR: Otra vez, la fuente y el receptor se alejan, de modo que $f_L < f_S$. Observe que la *velocidad relativa* de la fuente y el receptor es la misma que en el ejemplo 16.15, pero el desplazamiento Doppler es distinto porque v_S y v_L son distintas.



Ejemplo 16.17 Efecto Doppler IV: fuente en movimiento, receptor en movimiento

Si la sirena se está alejando del receptor con una rapidez de 45 m/s relativa al aire, y el receptor se mueve hacia la sirena con una rapidez de 15 m/s relativa al aire, ¿qué frecuencia oye el receptor?

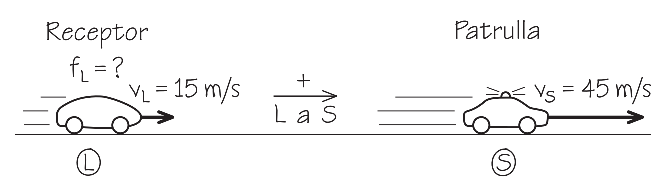
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Ahora, *tanto* L *como* S están en movimiento. Una vez más, la incógnita es la frecuencia f_L. Tanto la velocidad de la fuente $v_S = +45$ m/s como la velocidad del receptor $v_L = +15$ m/s son positivas porque ambas velocidades van en la dirección del receptor a la fuente.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (16.29),

$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S = \frac{340 \text{ m/s} + 15 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} + 45 \text{ m/s}} (300 \text{ Hz}) = 277 \text{ Hz}$$

16.32 Diagrama para este problema.



EVALUAR: Como en los ejemplos 16.15 y 16.16, la fuente y el receptor se alejan uno de otro a 30 m/s, así que, de nuevo $f_L < f_S$. Pero f_L es diferente en los tres casos porque el efecto Doppler para el sonido depende de cómo la fuente y el receptor se mueven respecto del *aire*, no nada más de cómo se mueven uno con respecto al otro.



Ejemplo 16.18 Efecto Doppler V: un cambio Doppler doble

La patrulla se dirige hacia una bodega a 30 m/s. ¿Qué frecuencia escucha el conductor reflejada de la bodega?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En esta situación, hay *dos* efectos Doppler (figura 16.33). En el primero, la bodega es el "receptor" estacionario. La frecuencia

16.33 Dos etapas del movimiento de la onda sonora, de la patrulla hacia la bodega, y de regreso a la patrulla.

a) El sonido viaja de la sirena de la patrulla (fuente S) a la bodega (“receptor” L).

$v_S = -30$ m/s

$v_L = 0$

L a S

b) El sonido reflejado viaja de la bodega (fuente S) a la patrulla (receptor L).

$v_L = +30$ m/s

$v_S = 0$

L a S

del sonido que llega a la bodega, que llamaremos f_W, es mayor que 300 Hz porque la fuente se está aproximando. En el segundo desplazamiento, la bodega actúa como fuente de un sonido con frecuencia f_W, y el receptor es el conductor de la patrulla, quien oye una frecuencia mayor que f_W porque se está acercando a la fuente.

PLANTEAR: Para determinar f_W, usamos la ecuación (16.29) cambiando f_L por f_W. En esta parte del problema, $v_L = v_W = 0$ (la bodega está en reposo) y $v_S = -30$ m/s (la sirena se mueve en la dirección negativa de la fuente al receptor).

Para determinar la frecuencia que oye el conductor (la incógnita), usamos de nuevo la ecuación (16.29), pero ahora cambiando f_S por f_W. En esta segunda parte del problema, $v_S = 0$ porque la bodega estacionaria es la fuente y la velocidad del receptor (el conductor) es $v_L = +30$ m/s (positiva porque va del receptor a la fuente).

EJECUTAR: La frecuencia que llega a la bodega es

$$f_W = \frac{v}{v + v_S} f_S = \frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} + (-30 \text{ m/s})}(300 \text{ Hz}) = 329 \text{ Hz}$$

Entonces, la frecuencia que el conductor oye es

$$f_L = \frac{v + v_L}{v} f_W = \frac{340 \text{ m/s} + 30 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s}}(329 \text{ Hz}) = 358 \text{ Hz}$$

EVALUAR: Como hay dos desplazamientos Doppler, el sonido reflejado que escucha el conductor tiene una frecuencia aún más alta que el que oye un receptor estacionario en la bodega.

Efecto Doppler para ondas electromagnéticas

En el efecto Doppler para el sonido, las velocidades v_L y v_S siempre se miden relativas al *aire* o al medio que consideremos. También hay un efecto Doppler para ondas *electromagnéticas* en el espacio vacío, como las de luz o de radio. En este caso, no hay un medio que podamos usar como referencia para medir velocidades, y lo único que importa es la velocidad *relativa* entre la fuente y el receptor. (En contraste, el efecto Doppler para el sonido no depende simplemente de esta velocidad relativa, como vimos en el ejemplo 16.17).

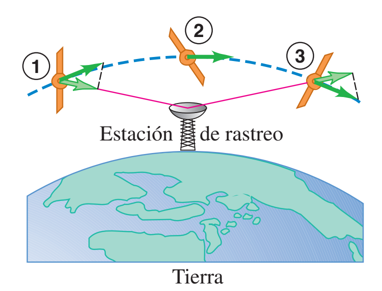
Si queremos deducir la expresión del cambio de frecuencia Doppler para la luz, tenemos que usar la teoría especial de la relatividad. Explicaremos esta teoría en el capítulo 37 (volumen 2), pero por ahora citaremos el resultado sin deducirlo. La rapidez de onda es la rapidez de la luz, denotada con c, y es la misma para la fuente y el receptor. En el marco de referencia en el que el receptor está en reposo, la fuente se aleja del receptor con velocidad v. (Si la fuente se *acerca* al receptor, v es negativa). La frecuencia fuen-te es otra vez f_S. La frecuencia f_R medida por el receptor R (la frecuencia con que llegan las ondas al receptor) está dada por

$$f_R = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} f_S \qquad \text{(efecto Doppler para la luz)} \qquad (16.30)$$

Si v es positiva, la fuente se *aleja* directamente del receptor y f_R siempre es *menor* que f_S; si v es negativa, la fuente se mueve directamente *hacia* el receptor y f_R es *mayor* que f_S. El efecto cualitativo es el mismo que con el sonido, pero la relación cuantitativa es diferente.

Una aplicación conocida del efecto Doppler para ondas de radio es el radar montado en la ventana de una patrulla de policía para verificar la rapidez de otros vehículos. La onda electromagnética emitida por el dispositivo se refleja en un auto en movimiento, que actúa como fuente móvil, y la onda reflejada hacia el dispositivo experimenta un desplazamiento Doppler de frecuencia. Las señales transmitida y reflejada se combinan para producir pulsos, y la rapidez se puede calcular a partir de la frecuencia de los pulsos. Se usan técnicas similares (“radar Doppler”) para medir velocidades del viento en la atmósfera.

16.34 Cambio de la componente de velocidad a lo largo de la línea visual de un satélite que pasa por una estación de rastreo. La frecuencia recibida en la estación cambia de alta a baja cuando el satélite pasa por arriba.



El efecto Doppler también se usa para rastrear satélites y otros vehículos espaciales. En la figura 16.34, un satélite emite una señal de radio de frecuencia constante f_S. Al pasar el satélite en su órbita, primero se acerca y luego se aleja del receptor; la frecuencia f_R de la señal recibida en tierra cambia de un valor mayor que f_S a uno menor cuando el satélite pasa por arriba.

Evalúe su comprensión de la sección 16.8 Imagine que está en un concierto al aire libre y que el viento sopla a 10 m/s de los músicos hacia usted. ¿El sonido que escucha ha sufrido un desplazamiento Doppler? Si es así, ¿se desplazó a frecuencias más bajas o más altas?

16.9 Ondas de choque

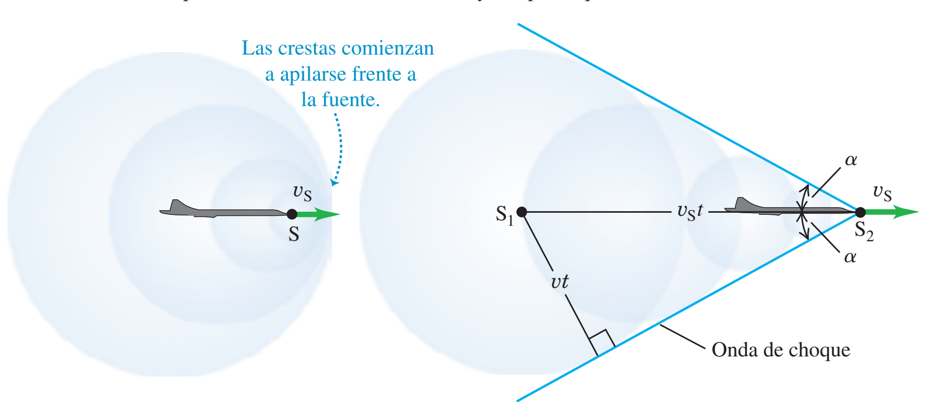
El lector tal vez haya experimentado "estampidos sónicos" causados por un avión que pasa volando con una rapidez mayor que la del sonido. La figura 16.35 muestra cualitativamente por qué sucede esto. Denotemos con v_S la *rapidez* del avión relativa al aire, de modo que siempre sea positiva. El movimiento del avión en el aire produce sonido; si v_S es menor que la rapidez del sonido v, las ondas enfrente del avión se apretarán con una longitud de onda dada por la ecuación (16.27):

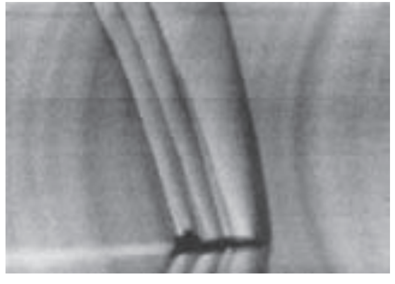
$$\lambda_{\text{enfrente}} = \frac{v - v_S}{f_S}$$

Conforme la rapidez v_S del avión se acerca a la rapidez v del sonido, la longitud de onda se acerca a cero y las crestas de la onda se apilan (figura 16.35*a*). El avión debe ejercer una gran fuerza para comprimir el aire frente a él; por la tercera ley de Newton, el aire ejerce una fuerza igualmente grande sobre el avión. Por lo tanto, hay un aumento considerable en el arrastre aerodinámico (resistencia del aire) conforme el avión se acerca a la rapidez del sonido; se trata de un fenómeno llamado "barrera del sonido".

Cuando v_S es mayor en magnitud que v, la fuente del sonido es **supersónica**, y las ecuaciones (16.27) y (16.29) para el efecto Doppler ya no describen la onda sonora enfrente de la fuente. La figura 16.35*b* muestra un corte transversal de lo que sucede. Al avanzar el avión, desplaza el aire circundante y produce sonido. La punta del avión emite una serie de crestas de onda; cada una se expande en un círculo centrado en la posición del avión cuando emitió esa cresta. Después de un tiempo t, la cresta emitida desde un punto S_1 se extendió a un círculo de radio vt, y el avión se ha movido una distancia mayor $v_S t$, a la posición S_2. Podemos ver que las crestas circulares se interfieren constructivamente en puntos a lo largo de la línea azul que forma un ángulo α con la dirección de la velocidad del avión, dando lugar a una cresta de onda de am-

16.35 Crestas de onda alrededor de una fuente de sonido S que se mueve *a*) ligeramente más lento que la rapidez v del sonido y *b*) más rápido que la rapidez v del sonido. *c*) La fotografía muestra un jet T-38 que se desplaza a 1.1 veces la rapidez del sonido. Las ondas de choque individuales son producidas por la punta, las alas y la cola. Los ángulos de estas ondas varían porque la rapidez del aire aumenta y disminuye al moverse alrededor del avión, así que la rapidez relativa v_S del avión y el aire es distinta para las ondas de choque producidas en diferentes puntos del avión.





plitud muy grande sobre la línea. Esta cresta de amplitud grande se llama **onda de choque** (figura 16.35*c*).

A partir del triángulo rectángulo de la figura 16.35*b*, vemos que el ángulo α está dado por

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{vt}{v_S t} = \frac{v}{v_S} \quad \text{(onda de choque)} \tag{16.31}$$

En esta relación, v_S es la *rapidez* de la fuente (la magnitud de su velocidad) relativa al aire y siempre es positiva. La relación v_S/v se llama **número Mach**; es mayor que 1 para todas las velocidades supersónicas, y sen α en la ecuación (16.31) es su recíproco. El primer ser humano que rompió la barrera del sonido fue el capitán Chuck Yeager de la fuerza aérea estadounidense, volando el Bell X-l a Mach 1.06 el 14 de octubre de 1947 (figura 16.36).

16.36 El primer avión supersónico, el Bell X-1, tenía una forma parecida a la de una bala calibre 50, de la cual se sabía que podía viajar más rápidamente que el sonido.



En realidad las ondas de choque son tridimensionales; la onda de choque forma un *cono* alrededor de la dirección del movimiento de la fuente. Si la fuente (digamos, un avión supersónico o la bala de un rifle) se mueve con velocidad constante, el ángulo α es constante, y el cono de la onda de choque se mueve junto con la fuente. Es la llegada de esta onda de choque lo que causa el estampido sónico que oímos después de que pasó un avión supersónico. Cuanto más grande sea el avión, más fuerte será el estampido sónico; la onda de choque producida a nivel del suelo por el vuelo del avión supersónico de pasajeros Concorde (en desuso) a 12,000 m (40,000 ft) causaba un salto repentino en la presión del aire de cerca de 20 Pa. Frente al cono de la onda de choque, no hay sonido. Dentro del cono, un receptor estacionario oye el sonido con desplazamiento Doppler del avión que se aleja.

CUIDADO **Ondas de choque** Destacamos que cualquier objeto que se mueve en el aire a velocidad supersónica produce una onda de choque *continua*, no solo en el instante en que “rompe la barrera del sonido”. Las ondas sonoras que se combinan para formar la onda de choque, como en la figura 16.35*b*, son creadas por el movimiento del objeto mismo, no por alguna fuente de sonido que el objeto pudiera llevar. El chasquido de una bala y de la punta de un látigo se debe a su movimiento supersónico. Un avión supersónico podría tener motores muy ruidosos, pero estos no causan la onda de choque. De hecho, el transbordador espacial produce un estampido sónico muy fuerte al bajar a tierra; sus motores ya no tienen combustible en este punto, así que es un planeador supersónico.

Las ondas de choque tienen otras aplicaciones además de la aviación; se usan para desintegrar cálculos renales y biliares sin cirugía invasiva, usando una técnica con el llamativo nombre de *litotricia extracorpórea por onda de choque*. Una onda de choque producida fuera del cuerpo se enfoca con un reflector o una lente acústica, de modo que la mayor parte posible de la onda converja en el cálculo. Cuando los esfuerzos resultantes en el cálculo exceden la resistencia de este a la tensión, el cálculo se deshace formando partículas pequeñas que pueden eliminarse. Esta técnica requiere una determinación exacta de la ubicación del cálculo, lo cual se logra con técnicas de visualización por ultrasonido (véase la figura 16.9).

Ejemplo 16.19 Estampido sónico de un avión supersónico

Un avión vuela a Mach 1.75 a 8000 m de altura, donde la rapidez del sonido es de 320 m/s. ¿Cuánto tiempo después de pasar el avión directamente arriba oiremos el estampido sónico?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La onda de choque forma un cono que se extiende hacia atrás desde el avión, así que lo que el problema realmente pregunta es cuánto tiempo transcurre entre que el avión pasa por arriba y el momento en que la onda de choque llega al observador en el punto L (figura 16.37). Durante el tiempo t (la incógnita) desde que el avión pasó por arriba a la rapidez v_S, recorrió una distancia $v_S t$. La ecuación (16.31) da el ángulo α del cono de choque; usaremos trigonometría para despejar t.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (16.31), el ángulo α del cono de choque es

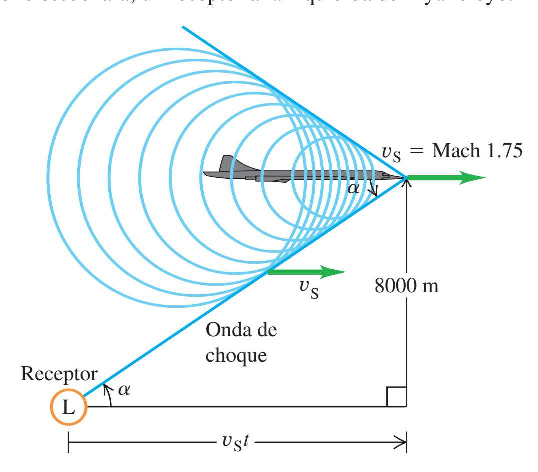
$$\alpha = \operatorname{arcsen}\frac{1}{1.75} = 34.8°$$

La rapidez del avión es la rapidez del sonido multiplicada por el número Mach:

$$v_S = (1.75)(320 \text{ m/s}) = 560 \text{ m/s}$$

Continúa

16.37 Oímos un estampido sónico cuando la onda de choque nos alcanza en L (*no* solo cuando el avión rompe la barrera del sonido). Un receptor a la derecha de L todavía no oye el estampido, pero pronto lo escuchará; un receptor a la izquierda de L ya lo oyó.



A partir de la figura 16.37, tenemos

$$\tan\alpha = \frac{8000\ \text{m}}{v_S t}$$

$$t = \frac{8000\ \text{m}}{(560\ \text{m/s})(\tan 34.8°)} = 20.5\ \text{s}$$

EVALUAR: Oímos el estampido 20.5 s después de que pasa el avión; en ese tiempo, el avión recorrió (560 m/s)(20.5 s) = 11.5 km desde que pasó arriba de nosotros. En este cálculo, supusimos que la rapidez del sonido es la misma a todas las alturas, de modo que $\alpha = \text{arcsen}\ v/v_S$ es constante y la onda de choque forma un cono perfecto. De hecho, la rapidez del sonido disminuye al aumentar la altura. ¿Cómo afectaría esto el valor de t?

Evalúe su comprensión de la sección 16.9 ¿Qué escucharía usted si estuviera directamente detrás (a la izquierda) del avión supersónico de la figura 16.37? **i.** Un estampido sónico; **ii.** el sonido del avión, modificado por el desplazamiento Doppler a frecuencias mayores; **iii.** el sonido del avión, modificado por el desplazamiento Doppler a menores frecuencias; **iv.** nada.



Ondas sonoras: El sonido consiste en ondas longitudinales en un medio. Una onda sonora sinusoidal se caracteriza por su frecuencia f y longitud de onda λ (o frecuencia angular ω y número de onda k), y por su amplitud de desplazamiento A. La amplitud de presión $p_{máx}$ es directamente proporcional a la amplitud de desplazamiento, el número de onda y el módulo volumétrico B del medio de la onda. (Véase los ejemplos 16.1 y 16.2).

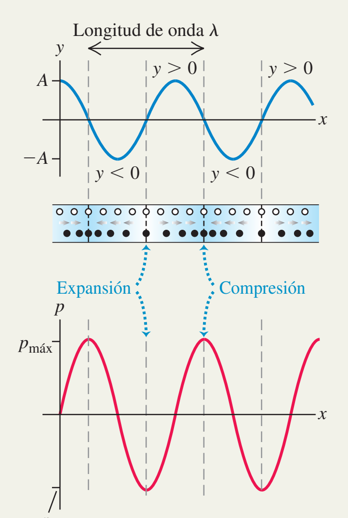
La rapidez de una onda sonora en un fluido depende del módulo volumétrico B y de la densidad ρ. Si el fluido es un gas ideal, la rapidez se puede expresar en términos de la temperatura T, masa molar M y la razón de capacidades térmicas γ del gas. La rapidez de las ondas longitudinales en una varilla sólida depende de la densidad y el módulo de Young Y. (Véase los ejemplos 16.3 y 16.4).

$$p_{máx} = BkA \qquad (16.5)$$
(onda sonora sinusoidal)

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (16.7)$$
(onda longitudinal en un fluido)

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad (16.10)$$
(onda sonora en un gas ideal)

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad (16.8)$$
(onda longitudinal en una varilla sólida)

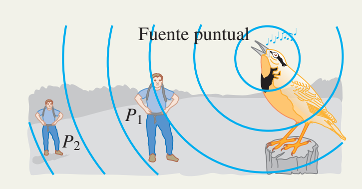


Intensidad y nivel de intensidad de un sonido: La intensidad I de una onda sonora es la rapidez media con que transporta energía por unidad de área. Para una onda sinusoidal, la intensidad puede expresarse en términos de la amplitud de desplazamiento A o la amplitud de presión $p_{máx}$. (Véase los ejemplos 16.5 a 16.7).

El nivel de intensidad de sonido β de una onda sonora es una medida logarítmica de su intensidad. Se mide en relación a I_0, una intensidad arbitraria que, por definición, es $10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$. Los niveles de intensidad de sonido se expresan en decibeles (dB). (Véase los ejemplos 16.8 y 16.9).

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\rho B}\,\omega^2 A^2 = \frac{p_{máx}{}^2}{2\rho v} = \frac{p_{máx}{}^2}{2\sqrt{\rho B}} \qquad (16.12), (16.14)$$
(intensidad de una onda sonora sinusoidal)

$$\beta = (10\ \mathrm{dB}) \log \frac{I}{I_0} \qquad (16.15)$$
(definición de nivel de intensidad de sonido)



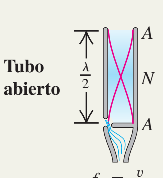
Ondas sonoras estacionarias: Se pueden generar ondas sonoras estacionarias en un tubo. Un extremo cerrado es un nodo de desplazamiento y un antinodo de presión; un extremo abierto es un antinodo de desplazamiento y un nodo de presión. En el caso de un tubo de longitud L abierto por ambos extremos, las frecuencias de modo normal son múltiplos enteros de la rapidez del sonido entre $2L$. En el caso de un tubo cerrado (abierto solo en un extremo), las frecuencias de modo normal son los múltiplos impares de la rapidez del sonido entre $4L$. (Véase los ejemplos 16.10 y 16.11).

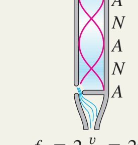
Un tubo (o cualquier sistema de modos normales) puede forzarse a oscilar con cualquier frecuencia. Se presenta una respuesta máxima, o resonancia, si la frecuencia impulsora es cercana a una de las frecuencias de modo normal del sistema. (Véase el ejemplo 16.12).

$$f_n = \frac{nv}{2L} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (16.18)$$
(tubo abierto)

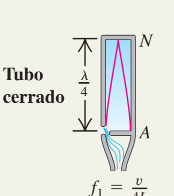
$$f_n = \frac{nv}{4L} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots) \qquad (16.22)$$
(tubo cerrado)

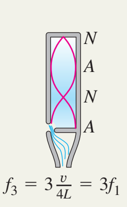
Tubo abierto



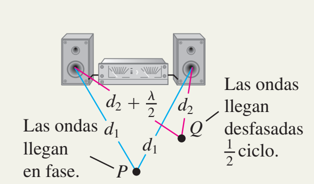


Tubo cerrado





Interferencia: Si dos o más ondas se traslapan en la misma región del espacio, los efectos resultantes se llaman interferencia. La amplitud resultante puede ser mayor o menor que la de cada onda individual, dependiendo de si las ondas están en fase (interferencia constructiva) o desfasadas (interferencia destructiva). (Véase el ejemplo 16.13).



Pulsos: Se escuchan pulsos cuando dos tonos con frecuencias ligeramente distintas f_a y f_b suenan juntos. La frecuencia del pulso f_{pulso} es la diferencia entre f_a y f_b.

$$f_{pulso} = f_a - f_b \qquad (16.24)$$
(frecuencia del pulso)

Desplazamiento

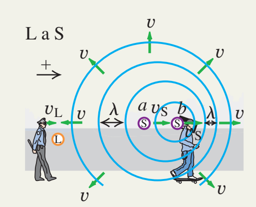
t

t

Pulso

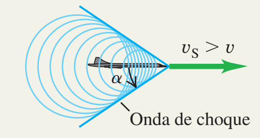
Efecto Doppler: El efecto Doppler para el sonido es el cambio de frecuencia que se da cuando hay movimiento de la fuente de sonido, del receptor o de ambos, relativo al medio. Las frecuencias en la fuente y el receptor f_S y f_L están relacionadas con las velocidades de la fuente y del receptor v_S y v_L relativas al medio, y con la rapidez del sonido v. (Véase los ejemplos 16.14 a 16.18).

$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S \qquad (16.29)$$
(efecto Doppler, fuente móvil y receptor móvil)



Ondas de choque: Una fuente de sonido que se mueve con rapidez v_S mayor que la del sonido v crea una onda de choque. El frente de onda es un cono con ángulo α. (Véase el ejemplo 16.19).

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{v}{v_S} \quad \text{(onda de choque)} \qquad (16.31)$$





PROBLEMA PRÁCTICO Interferencia de altavoces

Dos altavoces, A y B, están separados 7.00 m y vibran en fase a 172 Hz. Los altavoces radian sonido uniformemente en todas direcciones. Las potencias de salida acústica son de 8.00×10^{-4} W y 6.00×10^{-5} W, respectivamente. La temperatura del aire es de 20°C. *a*) Determine la diferencia de fase de las dos señales en un punto C sobre la línea que une A y B, a 3.00 m de B y 4.00 m de A. *b*) Determine la intensidad y el nivel de intensidad de sonido en C debido solo al altavoz A (B apagado), y haga lo mismo para el altavoz B (A apagado). *c*) Con ambos altavoces encendidos, determine la intensidad y el nivel de intensidad de sonido en C.



Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Grafique la situación e identifique las distancias entre A, B y C.
2. Seleccione las ecuaciones que relacionan la potencia, la distancia desde la fuente, la intensidad, la amplitud de presión y el nivel de intensidad del sonido.
3. Determine cómo calculará la diferencia de fase en el inciso *a*). Teniendo la diferencia de fase, ¿cómo la usará para obtener la amplitud de la onda combinada en C debida a las dos fuentes?
4. Elabore una lista de las cantidades desconocidas en cada parte del problema e identifique las incógnitas.

EJECUTAR

5. Determine la diferencia de fase en el punto C.
6. Calcule la intensidad, el nivel de intensidad del sonido y la amplitud de la presión en C para cada uno de los altavoces.
7. Use los resultados de los pasos 5 y 6 para calcular la amplitud de presión en C para los dos altavoces juntos.
8. Use el resultado del paso 7 para calcular la intensidad y el nivel de intensidad del sonido en C para los dos altavoces juntos.

EVALUAR

9. ¿Cómo se comparan los resultados del inciso *c*) de la intensidad y del nivel de intensidad del sonido en C con los del inciso *b*)? ¿Esto es lógico?
10. ¿Qué resultado habría obtenido en el inciso *c*) si hubiera combinado (incorrectamente) las *intensidades* de A y B de manera directa, en lugar de combinar (correctamente) las *amplitudes de presión*, como en el paso 7?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com 

•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P16.1 Cuando el sonido viaja del aire al agua, ¿cambia la frecuencia de la onda? ¿La rapidez? ¿Y la longitud de onda? Explique su razonamiento.

P16.2 El héroe de una película del oeste oye si un tren se aproxima colocando su oreja en la vía. ¿Por qué obtiene así una advertencia temprana de la llegada del tren en lugar de oír de manera usual?

P16.3 ¿El tono (o la frecuencia) de un tubo de órgano aumenta o disminuye al aumentar la temperatura? Explique su respuesta.

P16.4 En casi todos los instrumentos de viento modernos, el tono se modifica usando llaves o válvulas para cambiar la longitud de la columna de aire que vibra. La corneta, en cambio, no tiene válvulas ni llaves; pero puede tocar muchas notas. ¿Cómo es posible esto? ¿Hay restricciones en cuanto a las notas que puede tocar?

P16.5 Los músicos de una sinfónica siempre "calientan" sus instrumentos de viento soplándolos antes de un concierto. ¿Para qué sirve esto?

P16.6 En una conocida y divertida demostración científica, cuando una persona inhala helio, su voz se torna aguda y chillona. ¿Por qué sucede esto? (*Advertencia:* Inhalar demasiado helio puede provocar un estado de inconsciencia o incluso la muerte).

P16.7 En ciertas autopistas los divisores de carriles tienen a veces rugosidades a distancias iguales. Cuando los neumáticos de un automóvil ruedan sobre ellos, se produce una nota musical. ¿Por qué? Explique cómo podría usarse este fenómeno para medir la rapidez del vehículo.

P16.8 La calidad del tono de una guitarra acústica es diferente cuando las cuerdas se pulsan cerca del puente (el extremo inferior de las cuerdas), que cuando se pulsan cerca del agujero (cerca del centro de las cuerdas). ¿Por qué?

P16.9 ¿Qué influye de manera más directa sobre el volumen de una onda sonora: la amplitud de *desplazamiento* o la amplitud de *presión*? Explique su razonamiento.

P16.10 Si se reduce a la mitad la amplitud de presión de una onda sonora, ¿en qué factor disminuirá su intensidad? ¿En qué factor debe aumentarse la amplitud de presión de una onda sonora para aumentar la intensidad en un factor de 16? Explique su respuesta.

P16.11 ¿El nivel de intensidad del sonido β, cumple la ley del cuadrado inverso? ¿Por qué?

P16.12 Una pequeña fracción de la energía de una onda sonora es absorbida por el aire por el que pasa el sonido. ¿Cómo modifica esto la relación del cuadrado inverso entre la intensidad y la distancia de la fuente? Explique su razonamiento.

P16.13 Un alambre bajo tensión y que vibra en su primer sobretono produce un sonido con longitud de onda λ. ¿Cuál será la nueva longitud de onda del sonido (en términos de λ) si se duplica la tensión?

P16.14 Una pequeña banda metálica se desliza por una de las varillas de un diapasón afinado. Conforme esta banda se mueve cada vez más cerca del extremo de la varilla, ¿qué efecto tiene esto sobre la longitud de onda y la frecuencia del sonido que produce la varilla? ¿Por qué?

P16.15 El organista de una catedral toca un acorde fuerte y luego libera las teclas. El sonido persiste unos segundos y luego se desvanece. ¿Por qué persiste? ¿Qué pasa con la energía del sonido cuando este se desvanece?

P16.16 Dos diapasones afinados que vibran tienen frecuencias idénticas, pero uno se encuentra estacionario y el otro está montado en el borde de una plataforma giratoria. ¿Qué oye un receptor? Explique su respuesta.

P16.17 Una iglesia grande tiene parte del órgano al frente y parte al fondo. Una persona que camina rápidamente por el pasillo, mientras ambos segmentos están tocando, afirma que los dos segmentos suenan desafinados. ¿Por qué?

P16.18 Una fuente de sonido y un receptor están en reposo en la tierra, pero un viento fuerte sopla desde la fuente al receptor. ¿Hay un efecto Doppler? ¿Por qué?

P16.19 ¿Puede imaginar circunstancias en las que se observaría un efecto Doppler en ondas superficiales en agua? ¿Y en ondas elásticas que se propagan en un cuerpo de agua a gran profundidad? Si así es, describa las circunstancias y explique su razonamiento. Si no, explique por qué no.

P16.20 Las estrellas diferentes de nuestro Sol normalmente parecen sin rasgos sobresalientes cuando se observan a través de telescopios. Sin embargo, los astrónomos pueden utilizar fácilmente la luz proveniente de esas estrellas para determinar que están girando e incluso para medir la rapidez de su superficie. ¿Cómo cree que hacen esto?

P16.21 Si usted se detiene frente a una vía férrea cuando un tren se aproxima y pasa, oye el desplazamiento Doppler del sonido. Pero si escucha más de cerca, oye que el cambio en la frecuencia es continuo; no va súbitamente de una frecuencia alta a una frecuencia baja. En lugar de ello, la frecuencia cambia *suavemente* (pero rápido) de alta a baja conforme el tren pasa. ¿Por qué ocurre este cambio de manera suave?

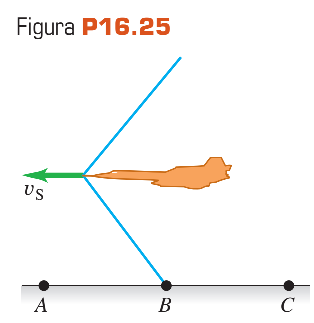
P16.22 En el caso 1, una fuente de sonido se aproxima a un observador estacionario con rapidez v. En el caso 2, el observador se mueve hacia una fuente estacionaria con la misma rapidez v. Si la fuente siempre produce un sonido con la misma frecuencia, en vista de que la rapidez relativa es la misma en ambas situaciones, ¿el observador escuchará la misma frecuencia en ambos casos? ¿Por qué?

P16.23 ¿Un avión solo produce un estampido sónico en el instante en que su rapidez excede de Mach 1? Explique su razonamiento.

P16.24 Si va en un avión supersónico, ¿qué oye? Explique su razonamiento. En particular, ¿escucha un estampido sónico continuo? ¿Por qué?

P16.25 Un avión a reacción vuela con altitud constante y rapidez v_S también constante y mayor que la rapidez del sonido. Describa qué oyen los observadores en los puntos A, B y C en el instante que se indica en la figura P16.25, cuando la onda de choque llega justamente al punto B. Explique su razonamiento.

Figura **P16.25**



EJERCICIOS

A menos que se indique algo diferente, suponga que la rapidez del sonido en el aire es $v = 344$ m/s.

Sección 16.1 Ondas sonoras

16.1 • El ejemplo 16.1 (sección 16.1) mostró que, para ondas sonoras en el aire con frecuencia de 1000 Hz, una amplitud de desplazamiento

de 1.2×10^{-8} m produce una amplitud de presión de 3.0×10^{-2} Pa. *a*) ¿Qué longitud de onda tienen esas ondas? *b*) Para ondas de 1000 Hz en aire, ¿qué amplitud de desplazamiento se requeriría para que la amplitud de presión esté en el umbral de dolor, la cual es de 30 Pa? *c*) ¿Qué longitud de onda y frecuencia deben tener ondas con amplitud de desplazamiento de 1.2×10^{-8} m para producir una amplitud de presión de 1.5×10^{-3} Pa?

16.2 • El ejemplo 16.1 (sección 16.1) mostró que, para ondas sonoras en aire con frecuencia de 1000 Hz, una amplitud de desplazamiento de 1.2×10^{-8} m produce una amplitud de presión de 3.0×10^{-2} Pa. A 20°C el agua tiene un módulo volumétrico de 2.2×10^{9} Pa, y la rapidez del sonido en ella es de 1480 m/s. Para ondas sonoras de 1000 Hz en agua a 20°C, ¿qué amplitud de desplazamiento se produce si la amplitud de presión es de 3.0×10^{-2} Pa? Explique por qué su respuesta es mucho menor que 1.2×10^{-8} m.

16.3 • Considere una onda sonora en el aire con amplitud de desplazamiento de 0.0200 mm. Calcule la amplitud de presión para frecuencias de *a*) 150 Hz; *b*) 1500 Hz; *c*) 15,000 Hz. En cada caso, compare el resultado con el umbral de dolor, que es de 30 Pa.

16.4 • La ruidosa máquina de una fábrica produce un sonido que tiene una amplitud de desplazamiento de 1.00 μm, pero la frecuencia de este sonido puede ajustarse. Para evitar el daño auditivo en los trabajadores, se limita la amplitud de presión máxima de las ondas sonoras a 10.0 Pa. En las condiciones de esta fábrica, el módulo volumétrico del aire es 1.42×10^{5} Pa. ¿Cuál es el sonido de frecuencia más alta al que esta máquina puede ajustarse sin exceder el límite prescrito? ¿Dicha frecuencia es audible para los trabajadores?

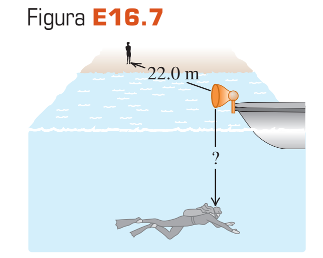
16.5 • BIO **Ultrasonido e infrasonido.** *a*) **Comunicación entre ballenas.** Las ballenas azules aparentemente se comunican entre sí usando sonido de frecuencia igual a 17 Hz, que se puede oír a 1000 km de distancia en el océano. ¿Cuál es la longitud de onda de este sonido en el agua de mar, donde la rapidez del sonido es de 1531 m/s? *b*) **Chasquidos entre delfines.** Un tipo de sonido que emiten los delfines en el océano es un chasquido agudo con longitud de onda de 1.5 cm. ¿Cuál es la frecuencia de estos chasquidos? *c*) **Silbidos entre perros.** Una raza de perros llama a sus cachorros con un silbido de frecuencia igual a 25 kHz. ¿Cuál es la longitud de onda de este sonido? *d*) **Murciélagos.** Aunque los murciélagos emiten una amplia variedad de sonidos, cierto tipo produce pulsos de sonido que tienen una frecuencia de entre 39 y 78 kHz. ¿Cuál es el rango de longitudes de onda de este sonido? *e*) **Sonogramas.** Se usa ultrasonido para observar el interior del cuerpo tanto como los rayos x. Para imágenes claras, la longitud de onda del sonido debe ser de aproximadamente una cuarta parte (o menos) del tamaño de los objetos que se observan. ¿Aproximadamente qué frecuencia se necesita para producir la imagen clara de un tumor que mide 1.0 mm de ancho si la rapidez del sonido en un tejido es de 1550 m/s?

Sección 16.2 Rapidez de las ondas sonoras

16.6 • *a*) En un líquido con densidad de 1300 kg/m^3, se determina que ondas longitudinales con frecuencia de 400 Hz tienen una longitud de onda de 8.00 m. Calcule el módulo volumétrico del líquido. *b*) Una barra metálica de 1.50 m de longitud tiene una densidad de 6400 kg/m^3. Las ondas sonoras longitudinales tardan 3.90×10^{-4} s en llegar de un extremo de la barra al otro. Calcule el módulo de Young del metal.

16.7 • Un buzo bajo la superficie de un lago escucha el sonido de la sirena de un bote en la superficie directamente arriba de él; al mismo tiempo, un amigo que se encuentra en tierra firme a 22.0 m del bote también lo escucha (figura E16.7). La sirena está 1.2 m arriba de la superficie del agua. ¿A qué distancia (marcada con "?" en la figura E16.7) de la sirena está el buzo? Tanto el aire como el agua están a 20°C.

Figura **E16.7**



16.8 • A 27.0°C, ¿qué rapidez tienen las ondas longitudinales en *a*) hidrógeno (masa molar 2.02 g/mol)? *b*) ¿Helio (masa molar 4.00 g/mol)? *c*) ¿Argón (masa molar 39.9 g/mol)? Tome los valores de γ de la tabla 19.1. *d*) Compare sus respuestas de los incisos *a*), *b*) y *c*) con la rapidez en el aire a la misma temperatura.

16.9 • Un oscilador vibra a 1250 Hz y produce una onda sonora que viaja a través de un gas ideal a 325 m/s, cuando la temperatura del gas es de 22.0°C. Para cierto experimento, usted necesita que el oscilador produzca un sonido con longitud de onda de 28.5 cm en ese gas. ¿Cuál debería ser la temperatura del gas para que se alcance esa longitud de onda?

16.10 •• CALC *a*) Demuestre que el cambio fraccionario en la rapidez del sonido (dv/v) debido a un cambio muy pequeño dT en la temperatura está dado por $dv/v = \frac{1}{2}dT/T$. (*Sugerencia:* Inicie con la ecuación 16.10). *b*) La rapidez del sonido en el aire a 20°C es de 344 m/s. Utilice el resultado del inciso *a*) para determinar el cambio en la rapidez del sonido que corresponde a un cambio de 1.0°C en la temperatura del aire.

16.11 •• Se golpea un extremo de una varilla de latón de 80.0 m de longitud. Una persona en el otro extremo escucha dos sonidos causados por dos ondas longitudinales, una que viaja por la varilla y otra que viaja por el aire. Calcule el intervalo de tiempo entre los sonidos. (La rapidez del sonido en el aire es de 344 m/s; la información pertinente para el latón se halla en las tablas 11.1 y 12.1).

16.12 •• ¿Qué esfuerzo (F/A) debe haber en un alambre estirado de un material cuyo módulo de Young es Y, para que la rapidez de ondas longitudinales sea igual a 30 veces la rapidez de ondas transversales?

Sección 16.3 Intensidad del sonido

16.13 •• BIO **Energía que llega al oído.** El sonido se detecta cuando una onda sonora provoca que el tímpano vibre. Normalmente, el diámetro de esta membrana es de 8.4 mm en los humanos. *a*) ¿Cuánta energía llega al tímpano de una persona cada segundo cuando alguien le murmura (20 dB) un secreto en el oído? *b*) Para entender el grado de sensibilidad del oído ante cantidades muy pequeñas de energía, calcule la rapidez (en mm/s) a la que debe volar un mosquito normal de 2.0 mg para tener esa cantidad de energía cinética.

16.14 • Con base en la información de la tabla 16.2, responda las siguientes preguntas acerca del sonido en el aire. A 20°C el módulo volumétrico para el aire es 1.42×10^{5} Pa y su densidad es de 1.20 kg/m^3. A esta temperatura, ¿cuál es la amplitud de presión (en Pa y atm) y la amplitud de desplazamiento (en m y nm) *a*) para el sonido más suave que puede escuchar normalmente una persona a 1000 Hz y *b*) para el sonido de una remachadora a la misma frecuencia? *c*) ¿Cuánta energía por segundo entrega cada onda a un cuadrado que mide 5.00 mm por lado?

16.15 •• **Ondas longitudinales en diferentes fluidos**. *a*) Una onda longitudinal que se propaga en un tubo lleno de agua tiene una intensidad de 3.00×10^{-6} W/m^2 y su frecuencia es de 3400 Hz. Calcule la amplitud A y la longitud de onda λ para esa onda. La densidad del agua es de 1000 kg/m^3 y su módulo volumétrico es de 2.18×10^{9} Pa. *b*) Si el tubo está lleno con aire a una presión de 1.00×10^{5} Pa y la densidad es de 1.20 kg/m^3, ¿qué amplitud A y longitud de onda λ tendrá una onda longitudinal con la misma intensidad y frecuencia que en el inciso *a*)? *c*) En qué fluido es mayor la amplitud, ¿en el agua o en el aire? Calcule la razón entre ambas amplitudes. ¿Por qué dicha razón es diferente de 1.00?

16.16 •• BIO **Oído humano.** En un concierto de rock, un asistente se encuentra a 30 m del escenario, y en ese punto el nivel de intensidad del sonido es de 110 dB. *a*) ¿Cuánta energía se transfiere a los oídos de ese individuo cada segundo? *b*) ¿Con qué rapidez (en mm/s) tendría que volar un mosquito de 2.0 mg para tener esa cantidad de energía cinética. Compare la rapidez del mosquito con la del murmullo del inciso *a*) del ejercicio 16.13.

16.17 • Una onda sonora en el aire a 20°C tiene una frecuencia de 150 Hz y amplitud de desplazamiento de 5.00×10^{-3} mm. Para esta onda, calcule *a*) la amplitud de presión (en Pa); *b*) la intensidad (en W/m^2); *c*) el nivel de intensidad del sonido (en decibeles).

16.18 •• Usted vive en una calle con mucho tránsito vehicular, pero como amante de la música, desea reducir el ruido del tráfico. *a*) Si se instalan ventanas especiales para reflejar el sonido que reducen el nivel de intensidad del sonido (en dB) en 30 dB, ¿en qué cantidad disminuye la intensidad del sonido (en W/m^2)? *b*) Por otro lado, si usted reduce la intensidad a la mitad, ¿cuál es el cambio (en dB) en el nivel de intensidad del sonido?

16.19 • **BIO** El sonido más tenue que un ser humano con oído normal puede escuchar a una frecuencia de 400 Hz tiene una amplitud de presión aproximada de 6.0×10^{-5} Pa. Calcule *a*) la intensidad; *b*) el nivel de intensidad del sonido; *c*) la amplitud de desplazamiento de esta onda sonora a 20°C.

16.20 •• La intensidad debida a varias fuentes de sonido independientes es la suma de las intensidades individuales. *a*) Cuando unos cuatrillizos lloran simultáneamente, ¿por cuántos decibeles es mayor el nivel de intensidad de sonido en comparación con el caso en que llora uno solo? *b*) Para aumentar el nivel de intensidad de sonido, otra vez en el mismo número de decibeles que en *a*), ¿cuántos bebés más necesitan llorar?

16.21 • **PA** La boca de un bebé está a 30 cm del oído del padre y a 1.50 m del de la madre. ¿Qué diferencia hay entre los niveles de intensidad de sonido que escuchan ambos?

16.22 •• El ayuntamiento de Sacramento hace poco decretó una ley que reduce el nivel permitido de intensidad sonora de los odiados recogedores de hojas, de 95 a 70 dB. Con la nueva ley, ¿cuál es la razón entre la nueva intensidad permitida y la intensidad que se permitía antes?

16.23 •• **PA** El punto *A* se encuentra a 3.0 m de una pequeña fuente de sonido, la cual emite uniformemente en todas direcciones; el nivel de intensidad del sonido es de 53 dB. *a*) ¿Cuál es la intensidad del sonido en *A*? *b*) ¿A qué distancia de la fuente debe estar usted para que la intensidad sea de un cuarto de su valor en *A*? *c*) ¿A qué distancia de la fuente debe estar usted para que el nivel de intensidad del sonido sea de un cuarto de su valor en *A*? *d*) ¿La intensidad cumple la ley del cuadrado inverso? ¿Y el nivel de intensidad del sonido?

16.24 •• *a*) Si dos sonidos difieren en 5.00 dB, determine la razón entre la intensidad del sonido más fuerte y la del sonido más suave. *b*) Si un sonido es 100 veces más intenso que el otro, ¿cuál es la diferencia en el nivel de intensidad del sonido (en decibeles)? *c*) Si se incrementa el volumen de su aparato estereofónico, de modo que la intensidad se duplica, ¿cuánto aumenta el nivel de intensidad del sonido?

Sección 16.4 Ondas sonoras estacionarias y modos normales

16.25 • Se producen ondas sonoras estacionarias en un tubo de 1.20 m de longitud. Para la fundamental y los dos primeros sobretonos, ¿en qué puntos del tubo (midiendo desde el extremo izquierdo) están los nodos de desplazamiento y los nodos de presión, si *a*) el tubo está abierto en ambos extremos, y *b*) el tubo está cerrado en el extremo izquierdo y abierto en el derecho?

16.26 • La frecuencia fundamental de un tubo abierto en ambos extremos es de 594 Hz. *a*) ¿Qué longitud tiene este tubo? Si se tapa uno de los extremos del tubo, calcule *b*) la longitud de onda y *c*) la frecuencia de la nueva fundamental.

16.27 • **BIO** **La voz humana.** El tracto vocal humano es un tubo que se extiende unos 17 cm desde los labios hasta los pliegues vocales (también llamados "cuerdas vocales") cerca de la mitad de la garganta. Los pliegues se comportan como la lengüeta de un clarinete; y el tracto vocal, como tubo cerrado. Estime las primeras tres frecuencias de onda estacionaria del tracto vocal. Use $v = 344$ m/s. (Las respuestas solo son una estimación, ya que las posiciones de los labios y de la lengua afectan el movimiento del aire dentro del tracto).

16.28 •• **BIO** **El tracto vocal.** Muchos cantantes de ópera (y algunos cantantes de pop) tienen un rango de aproximadamente $2\frac{1}{2}$ octavas o incluso mayor. Suponga que el rango de una soprano va de una frecuencia de 220 Hz hasta una de 1244 Hz. Aun cuando el tracto vocal es bastante complicado, podemos modelarlo como una columna de aire en resonancia, como el tubo de un órgano que está abierto en la parte superior y cerrado en la parte inferior. La columna va desde la boca bajando por el diafragma en la cavidad del pecho, y suponemos también que la nota más baja es la fundamental. ¿Qué longitud tiene esta columna de aire si $v = 354$ m/s? ¿El resultado es razonable, considerando las observaciones de su propio cuerpo?

16.29 •• Cierto tubo produce una frecuencia fundamental de 262 Hz en el aire. *a*) Si el tubo se llena con helio a la misma temperatura, ¿qué frecuencia fundamental producirá? (La masa molar del aire es de 28.8 g/mol, y la del helio, de 4.00 g/mol). *b*) ¿Su respuesta al inciso *a*) depende de si el tubo está abierto o cerrado? ¿Por qué?

16.30 • **Cantando bajo la ducha.** Un tubo cerrado por ambos extremos puede tener ondas estacionarias en su interior, pero normalmente no las escuchamos porque solo una pequeña parte del sonido puede salir. Sin embargo, usted *puede* oírlas si se encuentra *dentro* del tubo, como cuando alguien canta bajo la ducha. *a*) Demuestre que las longitudes de onda de las ondas estacionarias en un tubo de longitud *L*, cerrado por ambos extremos, son $\lambda_n = 2L/n$ y que las frecuencias están dadas por $f_n = nv/2L = nf_1$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ *b*) Considerando un modelo de tubo, determine la frecuencia de la fundamental y de los primeros dos sobretonos para una ducha de 2.50 m de altura. ¿Son audibles esas frecuencias?

Sección 16.5 Resonancia y sonido

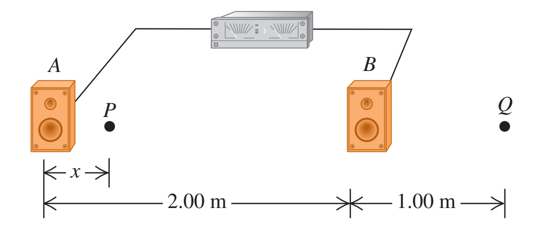
16.31 • Usted sopla a través de la boca de un tubo de ensayo vacío y produce la onda estacionaria fundamental de la columna de aire en su interior. La rapidez del sonido en el aire es de 344 m/s y el tubo de ensayo actúa como un tubo cerrado. *a*) Si la longitud de la columna de aire es de 14.0 cm, ¿qué frecuencia tiene esta onda estacionaria? *b*) Determine la frecuencia de la onda estacionaria fundamental en la columna de aire, si el tubo de ensayo se llena hasta la mitad con agua.

16.32 •• **PA** Un tubo cerrado por un extremo de longitud ajustable se encuentra cerca de un alambre de 85.0 cm y 7.25 g, que está sometido a una tensión de 4110 N. Usted desea ajustar la longitud del tubo de manera que, cuando produzca sonido a su frecuencia fundamental, este sonido haga que el alambre vibre en su segundo *sobretono* con una amplitud muy grande. ¿De qué longitud debe ser el tubo?

Sección 16.6 Interferencia de ondas

16.33 • Dos altavoces, *A* y *B* (figura E16.33), son alimentados por el mismo amplificador y emiten ondas sinusoidales en fase. El altavoz *B* está 2.00 m a la derecha de *A*. Considere el punto *Q* a lo largo de la extensión de la línea que une los altavoces, 1.00 m a la derecha del altavoz *B*. Ambos altavoces emiten ondas sonoras que viajan directamente del altavoz a *Q*. *a*) Determine la frecuencia más baja con la que habrá interferencia *constructiva* en el punto *Q*. *b*) Determine la frecuencia más baja con la que habrá interferencia *destructiva* en el punto *Q*.

Figura **E16.33**



16.34 •• Dos altavoces, A y B (figura E16.33), son alimentados por el mismo amplificador y emiten ondas sinusoidales en fase. El altavoz B está 2.00 m a la derecha de A. La frecuencia de las ondas sonoras producidas por los altavoces es de 206 Hz. Considere el punto P entre los altavoces a lo largo de la línea que los une, a una distancia x a la derecha de A. Ambos altavoces emiten ondas sonoras que viajan directamente del altavoz a P. *a*) ¿Con qué valores de x habrá interferencia *destructiva* en P? *b*) ¿Y *constructiva*? *c*) Los efectos de interferencia como los de los incisos *a*) y *b*) casi nunca son un factor al escuchar los equipos estereofónicos caseros. ¿Por qué no?

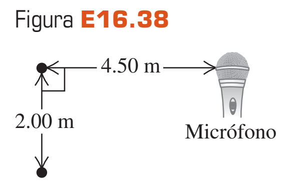
16.35 •• Dos altavoces, A y B, son alimentados por el mismo amplificador y emiten ondas sinusoidales en fase. El altavoz B está 12.0 m a la derecha de A. La frecuencia de las ondas emitidas por los altavoces es de 688 Hz. Imagine que está de pie entre los altavoces, sobre la línea que los une, y se encuentra en un punto de interferencia constructiva. ¿Qué distancia deberá moverse hacia el altavoz B, para estar en un punto de interferencia destructiva?

16.36 • Dos altavoces, A y B, son alimentados por el mismo amplificador y emiten ondas sinusoidales en fase. La frecuencia de las ondas emitidas por los altavoces es de 172 Hz. Imagine que está a 8.00 m de A. ¿Cuánto es lo más cerca que puede estar de B y encontrarse en un punto de interferencia destructiva?

16.37 • Dos altavoces, A y B, son alimentados por el mismo amplificador y emiten ondas sinusoidales en fase. La frecuencia de las ondas emitidas por los altavoces es de 860 Hz. El punto P está a 12.0 m de A y a 13.4 m de B. ¿La interferencia en P es constructiva o destructiva? Justifique su respuesta.

16.38 •• Dos altavoces estereofónicos pequeños son alimentados alternativamente por el mismo oscilador de frecuencia variable. Su sonido es detectado por un micrófono como se muestra en el arreglo de la figura E16.38. ¿En qué frecuencias su sonido en los altavoces produce *a*) interferencia constructiva y *b*) interferencia destructiva?

Figura **E16.38**



Sección 16.7 Pulsos

16.39 •• **Afinación de un violín.** Una violinista afina su violín en 440 Hz. Ella toca la nota mientras escucha un tono, generado electrónicamente, de esa frecuencia exactamente y oye un pulso de 3 Hz de frecuencia, que se incrementa a 4 Hz cuando aprieta ligeramente la cuerda de su violín. *a*) ¿Cuál es la frecuencia de la nota tocada por su violín cuando oye el pulso de 3 Hz? *b*) Para tener su violín perfectamente afinado en 440 Hz, ¿debe apretar o aflojar la cuerda cuando oye el pulso de 3 Hz?

16.40 •• Dos guitarristas intentan tocar la misma nota con longitud de onda de 6.50 cm al mismo tiempo, pero uno de los instrumentos está ligeramente desafinado y, en lugar de ello, toca una nota cuya longitud de onda es de 6.52 cm. ¿Cuál es la frecuencia del pulso que estos músicos escuchan cuando tocan juntos?

16.41 •• Dos tubos de órgano, abiertos por un lado pero cerrados por el otro, miden 1.14 m de largo cada uno. Uno se alargó por 2.00 cm. Determine la frecuencia del pulso que producen cuando tocan juntos en su fundamental.

16.42 •• **Ajuste de los motores de un avión.** Los motores que impulsan las hélices de un avión se afinan, en algunos casos, usando pulsos. El zumbido del motor produce una onda sonora que tiene la misma frecuencia de la hélice. *a*) Si una hélice de una sola hoja gira a 575 rpm y usted oye un pulso de 2.0 Hz cuando hace funcionar la segunda hélice, ¿cuáles son las dos posibles frecuencias (en rpm) de la segunda hélice? *b*) Suponga que se incrementa ligeramente la rapidez de la segunda hélice y se determina que la frecuencia del pulso cambia a 2.1 Hz. En el inciso *a*) ¿cuál de las dos respuestas es la correcta para la frecuencia de la segunda hélice de una hoja? ¿Cómo lo sabe?

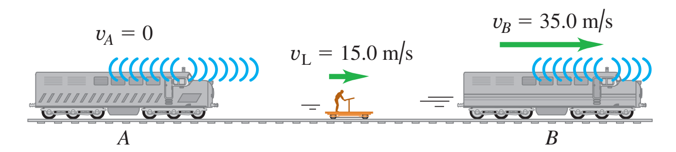
Sección 16.8 Efecto Doppler

16.43 •• En el planeta Arrakis, un ornitoide macho vuela hacia su compañera a 25.0 m/s mientras emite un aullido a una frecuencia de 1200 Hz. Si la hembra que se encuentra sin moverse oye un tono de 1240 Hz, ¿cuál es la rapidez del sonido en la atmósfera de Arrakis?

16.44 •• En el ejemplo 16.18 (sección 16.8), suponga que la patrulla se aleja de la bodega a 20 m/s. ¿Qué frecuencia escucha el conductor reflejada de la bodega?

16.45 • Dos silbatos de tren, A y B, tienen cada uno una frecuencia de 392 Hz. A se encuentra estacionario y B se mueve a la derecha (alejándose de A) a 35.0 m/s. Un receptor está entre los dos trenes y se mueve a la derecha a 15.0 m/s (figura E16.45). No sopla viento. Según el receptor, *a*) ¿qué frecuencia tiene A? *b*) ¿Y B? *c*) ¿Qué frecuencia del pulso detecta el receptor?

Figura **E16.45**



16.46 • Un tren viaja a 25.0 m/s en aire tranquilo. La frecuencia de la nota emitida por el silbato de la locomotora es de 400 Hz. Calcule la longitud de las ondas sonoras *a*) enfrente de la locomotora; *b*) detrás de la locomotora. Calcule la frecuencia del sonido que oye un receptor estacionario *c*) enfrente de la locomotora, y *d*) detrás de la locomotora.

16.47 • Al nadar, un pato patea una vez cada 1.6 s, produciendo ondas superficiales con ese periodo. El pato avanza con rapidez constante en un estanque donde la rapidez de las ondas superficiales es de 0.32 m/s, y las crestas de las olas adelante del pato están espaciadas 0.12 m. *a*) Calcule la rapidez del pato. *b*) ¿Qué tan separadas están las crestas detrás del pato?

16.48 • **Fuente móvil contra receptor móvil.** *a*) Una fuente sonora que produce ondas de 1.00 kHz se mueve hacia un receptor estacionario a la mitad de la rapidez del sonido. ¿Qué frecuencia oirá el receptor? *b*) Suponga ahora que la fuente se encuentra estacionaria y el receptor se mueve hacia ella a la mitad de la rapidez del sonido. ¿Qué frecuencia oye el receptor? Compare su respuesta con la del inciso *a*) y explique la diferencia con base en principios de la física.

16.49 • La alarma de un automóvil emite ondas sonoras con frecuencia de 520 Hz. Usted va en una motocicleta, alejándose del auto. ¿Con qué rapidez se desplaza usted si detecta una frecuencia de 490 Hz?

16.50 • Un tren viaja a 30.0 m/s en aire tranquilo. La frecuencia de la nota emitida por su silbato es de 262 Hz. ¿Qué frecuencia oye un pasajero de un tren que se mueve en dirección opuesta a 18.0 m/s y *a*) se acerca al primer tren, y *b*) cuando se aleja de él?

16.51 • Dos veloces canarios vuelan uno hacia el otro moviéndose cada uno a 15.0 m/s en relación con el suelo y cantando una nota con frecuencia de 1750 Hz. *a*) ¿Cuál es la frecuencia de la nota que cada

ave oye de la otra? *b*) ¿Qué longitud de onda mide cada canario para la nota del otro?

16.52 •• La sirena de un camión de bomberos que viaja hacia el norte a 30.0 m/s emite un sonido con una frecuencia de 2000 Hz. Un camión enfrente del carro de bomberos se mueve hacia el norte a 20 m/s. *a*) ¿Cuál es la frecuencia del sonido de la sirena que el conductor del carro de bomberos oye reflejado de la parte trasera? *b*) ¿Cuál sería la longitud de onda, medida por el conductor del carro de bomberos para estas ondas sonoras reflejadas?

16.53 •• ¿Qué tan rápido (como un porcentaje de la rapidez de la luz) tendría que desplazarse una estrella para que la frecuencia de la luz que recibimos de ella sea un 10.0% mayor que la frecuencia de la luz que emite? ¿Se estaría alejando de nosotros o se estaría acercando? (Suponga que se mueve directamente hacia nosotros o que se aleja directamente de nosotros).

16.54 • Planetas extrasolares. En un futuro no muy distante, sería posible detectar la presencia de planetas que giran alrededor de otras estrellas, midiendo el efecto Doppler en la luz infrarroja que emiten. Si un planeta gira alrededor de su estrella a 50.00 km/s, mientras emite luz infrarroja cuya frecuencia es de 3.330×10^{14} Hz, ¿qué frecuencia de luz recibiremos de ese planeta, cuando se está alejando directamente de nosotros? (*Nota:* La luz infrarroja es luz con longitudes de onda mayores que las de la luz visible).

Sección 16.9 Ondas de choque

16.55 •• Un avión a reacción pasa volando a Mach 1.70 y altitud constante de 950 m. *a*) ¿Qué ángulo α tiene el cono de la onda de choque? *b*) ¿Cuánto tiempo después de pasar el avión directamente arriba oímos el estampido sónico? Desprecie la variación de la rapidez del sonido con la altitud.

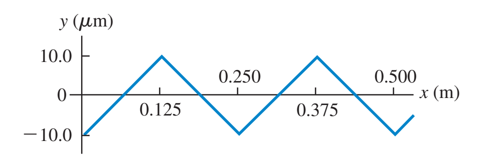
16.56 • El cono de ondas de choque que genera el transbordador espacial, en un instante durante su reingreso a la atmósfera, forma un ángulo de 58° con la dirección de su movimiento. La rapidez del sonido a esa altitud es de 331 m/s. *a*) ¿Cuál es el número Mach del transbordador en ese instante, y *b*) cuál es su rapidez relativa (en m/s y mi/h) a la atmósfera? *c*) ¿Cuál sería su número Mach y el ángulo del cono de las ondas de choque, si volara con la misma rapidez pero menor altitud, donde la rapidez del sonido es de 344 m/s?

PROBLEMAS

16.57 ••• PA Dos cuerdas tensas e idénticas, sometidas a la misma tensión F, producen una nota de la misma frecuencia fundamental f_0. La tensión en una de ellas se incrementa ahora una cantidad muy pequeña ΔF. *a*) Si se tocan juntas en su fundamental, demuestre que la frecuencia del pulso producida es $f_{pulso} = f_0(\Delta F/2F)$. *b*) Dos cuerdas de violín idénticas, cuando están afinadas y estiradas con el mismo grado de tensión, tienen una frecuencia fundamental de 440.0 Hz. Una de las cuerdas se vuelve a afinar aumentando la tensión. Cuando se hace esto, se escuchan 1.5 pulsos por segundo cuando se pulsan ambas cuerdas simultáneamente a la altura de sus centros. ¿En qué porcentaje se modificó la tensión de la cuerda?

16.58 •• CALC *a*) Defienda esta afirmación: "En una onda sonora sinusoidal, la variación de presión dada por la ecuación (16.4) es máxima donde el desplazamiento dado por la ecuación (16.1) es cero". *b*) Para una onda sonora sinusoidal dada por la ecuación (16.1) con amplitud $A = 10.0$ μm y longitud de onda $\lambda = 0.250$ m, grafique el desplazamiento y y la fluctuación de presión p en función de x en $t = 0$. Muestre al menos dos longitudes de onda en sus gráficas. *c*) El desplazamiento y en una onda sonora *no* sinusoidal se representa en la figura P16.58 como función de x en $t = 0$. Dibuje una gráfica que muestre la fluctuación de presión p en esta onda en función de x en $t = 0$. Esta onda sonora tiene la misma amplitud de 10.0 μm que la onda del inciso *b*). ¿Tiene la misma amplitud de presión? ¿Por qué? *d*) ¿Se cumple necesariamente la afirmación del inciso *a*), si la onda *no* es sinusoidal? Explique su razonamiento.

Figura **P16.58**



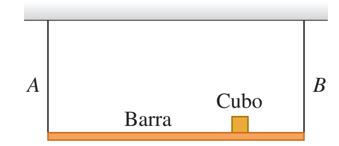
16.59 •• Una soprano y un bajo están cantando a dueto. Mientras la soprano canta un *la* sostenido a 932 Hz, el bajo canta un *la* sostenido, pero tres octavas más abajo. En esta sala de conciertos, la densidad del aire es de 1.20 kg/m^3 y su módulo volumétrico es de 1.42×10^5 Pa. Para que sus notas tengan el mismo nivel de intensidad de sonido, ¿cuál debe ser *a*) la razón entre las amplitudes de presión del bajo y de la soprano, y *b*) la razón entre las amplitudes de desplazamiento del bajo y de la soprano? *c*) ¿Qué amplitud de desplazamiento (en m y nm) produce la soprano para cantar su *la* sostenido a 72.0 dB?

16.60 •• PA El sonido de una trompeta radia uniformemente en todas direcciones en aire a 20°C. A una distancia de 5.00 m de la trompeta, el nivel de intensidad de sonido es de 52.0 dB. La frecuencia es de 587 Hz. *a*) Determine la amplitud de presión a esta distancia. *b*) Calcule la amplitud de desplazamiento. *c*) ¿A qué distancia el nivel de intensidad del sonido es de 30.0 dB?

16.61 ••• Un termómetro. Suponga que un tubo con longitud L contiene un gas y que usted desea tomar la temperatura de ese gas, pero sin introducirse en el tubo. Un extremo está cerrado y el otro está abierto, y un pequeño altavoz que produce sonido de frecuencia variable se encuentra en el extremo abierto. Usted aumenta gradualmente la frecuencia del altavoz hasta que el sonido del tubo se vuelve muy ruidoso. Con un aumento posterior de la frecuencia, la intensidad disminuye, pero el sonido vuelve a ser muy intenso otra vez a frecuencias todavía más altas. Sea f_0 la frecuencia más baja a la que el sonido es muy intenso. *a*) Demuestre que la temperatura absoluta de este gas está dada por $T = 16ML^2 f_0^{\,2}/\gamma R$, donde M es la masa molar del gas, γ es la razón de sus capacidades calorífica y R es la constante de gas ideal. *b*) ¿A qué frecuencia por arriba de f_0 el sonido del tubo alcanzará su volumen máximo? *c*) ¿Cómo podría determinarse la rapidez del sonido en este tubo a temperatura T?

16.62 •• PA Una barra uniforme de 165 N está sostenida horizontalmente por dos alambres idénticos A y B (figura P16.62). Un pequeño cubo de plomo de 185 N está colocado a del camino entre A y B. Cada uno de los alambres mide 75.0 cm de largo y tiene una masa de 5.50 g. Si ambos son pulsados simultáneamente en el centro, ¿cuál es la frecuencia de los pulsos que se producirán cuando cada uno de los alambres vibre en su fundamental?

Figura **P16.62**



16.63 • PA Una persona toca una flauta pequeña de 10.75 cm de longitud, abierta en un extremo y cerrada en el otro, cerca de una cuerda tensa que tiene una frecuencia fundamental de 600.0 Hz. Tomando como rapidez del sonido 344.0 m/s, ¿con cuáles armónicos de la flauta resonará la cuerda? En cada caso, ¿cuál armónico de la cuerda está en resonancia?

16.64 ••• PA Un nuevo instrumento musical. Imagine que diseñó un nuevo instrumento musical de construcción muy sencilla. Su diseño consiste en un tubo metálico de longitud L y diámetro $L/10$. Ha estirado una cuerda con masa por unidad de longitud μ a lo ancho del extremo abierto del tubo. El otro extremo está cerrado. Para producir el efecto musical que le interesa, quiere que la frecuencia de la onda estacionaria del tercer armónico en la cuerda sea igual a la frecuencia fundamental para las ondas sonoras en la columna de aire dentro del tubo. La rapidez de las ondas sonoras en esa columna es v_S. *a*) ¿Qué tensión

debe haber en la cuerda para producir el efecto deseado? *b*) ¿Qué sucede con el sonido producido por el instrumento, si la tensión se aumenta al doble del valor calculado en el inciso *a*)? *c*) Para la tensión calculada en el inciso *a*), ¿qué otros armónicos de la cuerda, si acaso, están en resonancia con ondas estacionarias en la columna de aire?

16.65 • Un tubo de órgano tiene dos armónicos sucesivos con frecuencias de 1372 y 1764 Hz. *a*) ¿El tubo está abierto o cerrado? Explique su respuesta. *b*) ¿De qué armónicos se trata? *c*) ¿Qué longitud tiene el tubo?

16.66 • **Ondas longitudinales estacionarias en un sólido.** Es posible producir ondas longitudinales estacionarias en una varilla sólida sosteniéndola en algún punto entre los dedos de una mano y acariciándola con la otra mano. La varilla oscilará con antinodos en ambos extremos. *a*) ¿Por qué los extremos son antinodos en lugar de nodos? *b*) Se puede obtener la frecuencia fundamental acariciando la varilla mientras se sostiene por el centro. Explique por qué este es el *único* lugar donde puede sostenerse la varilla para obtener la frecuencia fundamental. *c*) Calcule la frecuencia fundamental de una varilla de acero con 1.50 m de longitud (véase la tabla 16.1). *d*) ¿Cuál es la siguiente frecuencia de onda estacionaria que puede tener esta varilla? ¿Dónde deberá sostenerse la varilla para excitar una onda estacionaria de esta frecuencia?

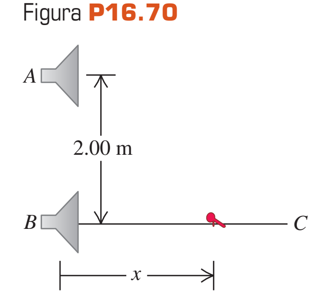
16.67 •• Un tubo largo contiene aire a una presión de 1.00 atm y temperatura de 77.0°C. El tubo está abierto en un extremo y cerrado en el otro por un pistón móvil. Un diapasón afinado cerca del extremo abierto está vibrando con una frecuencia de 500 Hz. Se produce resonancia cuando el pistón está a distancias de 18.0, 55.5 y 93.0 cm del extremo abierto. *a*) Con estos datos, determine la rapidez del sonido en el aire a 77.0°C. *b*) Con el resultado del inciso *a*), calcule el valor de γ. *c*) Estos datos muestran que hay un antinodo de desplazamiento un poco afuera del extremo abierto del tubo. ¿Qué tan afuera está?

16.68 ••• La frecuencia de la nota *fa* es de 349 Hz. *a*) Si un tubo de órgano está abierto en un extremo y cerrado en el otro, ¿qué longitud deberá tener para que su modo fundamental produzca esta nota a 20.0°C? *b*) ¿Con qué temperatura del aire la frecuencia será de 370 Hz, correspondiente a un aumento de tono de *fa* a *fa* sostenido? (Desprecie el cambio de longitud del tubo debido al cambio de temperatura).

16.69 • Una onda estacionaria con frecuencia de 1100 Hz en una columna de metano (CH_4) a 20.0°C produce nodos separados por 0.200 m. ¿Qué valor tiene γ para el metano? (La masa molar del metano es de 16.0 g/mol).

16.70 •• Dos altavoces idénticos están situados en los puntos *A* y *B*, separados 2.00 m. Los altavoces son alimentados por el mismo amplificador y producen ondas sonoras con una frecuencia de 784 Hz. La rapidez del sonido en el aire es de 344 m/s. Un micrófono pequeño se aleja del punto *B* sobre una línea perpendicular a la línea que une *A* y *B* (línea *BC* en la figura P16.70). *a*) ¿A qué distancias de *B* habrá interferencia *destructiva*? *b*) ¿Y *constructiva*? *c*) Si la frecuencia es lo bastante baja, no habrá posiciones sobre la línea *BC* en las que haya interferencia destructiva. ¿Qué tan baja deberá ser la frecuencia para que esto suceda?

Figura **P16.70**



16.71 • **Ópera wagneriana.** Un hombre se casa con una gran soprano wagneriana; no obstante, para su desgracia, descubre después que no tolera la ópera wagneriana. El desdichado marido decide que, para salvar sus tímpanos, deberá hacer que su esposa calle para siempre. Su plan consiste en atarla al frente de su automóvil y lanzarlo a gran velocidad contra un muro de ladrillo. Sin embargo, la soprano no es tonta, y además estudió física cuando estaba en el conservatorio. Ella se da cuenta de que el muro tiene una frecuencia resonante de 600 Hz, lo que implica que, si una onda sonora continua de esa frecuencia incide en el muro, este se derrumbará, y ella podrá seguir dedicándose al canto. El auto se dirige hacia el muro con rapidez de 30 m/s. *a*) ¿A qué frecuencia deberá cantar la soprano para que la pared se derrumbe? *b*) ¿Qué frecuencia oirá la soprano reflejada de la pared justo antes de que se desmorone?

16.72 •• Un murciélago vuela hacia una pared, emitiendo un sonido constante cuya frecuencia es de 1.70 kHz. El murciélago escucha su propio sonido más el sonido reflejado por la pared. ¿Con qué rapidez deberá volar para escuchar una frecuencia de pulso de 10.0 Hz?

16.73 •• **PA** Una persona inclinada en un pozo de 125 m de profundidad tira accidentalmente una sirena que emite un sonido de 2500 Hz de frecuencia. Para el momento exacto antes de que la sirena llegue al fondo del pozo, calcule la frecuencia y la longitud de onda del sonido que oye la persona *a*) proveniente directamente de la sirena y *b*) reflejada del fondo del pozo. *c*) ¿Qué frecuencia de pulso percibe esta persona?

16.74 ••• **BIO** **Ultrasonido en medicina.** Una onda sonora de 2.00 MHz viaja por el abdomen de una mujer embarazada y se refleja en la pared cardiaca del feto. La pared cardiaca se mueve hacia el receptor de sonido al latir el corazón. El sonido reflejado se mezcla con el transmitido, y se detectan 72 pulsos por segundo. La rapidez del sonido en el tejido corporal es de 1500 m/s. Calcule la rapidez de la pared cardiaca fetal, en el instante en que se hace la medición.

16.75 •• La fuente de sonido del sistema de sonar de un barco opera a una frecuencia de 22.0 kHz. La rapidez del sonido en agua (que suponemos está a una temperatura uniforme de 20°C) es de 1482 m/s. *a*) Calcule la longitud de onda de las ondas emitidas por la fuente. *b*) Calcule la diferencia en frecuencia entre las ondas radiadas directamente y las reflejadas de una ballena que viaja directamente hacia el barco a 4.95 m/s. El barco está en reposo en el agua.

16.76 • **PA** Una sirena policiaca con frecuencia f_{sirena} está sujeta a una plataforma que vibra. La plataforma y la sirena oscilan verticalmente en movimiento armónico simple, con amplitud A_p y frecuencia f_p. *a*) Calcule las frecuencias máxima y mínima del sonido que usted escucharía en una posición directamente arriba de la sirena. *b*) ¿En qué punto del movimiento de la plataforma se escucha la máxima frecuencia? ¿Y la mínima? Explique su respuesta.

16.77 ••• **BIO** Los murciélagos de herradura (género *Rhinolophus*) emiten sonidos por las fosas nasales y luego escuchan la frecuencia del sonido reflejado de su presa para determinar la rapidez de esta. (La "herradura" que da al animal su nombre es una depresión alrededor de las fosas nasales que actúa como espejo de enfoque y permite al animal emitir sonido en un haz angosto, como una linterna). Un *Rhinolophus* que vuela con una rapidez $v_{\text{murciélago}}$ emite sonidos de frecuencia $f_{\text{murciélago}}$; la frecuencia que oye reflejada de un insecto que vuela hacia él tiene un valor más alto f_{refl}. *a*) Demuestre que la rapidez del insecto es

$$v_{\text{insecto}} = v\left[\frac{f_{\text{refl}}(v - v_{\text{murciélago}}) - f_{\text{murciélago}}(v + v_{\text{murciélago}})}{f_{\text{refl}}(v - v_{\text{murciélago}}) + f_{\text{murciélago}}(v + v_{\text{murciélago}})}\right]$$

donde v es la rapidez del sonido. *b*) Si $f_{\text{murciélago}} = 80.7$ kHz, $f_{\text{refl}} = 83.5$ kHz y $v_{\text{murciélago}} = 3.9$ m/s, calcule la rapidez del insecto.

16.78 •• *a*) Demuestre que la ecuación (16.30) puede escribirse así:

$$f_R = f_S\left(1 - \frac{v}{c}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{v}{c}\right)^{-1/2}$$

b) Use el teorema binomial para demostrar que, si $v \ll c$, esto es aproximadamente igual a

$$f_R = f_S\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

c) Un avión de reconocimiento sin piloto emite una señal de radio cuya frecuencia es de 243 MHz. Está volando directamente hacia un ingeniero de pruebas que se encuentra en tierra. El ingeniero detecta pulsos entre la señal recibida y una señal local que también tiene una frecuencia de 243 MHz. La frecuencia del pulso es de 46.0 Hz. Calcule la rapidez del avión. (Las ondas de radio viajan a la rapidez de la luz, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s).

16.79 •• **¡Supernova!** La nube de gas llamada Nebulosa del Cangrejo puede verse incluso con un telescopio pequeño; es lo que queda de una *supernova*, es decir, la explosión colosal de una estrella. La explosión se vio en la Tierra el 4 de julio de 1054 D.C. Los destellos brillan con el color rojo característico de hidrógeno gaseoso caliente. En un laboratorio en la Tierra, el hidrógeno calentado produce luz roja con frecuencia de 4.568×10^{14} Hz; la luz roja recibida de los destellos de la nebulosa del Cangrejo que apuntan hacia la Tierra tiene una frecuencia de 4.586×10^{14} Hz. *a*) Estime la rapidez con que estos bordes exteriores de la nebulosa se están expandiendo. Suponga que la rapidez del centro de la nebulosa relativa a la Tierra es despreciable. (Puede usar las fórmulas deducidas en el problema 16.78. La rapidez de la luz es de 3.00×10^8 m/s). *b*) Suponiendo que la rapidez de expansión ha sido constante desde la explosión de la supernova, estime el diámetro de la nebulosa en metros y en años luz. *c*) El diámetro angular de la nebulosa del Cangrejo vista desde la Tierra es de unos 5 minutos de arco (1 minuto de arco = $\frac{1}{60}$ de grado). Estime la distancia (en años luz) a la nebulosa, y estime el año en que tuvo lugar la explosión.

16.80 •• PA Una tornamesa de 1.50 m de diámetro gira a 75 rpm. Dos altavoces, que emiten cada uno un sonido de 31.3 cm de longitud de onda, están sujetos en el borde de la mesa en los extremos opuestos de un diámetro. Un receptor se encuentra enfrente de la tornamesa. *a*) ¿Cuál es la frecuencia máxima del pulso que percibirá el receptor de este sistema? *b*) ¿El receptor podrá distinguir los pulsos individuales?

16.81 •• Una mujer está de pie frente a una pared grande y lisa, y sostiene un diapasón vibrante y afinado con frecuencia f_0 entre ella y la pared. *a*) Ahora ella corre hacia la pared con rapidez v_W y detecta pulsos debidos a la interferencia entre las ondas sonoras que le llegan directamente del diapasón y las que le llegan después de reflejarse en la pared. ¿Cuántos pulsos por segundo detecta ella? (*Nota:* Si la frecuencia del pulso es demasiado grande, la mujer quizá tendrá que usar otra instrumentación distinta de sus oídos para detectar y contar los pulsos). *b*) Si ahora la mujer corre alejándose de la pared sosteniendo el diapasón a su espalda, de modo que esté entre ella y la pared, ¿cuántos pulsos por segundo detectará?

16.82 •• Imagine que, un día despejado, ve pasar un avión a reacción sobre su cabeza. Con base en el tamaño aparente del avión, usted determina que está volando a una altitud constante h. Escucha el estampido sónico un tiempo T después de que el avión pasó directamente arriba de su cabeza. Demuestre que, si la rapidez del sonido v es la misma a cualquier altitud, la rapidez del avión es

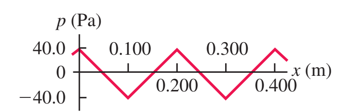
$$v_S = \frac{hv}{\sqrt{h^2 - v^2T^2}}$$

(*Sugerencia:* Le serán útiles las identidades trigonométricas).

PROBLEMAS DE DESAFÍO

16.83 ••• CALC La figura P16.83 muestra la fluctuación de presión p de una onda sonora no sinusoidal en función de x para $t = 0$. La onda viaja en la dirección $+x$. *a*) Dibuje una gráfica que muestre la fluctuación de presión p como función de t para $x = 0$. Muestre al menos dos ciclos de oscilación. *b*) Dibuje una gráfica que muestre el desplazamiento y en esta onda sonora en función de x en $t = 0$. En $x = 0$, el desplazamiento en $t = 0$ es cero. Muestre al menos dos longitudes de onda. *c*) Dibuje una gráfica que muestre el desplazamiento y en función de t para $x = 0$. Represente al menos dos ciclos de oscilación. *d*) Calcule la velocidad y aceleración máximas de un elemento del aire por el que viaja esta onda sonora. *e*) Describa cómo debe moverse el cono de un altavoz en función del tiempo para producir la onda sonora de este problema.

Figura **P16.83**



16.84 ••• PA **Ondas longitudinales en un resorte.** A menudo se usa un resorte largo para mostrar las ondas longitudinales. *a*) Demuestre que si un resorte que cumple la ley de Hooke tiene masa m, longitud L y constante de fuerza k', la rapidez de las ondas longitudinales en el resorte es $v = L\sqrt{k'/m}$ (véase la sección 16.2). *b*) Evalúe v para un resorte con $m = 0.250$ kg, $L = 2.00$ m y $k' = 1.50$ N/m.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

Tanto los sonidos musicales como el ruido consisten en una combinación de ondas sonoras sinusoidales. La diferencia es que todas las frecuencias de las ondas sinusoidales de un sonido musical son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental; en tanto que en el ruido están presentes *todas* las frecuencias.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

16.1 Respuesta: v. De acuerdo con la ecuación (16.5), la amplitud de desplazamiento es $A = p_{máx}/Bk$. La amplitud de presión $p_{máx}$ y el módulo volumétrico B no cambian; pero la frecuencia f aumenta en un factor de 4. Por lo tanto, el número de onda $k = \omega/v = 2\pi f/v$ también aumenta en un factor de 4. Puesto que A es inversamente proporcional a k, la amplitud de desplazamiento disminuye a $\frac{1}{4}$. Dicho de otro modo, a una frecuencia más alta se requiere un menor desplazamiento máximo para producir la misma fluctuación de la presión máxima.

16.2 Respuesta: i. Según la ecuación (16.7), la rapidez de las ondas longitudinales (sonido) en un fluido es $v = \sqrt{B/\rho}$. Podemos rescribir esto para obtener una expresión del módulo volumétrico B, en términos de la densidad ρ del fluido y la rapidez del sonido v: $B = \rho v^2$. A 20°C la rapidez del sonido en el mercurio es ligeramente menor que en el agua (1451 m/s contra 1482 m/s); sin embargo, la densidad del mercurio es mayor que la del agua por un factor grande (13.6). De esta manera, el módulo volumétrico del mercurio es mayor que el del agua en un factor de $(13.6)(1451/1482)^2 = 13.0$.

16.3 Respuesta: A y $p_{máx}$ aumentan en un factor de $\sqrt{2}$, B y v permanecen sin cambio, β aumenta en 3.0 dB. Las ecuaciones (16.9) y (16.10) indican que el módulo volumétrico B y la rapidez del sonido v no cambian porque tampoco cambian las propiedades físicas del aire. De acuerdo con las ecuaciones (16.12) y (16.14), la intensidad es pro-

porcional al cuadrado de la amplitud de desplazamiento o al cuadrado de la amplitud de presión. Por lo tanto, un aumento al doble de la intensidad implica un aumento tanto de A como de $p_{máx}$ en un factor de $\sqrt{2}$. El ejemplo 16.9 muestra que una *multiplicación* de la intensidad por un factor de $2(I_2/I_1 = 2)$ corresponde a *sumar* (10 dB)log(I_2/I_1) = (10 dB)log 2 = 3.0 dB al nivel de intensidad de sonido.

16.4 Respuesta: ii. El helio es menos denso que el aire y su masa molar es menor, así que el sonido viaja con mayor rapidez en helio que en aire. Las frecuencias de modo normal de un tubo son proporcionales a la rapidez del sonido v, así que la frecuencia y, por ende, el tono aumentan cuando el tubo se llena con helio en lugar de aire.

16.5 Respuesta: i y iv. Habrá resonancia si la frecuencia del modo normal del tubo es 660 Hz. La frecuencia del modo normal de un tubo de órgano cerrado son múltiplos impares de su frecuencia fundamental [véase la ecuación (16.22) y la figura 16.18]. Por lo tanto, la frecuencia fundamental del tubo **i**, es 220 Hz, mientras que la frecuencia del modo normal es 3(220 Hz) = 660 Hz. El tubo **ii** tiene el doble de la longitud del tubo **i**; según la ecuación (16.20), la frecuencia fundamental de un tubo cerrado es inversamente proporcional a la longitud, así que el tubo **ii** tiene una frecuencia fundamental de $\left(\frac{1}{2}\right)$(220 Hz) = 110 Hz. Las otras frecuencias del modo normal son 330 Hz, 550 Hz, 770 Hz, … por lo que un diapasón afinado de 660 Hz no causará resonancia. El tubo **iii** es un tubo abierto de la misma longitud que el tubo **i**; por ello, su frecuencia fundamental es dos veces mayor que la del tubo **i.** [compare las ecuaciones (16.16) y (16.20)], o bien, 2(220 Hz) = 440 Hz. Sus otras frecuencias de modo normal son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental [véase la ecuación (16.19)], o bien, 880 Hz, 1320 Hz, … ninguna de las cuales coincide con la frecuencia de 660 Hz del diapasón. El tubo **iv** también es un tubo abierto pero con el doble de longitud que el tubo **iii** [véase la ecuación (16.18)]; por ello, sus frecuencias de modo normal son de $\frac{1}{2}$ de las del tubo **iii**: 220 Hz, 440 Hz, 660 Hz, …, de manera que el tercer armónico resonará con el diapasón afinado.

16.6 Respuesta: iii. Las interferencias constructiva y destructiva entre las dos ondas solo pueden ocurrir si las dos ondas tienen la misma frecuencia. En este caso las frecuencias son diferentes, por lo que no hay puntos donde las dos ondas siempre se refuercen mutuamente (interferencia constructiva) o siempre se cancelen (interferencia destructiva).

16.7 Respuesta: vi. La frecuencia del pulso es de 3 Hz, así que la diferencia entre las frecuencias de los dos diapasones afinados también es de 3 Hz. Por lo tanto, el segundo diapasón vibra a una frecuencia de 443 Hz, o bien, de 437 Hz. Podemos distinguir entre las dos posibilidades comparando los tonos de los dos diapasones cuando suenan simultáneamente: la frecuencia será de 437 Hz si el segundo diapasón tiene tono más grave, y de 443 Hz si tiene un tono más agudo.

16.8 Respuesta: no El aire (el medio de las ondas sonoras) se está moviendo desde la fuente hacia el receptor. Por lo tanto, en relación con el aire, tanto la fuente como el receptor se están moviendo en la dirección del receptor a la fuente. Entonces, ambas velocidades son positivas, y $v_S = v_L = +10$ m/s. La igualdad de estas dos velocidades implica que el numerador y el denominador en la ecuación (16.29) son iguales, así que $f_L = f_S$ y *no* hay desplazamiento Doppler.

16.9 Respuesta: iii. La figura 16.37 indica que hay ondas sonoras dentro del cono de la onda de choque. Detrás del avión las crestas de las ondas se dispersan, justo cuando están detrás de la fuente en movimiento en la figura 16.27. Por lo tanto, las ondas que llegarían a usted tienen una longitud de onda ampliada y una menor frecuencia.

Problema práctico

Respuestas: ***a***) $180° = \pi$ rad
b) Solo A: $I = 3.98 \times 10^{-6}$ W/m^2, $\beta = 66.0$ dB; solo B: $I = 5.31 \times 10^{-7}$ W/m^2, $\beta = 57.2$ dB
c) $I = 1.60 \times 10^{-6}$ W/m^2, $\beta = 62.1$ dB

TEMPERATURA Y CALOR





? En una fábrica de acero, el hierro fundido se calienta a 1500° Celsius para eliminar impurezas. ¿Es correcto decir que el hierro fundido contiene calor?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- El significado de equilibrio térmico y lo que realmente miden los termómetros.
- Cómo funcionan los diferentes tipos de termómetros.
- La física que subyace en la escala de temperatura absoluta o Kelvin.
- De qué manera cambian las dimensiones de un objeto, como resultado del cambio de temperatura.
- El significado de calor, y cómo difiere del concepto de temperatura.
- A efectuar cálculos relacionados con flujo de calor, cambios de temperatura y cambios de fase.
- Cómo se transfiere calor mediante conducción, convección y radiación.

Tanto en un sofocante día de verano como en una helada noche invernal, nuestro organismo necesita mantenerse a una temperatura casi constante. El cuerpo cuenta con mecanismos eficaces para controlar la temperatura, aunque a veces necesita ayuda. En un día caluroso, usamos menos ropa para mejorar la transferencia de calor del cuerpo al aire y el enfriamiento por evaporación del sudor. Tal vez tomemos bebidas frías, o con hielo, y nos sentemos cerca de un ventilador o en una habitación con aire acondicionado. En un día frío, usamos ropa más gruesa o nos quedamos en interiores donde hay más calor. Si salimos de casa, nos mantenemos activos y bebemos líquidos calientes. Los conceptos de este capítulo nos ayudarán a entender la física básica del calentamiento y el enfriamiento.

Es común usar indistintamente los términos *temperatura* y *calor* en el habla cotidiana. En física, no obstante, los dos términos tienen significado muy distinto. En este capítulo, definiremos la temperatura en términos de su medición y veremos cómo los cambios de temperatura afectan las dimensiones de los objetos. Estudiaremos cómo el calor se refiere a la transferencia de energía causada por las diferencias de temperatura, y aprenderemos a calcular y controlar estas transferencias de energía.

En este capítulo, nos ocuparemos de los conceptos de temperatura y calor, en relación con objetos *macroscópicos* como cilindros de gas, cubitos de hielo y el cuerpo humano. En el capítulo 18 veremos estos mismos conceptos desde una perspectiva *microscópica*, en términos del comportamiento de los átomos y las moléculas individuales. Estos dos capítulos establecen las bases de la **termodinámica**, que es el estudio de las transformaciones de energía donde intervienen calor, trabajo mecánico y otras formas de energía, así como la relación entre estas transformaciones y las propiedades de la materia. La termodinámica es una parte fundamental e indispensable de la física, la química y las ciencias biológicas; sus aplicaciones aparecen en objetos como motores de combustión, refrigeradores, procesos bioquímicos y la estructura de las estrellas. Exploraremos las ideas clave de la termodinámica en los capítulos 19 y 20.

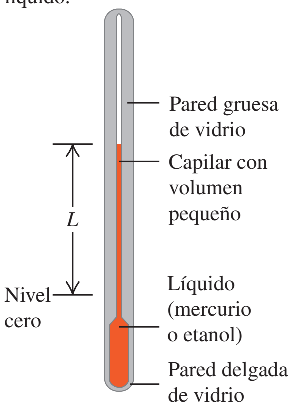
17.1 Temperatura y equilibrio térmico

El concepto de **temperatura** se origina en las ideas cualitativas de "caliente" y "frío" basadas en nuestro sentido del tacto. Un cuerpo que se siente caliente suele tener una temperatura más alta que un cuerpo similar que se siente frío. Esto es un tanto vago y los sentidos pueden engañarse. Sin embargo, muchas propiedades de la materia que podemos *medir* dependen de la temperatura. La longitud de una varilla de metal, la presión del vapor en una caldera, la capacidad de un alambre para conducir corriente eléctrica y el color brillante de un objeto muy caliente: todo esto depende de la temperatura.

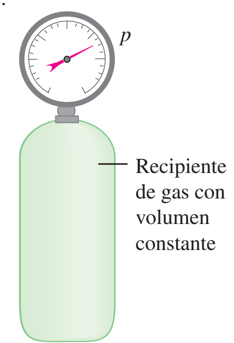
La temperatura también se relaciona con la energía cinética de las moléculas de un material. En general, esta relación es muy compleja, por lo que no es un buen punto de partida para *definir* la temperatura. En el capítulo 18 examinaremos la relación entre la temperatura y la energía del movimiento molecular para un gas ideal. No obstante, es importante entender que la temperatura y el calor pueden definirse indepedientemente de cualquier enfoque molecular detallado. En esta sección, desarrollaremos una definición *macroscópica* de la temperatura.

17.1 Dos dispositivos para medir la temperatura.

a) Los cambios de temperatura hacen que cambie el volumen del líquido.



b) Los cambios de temperatura hacen que cambie la presión del gas.



Para usar la temperatura como medida de calidez o de frialdad, necesitamos establecer una escala de temperatura. Para ello, podemos usar cualquier propiedad medible de un sistema que varíe con su "calidez" o "frialdad". La figura 17.1*a* muestra un sistema común para medir la temperatura. Cuando el sistema se calienta, el líquido colorido (usualmente mercurio o etanol) se expande y sube por el tubo, y el valor de L aumenta. Otro sistema sencillo es una cantidad de gas en un recipiente de volumen constante (figura 17.1*b*). La presión p medida por el manómetro aumenta o disminuye, al calentarse o enfriarse el gas. Un tercer ejemplo es la resistencia eléctrica R de un alambre conductor, que también varía al calentarse o enfriarse el alambre. Todas estas propiedades nos dan un número (L, p o R) que varía con la calidez y la frialdad, así que pueden usarse para hacer un **termómetro**.

Para medir la temperatura de un cuerpo, colocamos el termómetro en contacto con él. Si queremos conocer la temperatura de una taza con café, introducimos el termómetro en el líquido; al interactuar los dos, el termómetro se calienta y el café se enfría un poco. Una vez que el termómetro se estabiliza, leemos la temperatura. El sistema está en una condición de *equilibrio*, en la cual la interacción entre el termómetro y el café ya no causa un cambio en el sistema. Llamamos **equilibrio térmico** a dicho estado.

Si dos sistemas están separados por un material **aislante**, como madera, espuma de plástico o fibra de vidrio, se afectan mutuamente con más lentitud. Las hieleras portátiles se fabrican con materiales aislantes para retardar el calentamiento del hielo y de la comida fría en su interior, que tratan de llegar al equilibrio térmico con el aire veraniego. Un *aislante ideal* es un material que no permite la interacción entre los dos sistemas; evita que alcancen el equilibrio térmico si es que no estaban en él inicialmente. Los aislantes ideales son solo eso: una idealización; los aislantes reales, como los de las hieleras, no son ideales, así que finalmente su contenido se calentará.

Ley cero de la termodinámica

Podemos descubrir una propiedad importante del equilibrio térmico considerando tres sistemas, A, B y C, que inicialmente no están en equilibrio térmico (figura 17.2). Rodeamos los sistemas con una caja aislante ideal para que solo puedan interactuar entre sí. Separamos A y B con una pared aislante ideal (la barra verde en la figura 17.2*a*); pero dejamos que C interactúe tanto con A como con B. Esta interacción se indica en la figura con una barra amarilla que representa un **conductor** térmico, es decir, un material que *permite* la interacción térmica. Esperamos hasta que se alcance el equilibrio térmico; entonces, A y B están en equilibrio térmico con C pero, ¿están en equilibrio térmico *entre sí*?

Para averiguarlo, separamos el sistema C de los sistemas A y B con una pared aislante ideal (figura 17.2*b*) y sustituimos la pared aislante entre A y B por una pared *con-*

ductora que permite que A y B interactúen. ¿Qué sucede? Los experimentos indican que *nada* sucede; no hay cambios adicionales en A ni en B. Concluimos que

Si inicialmente *C* está en equilibrio térmico con *A* y con *B*, entonces *A* y *B* también están en equilibrio térmico entre sí. Este resultado se llama ley cero de la termodinámica.

(La importancia de esta ley se reconoció solo después de nombrarse la primera, segunda y tercera leyes de la termodinámica. Puesto que es fundamental para todas ellas, el nombre "cero" pareció adecuado).

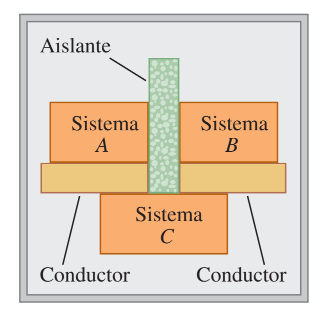
Suponga ahora que el sistema C es un termómetro, como el sistema de tubo y líquido de la figura 17.1*a*. En la figura 17.2*a*, el termómetro C está en contacto con A y con B. En equilibrio térmico, cuando la lectura del termómetro se estabiliza, el termómetro mide la temperatura tanto de A como de B; por lo tanto, ambos tienen la *misma* temperatura. Los experimentos indican que el equilibrio térmico no se ve afectado si se agregan o se quitan aislantes, así que la lectura de C no cambiaría si solo estuviera en contacto con A o solo con B. Concluimos que

Dos sistemas están en equilibrio térmico si y solo si tienen la misma temperatura.

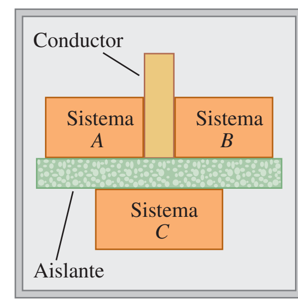
En esto radica la utilidad de los termómetros; un termómetro realmente mide *su propia* temperatura, pero cuando está en equilibrio térmico con otro cuerpo, las temperaturas deben ser iguales. Si difieren las temperaturas de dos sistemas, *no pueden* estar en equilibrio térmico.

17.2 Ley cero de la termodinámica.

a) Si los sistemas *A* y *B* están cada uno en equilibrio térmico con el sistema *C* …



b) … entonces los sistemas *A* y *B* están en equilibrio térmico entre sí.



Evalúe su comprensión de la sección 17.1 Si se introduce un termómetro en una olla de agua caliente y se registra la lectura de aquel, ¿qué temperatura se registrará? **i.** La temperatura del agua; **ii.** la temperatura del termómetro; **iii.** un promedio igual de las temperaturas del agua y el termómetro; **iv.** un promedio ponderado de las temperaturas del agua y del termómetro, con mayor énfasis en la temperatura del agua; **v.** un promedio ponderado del agua y del termómetro, con mayor énfasis en la temperatura del termómetro.

17.2 Termómetros y escalas de temperatura

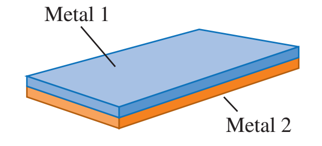
Para que el dispositivo de líquido en un tubo de la figura 17.1*a* sea un termómetro útil, necesitamos marcar una escala numerada en la pared del tubo. Esos números son arbitrarios, e históricamente se han usado muchos esquemas diferentes. Suponga que marcamos con "0" el nivel del líquido del termómetro a la temperatura de congelación del agua pura, y con "100" el nivel a la temperatura de ebullición, y luego dividimos la distancia entre ambos puntos en 100 intervalos iguales llamados *grados*. El resultado es la **escala de temperatura Celsius** (antes llamada *centígrada* en los países de habla inglesa). La temperatura en la escala Celsius para un estado más frío que el agua al momento de congelarse es un número negativo. La escala Celsius se usa, tanto en la vida cotidiana como en la ciencia y la industria, en casi todo el mundo.

Otro tipo de termómetro común usa *una tira bimetálica*, que se fabrica pegando tiras de dos metales distintos (figura 17.3*a*). Al aumentar la temperatura de la tira compuesta, un metal se expande más que el otro y la tira se dobla (figura 17.3*b*). La tira usualmente se moldea en espiral, con el extremo exterior anclado a la caja y el interior unido a un puntero (figura 17.3*c*). El puntero gira en respuesta a cambios de temperatura.

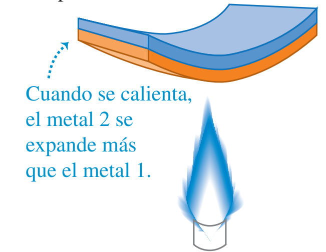
En un *termómetro de resistencia*, se mide el cambio en la resistencia eléctrica de una bobina de alambre muy delgado, un cilindro de carbono o un cristal de germanio. Los termómetros de resistencia suelen ser más precisos que los de otro tipo.

17.3 Uso de una tira bimetálica como termómetro.

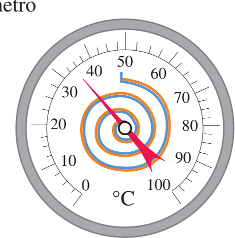
a) Una tira bimetálica



b) La tira se dobla al aumentar su temperatura



c) Una tira bimetálica usada en un termómetro



17.4 El termómetro para arteria temporal mide la radiación infrarroja de la piel que cubre una de las arterias más importantes de la cabeza. Aunque la tapa del termómetro toca la piel, el detector infrarrojo dentro de esta no lo hace.



Algunos termómetros detectan la cantidad de radiación infrarroja emitida por un objeto. (En la sección 17.7 veremos que *todos* los objetos emiten radiación electromagnética, incluyendo la infrarroja, que es consecuencia de su temperatura). Un ejemplo moderno es un *termómetro para la arteria temporal* (figura 17.4). Un enfermero lo coloca sobre la frente de un paciente cerca de la arteria temporal, y un sensor infrarrojo en el termómetro mide la radiación desde la piel. Las pruebas demuestran que este dispositivo brinda valores más precisos de la temperatura corporal que los termómetros orales o de oído.

En la **escala de temperatura Fahrenheit**, aún usada en la vida cotidiana en Estados Unidos, la temperatura de congelación del agua es de 32°F (32 grados Fahrenheit) y la de ebullición es de 212°F, ambas a presión atmosférica estándar. Hay 180 grados entre los puntos de congelación y de ebullición, en vez de 100 como en la escala Celsius, así que 1°F representa un cambio de temperatura de solo $\frac{100}{180}$, o $\frac{5}{9}$, de 1°C.

Para convertir temperaturas de Celsius a Fahrenheit, observamos que una temperatura Celsius T_C es el número de grados Celsius arriba de la temperatura de congelación del agua; el número de grados Fahrenheit arriba de dicha temperatura es $\frac{9}{5}$ de esa cantidad, pero la temperatura de congelación del agua en la escala Fahrenheit ocurre a 32°F, así que, para obtener la temperatura Fahrenheit T_F, multiplicamos el valor Celsius por $\frac{9}{5}$ y le sumamos 32°. Con símbolos,

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32° \qquad (17.1)$$

Para convertir de Fahrenheit a Celsius, despejamos T_C de esta ecuación:

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32°) \qquad (17.2)$$

Es decir, restamos 32° para obtener el número de grados Fahrenheit arriba de la temperatura de congelación y luego multiplicamos por $\frac{5}{9}$ para obtener el número de grados Celsius por arriba de la temperatura de congelación, esto es, la temperatura Celsius.

No recomendamos memorizar las ecuaciones (17.1) y (17.2). En vez de ello, trate de entender el razonamiento que condujo a esas ecuaciones para deducirlas cuando las necesite, verificando su razonamiento con la relación 100°C = 212°F.

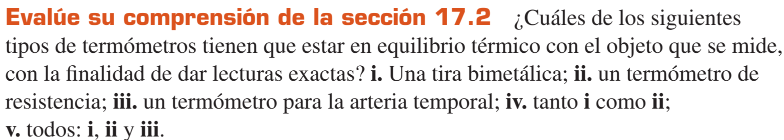
Conviene distinguir entre un valor de temperatura y un *intervalo* de temperatura (una diferencia o un cambio de temperatura). Una temperatura de 20° se escribe 20°C (veinte grados Celsius), y un *intervalo* de temperatura de 10° se escribe 10 C° (diez grados Celsius). Un vaso de agua que se calienta de 20 a 30°C tiene un cambio de temperatura de 10 C°.



Aplicación Temperaturas corporales de los mamíferos
La mayoría de los mamíferos mantienen la temperatura del cuerpo en el intervalo de 36 a 40°C (de 309 a 313 K). Una alta tasa metabólica del animal calienta desde dentro, y el aislamiento (por ejemplo, pieles, plumas y grasa corporal) reduce la pérdida de calor.







Evalúe su comprensión de la sección 17.2 ¿Cuáles de los siguientes tipos de termómetros tienen que estar en equilibrio térmico con el objeto que se mide, con la finalidad de dar lecturas exactas? **i.** Una tira bimetálica; **ii.** un termómetro de resistencia; **iii.** un termómetro para la arteria temporal; **iv.** tanto **i** como **ii**; **v.** todos: **i**, **ii** y **iii**.



17.3 Termómetros de gas y la escala Kelvin

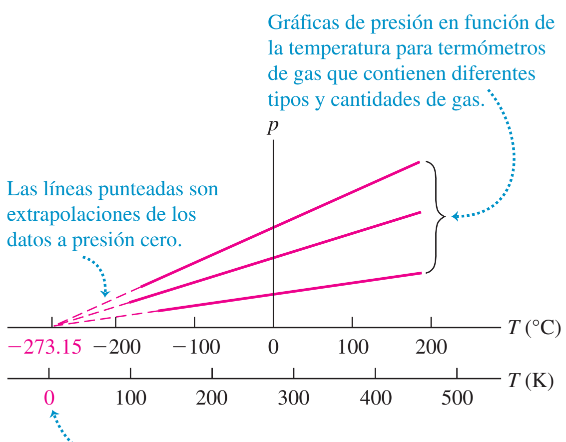
Cuando calibramos dos termómetros, como un sistema de líquido en tubo o un termómetro de resistencia, de modo que coincidan en 0 y 100°C, podrían no coincidir exactamente a temperaturas intermedias. Cualquier escala de temperatura definida de este modo siempre depende un tanto de las propiedades específicas del material empleado. De manera ideal, nos gustaría definir una escala de temperatura que *no* dependa de las propiedades de un material específico. Para establecer una escala en verdad independiente del material, necesitamos desarrollar algunos principios de termodinámica. Volveremos a este problema fundamental en el capítulo 20. Aquí veremos un termómetro que se acerca al ideal, el *termómetro de gas*.

17.5 *a*) Uso del termómetro de gas a volumen constante para medir temperatura. *b*) Cuanto mayor sea la cantidad de gas en el termómetro, más alta será la gráfica de presión p contra temperatura T.

a) Termómetro de gas a volumen constante



b) Gráfica de presión contra temperatura a volumen constante para tres distintos tipos y cantidades de gas



El principio de un termómetro de gas se basa en que la presión de un gas a volumen constante aumenta con la temperatura. Una cantidad de gas se coloca en un recipiente de volumen constante (figura 17.5*a*) y se mide su presión con uno de los dispositivos descritos en la sección 12.2. Para calibrar dicho termómetro, medimos la presión a dos temperaturas, digamos, 0 y 100°C, graficamos esos puntos y trazamos una recta entre ellos. Así, podemos leer en la gráfica la temperatura correspondiente a cualquier otra presión. La figura 17.5*b* muestra los resultados de tres experimentos de este tipo, utilizando en cada caso diferente tipo y cantidad de gas.

Si extrapolamos la línea, vemos que hay una temperatura hipotética, −273.15°C, en la que la presión absoluta del gas sería cero. Podríamos esperar que tal temperatura fuera diferente para distintos gases, pero resulta ser la *misma* para muchos gases distintos (al menos en el límite cuando la densidad del gas es muy baja). En realidad, no podemos observar esta condición de ausencia de presión; los gases se licuan y solidifican a temperaturas muy bajas, y la presión deja de ser proporcional a la temperatura.

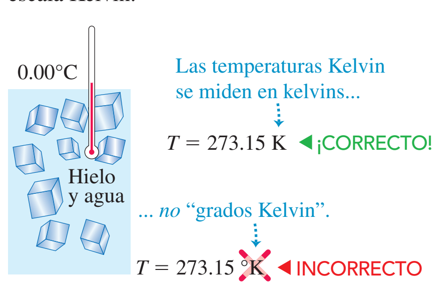
Usamos esta temperatura extrapolada a presión cero como base para una escala de temperatura, con su cero en dicha temperatura: la **escala de temperatura Kelvin**, así llamada en honor del físico inglés Lord Kelvin (1824-1907). Las unidades tienen el mismo tamaño que las de la escala Celsius, pero el cero se desplaza de modo que 0 K = −273.15°C y 273.15 K = 0°C; es decir,

$$T_K = T_C + 273.15 \tag{17.3}$$

En la figura 17.5*b* se muestran la escala Celsius y la escala Kelvin. Una temperatura ambiente común, 20°C (= 68°F), es 20 + 273.15 o aproximadamente 293 K.

CUIDADO **Nunca diga "grados kelvin"** En la nomenclatura del SI, no se usa el término "grado" con la escala Kelvin; la temperatura anterior se lee "293 kelvins", no "grados Kelvin" (figura 17.6). Kelvin con mayúscula se refiere a la escala de temperatura; pero la *unidad* de temperatura es el *kelvin,* con minúscula (aunque se denota K).

17.6 Usos correcto e incorrecto de la escala Kelvin.





Ejemplo 17.1 Temperatura corporal

Imagine que coloca un trozo de hielo en la boca. En algún momento, todo el hielo a $T_1 = 32.00°F$ se convierte en agua a la temperatura corporal, $T_2 = 98.60°F$. Exprese estas temperaturas tanto en grados Celsius como en kelvins y calcule $\Delta T = T_2 - T_1$ en ambos casos.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Nuestras incógnitas ya se han establecido. Convertimos las temperaturas Fahrenheit a Celsius mediante la ecuación (17.2), y las Celsius a Kelvin con la ecuación (17.3).

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (17.2), $T_1 = 0.00°C$ y $T_2 = 37.00°C$; entonces, $\Delta T = T_2 - T_1 = 37.00$ C°. Para obtener las temperaturas Kelvin, sumamos 273.15 a cada una de las temperaturas Celsius: $T_1 = 273.15$ K y $T_2 = 310.15$ K. La diferencia de temperaturas es $\Delta T = T_2 - T_1 = 37.00$ K.

EVALUAR: Las escalas Celsius y Kelvin tienen diferentes puntos cero, pero grados del mismo tamaño. Por lo tanto, *cualquier* diferencia de temperatura es la *misma* en las escalas Celsius y Kelvin, pero *no* en la escala Fahrenheit. Aquí, por ejemplo, $\Delta T = 66.60$ F°.

Escala Kelvin y temperatura absoluta

La escala Celsius tiene dos puntos fijos, los puntos de congelación y ebullición normales del agua. No obstante, podemos definir la escala Kelvin usando un termómetro de gas con una sola temperatura de referencia. Definimos el cociente de dos temperaturas cualesquiera T_1 y T_2 en la escala Kelvin, como el cociente de las presiones correspondientes del termómetro de gas p_1 y p_2:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \quad \text{(termómetro de gas a volumen constante, } T \text{ en kelvins)} \qquad (17.4)$$

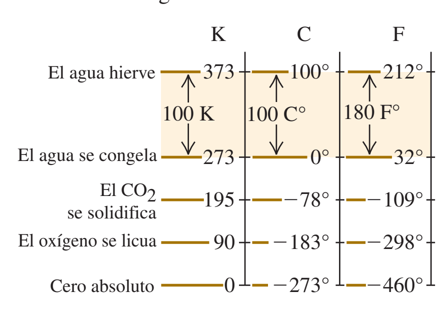
La presión p es directamente proporcional a la temperatura Kelvin, como se muestra en la figura 17.5*b*. Para completar la definición de T, solo necesitamos especificar la temperatura Kelvin de un solo estado específico. Por razones de precisión y de reproducibilidad, el estado elegido es el *punto triple* del agua. Esta es una combinación única de temperatura y presión en la que pueden coexistir agua sólida (hielo), agua líquida y vapor de agua. Esto ocurre a una temperatura de 0.01°C y una presión de vapor de agua de 610 Pa (cerca de 0.006 atm). (Esta es la presión del *agua*; nada tiene que ver directamente con la presión del gas del *termómetro*). La temperatura del punto triple del agua es, *por definición*, $T_{triple} = 273.16$ K, que corresponde a 0.01°C. De acuerdo con la ecuación (17.4), si p_{triple} es la presión en un termómetro de gas a la temperatura T_{triple} y p es la presión a otra temperatura T, entonces T está dada en la escala Kelvin por

$$T = T_{triple}\frac{p}{p_{triple}} = (273.16\text{ K})\frac{p}{p_{triple}} \qquad (17.5)$$

Se ha comprobado que termómetros de diversos gases a baja presión coinciden con gran precisión, pero debido a que son grandes y voluminosos, y tardan mucho en llegar al equilibrio térmico; se usan básicamente para establecer estándares de alta precisión y para calibrar otros termómetros.

Las relaciones entre las tres escalas de temperatura que hemos visto se muestran gráficamente en la figura 17.7. La escala Kelvin se denomina **escala de temperatura absoluta** y su punto cero [$T = 0$ K $= -273.15°C$, la temperatura en que $p = 0$ en la ecuación (17.5)] se llama **cero absoluto**. En el cero absoluto, un sistema de moléculas (como una cantidad de gas, un líquido o un sólido) tiene su energía total (cinética + potencial) *mínima* posible; sin embargo, debido a efectos cuánticos, *no* es correcto decir que en el cero absoluto todo movimiento molecular cesa. Para definir de forma más completa el cero absoluto, necesitamos los principios termodinámicos que veremos en los siguientes capítulos. Volveremos a este concepto en el capítulo 20.

17.7 Relaciones entre las escalas de temperatura Kelvin (K), Celsius (C) y Fahrenheit (F). Las temperaturas se redondearon al grado más cercano.



Evalúe su comprensión de la sección 17.3 Ordene de mayor a menor las siguientes temperaturas: **i.** 0.00°C; **ii.** 0.00°F; **iii.** 260.00 K; **iv.** 77.00 K; **v.** −180.00°C.

17.4 Expansión térmica

Casi todos los materiales se expanden al aumentar su temperatura. El aumento en la temperatura hace que el líquido se expanda en los termómetros de líquido en un tubo (figura 17.1*a*) y que las tiras bimetálicas se doblen (figura 17.3*b*). Las cubiertas de puentes necesitan articulaciones y soportes especiales que den margen a la expansión. Una botella totalmente llena de agua y tapada se revienta al calentarse; pero podemos aflojar la tapa metálica de un frasco vertiendo agua caliente sobre ella. Estos son ejemplos de *expansión térmica.*

Expansión lineal

Suponga que una varilla de material tiene longitud L_0 a una temperatura inicial T_0. Si la temperatura cambia en ΔT, la longitud cambia en ΔL. Se observa experimentalmente que si ΔT no es muy grande (digamos, menos de 100 C°), ΔL es *directamente proporcional* a ΔT (figura 17.8*a*). Si dos varillas del mismo material tienen el mismo cambio de temperatura, pero una es dos veces más larga que la otra, su *cambio* de longitud también será del doble. Por lo tanto, ΔL también debe ser proporcional a L_0 (figura 17.8*b*). Si introducimos una constante de proporcionalidad α (diferente para cada material), expresaremos estas relaciones en una ecuación:

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \qquad \text{(expansión térmica lineal)} \tag{17.6}$$

Si un cuerpo tiene longitud L_0 a la temperatura T_0, su longitud L a la temperatura $T = T_0 + \Delta T$ es

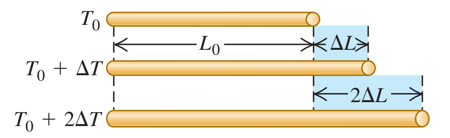
$$L = L_0 + \Delta L = L_0 + \alpha L_0 \Delta T = L_0(1 + \alpha \Delta T) \tag{17.7}$$

La constante α, que describe las propiedades de expansión térmica de un material dado, se denomina **coeficiente de expansión lineal**. Las unidades de α son K^{-1}, o bien, $(C°)^{-1}$. (Recuerde que un *intervalo* de temperatura es igual en las escalas Kelvin y Celsius). En muchos materiales, todas las dimensiones lineales cambian según la ecuación (17.6) o la (17.7). Así, L podría ser el espesor de una varilla, la longitud del lado de una lámina cuadrada o el diámetro de un agujero. Algunos materiales, como la madera o los cristales simples, se expanden de diferente forma en distintas direcciones. No consideraremos esta complicación.

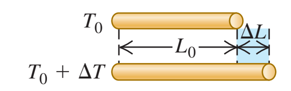
Podemos entender la expansión térmica cualitativamente desde una perspectiva molecular. Imaginemos las fuerzas interatómicas en un sólido como resortes, como en la figura 17.9*a*. (Ya exploramos la analogía entre las fuerzas de resortes e interatómicas en la sección 14.4). Cada átomo vibra alrededor de su posición de equilibrio. Al aumentar la temperatura, también se incrementan la energía y la amplitud de la vibración. Las fuerzas de resorte interatómicas no son simétricas alrededor de la posición de equilibrio; suelen comportarse como un resorte que es más fácil de estirar que de comprimir. En consecuencia, al aumentar la amplitud de las vibraciones, también se incrementa la distancia *media* entre los átomos (figura 17.9*b*). Al separarse los átomos, todas las dimensiones aumentan.

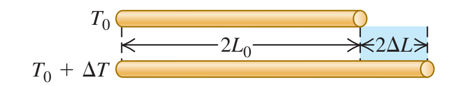
17.8 Cómo se modifica la longitud de una varilla con un cambio en su temperatura. (Por claridad, se exageraron los cambios de longitud).

a) Para cambios de temperatura moderados, ΔL es directamente proporcional ΔT.

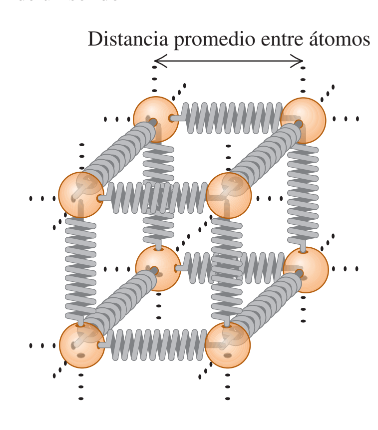


b) ΔL también es directamente proporcional a L_0.

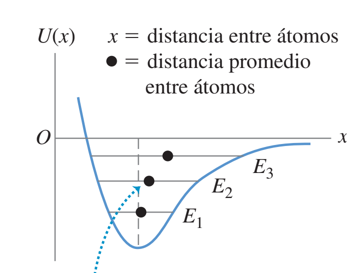




a) Modelo de las fuerzas entre átomos vecinos de un sólido

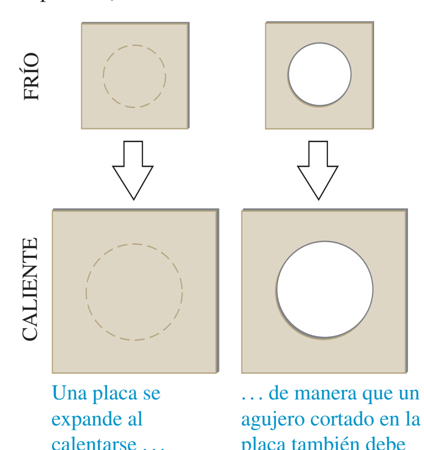


b) Gráfica de la energía potencial del "resorte" $U(x)$



17.9 *a)* Podemos modelar los átomos en un sólido como si estuvieran unidos por "resortes", que son más fáciles de estirar que de comprimir. *b)* La curva de la energía potencial de "resorte" $U(x)$ contra distancia x entre átomos vecinos *no* es simétrica (compare con la figura 14.20*b*). Al aumentar la energía, los átomos oscilan con mayor amplitud y se incrementa la distancia promedio.

17.10 Cuando un objeto sufre una expansión térmica, todos los agujeros que contiene también se expanden. (Se exageró la expansión).



17.11 Cuando este avión SR-71 está en tierra, los paneles de sus alas embonan de forma tan holgada que hay fugas de combustible de las alas al suelo. Sin embargo, una vez que el avión está en vuelo a más del triple de la rapidez del sonido, la fricción del aire calienta tanto los paneles que se expanden y embonan perfectamente. (El abastecimiento de combustible durante el vuelo compensa la pérdida de combustible en tierra).



CUIDADO **Calentamiento de un objeto que tiene un agujero** Si un objeto sólido tiene un agujero, ¿qué sucede con el tamaño del agujero al aumentar la temperatura del objeto? Un error común consiste en suponer que si el objeto se expande, el agujero se encoge porque el material se expande hacia el agujero; no obstante, la verdad es que el agujero también se expande (figura 17.10). Como dijimos antes, *todas* las dimensiones lineales de un objeto cambian del mismo modo al cambiar la temperatura. Si no está convencido, imagine que los átomos de la figura 17.9*a* delimitan un agujero cúbico. Al expandirse el objeto, los átomos se separan y el tamaño del agujero aumenta. La única situación en que un "agujero" se llena debido a la expansión térmica es cuando dos objetos separados se expanden cerrando el espacio entre ellos (figura 17.11).

La proporcionalidad directa expresada por la ecuación (17.6) no es exacta; solo es *aproximadamente* correcta para cambios de temperatura pequeños. Para un material dado, α varía ligeramente con la temperatura inicial T_0 y el tamaño del intervalo de temperatura. Aquí ignoraremos tal complicación. En la tabla 17.1, se dan valores promedio de α para varios materiales. Dentro de la precisión de estos valores, no necesitamos preocuparnos si T_0 es 0 o 20°C o alguna otra temperatura. Observe que los valores típicos de α son muy pequeños; aun para un cambio de temperatura de 100 C°, el cambio de longitud fraccionario $\Delta L/L_0$ es del orden de $\frac{1}{1000}$ para los metales de la tabla.

Expansión de volumen

Un aumento de temperatura suele aumentar el *volumen* de materiales tanto líquidos como sólidos. Al igual que en la expansión lineal, se ha visto experimentalmente que, si el cambio de temperatura ΔT no es muy grande (menos de 100 C°), el aumento de volumen ΔV es aproximadamente proporcional al cambio de temperatura ΔT y al volumen inicial V_0:

$$\Delta V = \beta V_0 \, \Delta T \qquad \text{(expansión térmica de volumen)} \qquad (17.8)$$

La constante β caracteriza las propiedades de expansión de volumen de un material dado; se llama **coeficiente de expansión volumétrica**. Las unidades de β son K^{-1}, o bien, $(C°)^{-1}$. Al igual que en la expansión lineal, β varía un poco con la temperatura, y la ecuación (17.8) es una relación aproximada válida solo para cambios de temperatura pequeños. En muchas sustancias, β disminuye a bajas temperaturas. En la tabla 17.2 se dan algunos valores de β a temperatura ambiente. Observe que, en general, los valores para los líquidos son mucho mayores que para los sólidos.

En el caso de los materiales sólidos, hay una relación sencilla entre el coeficiente de expansión volumétrica β y el coeficiente de expansión lineal α. Para deducir esta relación, consideramos un cubo de material con longitud de lado L y volumen $V = L^3$. A la temperatura inicial, los valores son L_0 y V_0. Al aumentar la temperatura en dT, la longitud del lado aumenta en dL y el volumen aumenta en una cantidad dV dada por

$$dV = \frac{dV}{dL}\,dL = 3L^2\,dL$$

Tabla 17.1 Coeficientes de expansión lineal

Material	α [K^{-1} o $(C°)^{-1}$]
Aluminio	2.4×10^{-5}
Latón	2.0×10^{-5}
Cobre	1.7×10^{-5}
Vidrio	$0.4\text{–}0.9 \times 10^{-5}$
Invar (aleación níquel-hierro)	0.09×10^{-5}
Cuarzo (fundido)	0.04×10^{-5}
Acero	1.2×10^{-5}

Tabla 17.2 Coeficientes de expansión volumétrica

Sólidos	β [K^{-1} o $(C°)^{-1}$]	Líquidos	β [K^{-1} o $(C°)^{-1}$]
Aluminio	7.2×10^{-5}	Etanol	75×10^{-5}
Latón	6.0×10^{-5}	Disulfuro de carbono	115×10^{-5}
Cobre	5.1×10^{-5}	Glicerina	49×10^{-5}
Vidrio	$1.2\text{–}2.7 \times 10^{-5}$	Mercurio	18×10^{-5}
Invar	0.27×10^{-5}		
Cuarzo (fundido)	0.12×10^{-5}		
Acero	3.6×10^{-5}		

Ahora sustituimos L y V por los valores iniciales L_0 y V_0. De acuerdo con la ecuación (17.6), dL es

$$dL = \alpha L_0\, dT$$

Puesto que $V_0 = L_0^3$, esto implica que dV también puede expresarse como

$$dV = 3L_0^2 \alpha L_0\, dT = 3\alpha V_0\, dT$$

Esto es congruente con la forma infinitesimal de la ecuación (17.8), $dV = \beta V_0 dT$, solo si

$$\beta = 3\alpha \qquad (17.9)$$

Verifique esta relación para algunos de los materiales de las tablas 17.1 y 17.2.

Estrategia para resolver problemas 17.1 Expansión térmica



IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* Determine si el problema involucra cambios de longitud (expansión térmica lineal) o de volumen (expansión térmica volumétrica).

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Liste las cantidades conocidas y desconocidas e identifique las incógnitas.
2. Elija la ecuación (17.6) para la expansión lineal y la ecuación (17.8) para la expansión volumétrica.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Despeje las incógnitas. Si se da una temperatura inicial T_0 y hay que determinar la temperatura final que corresponde a un cambio de volumen o longitud dado, obtenga ΔT y calcule $T = T_0 + \Delta T$. Recuerde que el tamaño de un hoyo en un material varía con la temperatura de igual forma que cualquier otra dimensión lineal, y que el volumen de una cavidad (tal como el interior de un recipiente) varía de igual forma que su correspondiente forma sólida.
2. Mantener la consistencia de unidades es importante. Tanto L_0 como ΔL (o V_0 y ΔV) deben tener las mismas unidades, y si usa un valor de α o de β en K^{-1} o en $(C°)^{-1}$, entonces ΔT debe estar en kelvins o grados Celsius; de acuerdo con el ejemplo 17.1, las dos escalas son equivalentes *para diferencias de temperaturas*.

EVALUAR *su respuesta:* Compruebe que sus resultados sean lógicos.

Ejemplo 17.2 Cambio de longitud por cambio de temperatura

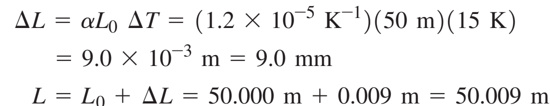


Un topógrafo usa una cinta métrica de acero que tiene exactamente 50.000 m de longitud a una temperatura de 20°C. Las marcas en la cinta están calibradas para esta temperatura. *a*) ¿Qué longitud tiene la cinta cuando la temperatura es de 35°C? *b*) Cuando esta es 35°C, el topógrafo utiliza la cinta para medir una distancia. El valor que se lee de la cinta es de 35.794 m. ¿Cuál es la distancia real?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se trata de un problema de expansión lineal. Se nos dan la longitud y la temperatura iniciales de la cinta, $L_0 = 50.000$ m y $T_0 = 20°C$. En el inciso *a*) utilizamos la ecuación (17.6) para calcular el cambio ΔL en la longitud de la cinta en $T = 35°C$, y usamos la ecuación (17.7) para encontrar L. (En la tabla 17.1 se presenta el valor de α para el acero). Puesto que la cinta se expande, a 35°C la distancia entre dos marcas sucesivas del metro es mayor que 1 m. Por lo tanto, la distancia real en el inciso *b*) es *mayor* que la distancia de lectura de la cinta por un factor igual a la proporción de la longitud L de la cinta a 35°C con su longitud L_0 a 20°C.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con las ecuaciones (17.6) y (17.7), el cambio de temperatura es $\Delta T = T - T_0 = 15$ C°,



$$\Delta L = \alpha L_0\, \Delta T = (1.2 \times 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1})(50\ \mathrm{m})(15\ \mathrm{K})$$
$$= 9.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} = 9.0\ \mathrm{mm}$$
$$L = L_0 + \Delta L = 50.000\ \mathrm{m} + 0.009\ \mathrm{m} = 50.009\ \mathrm{m}$$

b) Nuestro resultado del inciso *a*) indica que a 35°C en la cinta ligeramente expandida se lee una distancia de 50.000 m cuando la distancia real es 50.009 m. Podemos rescribir el álgebra del inciso *a*), como $L = L_0(1 + \alpha\, \Delta T)$; a 35°C, *cualquier* distancia real será mayor que la lectura por el factor $50.009/50.000 = 1 + a\,\Delta T = 1 + 1.8 \times 10^{-4}$. La distancia real es, por consiguiente,

$$(1 + 1.8 \times 10^{-4})(35.794\ \mathrm{m}) = 35.800\ \mathrm{m}$$

EVALUAR: Observe que en el inciso *a*) solo necesitamos dos de las cinco cifras significativas de L_0 para calcular ΔL con el mismo número de cifras decimales que L_0. Nuestro resultado demuestra que los metales se expanden muy poco con cambios de temperatura moderada. Sin embargo, aun la pequeña diferencia 0.009 m = 9 mm entre la lectura y la distancia real que se encuentra en el inciso *b*) puede ser importante en un trabajo de precisión.

Ejemplo 17.3 Cambio de volumen por cambio de temperatura



Un frasco de vidrio con volumen de 200 cm^3 se llena hasta el borde con mercurio a 20°C. ¿Cuánto mercurio se desbordará si la temperatura del sistema se eleva a 100°C? El coeficiente de expansión *lineal* del vidrio es de $0.40 \times 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$.

Continúa

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema implica la expansión volumétrica del vidrio y del mercurio. La cantidad derramada depende de la *diferencia* entre los cambios de volumen ΔV para estos dos materiales, ambos dados por la ecuación (17.8). El mercurio se derramará si el coeficiente de expansión volumétrica β (que se especifica en la tabla 17.2) es mayor que el del vidrio, que se encuentra a partir de la ecuación (17.9) utilizando el valor dado de α.

EJECUTAR: De acuerdo con la tabla 17.2, $\beta_{Hg} = 18 \times 10^{-5}\ K^{-1}$. Esto, de hecho, es mayor que β_{vidrio}: según la ecuación (17.9), $\beta_{vidrio} = 3\alpha_{vidrio} = 3(0.40 \times 10^{-5}\ K^{-1}) = 1.2 \times 10^{-5}\ K^{-1}$. El volumen de mercurio que se desborda es entonces

$$\begin{aligned}\Delta V_{Hg} - \Delta V_{vidrio} &= \beta_{Hg} V_0 \Delta T - \beta_{vidrio} V_0 \Delta T \\ &= V_0 \Delta T(\beta_{Hg} - \beta_{vidrio}) \\ &= (200\ cm^3)(80\ C°)(18 \times 10^{-5} - 1.2 \times 10^{-5}) \\ &= 2.7\ cm^3\end{aligned}$$

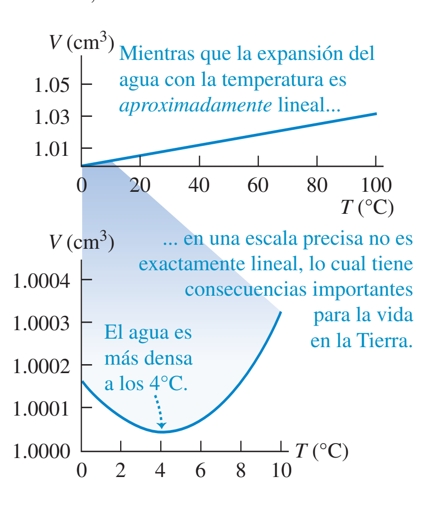
EVALUAR: Básicamente, así es como funciona un termómetro de mercurio en vidrio; la columna de mercurio dentro del tubo sellado se eleva conforme T aumenta, porque el mercurio se expande más rápidamente que el vidrio.

Como muestran las tablas 17.1 y 17.2, el vidrio tiene coeficientes de expansión α y β menores que la mayoría de los metales. Por ello, podemos usar agua caliente para aflojar la tapa metálica de un frasco de vidrio: el metal se expande más que el vidrio.

Expansión térmica del agua

El agua, en el intervalo de temperaturas de 0 a 4°C, se *contrae* al aumentar la temperatura. En este intervalo, su coeficiente de expansión volumétrica es *negativo*. Por arriba de 4°C, el agua se expande al calentarse (figura 17.12). Por lo tanto, el agua tiene su mayor densidad a 4°C. El agua también se expande al congelarse, lo cual explica por qué se forman jorobas en el centro de los compartimentos de una charola para hacer cubitos de hielo. En cambio, la mayoría de los materiales se contraen al congelarse.

17.12 Volumen de un gramo de agua en el intervalo de temperaturas de 0 a 100°C. A los 100°C, el volumen aumenta a 1.034 cm³. Si el coeficiente de expansión volumétrica fuera constante, la curva sería una línea recta.



Este comportamiento anómalo del agua tiene un efecto importante sobre la vida vegetal y animal en los lagos. Un lago se enfría de la superficie hacia abajo; por arriba de los 4°C, el agua fría de la superficie fluye hacia el fondo debido a su mayor densidad; sin embargo, cuando la temperatura superficial es menor que 4°C, el agua cerca de la superficie es menos densa que la de abajo, que es más caliente. Por lo tanto, el flujo hacia abajo cesa y el agua cerca de la superficie sigue siendo más fría que en el fondo. Al congelarse la superficie, el hielo flota porque es menos denso que el agua. El agua en el fondo sigue a 4°C hasta que casi todo el lago se congela. Si el agua se comportara como la mayoría de las sustancias, contrayéndose continuamente al enfriarse y congelarse, los lagos se congelarían de abajo hacia arriba. La circulación por diferencias de densidad haría subir continuamente el agua más caliente para un enfriamiento más eficiente, y los lagos se congelarían por completo con mucha mayor facilidad. Esto destruiría todas las plantas y animales que no resisten el congelamiento. Si el agua no tuviera esta propiedad especial, la evolución de la vida habría seguido un curso muy diferente.

Esfuerzo térmico

Si sujetamos rígidamente los extremos de una varilla para evitar su expansión o contracción y luego variamos la temperatura, aparecerán esfuerzos de tensión o compresión llamados **esfuerzos térmicos**. La varilla quiere expandirse o contraerse, pero las abrazaderas no la dejan. Los esfuerzos pueden ser tan grandes que deformen irreversiblemente la varilla o incluso la rompan. (Quizá sea conveniente repasar la explicación de esfuerzo y deformación en la sección 11.4).

Los ingenieros deben tomar en cuenta el esfuerzo térmico al diseñar estructuras. Las autopistas de concreto y las cubiertas de puentes suelen tener espacios entre secciones, llenos con material flexible o salvados por dientes que embonan (figura 17.13), con la finalidad de permitir la expansión y contracción del concreto. Las tuberías de vapor largas tienen juntas de expansión o secciones con forma de U para evitar que se pandeen o estiren al cambiar la temperatura. Si un extremo de un puente de acero está fijo rígidamente a su estribo, el otro por lo regular descansa en rodillos.

17.13 Los dientes de una articulación o juntas de expansión de un puente, son necesarios para permitir los cambios de longitud que son resultado de la expansión térmica.



Para calcular los esfuerzos térmicos en una varilla sujeta, calculamos qué tanto se *expandiría* (o contraería) si no estuviera sujeta, y luego calculamos el esfuerzo necesario para comprimirla (o estirarla) a su longitud original. Suponga que una varilla de longitud L_0 y área transversal A se mantiene con longitud constante, mientras se reduce la temperatura (ΔT negativo), causando un esfuerzo de tensión. El cambio fraccionario de longitud si la varilla estuviera libre para contraerse sería

$$\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_{\text{térmico}} = \alpha \Delta T \qquad (17.10)$$

Tanto ΔL como ΔT son negativos. La tensión debe aumentar en una cantidad F apenas suficiente para producir un cambio fraccionario de longitud igual y opuesto $(\Delta L/L_0)_{\text{tensión}}$. Según la definición del módulo de Young, ecuación (11.10),

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} \qquad \text{así que} \qquad \left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_{\text{tensión}} = \frac{F}{AY} \tag{17.11}$$

Si la longitud tiene que ser constante, el cambio fraccionario *total* de longitud debe ser cero. De acuerdo con las ecuaciones (17.10) y (17.11), esto implica que

$$\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_{\text{térmico}} + \left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_{\text{tensión}} = \alpha\,\Delta T + \frac{F}{AY} = 0$$

Al despejar el esfuerzo de tensión F/A necesario para mantener constante la longitud de la varilla, se obtiene

$$\frac{F}{A} = -Y\alpha\,\Delta T \qquad \text{(esfuerzo térmico)} \tag{17.12}$$

Si la temperatura disminuye, ΔT es negativo, así que F y F/A son positivos; esto implica que se requieren una fuerza y un esfuerzo de *tensión* para mantener la longitud. Si ΔT es positivo, F y F/A son negativos, y la fuerza y el esfuerzo requeridos son de *compresión*.

Si hay diferencias de temperatura dentro de un cuerpo, habrá expansión o contracción no uniformes, y pueden inducirse esfuerzos térmicos. Es factible romper un tazón de vidrio vertiendo en él agua muy caliente; el esfuerzo térmico entre las partes caliente y fría excede el esfuerzo de rotura del vidrio, agrietándolo. El mismo fenómeno hace que se rompa un cubo de hielo si se deja caer en agua tibia. Los vidrios resistentes al calor, como Pyrex™, tienen coeficientes de expansión excepcionalmente bajos y una resistencia elevada.



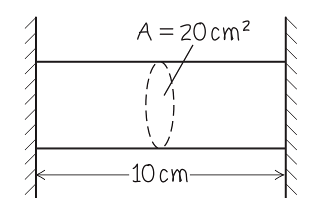
Ejemplo 17.4 Esfuerzo térmico

Un cilindro de aluminio de 10 cm de longitud, con área de sección transversal de 20 cm^2, se usará como espaciador entre dos paredes de acero. A 17.2°C, el cilindro apenas se desliza entre las paredes. Si se calienta a 22.3°C, ¿qué esfuerzo habrá en el cilindro y qué fuerza total ejercerá este sobre cada pared, suponiendo que las paredes son perfectamente rígidas y están separadas por una distancia constante?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 17.14 muestra un diagrama de la situación. Las incógnitas son el esfuerzo térmico F/A en el cilindro cuya área de sección transversal A está dada, y la fuerza asociada F que esta ejerce sobre las paredes. Usaremos la ecuación (17.12) para relacionar F/A con el cambio de temperatura ΔT y de ahí calculamos F. (La longitud del cilindro es irrelevante). Encontramos el módulo de Young Y_{Al} y el coeficiente de expansión lineal α_{Al} de las tablas 11.1 y 17.1, respectivamente.

17.14 Nuestro diagrama de este problema.



EJECUTAR: Tenemos, $Y_{\text{Al}} = 7.0 \times 10^{10}$ Pa, $\alpha_{\text{Al}} = 2.4 \times 10^{-5}\ \text{K}^{-1}$ y $\Delta T = 22.3°\text{C} - 17.2°\text{C} = 5.1\ \text{C}° = 5.1$ K. De acuerdo con la ecuación (17.12), el esfuerzo es

$$\begin{aligned}\frac{F}{A} &= -Y_{\text{Al}}\alpha_{\text{Al}}\Delta T\\ &= -(7.0 \times 10^{10}\ \text{Pa})(2.4 \times 10^{-5}\ \text{K}^{-1})(5.1\ \text{K})\\ &= -8.6 \times 10^{6}\ \text{Pa} = -1200\ \text{lb/in}^2\end{aligned}$$

La fuerza total F es el área de la sección transversal multiplicada por el esfuerzo:

$$\begin{aligned}F = A\left(\frac{F}{A}\right) &= (20 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(-8.6 \times 10^{6}\ \text{Pa})\\ &= -1.7 \times 10^{4}\ \text{N} = 1.9\ \text{tons}\end{aligned}$$

EVALUAR: El esfuerzo en el cilindro y la fuerza que ejerce sobre cada pared son inmensos. Esto destaca la importancia de contemplar tales esfuerzos térmicos en ingeniería.

Evalúe su comprensión de la sección 17.4 En la tira bimetálica de la figura 17.3*a*, el metal 1 es cobre. ¿Cuál de los siguientes materiales podría usarse como metal 2? (Quizás haya más de una respuesta correcta). **i.** Acero; **ii.** latón; **iii.** aluminio.

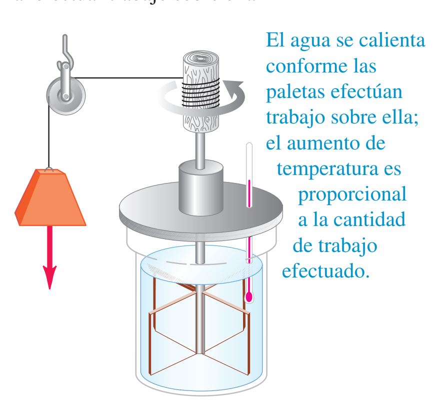
17.5 Cantidad de calor

Si introducimos una cuchara fría en una taza con café caliente, la cuchara se calienta y el café se enfría hasta que ambos alcanzan equilibrio térmico. La interacción que causa estos cambios de temperatura es básicamente una transferencia de *energía* de una sustancia a otra. La transferencia de energía que se da exclusivamente por una diferencia de temperatura se denomina *flujo de calor* o *transferencia de calor*, en tanto que la energía así transferida se llama **calor**.

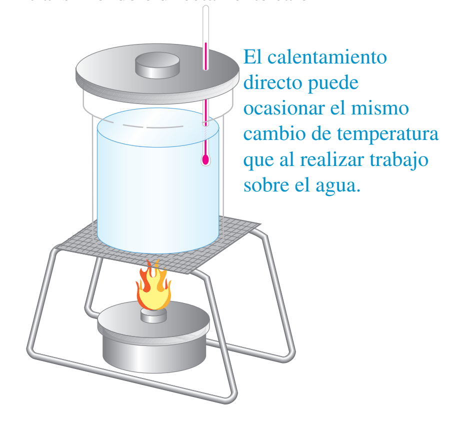
Durante los siglos XVIII y XIX, se fue entendiendo poco a poco la relación entre el calor y otras formas de energía. Sir James Joule (1818-1889) estudió cómo puede calentarse el agua al agitarla vigorosamente con una rueda de paletas (figura 17.15*a*), la cual agrega energía al agua realizando un *trabajo* sobre ella. Joule observó que *el aumento de temperatura es directamente proporcional a la cantidad de trabajo realizado*. Es posible lograr el mismo cambio de temperatura poniendo el agua en contacto con un cuerpo más caliente (figura 17.15*b*); por lo tanto, esta interacción también implica un intercambio de energía. Exploraremos la relación entre calor y energía mecánica con mayor detalle en los capítulos 19 y 20.

17.15 El mismo cambio de temperatura del mismo sistema puede lograrse *a*) realizando trabajo sobre él o *b*) agregándole calor.

a) Aumento de la temperatura del agua al efectuar trabajo sobre ella



b) Incremento de la temperatura del agua transfiriéndole directamente calor



CUIDADO **Temperatura contra calor** Es absolutamente indispensable tener bien clara la distinción entre *temperatura* y *calor*. La temperatura depende del estado físico de un material y es una descripción cuantitativa de su calidez o frialdad. En física, el término "calor" siempre se refiere a transferencia de energía de un cuerpo o sistema a otro, debida a una diferencia de temperatura, nunca a la cantidad de energía contenida en un sistema dado. Podemos modificar la temperatura de un cuerpo agregándole o quitándole calor, o bien, agregándole o quitándole energía de otras formas, como trabajo mecánico (figura 17.15*a*). Si cortamos un cuerpo a la mitad, cada mitad tiene la misma temperatura que el todo; no obstante, para elevar la temperatura de una mitad un intervalo dado, le agregamos la *mitad* del calor que agregaríamos al todo.

Podemos definir una *unidad* de cantidad de calor con base en el cambio de temperatura de un material específico. La **caloría** (abreviada cal) se define como *la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua de 14.5 a 15.5°C*. También se usa la kilocaloría (kcal), igual a 1000 cal; las calorías de valor alimentario son en realidad kilocalorías (figura 17.16). Una unidad correspondiente de calor que usa grados Fahrenheit y unidades inglesas es la **unidad térmica británica** o Btu. Una Btu es la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de una libra (peso) de agua 1 F°, de 63 a 64°F.

Puesto que el calor es una transferencia de energía, debe haber una relación definida entre estas unidades y las de energía mecánica que conocemos, como el joule. Experimentos similares en concepto al de Joule han demostrado que

$$
\begin{aligned}
1 \text{ cal} &= 4.186 \text{ J} \\
1 \text{ kcal} &= 1000 \text{ cal} = 4186 \text{ J} \\
1 \text{ Btu} &= 778 \text{ ft} \cdot \text{lb} = 252 \text{ cal} = 1055 \text{ J}
\end{aligned}
$$

La caloría no es una unidad fundamental del SI. El Comité Internacional de Pesos y Medidas recomienda usar el joule como unidad básica de energía en todas sus formas, incluido el calor. Seguiremos esa recomendación en el presente libro.

17.16 La palabra "energía" es de origen griego. Esta etiqueta de una lata de café griego indica que 100 mililitros de café preparado tienen un contenido energético (ενέργεια) de 9.6 kilojoules o 2.3 kilocalorías.



Calor específico

Usamos el símbolo Q para denotar calor. Cuando el calor está asociado a un cambio de temperatura infinitesimal dT, lo llamamos dQ. Se observa que la cantidad de calor Q necesaria para elevar la temperatura de una masa m de cierto material de T_1 a T_2 es aproximadamente proporcional al cambio de temperatura $\Delta T = T_2 - T_1$ y a la masa m del material. Si calentamos agua para hacer té, necesitamos el doble de calor para dos tazas que para una, si el intervalo de temperatura es el mismo. La cantidad de calor requerida también depende de la naturaleza del material; se requieren 4190 J de calor para elevar la temperatura de 1 kilogramo de agua 1 C°, pero solo 910 J para elevar en 1 C° la temperatura de 1 kilogramo de aluminio.

Juntando todas estas relaciones, tenemos

$$Q = mc\,\Delta T \text{ (calor requerido para el cambio de temperatura } \Delta T \text{ de la masa } m) \quad (17.13)$$

donde c es una cantidad, diferente para cada material, llamada **calor específico** del material. Para un cambio infinitesimal de temperatura dT y la cantidad de calor correspondiente dQ,

$$dQ = mc\,dT \quad (17.14)$$

$$c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT} \quad \text{(calor específico)} \quad (17.15)$$

En las ecuaciones (17.13), (17.14) y (17.15), Q (o dQ) y ΔT (o dT) pueden ser positivos o negativos. Si son positivos, entra calor en el cuerpo y aumenta su temperatura; si son negativos, sale calor del cuerpo y disminuye su temperatura.

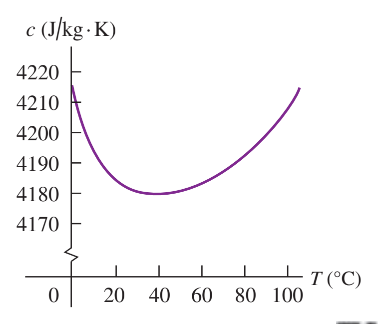
CUIDADO **La definición de calor** Recuerde que dQ no representa un cambio en la cantidad de calor *contenida* en un cuerpo; tal concepto carece de sentido. El calor siempre es *transferencia* de energía a causa de una diferencia de temperatura. No existe "la cantidad de calor de un cuerpo".

El calor específico del agua es aproximadamente

$$4190 \text{ J/kg}\cdot\text{K} \qquad 1 \text{ cal/g}\cdot\text{C}° \qquad \text{o} \qquad 1 \text{ Btu/lb}\cdot\text{F}°$$

El calor específico de un material siempre depende un poco de la temperatura inicial y del intervalo de temperatura. La figura 17.17 muestra esta dependencia para el caso del agua. En los problemas y ejemplos de este capítulo normalmente ignoraremos esta pequeña variación.

17.17 Calor específico del agua en función de la temperatura. El valor de c varía menos del 1% entre 0 y 100°C.





Ejemplo 17.5 ¿Cuánto calor se requiere para producir la fiebre asociada a un resfriado?

Con un cuadro de gripe, un hombre de 80 kg tuvo fiebre y registró una temperatura de 39.0°C (102.2°F), en vez de la temperatura normal de 37.0°C (98.6°F). Suponiendo que el cuerpo humano es agua en su mayoría, ¿cuánto calor se requirió para elevar su temperatura esa cantidad?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema usa la relación entre calor (la incógnita), masa, calor específico y cambio de temperatura. Usaremos la ecuación (17.13) para determinar el calor requerido Q, con $m = 80$ kg, $c = 4190$ J/kg·K (para agua) y $\Delta T = 39.0°\text{C} - 37.0°\text{C} = 2.0\ \text{C}° = 2.0$ K.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (17.13),

$$Q = mc\,\Delta T = (80 \text{ kg})(4190 \text{ J/kg}\cdot\text{K})(2.0 \text{ K}) = 6.7 \times 10^5 \text{ J}$$

EVALUAR: Esto corresponde a 160 kcal. De hecho, el calor específico del cuerpo humano es casi de 3480 J/kg·K, alrededor del 83% del valor corresponde al agua debido a la presencia de proteínas, grasa y minerales, que tienen menor calor específico. Por lo tanto, una respuesta más exacta es $Q = 5.6 \times 10^5$ J = 133 kcal. Cualquiera de los resultados demuestra que, si no fuera por los sistemas reguladores de la temperatura del cuerpo, ingerir energía en forma de alimentos produciría cambios medibles en la temperatura corporal. (En el caso de una persona con gripe, el aumento en la temperatura es resultado de la actividad que realiza el cuerpo al combatir la infección).



Ejemplo 17.6 Circuitos sobrecalentados

Se está diseñando un elemento de circuito electrónico hecho con 23 mg de silicio. La corriente que pasa por él agrega energía a razón de 7.4 mW = 7.4×10^{-3} J/s. Si el diseño no contempla la eliminación de calor del elemento, ¿con qué rapidez aumentará su temperatura? El calor específico del silicio es de 705 J/kg·K.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La energía agregada al elemento del circuito hace que se incremente la temperatura, al igual que si el calor fluyera en el elemento a una tasa $dQ/dt = 7.4 \times 10^{-3}$ J/s. La incógnita es la tasa de cambio de la temperatura dT/dt. Podemos utilizar la ecuación (17.14), que relaciona los cambios infinitesimales de temperatura dT con los correspondientes dQ de calor, con la finalidad de obtener una expresión para dQ/dt en términos de dT/dt.

EJECUTAR: Al dividir ambos lados de la ecuación (17.14) entre dt y reacomodando,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dQ/dt}{mc} = \frac{7.4 \times 10^{-3} \text{ J/s}}{(23 \times 10^{-6} \text{ kg})(705 \text{ J/kg}\cdot\text{K})} = 0.46 \text{ K/s}$$

EVALUAR: Con esta rapidez en el aumento de la temperatura (27 K cada minuto), el elemento de circuito pronto se autodestruiría. La transferencia de calor es una consideración importante en el diseño de elementos de circuitos electrónicos.

Capacidad calorífica molar

A veces resulta más útil describir una cantidad de sustancia en términos del número de *moles n*, en vez de la *masa m* del material. Recuerde (de sus clases de química) que un mol de cualquier sustancia pura siempre contiene el mismo número de moléculas. (Veremos esto con mayor detalle en el capítulo 18). La *masa molar* de cualquier sustancia, denotada con M, es la masa por mol. (A veces se llama a M *peso molecular*, aunque es preferible *masa molar*; la cantidad depende de la masa de una molécula, no de su peso). Por ejemplo, la masa molar del agua es de 18.0 g/mol = 18.0×10^{-3} kg/mol; un mol de agua tiene una masa de 18.0 g = 0.0180 kg. La masa total m de material es la masa por mol M multiplicada por el número de moles n:

$$m = nM \tag{17.16}$$

Sustituyendo la masa m de la ecuación (17.13) por el producto nM, tenemos

$$Q = nMc\,\Delta T \tag{17.17}$$

El producto Mc se denomina **capacidad calorífica molar** (o *calor específico molar*) y se denota con C (mayúscula). Con esta notación, rescribimos la ecuación (17.17) de la siguiente manera:

$$Q = nC\,\Delta T \quad \text{(calor requerido para cambiar la temperatura de } n \text{ moles)} \tag{17.18}$$

Comparando con la ecuación (17.15), podemos expresar la capacidad calorífica molar C (calor por mol por cambio de temperatura) en términos del calor específico c (calor por masa por cambio de temperatura) y la masa molar M (masa por mol):

$$C = \frac{1}{n}\frac{dQ}{dT} = Mc \quad \text{(capacidad calorífica molar)} \tag{17.19}$$

Por ejemplo, la capacidad calorífica molar del agua es

$$C = Mc = (0.0180\ \text{kg/mol})(4190\ \text{J/kg}\cdot\text{K}) = 75.4\ \text{J/mol}\cdot\text{K}$$

En la tabla 17.3 se dan valores de calor específico y capacidad calorífica molar para varias sustancias. Observe el valor extraordinariamente elevado del calor específico del agua (figura 17.18).

CUIDADO **El significado de "capacidad calorífica"** Es lamentable que se haya generalizado el uso del término *capacidad calorífica* porque da la impresión errónea de que un cuerpo *contiene* cierta cantidad de calor. Recuerde que el calor es transferencia de energía desde o hacia un cuerpo, no la energía que reside en el cuerpo.


Video Tutor Demo


Video Tutor Demo

17.18 El agua tiene un calor específico mucho más alto que el vidrio o los metales que se usan para hacer utensilios de cocina. Esto explica en parte por qué se requieren varios minutos para hervir agua en una estufa, aunque el recipiente alcance una temperatura alta con gran rapidez.



Tabla 17.3 Valores aproximados de calor específico y capacidad calorífica molar (a presión constante)

Sustancia	Calor específico, c (J/kg·K)	Masa molar, M (kg/mol)	Capacidad calorífica molar, C (J/mol·K)
Aluminio	910	0.0270	24.6
Berilio	1970	0.00901	17.7
Cobre	390	0.0635	24.8
Etanol	2428	0.0461	111.9
Etilenglicol	2386	0.0620	148.0
Hielo (cerca de 0°C)	2100	0.0180	37.8
Hierro	470	0.0559	26.3
Plomo	130	0.207	26.9
Mármol ($CaCO_3$)	879	0.100	87.9
Mercurio	138	0.201	27.7
Sal (NaCl)	879	0.0585	51.4
Plata	234	0.108	25.3
Agua (líquida)	4190	0.0180	75.4

La medición precisa de calores específicos y capacidades caloríficas molares requiere gran habilidad experimental. Lo usual es aportar una cantidad medida de energía mediante la corriente eléctrica en un alambre calefactor enrollado en una muestra. El cambio de temperatura ΔT se mide con un termómetro de resistencia o termopar incrustado en la muestra. Parece sencillo, pero se requiere gran cuidado para evitar o compensar una transferencia de calor no deseada entre la muestra y sus alrededores. Las mediciones en sólidos suelen hacerse a presión atmosférica constante; los valores correspondientes se llaman *calor específico* y *capacidad calorífica molar a presión constante*, denotados con c_p y C_p, respectivamente. En el caso de un gas, suele ser más fácil mantener la sustancia en un recipiente con *volumen* constante; los valores correspondientes son *calor específico* y *capacidad calorífica molar a volumen constante*, denotados con c_V y C_V, respectivamente. Para una sustancia dada, C_V y C_p son diferentes. Si el sistema puede expandirse al agregar calor, hay un intercambio adicional de energía para que el sistema realice *trabajo* sobre sus alrededores. Si el volumen es constante, el sistema no efectúa trabajo. En los gases, la diferencia entre C_p y C_V es sustancial. Estudiaremos las capacidades caloríficas de los gases a fondo en la sección 19.7.

La última columna de la tabla 17.3 muestra algo interesante. Las capacidades caloríficas molares de la mayoría de los sólidos elementales son casi iguales, alrededor de 25 J/mol·K. Esta correlación, llamada *regla de Dulong y Petit* (en honor de sus descubridores), es la base de una idea muy importante. El número de átomos en un mol es el mismo para todas las sustancias elementales. Esto significa que, *por átomo*, se requiere más o menos la misma cantidad de calor para elevar la temperatura de cada uno de estos elementos una cantidad dada, aunque las *masas* de los átomos sean muy diferentes. El calor requerido para un aumento de temperatura dado solo depende de *cuántos* átomos haya en la muestra, no de la masa del átomo individual. Veremos por qué la regla de Dulong y Petit funciona tan bien cuando estudiemos las bases moleculares de la capacidad calorífica con detalle en el capítulo 18.

Evalúe su comprensión de la sección 17.5 Suponga que quiere elevar la temperatura, de 20 a 21°C, en cada una de las siguientes muestras. Ordénelas de mayor a menor, según la cantidad de calor que se requiere para lograrlo. **i.** Un kilogramo de mercurio; **ii.** un kilogramo de etanol; **iii.** un mol de mercurio; **iv.** un mol de etanol.



17.6 Calorimetría y cambios de fase

Calorimetría significa "medición de calor". Hemos hablado de la transferencia de energía (calor) durante los cambios de temperatura. El calor también interviene en los *cambios de fase*, como la fusión del hielo o la ebullición del agua. Una vez que entendamos estas relaciones de calor, podremos analizar diversos problemas de cantidad de calor.

Cambios de fase

Usamos el término **fase** para describir un estado específico de la materia, como sólido, líquido o gas. El compuesto H_2O existe en la *fase sólida* como hielo, en la *fase líquida* como agua y en la *fase gaseosa* como vapor de agua. (También llamamos a estas fases **estados de la materia**: el estado sólido, el estado líquido y el estado gaseoso). Una transición de una fase a otra es un **cambio de fase**. Para una presión dada, los cambios de fase se dan a una temperatura definida, generalmente acompañados por absorción o emisión de calor, y un cambio de volumen y densidad.

Un ejemplo conocido de cambio de fase es la fusión del hielo. Si agregamos calor al hielo a 0°C y a presión atmosférica normal, la temperatura del hielo *no* aumenta. En vez de ello, parte de él se funde para formar agua líquida. Si agregamos calor lentamente, manteniendo el sistema muy cerca del equilibrio térmico, la temperatura seguirá en 0°C hasta que todo el hielo se haya fundido (figura 17.19). El efecto de agregar calor a este sistema no es elevar su temperatura sino cambiar su *fase* de sólida a líquida.

17.19 El aire circundante se encuentra a temperatura ambiente, pero esta mezcla de hielo y agua se mantiene a 0°C hasta que todo el hielo se funde y el cambio de fase es total.



Para convertir 1 kg de hielo a 0°C en 1 kg de agua líquida a 0°C y a presión atmosférica normal, necesitamos 3.34×10^5 J de calor. El calor requerido por unidad de



PhET: States of Matter

masa se llama **calor de fusión** (o *calor latente de fusión*), denotado con L_f. Para el agua a presión atmosférica normal, el calor de fusión es

$$L_f = 3.34 \times 10^5 \text{ J/kg} = 79.6 \text{ cal/g} = 143 \text{ Btu/lb}$$

En términos más generales, para fundir una masa m de material con calor de fusión L_f se requiere una cantidad de calor Q dada por

$$Q = mL_f$$

Este proceso es *reversible.* Para congelar agua líquida a 0°C tenemos que *quitar* calor; la magnitud es la misma, pero ahora Q es negativa porque se extrae calor en vez de agregarse. Para cubrir ambas posibilidades e incluir otros tipos de cambios de fase, escribimos

$$Q = \pm mL \qquad \text{(transferencia de calor en un cambio de fase)} \qquad (17.20)$$

Usamos el signo más (entra calor) cuando el material se funde, y el signo menos (sale calor) cuando se congela. El calor de fusión es diferente para distintos materiales, y también varía un poco con la presión.

Para un material dado, a una presión determinada, la temperatura de congelación es la misma que la de fusión. En esta temperatura única, las fases líquida y sólida (agua líquida y hielo, por ejemplo) pueden coexistir en una condición llamada **equilibrio de fases**.

Algo similar sucede con la *ebullición* o *evaporación*, una transición de fase entre líquido y gas. El calor correspondiente (por unidad de masa) se llama **calor de vaporización** L_v. A presión atmosférica normal, el calor de vaporización L_v del agua es

$$L_v = 2.256 \times 10^6 \text{ J/kg} = 539 \text{ cal/g} = 970 \text{ Btu/lb}$$

Es decir, necesitamos 2.256×10^6 J para convertir 1 kg de agua líquida a 100°C en 1 kg de vapor de agua a 100°C. En contraste, para elevar la temperatura de 1 kg de agua de 0 a 100°C se requieren $Q = mc\,\Delta T = (1.00 \text{ kg})(4190 \text{ J/kg}\cdot\text{C°}) \times (100 \text{ C°}) = 4.19 \times 10^5$ J, menos de la quinta parte del calor necesario para la vaporización a 100°C. Esto concuerda con nuestra experiencia en la cocina: el agua en una olla puede alcanzar la temperatura de ebullición en unos minutos, pero tarda mucho más en evaporarse por completo.

Al igual que la fusión, la ebullición es una transición reversible. Si quitamos calor a un gas a la temperatura de ebullición, el gas vuelve a la fase líquida (se *condensa*), cediendo a sus alrededores la misma cantidad de calor (calor de vaporización) que se necesitó para vaporizarlo. A una presión determinada, las temperaturas de ebullición y condensación siempre son las mismas; a esta temperatura, las fases líquida y gaseosa pueden coexistir en equilibrio de fases.

Tanto L_v como la temperatura de ebullición de un material dependen de la presión. El agua hierve a menor temperatura (cerca de 95°C) en Denver que en Pittsburgh, porque Denver está a mayor altura y la presión atmosférica promedio es menor. El calor de vaporización es un poco más alto a esta presión reducida: aproximadamente 2.27×10^6 J/kg.

La tabla 17.4 presenta calores de fusión y vaporización para varios materiales, así como sus temperaturas de fusión y ebullición, a presión atmosférica normal. Muy pocos *elementos* tienen temperaturas de fusión cercanas a la temperatura ambiente; uno de ellos es el metal galio (figura 17.20).



17.20 El metal galio, que vemos aquí fundiéndose en la mano de una persona, es uno de los pocos elementos que se funden cerca de la temperatura ambiente. Su temperatura de fusión es de 29.8°C y su calor de fusión es de 8.04×10^4 J/kg.

La figura 17.21 muestra cómo varía la temperatura cuando agregamos calor continuamente a una muestra de hielo con una temperatura inicial menor que 0°C (punto *a*). La temperatura aumenta hasta llegar al punto de fusión (punto *b*). Al agregar más calor, la temperatura se mantiene constante hasta que se derrite todo el hielo (punto *c*). Luego, la temperatura aumenta otra vez hasta llegar al punto de ebullición (punto *d*), donde se mantiene constante otra vez hasta que toda el agua ha pasado a la fase de vapor (punto *e*). Si la tasa de aporte de calor es constante, la pendiente de la línea para la fase sólida (hielo) está más inclinada que para la fase líquida (agua). ¿Sabe por qué? (Véase la tabla 17.3).

Tabla 17.4 Calores de fusión y de vaporización

Sustancia	Punto de fusión normal K	Punto de fusión normal °C	Calor de fusión, L_f (J/kg)	Punto de ebullición normal K	Punto de ebullición normal °C	Calor de vaporización, L_v (J/kg)
Helio	*	*	*	4.216	−268.93	20.9×10^3
Hidrógeno	13.84	−259.31	58.6×10^3	20.26	−252.89	452×10^3
Nitrógeno	63.18	−209.97	25.5×10^3	77.34	−195.8	201×10^3
Oxígeno	54.36	−218.79	13.8×10^3	90.18	−183.0	213×10^3
Etanol	159	−114	104.2×10^3	351	78	854×10^3
Mercurio	234	−39	11.8×10^3	630	357	272×10^3
Agua	273.15	0.00	334×10^3	373.15	100.00	2256×10^3
Azufre	392	119	38.1×10^3	717.75	444.60	326×10^3
Plomo	600.5	327.3	24.5×10^3	2023	1750	871×10^3
Antimonio	903.65	630.50	165×10^3	1713	1440	561×10^3
Plata	1233.95	960.80	88.3×10^3	2466	2193	2336×10^3
Oro	1336.15	1063.00	64.5×10^3	2933	2660	1578×10^3
Cobre	1356	1083	134×10^3	1460	1187	5069×10^3

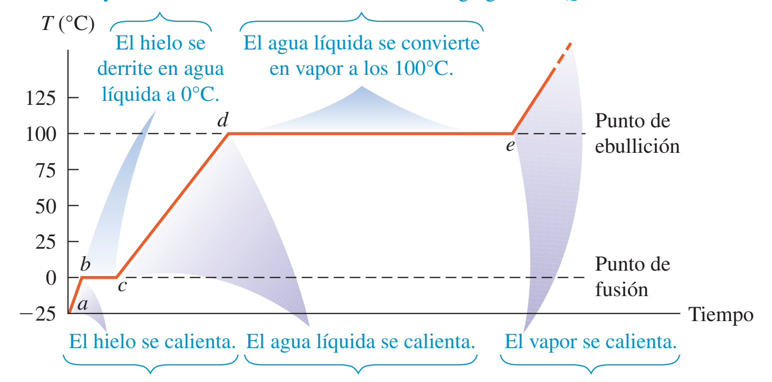
*Se requiere una presión mayor que 25 atmósferas para solidificar el helio. A presión de 1 atmósfera, el helio sigue siendo líquido hasta el cero absoluto.

A veces, una sustancia puede cambiar directamente de la fase sólida a la gaseosa. Este proceso se llama *sublimación* y se dice que el sólido se *sublima*. El calor correspondiente es el *calor de sublimación* L_s. El dióxido de carbono líquido no puede existir a una presión menor que 5×10^5 Pa (unas 5 atm), y el "hielo seco" (dióxido de carbono sólido) se sublima a presión atmosférica. La sublimación de agua de alimentos congelados causa las quemaduras de congelador. El proceso inverso, un cambio de fase de gas a sólido, se presenta cuando se forma escarcha en cuerpos fríos como las espiras de enfriamiento de un refrigerador.

El agua muy pura llega a enfriarse varios grados por debajo del punto de congelación sin congelarse; el estado inestable que resulta se describe como *sobreenfriado*. Si se introduce un pequeño cristal de hielo o se agita el agua, se cristalizará en un segundo o menos. El *vapor* de agua sobreenfriado se condensa rápidamente para formar neblina, si se introduce una alteración como partículas de polvo o radiación ionizante. Se usa este principio para "bombardear" las nubes que a menudo contienen vapor de agua sobreenfriado, y así causar condensación y lluvia.

A veces es posible *sobrecalentar* un líquido por encima de su temperatura de ebullición normal. Cualquier alteración pequeña, como agitación, causa ebullición local con formación de burbujas.

Los sistemas de calefacción por vapor de agua usan un proceso de ebullición-condensación para transferir calor del horno a los radiadores. Cada kilogramo de agua



17.21 Gráfica de temperatura contra tiempo para una muestra de agua que inicialmente está en la fase sólida (hielo). Se le agrega calor con tasa constante. La temperatura no se modifica durante los cambios de fase, siempre y cuando la presión se mantenga constante.

convertido en vapor en la caldera absorbe más de 2×10^6 J (el calor de vaporización L_v del agua) de la caldera y lo cede al condensarse en los radiadores. También se usan procesos de ebullición-condensación en los refrigeradores, acondicionadores de aire y bombas de calor. Veremos estos sistemas en el capítulo 20.



17.22 Aunque el agua esté tibia y el día sea caluroso, estos niños sentirán frío cuando salgan de la alberca. Ello se debe a que, al evaporarse el agua de su piel, extrae de su cuerpo el calor de vaporización que necesita. Para mantenerse calientes, tendrán que secarse de inmediato.

Los mecanismos de control de temperatura de muchos animales de sangre caliente aprovechan el calor de vaporización: eliminan calor del cuerpo usándolo para evaporar agua de la lengua (lo que produce jadeo), o de la piel (lo cual se manifiesta como sudor). El enfriamiento por evaporación permite al ser humano mantener su temperatura corporal normal en climas calurosos y desérticos, donde la temperatura del aire puede alcanzar los 55°C (aproximadamente 130°F). La temperatura de la piel puede ser hasta 30°C menor que la del aire circundante. En tales condiciones, una persona llega a sudar varios litros al día, y debe reponer esta agua. Los caminantes del desierto experimentados (como uno de los autores) aseguran que, en el desierto, ¡una cantimplora de menos de un galón es solo un juguete! El enfriamiento por evaporación también explica por qué sentimos frío al salir de una alberca (figura 17.22).

También se usa el enfriamiento por evaporación para enfriar edificios en climas calientes y secos, o para condensar y reciclar vapor de agua "usado" en plantas generadoras nucleares o que queman carbón. Eso es lo que sucede en las grandes torres de enfriamiento hechas de concreto que vemos en estas plantas.

Las reacciones químicas, como la combustión, son análogas a los cambios de fase en cuanto a que implican cantidades definidas de calor. La combustión total de 1 gramo de gasolina produce unos 46,000 J (casi 11,000 cal), así que el **calor de combustión** L_c de la gasolina es

$$L_c = 46{,}000 \text{ J/g} = 4.6 \times 10^7 \text{ J/kg}$$

Los valores energéticos de los alimentos se definen de forma similar. Al decir que un gramo de mantequilla de maní "contiene 6 calorías", queremos decir que se liberan 6 kcal de calor (6000 cal o 25,000 J) cuando los átomos de carbono e hidrógeno de la mantequilla reaccionan con oxígeno (con la ayuda de enzimas) y se convierten por completo en CO_2 y H_2O. No toda esta energía se puede convertir directamente en trabajo mecánico. Estudiaremos la *eficiencia* de la utilización de la energía en el capítulo 20.

Cálculos de calor

Veamos algunos ejemplos de cálculos calorimétricos (cálculos con calor). El principio básico es sencillo: si fluye calor entre dos cuerpos aislados de sus alrededores, el calor perdido por un cuerpo debe ser igual al ganado por el otro. El calor es transferencia de energía, así que este principio es realmente la conservación de la energía. La calorimetría, que solo se ocupa de una cantidad que se conserva, es en varios sentidos ¡la más sencilla de todas las teorías físicas!

Estrategia para resolver problemas 17.2 Problemas de calorimetría

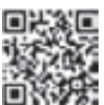


IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* Cuando fluye calor entre dos o más cuerpos que están aislados de sus alrededores, la *suma algebraica* de las cantidades de calor transferido a todos los cuerpos es cero. Consideramos que una cantidad de calor *agregada* a un cuerpo es *positiva* y una cantidad que *sale* de un cuerpo es *negativa*.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:
1. Identifique los objetos que intercambian calor.
2. Cada objeto experimentará un cambio de temperatura sin cambio de fase, un cambio de fase a temperatura constante, o ambos. Use la ecuación (17.13) para la transferencia de calor con un cambio de temperatura, y la ecuación (17.20) para la transferencia de calor en un cambio de fase.
3. Consulte en la tabla 17.3 valores de calor específico o de capacidad calorífica molar, y en la 17.4, calores de fusión o de vaporización.
4. Liste las cantidades conocidas e identifique las incógnitas.

EJECUTAR *la solución* como sigue:
1. Utilice la ecuación (17.13) y/o la (17.20) y la relación de conservación de la energía $\sum Q = 0$ para despejar las incógnitas. Asegúrese de utilizar los signos algebraicos correctos para los términos Q y ΔT, y de escribir correctamente $\Delta T = T_{\text{final}} - T_{\text{inicial}}$, y no al revés.
2. Si se produce un cambio de fase, tal vez no sepa de antemano si todo el material, o solo una parte de este, experimenta un cambio de fase. Haga una suposición razonable; si esto lo conduce a un resultado poco razonable (tal como una temperatura final superior o inferior a cualquier temperatura inicial), la suposición era errónea. ¡Intente de nuevo!

EVALUAR *la respuesta:* Vuelva a revisar sus cálculos y asegúrese de que los resultados finales sean físicamente lógicos.



Ejemplo 17.7 Cambio de temperatura sin cambio de fase

Un campista vierte 0.300 kg de café, inicialmente en una olla a 70.0°C, en una taza de aluminio de 0.120 kg que inicialmente está a 20.0°C. ¿Cuál es la temperatura de equilibrio? Suponga que el café tiene el mismo calor específico que el del agua y que no intercambia calor con el entorno.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La incógnita es la temperatura final común T de la taza y el café. No hay cambios de fase, así que solo necesitamos la ecuación (17.13). Usaremos los subíndices C para café, W para agua, y Al para aluminio. Así, tenemos $T_{0C} = 70.0°C$ y $T_{0Al} = 20.0°C$; en la tabla 17.3, se encuentra $c_W = 4190\ J/kg \cdot K$ y $c_{Al} = 910\ J/kg \cdot K$.

EJECUTAR: El calor (negativo) cedido por el café es $Q_C = m_C c_W \Delta T_C$. El calor (positivo) ganado por la taza es $Q_{Al} = m_{Al} c_{Al} \Delta T_{Al}$. Establecemos que $Q_C + Q_{Al} = 0$ (véase la estrategia de resolución de problemas 17.2), y sustituyendo $\Delta T_C = T - T_{0C}$ y $\Delta T_{Al} = T - T_{0Al}$:

$$Q_C + Q_{Al} = m_C c_W \Delta T_C + m_{Al} c_{Al} \Delta T_{Al} = 0$$
$$m_C c_W (T - T_{0C}) + m_{Al} c_{Al} (T - T_{0Al}) = 0$$

Luego, despejamos la temperatura final T en esta expresión. Después de un poco de álgebra se obtiene

$$T = \frac{m_C c_W T_{0C} + m_{Al} c_{Al} T_{0Al}}{m_C c_W + m_{Al} c_{Al}} = 66.0°C$$

EVALUAR: La temperatura final es mucho más cercana a la temperatura inicial del café que a la de la taza; el agua tiene un calor específico mucho mayor que el aluminio, y tenemos más del doble de masa de agua. También podemos calcular las cantidades de calor sustituyendo el valor $T = 66.0°C$ en las ecuaciones originales. Encontramos que $Q_C = -5.0 \times 10^3$ J y $Q_{Al} = +5.0 \times 10^3$ J. Como se esperaba, Q_C es negativo, lo que implica que el café pierde calor.



Ejemplo 17.8 Cambios tanto de temperatura como de fase

Un vaso contiene 0.25 kg de Omni-Cola (constituida sobre todo por agua) inicialmente a 25°C. ¿Cuánto hielo, inicialmente a −20°C, se debe agregar para obtener una temperatura final de 0°C con todo el hielo derretido? Desprecie la capacidad calorífica del vidrio.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El hielo y la Omni-Cola intercambian calor. La Omni-Cola sufre solo un cambio de temperatura; en tanto que el hielo sufre tanto un cambio de temperatura como un cambio de fase, de sólido a líquido. Usaremos los subíndices C para Omni-Cola, I para hielo y W para agua. La incógnita es la masa de hielo, m_I. Utilizamos la ecuación (17.13) con la finalidad de calcular la cantidad de calor necesaria para enfriar la Omni-Cola a 0°C y calentar el hielo a 0°C, y la ecuación (17.20) para calcular el calor requerido para fundir el hielo a 0°C. Tenemos $T_{0C} = 25°C$ y $T_{0I} = -20°C$; en la tabla 17.3 se obtiene $c_W = 4190\ J/kg \cdot K$ y $c_I = 2100\ J/kg \cdot K$, y de acuerdo con la tabla 17.4, $L_f = 3.34 \times 10^5$ J/kg.

EJECUTAR: De la ecuación (17.13) el calor (negativo) cedido por la Omni-Cola es $Q_C = m_C c_W \Delta T_C$. El calor (positivo) ganado por el hielo al calentarse es $Q_I = m_I c_I \Delta T_I$. El calor adicional (positivo) necesario para fundir esta masa de hielo es $Q_2 = m_I L_f$. Al establecer que $Q_C + Q_I + Q_2 = 0$ y sustituyendo $\Delta T_C = T - T_{0C}$ y $\Delta T_I = T - T_{0I}$, despejamos m_I:

$$m_C c_W \Delta T_C + m_I c_I \Delta T_I + m_I L_f = 0$$
$$m_C c_W (T - T_{0C}) + m_I c_I (T - T_{0I}) + m_I L_f = 0$$
$$m_I [c_I (T - T_{0I}) + L_f] = -m_C c_W (T - T_{0C})$$
$$m_I = m_C \frac{c_W (T_{0C} - T)}{c_I (T - T_{0I}) + L_f}$$

Sustituyendo los valores numéricos, encontramos que $m_I = 0.070$ kg = 70 g.

EVALUAR: Esta masa de hielo de 70 g corresponde a tres o cuatro cubitos de hielo de tamaño mediano, lo cual parece razonable para la cantidad de Omni-Cola (250 g) a enfriar.

Ejemplo 17.9 ¿Qué cocina?



Una olla gruesa de cobre con masa de 2.0 kg (incluida su tapa) está a una temperatura de 150°C. Usted vierte en ella 0.10 kg de agua a 25°C y rápidamente tapa la olla para que no se escape el vapor. Calcule la temperatura final de la olla y de su contenido, y determine la fase (líquido, gas o una mezcla de ambos) del agua. Suponga que no se pierde calor al entorno.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El agua y la olla intercambian calor. Hay tres posibles situaciones finales: **1.** nada del agua hierve y la temperatura final T es menor que 100°C; **2.** parte del agua hierve, y se produce una mezcla de agua y vapor a 100°C, o **3.** toda el agua hierve, y se producen 0.10 kg de vapor a una temperatura de 100°C o más. Utilizamos la ecuación (17.13) para el calor transferido en un cambio de temperatura y la ecuación (17.20) para el calor transferido en un cambio de fase.

EJECUTAR: Primero consideremos el caso 1, que es exactamente igual al ejemplo 17.8. La ecuación que indica que el flujo de calor en el agua es igual al flujo de calor fuera de la olla es

$$Q_W + Q_{Cu} = m_W c_W (T - T_{0W}) + m_{Cu} c_{Cu} (T - T_{0Cu}) = 0$$

Aquí se usan los subíndices W para agua y Cu para cobre, con $m_W = 0.10$ kg, $m_{Cu} = 2.0$ kg, $T_{0W} = 25°C$ y $T_{0Cu} = 150°C$. De la tabla 17.3, $c_W = 4190\ J/kg \cdot K$ y $c_{Cu} = 390\ J/kg \cdot K$. Despejando la temperatura final T y sustituyendo estos valores, obtenemos

$$T = \frac{m_W c_W T_{0W} + m_{Cu} c_{Cu} T_{0Cu}}{m_W c_W + m_{Cu} c_{Cu}} = 106°C$$

Pero esta rebasa el punto de ebullición del agua, ¡lo que contradice nuestra suposición de que nada de agua hierve! Por lo tanto, al menos un poco de agua hierve.

Continúa

Por lo que respecta al caso 2, en el cual la temperatura final es $T = 100°C$ y alguna fracción desconocida x del agua hierve, donde (si el caso es correcto) x es mayor que cero y menor que o igual a 1. La cantidad de calor (positiva) necesaria para evaporar esta agua es $xm_W L_v$. La condición de conservación de la energía $Q_W + Q_{Cu} = 0$ es entonces

$$m_W c_W (100°C - T_{0W}) + xm_W L_v + m_{Cu} c_{Cu} (100°C - T_{0Cu}) = 0$$

Se despeja la incógnita x:

$$x = \frac{-m_{Cu} c_{Cu} (100°C - T_{0Cu}) - m_W c_W (100°C - T_{0W})}{m_W L_v}$$

Con $L_v = 2.256 \times 10^6$ J de la tabla 17.4, se obtiene $x = 0.034$. Concluimos que la temperatura final del agua y del cobre es 100°C y que 0.034(0.10 kg) = 0.0034 kg = 3.4 g de agua se convierten en vapor a 100°C.

EVALUAR: Si x hubiera resultado mayor que 1, habría sucedido el caso 3; toda el agua se habría evaporado, y la temperatura final habría sido mayor que 100°C. ¿Puede demostrar que esto es lo que habría sucedido si originalmente hubiéramos vertido menos de 15 g de agua a 25°C en la olla?

Ejemplo 17.10 Combustión, cambio de temperatura y cambio de fase



En cierta estufa de gasolina portátil, 30% de la energía liberada al quemar el combustible calienta el agua de la olla en la estufa. Si calentamos 1.00 L (1.00 kg) de agua, de 20 a 100°C, y evaporamos 0.25 kg de ella, ¿cuánta gasolina habremos quemado en el proceso?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Toda el agua se somete a un cambio de temperatura y parte de ella se somete a un cambio de fase, de líquido a gas. Determinamos el calor requerido para provocar estos dos cambios, y después utilizamos la eficiencia de combustión de 30% para determinar la cantidad de gasolina que se debe quemar (la incógnita). Utilizamos las ecuaciones (17.13) y (17.20) y la idea de calor de combustión.

EJECUTAR: Para elevar la temperatura del agua de 20 a 100°C se requiere

$$Q_1 = mc\,\Delta T = (1.00 \text{ kg})(4190 \text{ J/kg}\cdot\text{K})(80 \text{ K}) = 3.35 \times 10^5 \text{ J}$$

Para hervir 0.25 kg de agua a 100°C necesitamos

$$Q_2 = mL_v = (0.25 \text{ kg})(2.256 \times 10^6 \text{ J/kg}) = 5.64 \times 10^5 \text{ J}$$

La energía total requerida es $Q_1 + Q_2 = 8.99 \times 10^5$ J. Entonces, el 30% = 0.30 del calor total de combustión es $(8.99 \times 10^5 \text{ J})/0.30 = 3.00 \times 10^6$ J. Como ya se mencionó, la combustión de 1 gramo de gasolina libera 46,000 J, así que la masa de gasolina requerida es $(3.00 \times 10^6 \text{ J})/(46{,}000 \text{ J/g}) = 65$ g, o un volumen de cerca de 0.09 L de gasolina.

EVALUAR: Este resultado sugiere la increíble cantidad de energía que puede liberarse quemando incluso una cantidad pequeña de gasolina. ¿Puede demostrar que se necesitarían otros 123 g de gasolina para evaporar el resto del agua?

Evalúe su comprensión de la sección 17.6 Suponga que tomamos un bloque de hielo a 0°C y le agregamos calor a ritmo constante. Después de un tiempo t todo el hielo se habrá convertido en vapor de agua a 100°C. ¿Qué tendrá en el tiempo $t/2$? **i.** solo hielo a 0°C; **ii.** una mezcla de hielo y agua a 0°C; **iii.** agua a una temperatura entre 0 y 100°C; **iv.** una mezcla de agua y vapor a 100°C.



MasteringPHYSICS
PhET: The Greenhouse Effect

17.7 Mecanismos de transferencia de calor

Hemos hablado de *conductores* y *aislantes* que son, respectivamente, los materiales que permiten o impiden la transferencia de calor entre cuerpos. Veamos ahora más a fondo las *tasas* de transferencia de energía. En la cocina, usamos una olla de metal o de vidrio para tener buena transferencia de calor de la estufa a lo que cocinamos, pero el refrigerador está aislado con un material que *evita* que fluya calor hacia la comida que está en el interior. ¿Cómo describimos la diferencia entre estos dos materiales?

Los tres mecanismos de transferencia de calor son conducción, convección y radiación. Hay *conducción* dentro de un cuerpo o entre dos cuerpos que están en contacto. La *convección* depende del movimiento de una masa de una región del espacio a otra. La *radiación* es transferencia de calor por radiación electromagnética, como la luz del Sol, sin que tenga que haber materia en el espacio entre los cuerpos.

Conducción

Si sujetamos el extremo de una varilla de cobre y colocamos el otro en una flama, el extremo que sostenemos se calienta cada vez más, aunque no esté en contacto directo con la flama. El calor llega al extremo más frío por **conducción** a través del material.

A nivel atómico, los átomos de las regiones más calientes tienen más energía cinética, en promedio, que sus vecinos más fríos. Así que empujan a sus vecinos, transfiriéndoles algo de su energía. Los vecinos empujan a *otros* vecinos, continuando así a través del material. Los átomos en sí no se mueven de una región del material a otra, pero su energía sí.

La mayoría de los metales usan otro mecanismo más eficaz para conducir calor. Dentro del metal, algunos electrones pueden abandonar sus átomos originales y vagar por la red cristalina. Estos electrones "libres" pueden llevar energía rápidamente de las regiones más calientes del metal a las más frías; por ello, los metales generalmente son buenos conductores del calor. Una varilla metálica a 20°C se siente más fría que un trozo de madera a 20°C porque el calor puede fluir más fácilmente de la mano al metal. La presencia de electrones "libres" también hace que, en general, los metales sean buenos conductores eléctricos.

Solo hay transferencia de calor entre regiones que están a diferente temperatura, y la dirección de flujo siempre es de la temperatura más alta a la más baja. La figura 17.23*a* muestra una varilla de material conductor con área de sección transversal A y longitud L. El extremo izquierdo de la varilla se mantiene a una temperatura T_H, y el derecho, a una temperatura menor T_C, así que fluye calor de izquierda a derecha. Los costados de la varilla están cubiertos con un aislante ideal, así que no hay transferencia de calor por los lados.

Si se transfiere una cantidad de calor dQ por la varilla en un tiempo dt, la rapidez de flujo de calor es dQ/dt. Llamamos a esta la **corriente de calor**, denotada por H. Es decir, $H = dQ/dt$. Se observa experimentalmente que la corriente de calor es proporcional al área de la sección transversal A de la varilla (figura 17.23*b*) y a la diferencia de temperatura ($T_H - T_C$), e inversamente proporcional a la longitud de la varilla L (figura 17.23*c*). Introduciendo una constante de proporcionalidad k llamada **conductividad térmica** del material, tenemos

$$H = \frac{dQ}{dt} = kA\frac{T_H - T_C}{L} \quad \text{(corriente de calor en conducción)} \tag{17.21}$$

La cantidad $(T_H - T_C)/L$ es la diferencia de temperatura *por unidad de longitud*, llamada **gradiente de temperatura**. El valor numérico de k depende del material de la varilla. Los materiales con k grande son buenos conductores del calor; aquellos con k pequeña son malos conductores o aislantes. La ecuación (17.21) también sirve para calcular la corriente de calor que pasa a través de una placa, o por *cualquier* cuerpo homogéneo con área de sección transversal A uniforme y perpendicular a la dirección de flujo; L es la longitud de la trayectoria de flujo del calor.

Las unidades de corriente de calor H son unidades de energía por tiempo, es decir, de potencia; la unidad del SI para la corriente de calor es el watt (1 W = 1 J/s). Podemos determinar las unidades de k despejándola de la ecuación (17.21). Verifique que las unidades sean W/m·K. En la tabla 17.5 se dan algunos valores de k.

La conductividad térmica del aire "muerto" (inmóvil) es muy baja. Un suéter de lana nos mantiene calientes porque atrapa aire entre las fibras. En realidad, muchos materiales aislantes como la espuma de poliestireno y la fibra de vidrio son, en su mayor parte, aire muerto.

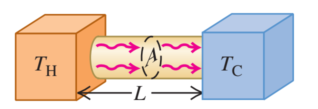
Si la temperatura varía de manera no uniforme a lo largo de la varilla conductora, introducimos una coordenada x a lo largo y generalizamos el gradiente de temperatura como dT/dx. La generalización correspondiente de la ecuación (17.21) es

$$H = \frac{dQ}{dt} = -kA\frac{dT}{dx} \tag{17.22}$$

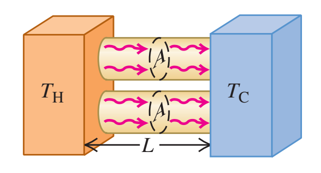
El signo negativo indica que el calor siempre fluye en la dirección de temperatura *decreciente*.

17.23 Flujo de calor en estado estable debido a la conducción en una varilla uniforme.

a) Corriente de calor H.



b) Al duplicar el área de la sección transversal del conductor, se duplica la corriente de calor (H es proporcional a A).



c) Al duplicar la longitud del conductor, se reduce a la mitad la corriente de calor (H es inversamente proporcional a L).

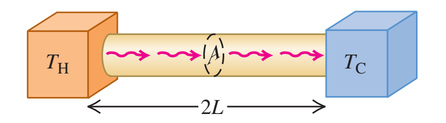


Tabla 17.5 Conductividades térmicas

Sustancia	k (W/m·K)
Metales	
Aluminio	205.0
Latón	109.0
Cobre	385.0
Plomo	34.7
Mercurio	8.3
Plata	406.0
Acero	50.2
Sólidos (valores representativos)	
Ladrillo aislante	0.15
Tabique (ladrillo rojo)	0.6
Concreto (hormigón)	0.8
Corcho	0.04
Fieltro	0.04
Fibra de vidrio	0.04
Vidrio	0.8
Hielo	1.6
Lana mineral	0.04
Espuma de poliestireno	0.027
Madera	0.12–0.04
Gases	
Aire	0.024
Argón	0.016
Helio	0.14
Hidrógeno	0.14
Oxígeno	0.023

Aplicación Piel contra grasa de ballena
La piel de un zorro del Ártico es un buen aislante térmico porque atrapa aire, el cual tiene una baja conductividad térmica, k. (El valor de $k = 0.04$ W/m·K para la piel es superior a la del aire, $k = 0.024$ W/m·K, porque la piel también incluye pelo sólido). La capa de grasa debajo de la piel de una ballena jorobada de Groenlandia, llamada sebo, tiene seis veces la conductividad térmica de la piel ($k = 0.24$ W/m·K). Así, se requiere un espesor de 6 cm de grasa de ballena ($L = 6$ cm) para proporcionar el mismo aislamiento que 1 cm de la piel del zorro.



Para el aislamiento térmico de edificios, los ingenieros usan el concepto de **resistencia térmica**, denotada con R. La resistencia térmica R de una placa de material con área A se define de modo que la corriente de calor H que atraviesa la placa es

$$H = \frac{A(T_H - T_C)}{R} \tag{17.23}$$

donde T_H y T_C son las temperaturas a los dos lados de la placa. Comparando esto con la ecuación (17.21), vemos que R está dada por

$$R = \frac{L}{k} \tag{17.24}$$

donde L es el espesor de la placa. La unidad del SI para R es 1 $\text{m}^2 \cdot \text{K/W}$. En las unidades empleadas para materiales aislantes comerciales en Estados Unidos, H se expresa en Btu/h, A en ft^2 y $T_H - T_C$ en F°. (1 Btu/h = 0.293 W). Las unidades de R son entonces $\text{ft}^2 \cdot \text{F}° \cdot \text{h/Btu}$, aunque los valores de R suelen citarse sin unidades; una capa de 6 in de espesor de fibra de vidrio tiene un valor R de 19 (es decir, $R = 19\ \text{ft}^2 \cdot \text{F}° \cdot \text{h/Btu}$), una placa de 2 in de espuma de poliestireno tiene un valor de 12, y así sucesivamente. Al duplicarse el espesor, también se duplica el valor R. En climas nórdicos severos, es práctica común para construcciones nuevas especificar valores R de cerca de 30 para paredes exteriores y techos. Si el material aislante está en capas, como en una pared enyesada con aislante de fibra de vidrio y vista exterior de madera, los valores R son aditivos. ¿Sabe por qué? (Véase el problema 17.108).

Estrategia para resolver problemas 17.3 Conducción de calor



IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* El concepto de conducción de calor entra en juego siempre que dos objetos a diferente temperatura están en contacto.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Identifique la dirección de flujo de calor en el problema (de caliente a frío). En la ecuación (17.21), L siempre se mide en esta dirección, y A es un área perpendicular a ella. Con frecuencia se aproxima una caja u otro recipiente con forma irregular pero espesor de paredes uniforme con una placa plana con el mismo espesor y área total de las paredes.
2. Liste las cantidades conocidas e identifique la incógnita.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Si fluye calor a través de un solo objeto, despeje la incógnita de la ecuación (17.21).
2. Si el calor fluye por dos materiales distintos en sucesión (en *serie*), la temperatura T en la interfase de los materiales es intermedia entre T_H y T_C, así que las diferencias de temperatura para los dos materiales son: $(T_H - T)$ y $(T - T_C)$. En estado estable, debe pasar el mismo calor a través de los dos materiales, por lo que la corriente de calor H debe ser la *misma* en ambos.
3. Si el flujo de calor sigue dos o más trayectorias *paralelas*, la corriente de calor total H es la suma de las cantidades H_1, H_2, … para las trayectorias individuales. Un ejemplo es el flujo de calor que sale de una habitación, tanto por el cristal de una ventana como por la pared que la rodea. En este caso, la diferencia de temperatura es la misma para ambas trayectorias, pero L, A y k podrían ser diferentes.
4. Utilice unidades consistentes. Si k se expresa en W/m·K, por ejemplo, use distancias en metros, calor en joules y T en kelvins.

EVALUAR *la respuesta:* Como siempre, pregúntese si los resultados son físicamente lógicos.

Ejemplo 17.11 Conducción a través de una hielera portátil



Una hielera de poliestireno (figura 17.24*a*) tiene un área de pared total (incluida la tapa) de 0.80 m^2 y un espesor de pared de 2.0 cm; está llena con hielo, agua y latas de Omni-Cola a 0°C. Calcule la tasa de flujo de calor hacia el interior de la caja, si la temperatura de la pared exterior es de 30°C. ¿Cuánto hielo se derrite en 3 horas?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Las incógnitas son las corrientes de calor H y la masa m de hielo que se derrite. Utilice la ecuación (17.21) para determinar H y la ecuación (17.20) para determinar m.

EJECUTAR: Suponemos que el flujo total de calor es aproximadamente el que habría a través de una placa plana de 0.80 m^2 de área y 2.0 cm = 0.020 m de espesor (figura 17.24*a*). Obtenemos k de la tabla 17.5. De acuerdo con la ecuación (17.21)

$$H = kA\frac{T_H - T_C}{L} = (0.027\ \text{W/m}\cdot\text{K})(0.80\ \text{m}^2)\frac{30°\text{C} - 0°\text{C}}{0.020\ \text{m}}$$
$$= 32.4\ \text{W} = 32.4\ \text{J/s}$$

El flujo total de calor es $Q = Ht$, donde $t = 3$ h = 10,800 s. De la tabla 17.4, el calor de fusión del hielo es $L_f = 3.34 \times 10^5$ J/kg, así que la cantidad de hielo fundida por ese calor es

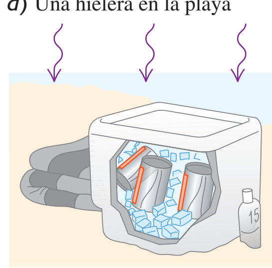
$$m = \frac{Q}{L_f} = \frac{(32.4\ \text{J/s})(10{,}800\ \text{s})}{3.34 \times 10^5\ \text{J/kg}} = 1.0\ \text{kg}$$

EVALUAR: La baja corriente de calor es resultado de la baja conductividad térmica de la espuma de poliestireno.

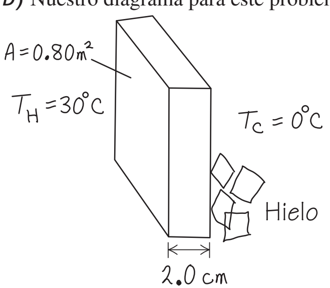
17.24 Conducción de calor a través de las paredes de una hielera de poliestireno.



a) Una hielera en la playa



b) Nuestro diagrama para este problema



Ejemplo 17.12 Conducción a través de dos barras I

Una barra de acero de 10.0 cm de longitud se suelda extremo con extremo a una barra de cobre de 20.0 cm de longitud. Las barras tienen la misma sección transversal cuadrada de 2.00 cm por lado. El extremo libre de la barra de acero se mantiene a 100°C poniéndolo en contacto con vapor de agua, y el de la barra de cobre se mantiene a 0°C poniéndolo en contacto con hielo. Ambas barras están perfectamente aisladas por sus costados. Calcule la temperatura de estado estable en la unión de las dos barras y la tasa de flujo de calor total.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 17.25 ilustra la situación. Las corrientes de calor en estas barras de extremo a extremo deben ser iguales (véase la Estrategia para resolver problemas 17.3). Se conocen las temperaturas "caliente" (*hot*, de ahí el subíndice H) y "fría" (*cold*) $T_H = 100°C$ y $T_C = 0°C$. Con subíndices S para el acero y Cu para el cobre, escribimos la ecuación (17.21) por separado para las corrientes de calor y H_S y H_{Cu} igualando las expresiones resultantes entre sí.

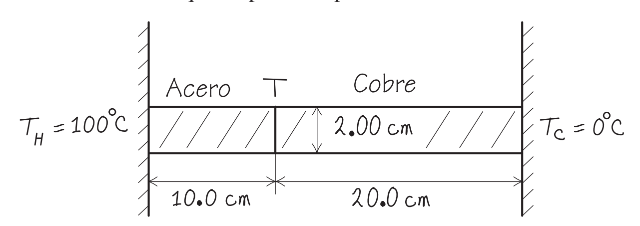
EJECUTAR: Al establecer que $H_S = H_{Cu}$, tenemos, de acuerdo con la ecuación (17.21),

$$H_S = k_S A \frac{T_H - T}{L_S} = H_{Cu} = k_{Cu} A \frac{T - T_C}{L_{Cu}}$$

Eliminamos las áreas de sección transversal A porque son iguales y despejamos T:

$$T = \frac{\dfrac{k_S}{L_S} T_H + \dfrac{k_{Cu}}{L_{Cu}} T_C}{\left(\dfrac{k_S}{L_S} + \dfrac{k_{Cu}}{L_{Cu}}\right)}$$

17.25 Nuestro esquema para este problema.



Al sustituir $L_S = 10.0$ cm, $L_{Cu} = 20.0$ cm, los valores dados de T_H y T_C y los valores de k_S y k_{Cu} de la tabla 17.5, obtenemos $T = 20.7°C$.

Podemos calcular la corriente de calor total sustituyendo este valor de T en cualquiera de las expresiones anteriores:

$$H_S = (50.2\ \text{W/m} \cdot \text{K})(0.0200\ \text{m})^2 \frac{100°\text{C} - 20.7°\text{C}}{0.100\ \text{m}}$$
$$= 15.9\ \text{W}$$

$$H_{Cu} = (385\ \text{W/m} \cdot \text{K})(0.0200\ \text{m})^2 \frac{20.7°\text{C}}{0.200\ \text{m}} = 15.9\ \text{W}$$

EVALUAR: Aunque la barra de acero es más corta, su caída de temperatura a través de la barra (de 100 a 20.7°C) es mucho mayor que a través de la barra de cobre (de 20.7 a 0°C). Esto se debe a que el acero es mal conductor en comparación con el cobre.

Ejemplo 17.13 Conducción a través de dos barras II

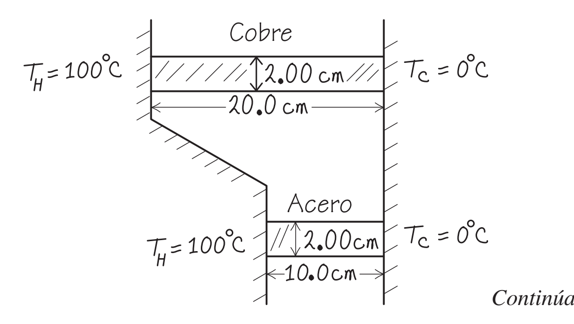


Suponga que las dos barras del ejemplo 17.12 se separan. Un extremo de cada una se mantiene a 100°C, y el otro, a 0°C. Determine la tasa *total* de flujo de calor en las dos barras.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 17.26 ilustra la situación. Para cada barra, $T_H - T_C = 100°C - 0°C = 100$ K. La corriente total de calor es la suma de las corrientes en las dos barras, $H_S + H_{Cu}$.

17.26 Nuestro esquema de este problema.



Continúa

EJECUTAR: Escribimos individualmente las corrientes de calor para cada barra y después las sumamos para obtener la corriente de calor total:

$$H = H_S + H_{Cu} = k_S A \frac{T_H - T_C}{L_S} + k_{Cu} A \frac{T_H - T_C}{L_{Cu}}$$

$$= (50.2 \text{ W/m} \cdot \text{K})(0.0200 \text{ m})^2 \frac{100 \text{ K}}{0.100 \text{ m}}$$

$$+ (385 \text{ W/m} \cdot \text{K})(0.0200 \text{ m})^2 \frac{100 \text{ K}}{0.200 \text{ m}}$$

$$= 20.1 \text{ W} + 77.0 \text{ W} = 97.1 \text{ W}$$

EVALUAR: El flujo de calor en la barra de cobre es mucho mayor que en la de acero, a pesar de ser más larga, porque la conductividad térmica del cobre es mucho mayor. El flujo total de calor es mayor que en el ejemplo 17.12, en parte porque la sección transversal total para el flujo es mayor y, además, porque hay un gradiente de temperatura completo de 100 K en cada barra.



Video Tutor Demo

Convección

La **convección** es transferencia de calor por movimiento de una masa de fluido de una región del espacio a otra. Como ejemplos conocidos tenemos los sistemas de calefacción domésticos de aire caliente y de agua caliente, el sistema de enfriamiento de un motor de combustión y el flujo de sangre en el cuerpo. Si el fluido circula impulsado por un ventilador o una bomba, el proceso se llama *convección forzada*; si el flujo se debe a diferencias de densidad causadas por expansión térmica, como el ascenso de aire caliente, el proceso se llama *convección natural* o *convección libre* (figura 17.27).

17.27 Un elemento de calefacción en la punta de este tubo sumergido calienta el agua circundante, produciendo un patrón complejo de convección libre.



La convección libre en la atmósfera desempeña un papel dominante en la determinación del clima, y la convección en los océanos es un mecanismo importante de transferencia global de calor. En una escala menor, los halcones que planean y los pilotos de planeadores aprovechan las corrientes térmicas que suben del suelo caliente. El mecanismo de transferencia de calor más importante dentro del cuerpo humano (necesario para mantener una temperatura casi constante en diversos entornos) es la convección *forzada* de sangre, bombeada por el corazón.

La transferencia de calor por convección es un proceso muy complejo, y no puede describirse con una ecuación sencilla. Veamos algunos hechos experimentales:

1. La corriente de calor causada por convección es directamente proporcional al área superficial. Esto explica las áreas superficiales grandes de los radiadores y las aletas de enfriamiento.
2. La viscosidad de los fluidos frena la convección natural cerca de una superficie estacionaria, formando una película superficial que, en una superficie vertical, suele tener el mismo valor aislante que tiene 1.3 cm de madera terciada (valor $R = 0.7$). La convección forzada reduce el espesor de esta película, aumentando la tasa de transferencia de calor. Esto explica el "factor de congelación": nos enfriamos más rápidamente en un viento frío que en aire tranquilo a la misma temperatura.
3. La corriente de calor causada por convección es aproximadamente proporcional a la potencia $\frac{5}{4}$ de la diferencia de temperatura entre la superficie y el cuerpo principal del fluido.

17.28 Esta fotografía infrarroja de colores falsos revela la radiación emitida por diversas partes del cuerpo de este hombre. La emisión más intensa (color rojo) proviene de las áreas más calientes, mientras que la bebida fría casi no produce emisión.



Radiación

La **radiación** es la transferencia de calor por ondas electromagnéticas como la luz visible, los rayos infrarrojos y la radiación ultravioleta. Todos hemos sentido el calor de la radiación solar y el intenso calor de un asador de carbón o las brasas de una chimenea. Casi todo el calor de estos cuerpos tan calientes no nos llega por conducción ni por convección en el aire intermedio, sino por *radiación*. Habría esta transferencia de calor aunque solo hubiera vacío entre nosotros y la fuente de calor.

Todo cuerpo, aun a temperaturas ordinarias, emite energía en forma de radiación electromagnética. A temperaturas ordinarias, digamos 20°C, casi toda la energía se transporta en ondas de infrarrojo con longitudes de onda mucho mayores que las de la luz visible (véase las figuras 17.4 y 17.28). Al aumentar la temperatura, las longitudes de onda se desplazan hacia valores mucho menores. A 800°C, un cuerpo emite suficiente radiación visible para convertirse en objeto luminoso "al rojo vivo", aunque incluso a esta temperatura la mayor parte de la energía se transporta en ondas de infrarrojo. A 3000°C,

la temperatura del filamento de bombilla incandescente, la radiación contiene suficiente luz visible para que el cuerpo se vea "al blanco vivo".

La tasa de radiación de energía de una superficie es proporcional a su área superficial A, y a T, la cuarta potencia de la temperatura absoluta (Kelvin). La tasa también depende de la naturaleza de la superficie; esta dependencia se describe con una cantidad e llamada **emisividad**: un número adimensional entre 0 y 1 que representa la relación entre la tasa de radiación de una superficie dada y la de un área igual de una superficie radiante ideal a la misma temperatura. La emisividad también depende un poco de la temperatura. Así, la corriente de calor $H = dQ/dt$ debida a radiación de un área superficial A con emisividad e a la temperatura absoluta T se puede expresar como

$$H = Ae\sigma T^4 \qquad \text{(corriente de calor por radiación)} \qquad (17.25)$$

donde σ es la constante física fundamental llamada **constante de Stefan-Boltzmann**. Esta relación se llama **ley de Stefan-Boltzmann** en honor de sus descubridores a finales del siglo XIX. El mejor valor numérico actual de σ es

$$\sigma = 5.670400(40) \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

Le invitamos a comprobar la consistencia de unidades de la ecuación (17.25). La emisividad (e) suele ser mayor para superficies oscuras que claras. La emisividad de una superficie de cobre lisa es del orden de 0.3, pero e para una superficie negra opaca puede ser cercana a la unidad.

Ejemplo 17.14 Transferencia de calor por radiación



Una placa de acero delgada cuadrada, de 10 cm por lado, se calienta en una forja de herrero a una temperatura de 800°C. Si su emisividad es de 0.60, calcule la tasa total de emisión de energía por radiación.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La incógnita es H, la tasa de emisión de energía de las dos superficies de la placa. Utilizamos la ecuación (17.25) para calcular H.

EJECUTAR: El área superficial total es $2(0.10\ \text{m})^2 = 0.020\ \text{m}^2$ y $T = 800°\text{C} = 1073\ \text{K}$. La ecuación (17.25) da, entonces,

$$\begin{aligned} H &= Ae\sigma T^4 \\ &= (0.020\ \text{m}^2)(0.60)(5.67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4)(1073\ \text{K})^4 \\ &= 900\ \text{W} \end{aligned}$$

EVALUAR: Un herrero que se encuentra cerca de la placa fácilmente sentirá el calor que esta radia.

Radiación y absorción

Si bien un cuerpo a temperatura T está radiando, su entorno a temperatura T_s también lo hace, y el cuerpo *absorbe* parte de esta radiación. Si el cuerpo está en equilibrio térmico con su entorno, $T = T_s$ y las tasas de radiación y absorción deben ser iguales. Para ello, la tasa de absorción debe estar dada en general por $H = Ae\sigma T_s^4$. La tasa *neta* de radiación de un cuerpo a temperatura T con un entorno a temperatura T_s es entonces

$$H_{\text{neta}} = Ae\sigma T^4 - Ae\sigma T_s^4 = Ae\sigma(T^4 - T_s^4) \qquad (17.26)$$

En esta ecuación, un valor positivo de H implica *salida* neta de calor del cuerpo. La ecuación (17.26) indica que, para la radiación, al igual que para la conducción y la convección, la corriente de calor depende de la *diferencia* de temperatura entre dos cuerpos.

Ejemplo 17.15 Radiación del cuerpo humano



Si el área superficial total del cuerpo humano es de 1.20 m^2 y la temperatura superficial es de 30°C = 303 K, calcule la tasa total de radiación de energía del cuerpo. Si el entorno está a una temperatura de 20°C, calcule la tasa *neta* de pérdida de calor del cuerpo por radiación. La emisividad del cuerpo humano es muy cercana a la unidad, sea cual fuere la pigmentación de la piel.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Debemos tomar en cuenta tanto la radiación que emite el cuerpo como la radiación que este absorbe de su ambiente. La tasa de radiación de energía proveniente del cuerpo está dada por la ecuación (17.25) y la tasa neta de pérdida de calor está dada por la ecuación (17.26).

Continúa

EJECUTAR: Tomando $e = 1$ en la ecuación (17.25), encontramos que el cuerpo radia a razón de

$$H = Ae\sigma T^4$$
$$= (1.20\ \text{m}^2)(1)(5.67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4)(303\ \text{K})^4 = 574\ \text{W}$$

Esta pérdida se compensa en parte por absorción de radiación, que depende de la temperatura del entorno. La tasa *neta* de transferencia de energía por radiación está dada por la ecuación (17.26):

$$H_{\text{neta}} = Ae\sigma(T^4 - T_s^4)$$
$$= (1.20\ \text{m}^2)(1)(5.67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4)[(303\ \text{K})^4 - (293\ \text{K})^4] = 72\ \text{W}$$

EVALUAR: El valor de H_{neta} es positivo ya que el cuerpo pierde calor hacia un entorno más frío.

Aplicaciones de la radiación

La transferencia de calor por radiación es importante en algunos lugares sorprendentes. Un bebé prematuro en una incubadora se puede enfriar peligrosamente por radiación, cuando las paredes de la incubadora están frías, aunque el *aire* de la incubadora esté tibio. Algunas incubadoras regulan la temperatura del aire midiendo la temperatura de la piel del bebé.

Un cuerpo que es buen absorbedor debe ser buen emisor. Un radiador ideal, con emisividad de 1, también es un absorbedor ideal, y absorbe *toda* la radiación que incide en él. Tal superficie ideal se denomina cuerpo negro ideal o simplemente **cuerpo negro**. En cambio, un *reflector* ideal, que *no* absorbe radiación, es un radiador muy poco eficaz.

A esto se debe el recubrimiento plateado de las botellas de vacío (“termos”), inventadas por Sir James Dewar (1842-1923). Dichas botellas tienen doble pared de vidrio, y se extrae el aire del espacio entre las paredes; esto elimina casi toda la transferencia de calor por conducción y convección. El plateado de las paredes refleja casi toda la radiación del contenido de vuelta al recipiente, y la pared en sí es muy mal emisor. De esta manera, la botella puede conservar caliente el café o cualquier otro líquido durante varias horas. El frasco Dewar, empleado para almacenar gases licuados muy fríos, se basa exactamente en el mismo principio.

Radiación, clima y cambio climático

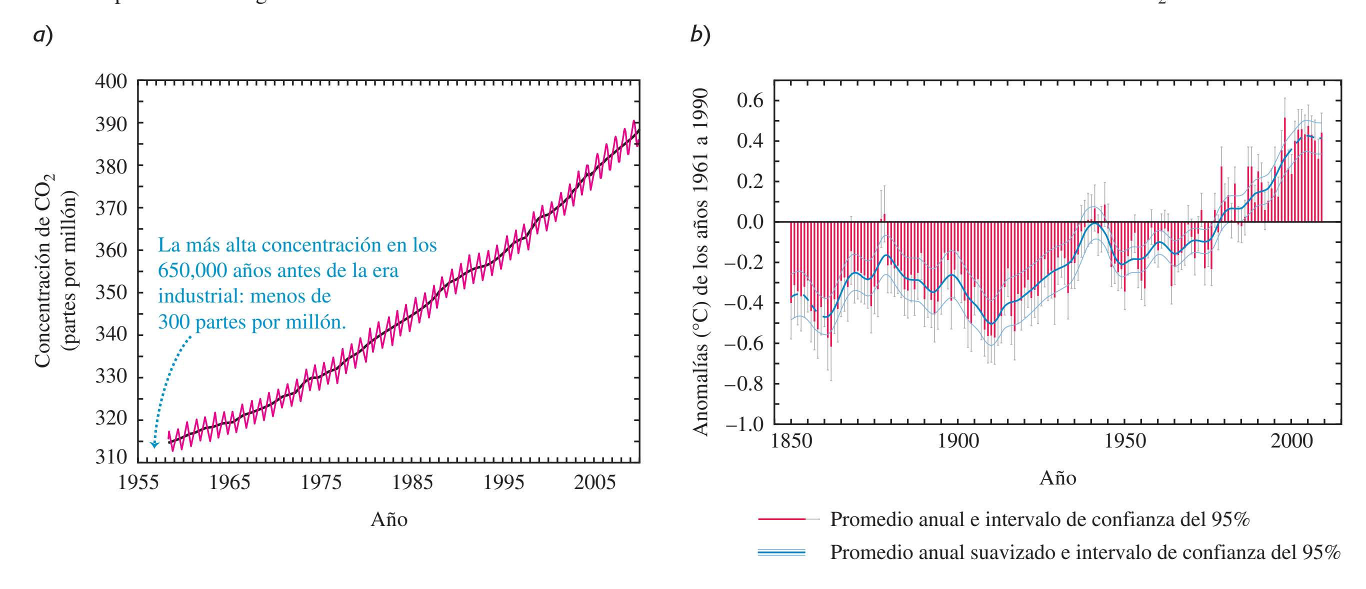
Nuestro planeta constantemente absorbe la radiación proveniente del Sol. En el equilibrio térmico, la rapidez con la que nuestro planeta absorbe la radiación solar debe ser igual a la rapidez con la que el Sol emite radiación en el espacio. La presencia de una atmósfera en nuestro planeta tiene un efecto significativo en este equilibrio.

La mayor parte de la radiación emitida por el Sol (que tiene una temperatura superficial de 5800 K) está en la parte visible del espectro, a la que la atmósfera es transparente. Sin embargo, la temperatura media de la superficie de la Tierra es solo 287 K (14°C). Por lo tanto, la mayor parte de la radiación que nuestro planeta emite al espacio es la radiación infrarroja, al igual que la radiación de la persona que se muestra en la figura 17.28. Sin embargo, nuestra atmósfera *no* es completamente transparente a la radiación infrarroja. Esto se debe a que nuestra atmósfera contiene dióxido de carbono (CO_2), que es su cuarto constituyente más abundante (después del nitrógeno, oxígeno y argón). Las moléculas de CO_2 de la atmósfera tienen la propiedad de que *absorben* parte de la radiación infrarroja que se dirige hacia arriba desde la superficie. Entonces, se irradia de nuevo la energía absorbida, pero parte de la energía se vuelve a irradiar y se dirige de nuevo hacia abajo, hacia la superficie, en lugar de escapar hacia el espacio. Para mantener el equilibrio térmico, la superficie de la Tierra debe compensar esto aumentando su temperatura T y, por ende, su tasa total de energía radiante (que es proporcional a T^4). Este fenómeno, llamado **efecto de invernadero**, hace que la temperatura de la superficie de nuestro planeta se eleve aproximadamente 33°C con respecto a la que registraría si no hubiera CO_2 atmosférico. Sin CO_2, la temperatura media de la superficie terrestre estaría por debajo del punto de congelación del agua, y la vida como la conocemos, sería imposible.

Mientras que el CO_2 atmosférico tiene un efecto benéfico, demasiado CO_2 puede tener consecuencias extremadamente negativas. Las mediciones de aire atrapado en el antiguo hielo de la Antártida revelan que durante los últimos 650,000 años el CO_2 ha constituido menos de 300 partes por millón de la atmósfera. Sin embargo, desde el

inicio de la era industrial, la quema de combustibles fósiles tales, como el carbón y el petróleo, ha elevado la concentración de CO_2 en la atmósfera a niveles sin precedentes (figura 17.29*a*). Como consecuencia de ello, a partir de 1950 la temperatura media mundial de la superficie ha aumentado en 0.6°C, y la Tierra ha experimentado los años más cálidos jamás registrados (figura 17.29*b*). Si seguimos consumiendo combustibles fósiles al mismo ritmo, en el año 2050 la concentración atmosférica de CO_2 llegará a 600 partes por millón, muy por encima de la escala de la figura 17.29*a*. El aumento de temperatura resultante tendrá efectos dramáticos en el clima de todo el mundo. En las regiones polares enormes cantidades de hielo se derretirían y correrían de tierra firme hacia el mar, lo que aumentaría los niveles del mar en todo el mundo y amenazaría los hogares y las vidas de cientos de millones de personas que viven cerca de la costa. Hacer frente a estas amenazas es uno de los mayores desafíos que tiene ante sí la civilización del siglo XXI.

17.29 *a*) La concentración de CO_2 atmosférico ha aumentado un 22% desde que se iniciaron las mediciones continuas en 1958. (Las variaciones anuales se deben a un mayor consumo de CO_2 por parte de las plantas en primavera y en verano). *b*) El aumento de la temperatura media global desde el comienzo de la era industrial es el resultado del aumento en la concentración de CO_2.



Evalúe su comprensión de la sección 17.7 Una habitación tiene una pared hecha de concreto, otra de cobre y otra más de acero. Todas las paredes son del mismo tamaño y tienen la misma temperatura de 20°C. ¿Qué pared se sentirá más fría al tocarla? **i.** La pared de concreto; **ii.** la pared de cobre; **iii.** la pared de acero; **iv.** las tres paredes se sentirán igual de frías al tocarlas.

CAPÍTULO 17 RESUMEN



Temperatura y escalas de temperatura: Dos cuerpos en equilibrio térmico deben tener la misma temperatura. Un material conductor entre dos cuerpos les permite interactuar y llegar al equilibrio térmico; un material aislante evita o dificulta esa interacción.

Las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit se basan en las temperaturas de congelación (0°C = 32°F) y de ebullición (100°C = 212°F) del agua. Un grado Celsius es igual a $\frac{9}{5}$ grados Fahrenheit. (Véase el ejemplo 17.1).

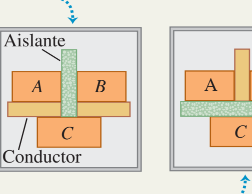
La escala Kelvin tiene su cero en la temperatura extrapolada de presión cero para un termómetro de gas, −273.15°C = 0 K. En la escala de un termómetro de gas, el cociente de dos temperaturas T_1 y T_2 es igual, por definición, al cociente de las dos presiones correspondientes del termómetro de gas, p_1 y p_2.

$$T_F = \tfrac{9}{5}T_C + 32° \qquad (17.1)$$

$$T_C = \tfrac{5}{9}(T_F - 32°) \qquad (17.2)$$

$$T_K = T_C + 273.15 \qquad (17.3)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \qquad (17.4)$$



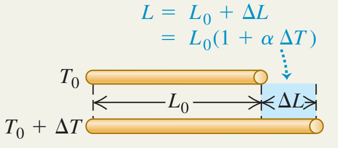
Expansión térmica y esfuerzo térmico: Un cambio de temperatura ΔT provoca un cambio en toda dimensión lineal L_0 de un cuerpo sólido. El cambio ΔL es aproximadamente proporcional a L_0 y ΔT. Asimismo, un cambio de temperatura causa un cambio ΔV en el volumen V_0 de cualquier material líquido o sólido; ΔV es aproximadamente proporcional a V_0 y ΔT. Las cantidades α y β son los coeficientes de expansión lineal y de expansión volumétrica, respectivamente. En sólidos, $\beta = 3\alpha$. (Véase los ejemplos 17.2 y 17.3).

Si un material se enfría o se calienta sujetándolo de modo que no pueda contraerse ni expandirse, está sometido a un esfuerzo de tensión F/A. (Véase el ejemplo 17.4).

$$\Delta L = \alpha L_0 \,\Delta T \qquad (17.6)$$

$$\Delta V = \beta V_0 \,\Delta T \qquad (17.8)$$

$$\frac{F}{A} = -Y\alpha \,\Delta T \qquad (17.12)$$



Calor, cambios de fase y calorimetría: El calor es transferencia de energía de un cuerpo a otro a causa de una diferencia de temperatura. Las ecuaciones (17.13) y (17.18) dan la cantidad de calor Q necesaria para provocar un cambio de temperatura ΔT en una cantidad de material con masa m y calor específico c (de manera alternativa, en términos del número de moles n y la capacidad calorífica molar $C = Mc$. Aquí, M es la masa molar y $m = nM$). Cuando se agrega calor a un cuerpo, Q es positiva; cuando se extrae, Q es negativa. (Véase los ejemplos 17.5 y 17.6).

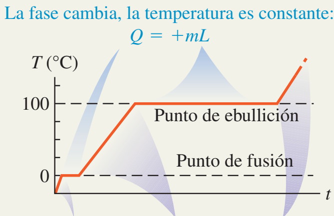
Para que una masa m de material cambie de fase a la misma temperatura (como de líquido a vapor) hay que agregarle o quitarle una cantidad de calor dada por la ecuación (17.20). Aquí L es el calor de fusión, vaporización o sublimación.

En un sistema aislado, cuyas partes interactúan intercambiando calor, la suma algebraica de las Q para todas las partes del sistema debe ser cero. (Véase los ejemplos 17.7 a 17.10).

$$Q = mc\,\Delta T \qquad (17.13)$$

$$Q = nC\,\Delta T \qquad (17.18)$$

$$Q = \pm mL \qquad (17.20)$$



Conducción, convección y radiación: La conducción es transferencia de calor dentro de un material, sin movimiento del material. La corriente de calor H depende del área A por la que fluye el calor, de la longitud L del trayecto de flujo del calor, de la diferencia de temperatura $(T_H - T_C)$ y de la conductividad térmica k del material. (Véase los ejemplos 17.11 a 17.13).

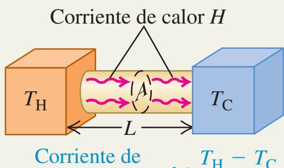
La convección es un proceso complejo de transferencia de calor, que implica movimiento de masa de una región a otra.

La radiación es transferencia de energía por radiación electromagnética. La corriente de calor H causada por radiación depende del área superficial A, la emisividad e de la superficie (un número puro adimensional entre 0 y 1) y la temperatura T en Kelvin. Aquí σ es la constante de Stefan-Boltzmann. La corriente de calor neta por radiación H_{neta} de un cuerpo (a una temperatura T) a su entorno (a una temperatura T_S) depende tanto de T como de T_s. (Véase los ejemplos 17.14 y 17.15).

$$H = \frac{dQ}{dt} = kA\frac{T_H - T_C}{L} \qquad (17.21)$$

$$H = Ae\sigma T^4 \qquad (17.25)$$

$$H_{neta} = Ae\sigma(T^4 - T_s^{\,4}) \qquad (17.26)$$





PROBLEMA PRÁCTICO — Flujo de calor en estado estable: radiación y conducción

Uno de los extremos de una varilla de cobre sólida cilíndrica de 0.200 m de largo y de 0.0250 m de radio se inserta en un bloque grande de hidrógeno sólido a su temperatura de fusión, 13.84 K. El otro extremo se ennegrece y se expone a la radiación térmica de las paredes que lo rodean a 500.0 K. Los lados de la varilla están aislados, por lo que no se pierde ni se gana energía, excepto en los extremos de la varilla. *a*) Cuando se alcanza el equilibrio, ¿cuál es la temperatura del extremo ennegrecido? La conductividad térmica del cobre a temperaturas cercanas a 20 K es 1670 Wm·K. *b*) ¿Con qué rapidez (en kg/h) se funde el hidrógeno sólido?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Dibuje un esquema de la situación, que muestre todas las dimensiones relevantes.
2. Liste las cantidades conocidas y desconocidas, e identifique las incógnitas.
3. Para que la varilla esté en equilibrio, ¿cómo debe ser la corriente de calor por radiación desde las paredes hacia el extremo de la varilla ennegrecido en comparación con la corriente de calor por conducción desde este extremo hasta el otro extremo dentro del hidrógeno sólido? Con base en sus respuestas, seleccione las ecuaciones adecuadas para el inciso *a*).
4. ¿Cómo es que la corriente de calor de la varilla hacia el hidrógeno determina la rapidez con la que se derrite el hidrógeno? (*Sugerencia:* Véase la tabla 17.4). Con base en su respuesta, seleccione las ecuaciones adecuadas para el inciso *b*).

EJECUTAR

5. Despeje la temperatura del extremo ennegrecido de la varilla. (*Sugerencia:* Como el cobre es un excelente conductor de calor a baja temperatura, se puede suponer que la temperatura de la punta ennegrecida es solo ligeramente superior a 13.84 K).
6. Utilice el resultado del paso 5 para encontrar la rapidez con la que se funde el hidrógeno.

EVALUAR

7. ¿El resultado del paso 5 es congruente con la sugerencia que se hace en ese paso?
8. ¿Cómo se verían afectados los resultados de los pasos 5 y 6 si el radio de la varilla fuera del doble?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P17.1 Explique por qué no tendría sentido utilizar un termómetro de vidrio de tamaño normal, para medir la temperatura del agua caliente contenida en un dedal.

P17.2 Si usted calienta el aire dentro de un recipiente rígido y sellado hasta que su temperatura en la escala Kelvin se duplique, la presión del aire en el recipiente también se duplica. ¿Esto es cierto si se duplica la temperatura Celsius del aire en el recipiente? Explique su respuesta.

P17.3 Muchos motores de automóviles tienen cilindros de hierro fundido y pistones de aluminio. ¿Qué tipos de problemas se podrían presentar si el motor se sobrecalienta? (El coeficiente de expansión volumétrica del hierro fundido es aproximadamente el mismo que el del acero).

P17.4 ¿Por qué se revientan las tuberías de agua congelada? ¿Se rompería un termómetro de mercurio a temperaturas por debajo del punto de congelación del mercurio? ¿Por qué?

P17.5 Dos cuerpos del mismo material tienen las mismas dimensiones y aspecto exteriores, pero uno está hueco y el otro no. Si se aumenta su temperatura por igual, ¿su expansión de volumen global sería la misma o distinta? ¿Por qué?

P17.6 El interior de un horno está a 200°C (392°F). Podemos meter la mano en él sin sufrir daño, en tanto no toquemos nada. Puesto que el aire dentro del horno también está a 200°C, ¿por qué no se quema la mano?

P17.7 Un artículo periodístico acerca del clima dice que “la temperatura de un cuerpo mide cuánto calor contiene el cuerpo”. ¿Esta descripción es correcta? ¿Por qué?

P17.8 ¿Debemos agregar calor a un objeto para aumentar su temperatura? Si agregamos calor a un objeto, ¿debemos elevar su temperatura? Explique su respuesta.

P17.9 Un estudiante dijo que $1\ m^2/s^2 \cdot C°$ es una unidad adecuada para el calor específico. ¿Tiene razón? ¿Por qué?

P17.10 En algunos acondicionadores de aire caseros para climas secos, el aire se enfría soplándolo a través de un filtro saturado de agua, evaporando parte del agua. ¿Cómo es que esto enfría el aire? ¿Funcionaría este sistema en un clima muy húmedo? ¿Por qué?

P17.11 Las unidades de calor específico c son J/kg·K, pero las unidades de calor de fusión L_f o de vaporización L_v son simplemente J/kg. ¿Por qué las unidades de L_f y L_v no incluyen el factor $(K)^{-1}$ para dar cuenta del cambio de temperatura?

P17.12 ¿Por qué un día caluroso y húmedo en el trópico generalmente es más incómodo para los seres humanos que un día caluroso y seco en el desierto?

P17.13 Un trozo de papel de aluminio para envolver una papa y cocerla en un horno caliente, por lo general, puede manejarse con seguridad unos cuantos segundos después de que la papa se retiró del horno. Sin embargo, ¡no puede decirse lo mismo de la papa! Dé dos razones para esta diferencia.

P17.14 Los viajeros del desierto a veces guardan agua en bolsas de lona. Algo de agua se filtra por la lona y se evapora. ¿Cómo enfría esto el agua del interior?

P17.15 Recién que salimos de la bañera, sentimos frío; pero apenas nos secamos sentimos menos frío, aunque la temperatura del cuarto no haya cambiado. ¿Por qué?

P17.16 El clima de regiones adyacentes a cuerpos grandes de agua (como las costas del Pacífico o el Atlántico) suele variar menos que el de regiones alejadas de cuerpos grandes de agua (como las praderas). ¿Por qué?

P17.17 ¿Por qué el agua de una bandeja para preparar cubitos de hielo no se congela repentinamente cuando la temperatura alcanza 0°C? De hecho, el agua se congela primero en una capa adyacente a las paredes de la bandeja. ¿Por qué?

P17.18 Antes de inyectar a un paciente, el médico limpia su brazo con alcohol isopropílico a temperatura ambiente. ¿Por qué el paciente siente frío en el brazo? (*Sugerencia:* ¡*No* es por miedo a la inyección! El punto de ebullición del alcohol isopropílico es 82.4°C).

P17.19 Un bloque de metal frío se siente más frío que uno de madera a la misma temperatura. ¿Por qué? Un bloque de metal *caliente* se siente más caliente que uno de madera a la misma temperatura. ¿Por qué? ¿Hay alguna temperatura a la que ambos bloques se sientan igualmente calientes o fríos? ¿Cuál es esta?

P17.20 Una persona vierte café caliente en una taza, pensando en beberlo 5 minutos después. Si desea mantener el café lo más caliente posible, ¿deberá ponerle la crema cuando vierte el café o esperar hasta justo antes de beberlo? Explique su respuesta.

P17.21 Recién que sacamos una tarta de manzana del horno, la corteza y el relleno están a la misma temperatura; sin embargo, si probamos la tarta, el relleno nos quema la lengua, pero la corteza no. ¿A qué se debe la diferencia? (*Sugerencia:* Tome en cuenta que el relleno está húmedo, la corteza está seca).

P17.22 Antes se decía que los alimentos se cocinan mejor (con más uniformidad y sin quemarse) en ollas de hierro fundido gruesas. ¿Qué características deseables tienen estas ollas?

P17.23 En invierno, las tierras costeras tienen menor temperatura que el mar, pero en verano lo opuesto es válido. Explique por qué. (*Sugerencia:* El calor específico de la tierra es solo de 0.2 a 0.8 veces el del agua).

P17.24 Es bien sabido que una papa se hornea en menos tiempo si se atraviesa con un clavo grande. ¿Por qué? ¿Sería mejor usar un clavo de aluminio que uno de acero? ¿Por qué? (*Nota:* ¡No intente esto en un horno de microondas!). También se vende un aparato para acelerar el rostizado de carne, que consiste en un tubo metálico hueco que contiene una mecha y un poco de agua; se dice que esto es mucho mejor que una varilla metálica sólida. ¿Cómo funciona?

P17.25 Los pilotos de planeadores en el Medio Oeste de Estados Unidos saben que son comunes las corrientes térmicas ascendentes cerca de campos recién arados. ¿Por qué?

P17.26 Hay quienes dicen que los cubos de hielo se congelan en menos tiempo, si las bandejas se llenan con agua caliente, porque esta se enfría más rápidamente que la fría. ¿Qué opina usted?

P17.27 Tenemos suerte de que la Tierra no esté en equilibrio térmico con el Sol (cuya temperatura superficial es de 5800 K). Pero, ¿por qué no lo está?

P17.28 Cuando hay escasez de energía, algunas revistas recomiendan mantener las casas a temperatura constante día y noche para ahorrar combustible. El argumento es que, al apagar la calefacción de noche, las paredes, los techos, etcétera, se enfrían y deberán volver a calentarse en la mañana. Así, al mantener la temperatura constante, estas partes de la casa no se enfriarán y no tendrán que volver a calentarse. ¿Tiene sentido este argumento? ¿Realmente se ahorraría energía siguiendo ese consejo?

EJERCICIOS

Sección 17.2 Termómetros y escalas de temperatura

17.1 • Convierta las siguientes temperaturas Celsius a Fahrenheit: *a*) −62.8°C, la temperatura más baja registrada en Norteamérica (3 de febrero de 1947, Snag, Yukón); *b*) 56.7°C, la temperatura más alta registrada en Estados Unidos (10 de julio de 1913, Valle de la Muerte, California); *c*) 31.1°C, la temperatura media anual más alta del mundo (Lugh Ferrandi, Somalia).

17.2 • BIO **Temperaturas en biomedicina.** *a*) **Temperatura corporal normal**. La temperatura corporal normal promedio medida en la boca es de 310 K. ¿Cuál es la temperatura en grados Celsius y Fahrenheit? *b*) **Temperatura corporal elevada**. Durante el ejercicio muy vigoroso, la temperatura del cuerpo puede elevarse hasta 40°C. ¿Cuál es la temperatura en kelvins y en grados Fahrenheit? *c*) **Diferencia de temperatura en el cuerpo**. La temperatura de la superficie del cuerpo es aproximadamente 7 C° más baja que la temperatura interna. Exprese esta diferencia de temperatura en kelvins y en grados Fahrenheit. *d*) **Almacenamiento de sangre**. La sangre almacenada a 4.0°C dura aproximadamente 3 semanas, mientras que la sangre almacenada a −160°C tiene una duración de 5 años. Exprese ambas temperaturas en las escalas Fahrenheit y Kelvin. *e*) **Insolación**. Si la temperatura del cuerpo está arriba de 105°F durante un periodo de tiempo prolongado, se puede sufrir insolación. Exprese esta temperatura en las escalas Celsius y Kelvin.

17.3 • *a*) El 22 de enero de 1943, la temperatura en Spearfish, Dakota del Sur, se elevó de −4.0 a 45.0°F en solo dos minutos. ¿Cuál fue el cambio de la temperatura en grados Celsius? *b*) La temperatura en Browning, Montana, fue de 44.0°F el 23 de enero de 1916. El día siguiente la temperatura se desplomó a −56°F. ¿Cuál fue el cambio de temperatura en grados Celsius?

Sección 17.3 Termómetros de gas y la escala Kelvin

17.4 • *a*) Calcule la única temperatura a la que los termómetros Fahrenheit y Celsius coinciden. *b*) Calcule la única temperatura a la que los termómetros Fahrenheit y Kelvin coinciden.

17.5 •• Se coloca una botella de bebida gaseosa en un refrigerador y se deja ahí hasta que su temperatura haya bajado 10.0 K. Calcule el cambio de temperatura en *a*) F° y *b*) C°.

17.6 • Convierta las siguientes temperaturas Kelvin a las escalas Celsius y Fahrenheit: *a*) la temperatura al mediodía en la superficie de la Luna (400 K); *b*) la temperatura en la parte alta de las nubes de la atmósfera de Saturno (95 K); *c*) la temperatura en el centro del Sol (1.55×10^7 K).

17.7 • La presión de un gas al punto triple del agua es de 1.35 atm. Si este volumen permanece constante, ¿cuál será su presión a la temperatura a la que el CO_2 se solidifica?

17.8 •• Un termómetro de gas registra una presión absoluta correspondiente a 325 mm de mercurio, estando en contacto con agua en el punto triple. ¿Qué presión indicará en contacto con agua en el punto de ebullición normal?

17.9 •• **Termómetro de gas de volumen constante.** Usando un termómetro de gas, un experimentador determinó que la presión en el punto triple del agua (0.01°C) era 4.80×10^4 Pa; y en el punto de ebullición normal del agua (100°C) era 6.50×10^4 Pa. *a*) Suponiendo que la presión varía linealmente con la temperatura, use estos datos para calcular la temperatura Celsius en la que la presión del gas sería cero (es decir, obtenga la temperatura Celsius del cero absoluto). *b*) ¿El gas de este termómetro obedece con precisión la ecuación (17.4)? Si es así y la presión a 100°C fuera 6.50×10^4 Pa, ¿qué presión habría medido el experimentador a 0.01°C? [Como veremos en la sección 18.1, la ecuación (17.4) solo es exacta para gases a muy baja densidad].

17.10 • Al igual que la escala Kelvin, la *escala Rankine* es una escala de temperatura absoluta: el cero absoluto es cero grados Rankine (0°R). Sin embargo, las unidades de esta escala tienen el mismo tamaño que las de la escala Fahrenheit, no las de la escala Celsius. ¿Cuál es el valor numérico de la temperatura del punto triple del agua en la escala Rankine?

Sección 17.4 Expansión térmica

17.11 • El puente Humber de Inglaterra tiene el claro individual más largo del mundo (1410 m). Calcule el cambio de longitud de la cubierta de acero del claro, si la temperatura aumenta de −5.0 a 18.0°C.

17.12 • Uno de los edificios más altos del mundo, de acuerdo con ciertos estándares arquitectónicos, es el Taipei 101 en Taiwán, con una altura de 1671 ft. Suponga que esta altura se midió en un fresco día primaveral, cuando la temperatura era de 15.5°C. Este edificio podría utilizarse como una especie de termómetro gigante en un día caluroso de verano, midiendo con cuidado su altura. Suponga que usted realiza esto y descubre que el Taipei 101 es 0.471 ft más alto que su altura oficial. ¿Cuál es la temperatura, suponiendo que el edificio está en equilibrio térmico con el aire y que toda su estructura está hecha de acero?

17.13 • Un centavo de dólar tiene 1.9000 cm de diámetro a 20.0°C, y está hecho de una aleación (principalmente zinc) con un coeficiente de expansión lineal de 2.6×10^{-5} K^{-1}. ¿Qué diámetro tendría: en un día caluroso en el Valle de la Muerte (48.0°C)? ¿Y en una noche fría en las montañas de Groenlandia (−53°C)?

17.14 • **Ajuste estrecho.** Los remaches de aluminio para construcción de aviones se fabrican un poco más grandes que sus agujeros y se enfrían con “hielo seco” (CO_2 sólido) antes de insertarse. Si el diámetro de un agujero es de 4.500 mm, ¿qué diámetro debe tener un remache a 23.0°C para que su diámetro sea igual al del agujero cuando se enfría a −78.0°C, la temperatura del hielo seco? Suponga que el coeficiente de expansión es constante, con el valor dado en la tabla 17.1.

17.15 •• El diámetro exterior de un frasco de vidrio y el diámetro interior de su tapa de hierro miden ambos 725 mm a temperatura ambiente (20.0°C). ¿Cuál será la diferencia de diámetro entre la tapa y el frasco, si la tapa se deja brevemente bajo agua caliente hasta que su temperatura alcance los 50.0°C, sin que la temperatura del vidrio sufra alguna alteración?

17.16 •• Un domo geodésico construido con una estructura de aluminio está muy cerca de ser un hemisferio perfecto; su diámetro mide 55.0 m en un día de invierno a una temperatura de −15°C. ¿Cuánto más espacio interior tiene el domo en el verano, cuando la temperatura es de 35°C?

17.17 •• Un cilindro de cobre está inicialmente a 20.0°C. ¿A qué temperatura su volumen aumentará 0.150%?

17.18 •• Un tanque de acero se llena totalmente con 2.80 m^3 de etanol cuando tanto el tanque como el etanol están a 32.0°C. Una vez que el tanque y el contenido se hayan enfriado a 18.0°C, ¿qué volumen adicional de etanol podrá introducirse en el tanque?

17.19 •• Un matraz de vidrio con volumen de 1000.00 cm^3 a 0.0°C se llena al tope con mercurio a esta temperatura. Cuando el frasco y el mercurio se calientan a 55.0°C, se derraman 8.95 cm^3 de mercurio. Si el coeficiente de expansión volumétrica del mercurio es de 18.0×10^{-5} K^{-1}, calcule el coeficiente de expansión volumétrica del vidrio.

17.20 •• *a*) Si un área medida en la superficie de un cuerpo sólido es A_0 a cierta temperatura inicial y cambia en ΔA cuando la temperatura cambia en ΔT, demuestre que

$$\Delta A = (2\alpha)A_0\,\Delta T$$

donde α es el coeficiente de expansión lineal. *b*) Una lámina circular de aluminio mide 55.0 cm de diámetro a 15.0°C. ¿Cuánto cambia el área de una cara de la lámina cuando la temperatura aumenta a 27.5°C?

17.21 •• Un operario hace un agujero de 1.35 cm de diámetro en una placa de acero a una temperatura de 25.0°C. ¿Cuál es el área de la sección transversal del agujero *a*) a 25.0°C; y *b*) si la placa se calienta a 175°C? Suponga que el coeficiente de expansión lineal es constante dentro de este intervalo. (*Sugerencia:* Véase el ejercicio 17.20).

17.22 •• Imagine que acaba de comenzar a trabajar como ingeniero mecánico en Motores, S.A. y le encargaron diseñar pistones de latón que se deslizarán dentro de cilindros de acero. Los motores en los que se usarán los pistones operarán a temperaturas entre 20.0 y 150.0°C. Suponga que los coeficientes de expansión son constantes dentro de ese intervalo de temperatura. *a*) Si el pistón apenas cabe dentro del cilindro a 20.0°C, ¿los motores podrán operar a temperaturas más altas? Explique su respuesta. *b*) Si los pistones cilíndricos tienen un diámetro de 25.000 cm a 20.0°C, ¿qué diámetro mínimo deberán tener los cilindros a esa temperatura, para que los pistones operen a 150.0°C?

17.23 • *a*) Un alambre con longitud de 1.50 m a 20.0°C se alarga 1.90 cm al calentarse a 420.0°C. Calcule su coeficiente promedio de expansión lineal para este intervalo de temperatura. *b*) El alambre se extiende sin tensión a 420.0°C. Calcule el esfuerzo en él si se enfría a 20.0°C sin permitir que se contraiga. El módulo de Young del alambre es de 2.0×10^{11} Pa.

17.24 •• Una varilla de latón mide 185 cm de longitud y 1.60 cm de diámetro. ¿Qué fuerza debe aplicarse a cada extremo para impedir que la varilla se contraiga al enfriarse de 120.0 a 10.0°C?

17.25 •• Los rieles de acero para un tren se tienden en segmentos de 12.0 m de longitud, colocados extremo con extremo en un día de invierno en que la temperatura es de −2.0°C. *a*) ¿Cuánto espacio debe dejarse entre rieles adyacentes para que apenas se toquen en verano, cuando la temperatura suba a 33.0°C? *b*) Si los rieles se tienden en contacto, ¿a qué esfuerzo se someterán un día de verano en el que la temperatura sea de 33.0°C?

Sección 17.5 Cantidad de calor

17.26 • Tratando de mantenerse despierto para estudiar toda la noche, un estudiante prepara una taza de café colocando una resistencia eléctrica de inmersión de 200 W en 0.320 kg de agua. *a*) ¿Cuánto calor debe agregarse al agua para elevar su temperatura de 20.0 a 80.0°C? *b*) ¿Cuánto tiempo se requiere? Suponga que toda la potencia se invierte en calentar el agua.

17.27 •• Una tetera de aluminio de 1.50 kg que contiene 1.80 kg de agua se coloca sobre la estufa. Si no se transfiere calor al entorno, ¿cuánto calor debe agregarse para elevar la temperatura de 20.0 a 85.0°C?

17.28 • BIO **Pérdida de calor al respirar.** Cuando hace frío, un mecanismo importante de pérdida de calor del cuerpo humano es la energía invertida en calentar el aire que entra en los pulmones al respirar. *a*) En un frío día de invierno cuando la temperatura es de −20°C, ¿cuánto calor se necesita para calentar a la temperatura corporal (37°C) los 0.50 L de aire intercambiados con cada respiración? Suponga que el calor específico del aire es de 1020 J/kg·K y que 1.0 L de aire tiene una masa de 1.3×10^{-3} kg. *b*) ¿Cuánto calor se pierde por hora si se respira 20 veces por minuto?

17.29 • Imagine que le dan una muestra de metal y le piden determinar su calor específico. Pesa la muestra y obtiene un valor de 28.4 N. Agrega con mucho cuidado 1.25×10^4 J de energía calorífica a la muestra, y observa que su temperatura aumenta en 18.0 C°. ¿Qué calor específico tiene la muestra?

17.30 •• **Calentadores de agua por demanda.** Los calentadores convencionales de agua caliente consisten en un tanque de agua a una temperatura fija. El agua caliente se va a utilizar cuando sea necesario. Las desventajas son que se desperdicia energía porque el tanque pierde calor cuando no está en uso y que puede quedarse sin agua caliente si se utiliza demasiado. Algunas empresas de servicios públicos están fomentando el uso de calentadores de agua *por demanda* (también conocidos como *calentadores flash*), que consisten en unidades de calefacción para calentar el agua conforme se use. No se utiliza ningún tanque de agua, así que no se desperdicia calor. Una ducha típica de

una casa tiene una rapidez de flujo de 2.5 gal/min (9.46 L/min) con agua de la llave que se calienta de 50°F (10°C) a 120°F (49°C) con el calentador por demanda. ¿Qué rapidez de entrada de calor (ya sea eléctrica o de gas) se requiere para operar dicha unidad, suponiendo que todo el calor entra en el agua?

17.31 • BIO Al correr, un estudiante de 70 kg genera energía térmica a razón de 1200 W. Para mantener una temperatura corporal constante de 37°C, esta energía debe eliminarse por sudor u otros mecanismos. Si estos mecanismos fallaran y no pudiera salir calor del cuerpo, ¿cuánto tiempo podría correr el estudiante antes de sufrir un daño irreversible? (*Nota:* Las estructuras proteínicas del cuerpo se dañan irreversiblemente a 44°C o más. El calor específico del cuerpo humano es de alrededor de 3480 J/kg·K, poco menos que el del agua; la diferencia se debe a la presencia de proteínas, grasas y minerales, cuyos calores específicos son menores que el del agua).

17.32 • PA Al pintar la punta de una antena de 225 m de altura, un trabajador deja caer accidentalmente una botella de agua de 1.00 L de su lonchera. La botella cae sobre unos arbustos en el suelo y no se rompe. Si una cantidad de calor igual a la magnitud del cambio de energía mecánica de la botella pasa al agua, ¿cuánto aumentará su temperatura?

17.33 •• PA Una caja con fruta, con masa de 35.0 kg y calor específico de 3650 J/kg·K, baja deslizándose por una rampa de 8.00 m de longitud, que está inclinada 36.9° bajo la horizontal. *a*) Si la caja parte del reposo y tiene una rapidez de 2.50 m/s en la base de la rampa, ¿cuánto trabajo efectuó la fricción sobre ella? *b*) Si una cantidad de calor igual a la magnitud de dicho trabajo realizado por la fricción pasa a la caja de fruta y la fruta alcanza una temperatura final uniforme, ¿qué magnitud tiene el cambio de temperatura?

17.34 • PA Un tren subterráneo de 25,000 kg viaja inicialmente a 15.5 m/s y frena para detenerse en una estación; ahí permanece el tiempo suficiente para que sus frenos se enfríen. Las dimensiones de la estación son 65.0 m de largo, 20.0 m de ancho y 12.0 de alto. Suponiendo que todo el trabajo para detener el tren que realizan los frenos se transfiere como calor de manera uniforme a todo el aire en la estación, ¿en cuánto se eleva la temperatura del aire en la estación? Tome la densidad del aire como 1.20 kg/m^3 y su calor específico como 1020 J/kg·K.

17.35 • PA Un clavo que se clava en una tabla sufre un aumento de temperatura. Si suponemos que el 60% de la energía cinética de un martillo de 1.80 kg que se mueve a 7.80 m/s se transforma en calor, que fluye hacia el clavo y no sale de él, ¿cuánto aumentará la temperatura de un clavo de aluminio de 8.00 g que es golpeado 10 veces?

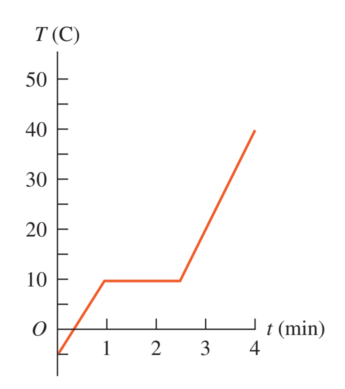
17.36 • Un técnico mide el calor específico de un líquido desconocido sumergiendo en él una resistencia eléctrica. La energía eléctrica se convierte en calor transferido al líquido durante 120 s a una tasa constante de 65.0 W. La masa del líquido es de 0.780 kg y su temperatura aumenta de 18.55 a 22.54°C. *a*) Calcule el calor específico promedio del líquido en este intervalo de temperatura. Suponga que la cantidad de calor que se transfiere al recipiente es despreciable y que no se transfiere calor al entorno. *b*) Suponga que no es posible despreciar la transferencia de calor del líquido al recipiente o al entorno en este experimento. ¿El resultado de *a*) es *mayor* o *menor* que el calor específico promedio real del líquido? Explique su respuesta.

17.37 •• PA Una bala de 15.0 g viaja horizontalmente a 865 m/s y pasa a través de un tanque que contiene 13.5 kg de agua y emerge con una velocidad de 534 m/s. ¿Cuál es el incremento máximo en la temperatura que el agua podría tener como resultado de este evento?

Sección 17.6 Calorimetría y cambios de fase

17.38 •• Imagine que trabaja como físico e introduce calor en una muestra sólida de 500.0 g a una tasa de 10.0 kJ/min mientras registra su temperatura en función del tiempo. La gráfica de sus datos se muestra en la figura E17.38. *a*) Calcule el calor latente de fusión del sólido. *b*) Determine los calores específicos de los estados sólido y líquido del material.

Figura **E17.38**



17.39 •• Un trozo de 500.0 g de un metal desconocido, que ha estado en agua hirviente durante varios minutos, se deja caer rápidamente en un vaso de espuma de poliestireno, que contiene 1.00 kg de agua a temperatura ambiente (20.0°C). Después de esperar y agitar suavemente durante 5.00 minutos, se observa que la temperatura del agua ha alcanzado un valor constante de 22.0°C. *a*) Suponiendo que el vaso absorbe una cantidad despreciable de calor y que no se pierde calor al entorno, ¿qué calor específico tiene el metal? *b*) ¿Qué es más útil para almacenar energía térmica: este metal o un peso igual de agua? Explique su respuesta. *c*) Suponga que el calor absorbido por el vaso no es despreciable. ¿Qué tipo de error tendría el calor específico calculado en el inciso *a*)? ¿Sería demasiado grande, demasiado pequeño o correcto? Explique su respuesta.

17.40 • BIO **Tratamiento de un ACV.** Un tratamiento sugerido para una persona que ha sufrido un accidente cerebrovascular es la inmersión en un baño de hielo y agua a 0°C para reducir la temperatura corporal, lo que evita daños en el cerebro. En un conjunto de pruebas, los pacientes se enfriaron hasta que su temperatura interna alcanzó los 32.0°C. Para tratar a un paciente de 70.0 kg, ¿cuál es la cantidad mínima de hielo (a 0°C) que se necesita en el baño para que su temperatura se mantenga a 0°C? El calor específico del cuerpo humano es 3480 J/kg·C°, y recuerde que la temperatura normal del cuerpo es 37.0°C.

17.41 •• Una olla de cobre con una masa de 0.500 kg contiene 0.170 kg de agua, y ambas están a una temperatura de 20.0°C. Un bloque de 0.250 kg de hierro a 85.0°C se deja caer en la olla. Encuentre la temperatura final del sistema, suponiendo que no hay pérdida de calor a los alrededores.

17.42 •• BIO **Andar en bicicleta en un día caluroso.** Si la temperatura del aire es la misma que la temperatura de la piel (aproximadamente 30°C), su cuerpo no puede eliminar el calor por transferencia de este al aire. En ese caso, se deshace del calor por evaporación de agua (sudor). En el ciclismo, el cuerpo de una persona normal de 70 kg produce energía a una tasa de alrededor de 500 W debido al metabolismo, de la que el 80% se convierte en calor. *a*) ¿Cuántos kilogramos de agua debe evaporar en una hora el cuerpo de la persona para deshacerse de este calor? El calor de vaporización del agua a la temperatura corporal es de 2.42×10^6 J/kg. *b*) Desde luego, el agua evaporada debe reponerse; de lo contrario, la persona se deshidrata. ¿Cuántas botellas de 750 mL de agua debe beber el ciclista por hora para reponer el agua perdida? (Recuerde que la masa de un litro de agua es de 1.0 kg).

17.43 •• BIO **Sobrecalentamiento.** *a*) ¿Cuánto se incrementaría la temperatura corporal del ciclista del problema anterior en una hora si fuera incapaz de deshacerse del exceso de calor? *b*) ¿Es este aumento

de temperatura lo suficientemente grande como para considerarse grave? Para indagarlo, ¿a qué temperatura febril en °F sería equivalente? (Recuerde que la temperatura interna normal del cuerpo es de 98.6°F y el calor específico del cuerpo es 3480 J/kg·C°).

17.44 • En un recipiente de masa despreciable, 0.200 kg de hielo a una temperatura inicial de −40.0°C se mezclan con una masa *m* de agua que tiene una temperatura inicial de 80.0°C. No se pierde calor al entorno. Si la temperatura final del sistema es 20.0°C, ¿cuál es la masa *m* del agua que estaba inicialmente a 80.0°C?

17.45 • Una pieza metálica de 6.00 kg de cobre sólido a una temperatura inicial *T* se coloca con 2.00 kg de hielo que se encuentran inicialmente a −20.0°C. El hielo está en un contenedor aislado de masa despreciable y no se intercambia calor con el entorno. Después de que se alcanza el equilibrio térmico, hay 1.20 kg de hielo y 0.80 kg de agua líquida. ¿Cuál era la temperatura inicial de la pieza de cobre?

17.46 • **BIO** Antes de someterse a su examen médico anual, un hombre de 70.0 kg cuya temperatura corporal es de 37.0°C consume una lata entera de 0.355 L de una bebida gaseosa (principalmente agua), que está a 12.0°C. *a*) Determine su temperatura corporal una vez alcanzado el equilibrio. Desprecie cualquier calentamiento por el metabolismo del hombre. El calor específico del cuerpo del hombre es de 3480 J/kg·K. *b*) ¿El cambio en su temperatura corporal es lo bastante grande como para medirse con un termómetro médico?

17.47 •• **BIO** En la situación descrita en el ejercicio 17.46, el metabolismo del hombre hará que, en algún momento, la temperatura de su cuerpo (y de la bebida que consumió) vuelva a 37.0°C. Si su cuerpo libera energía a una tasa de 7.00×10^3 kJ/día (la *tasa metabólica basal*, TMB), ¿cuánto tardará en hacerlo? Suponga que toda la energía liberada se invierte en elevar la temperatura.

17.48 •• Una bandeja de masa despreciable para hacer hielo contiene 0.350 kg de agua a 18.0°C. ¿Cuánto calor debe extraerse para enfriar el agua a 0.00°C y congelarla? Exprese su respuesta en joules, calorías y Btu.

17.49 • ¿Cuánto calor se requiere para transformar 12.0 g de hielo a −10.0°C en vapor a 100.0°C? Exprese su respuesta en joules, calorías y Btu.

17.50 •• Un recipiente abierto con masa despreciable contiene 0.550 kg de hielo a −15.0°C. Se suministra calor al recipiente a una tasa constante de 800.0 J/min durante 500.0 min. *a*) ¿Después de cuántos minutos *comienza* a fundirse el hielo? *b*) ¿Cuántos minutos después de iniciado el calentamiento, la temperatura comienza a elevarse por encima de 0.0°C? *c*) Dibuje la curva obtenida en una gráfica de la temperatura en función del tiempo transcurrido.

17.51 • **PA** ¿Qué rapidez inicial debe tener una bala de plomo a 25.0°C, para que el calor generado para llegar al reposo sea apenas suficiente para fundirla? Suponga que toda la energía mecánica inicial de la bala se convierte en calor y que no fluye calor de la bala a su entorno. (Un rifle ordinario tiene una rapidez de salida mayor que la rapidez del sonido en el aire, que es de 347 m/s a 25.0°C).

17.52 •• **BIO** **Quemaduras de vapor contra quemaduras de agua.** ¿Cuánto calor entra en su piel si recibe el calor liberado *a*) por 25.0 g de vapor de agua que inicialmente está a 100.0°C, al enfriarse a la temperatura de la piel (34.0°C)? *b*) ¿Y por 25.0 g de agua que inicialmente están a 100.0°C al enfriarse a 34.0°C? *c*) ¿Qué le dice esto acerca de la severidad relativa de las quemaduras con vapor y con agua caliente?

17.53 • **BIO** **"El barco del desierto".** Los camellos necesitan muy poca agua porque pueden tolerar cambios relativamente grandes en su temperatura corporal. Mientras que las personas mantienen su temperatura corporal constante dentro de un intervalo de uno a dos grados Celsius, un camello deshidratado deja que su temperatura corporal baje a 34.0°C de noche y suba a 40.0°C de día. Para ver qué tan eficaz es este mecanismo para ahorrar agua, calcule cuántos litros de agua tendría que beber un camello de 400 kg, si tratara de mantener su temperatura corporal en 34.0°C mediante evaporación de sudor durante el día (12 horas), en vez de dejar que suba a 40.0°C. (*Nota:* El calor específico de un camello u otro mamífero es aproximadamente igual al de una persona representativa, 3480 J/kg·K. El calor de vaporización del agua a 34°C es de 2.42×10^6 J/kg).

17.54 • **BIO** La evaporación del sudor es un mecanismo importante para controlar la temperatura de algunos animales de sangre caliente. *a*) ¿Qué masa de agua debe evaporarse de la piel de un hombre de 70.0 kg para enfriar su cuerpo en 1.00 C°? El calor de vaporización del agua a la temperatura corporal de 37°C es de 2.42×10^6 J/kg. El calor específico del cuerpo humano promedio es de 3480 J/kg·K (véase el ejercicio 17.31). *b*) ¿Qué volumen de agua debe beber el hombre para reponer la que evaporó? Compárelo con el volumen de una lata de bebida gaseosa (355 cm^3).

17.55 •• **PA** Un asteroide con diámetro de 10 km y una masa de 2.60×10^5 kg choca contra la Tierra a una rapidez de 32.0 km/s y cae en el Océano Pacífico. Si el 1.00% de la energía cinética del asteroide se destina a hacer que entre en ebullición el agua del océano (suponga que la temperatura inicial del agua es de 10.0°C), ¿cuál es la masa de agua que se evaporará por completo como resultado de la colisión? (Para comparar, la masa del agua contenida en el Lago Superior es aproximadamente de 2×10^{15} kg).

17.56 • Un técnico de laboratorio pone una muestra de 0.0850 kg de un material desconocido, que está a 100.0°C, en un calorímetro cuyo recipiente, inicialmente a 19.0°C, está hecho con 0.150 kg de cobre y contiene 0.200 kg de agua. La temperatura final del calorímetro y su contenido es de 26.1°C. Calcule el calor específico de la muestra.

17.57 •• Un vaso aislado con masa despreciable contiene 0.250 kg de agua a 75.0°C. ¿Cuántos kilogramos de hielo a −20.0°C deben ponerse en el agua para que la temperatura final del sistema sea 40.0°C?

17.58 •• Un frasquito de vidrio que contiene una muestra de 16.0 g de una enzima se enfría en un baño de hielo que contiene agua y 0.120 kg de hielo. La muestra tiene un calor específico de 2250 J/kg·K; el frasquito de vidrio tiene una masa de 6.00 g y un calor específico de 2800 J/kg·K. ¿Cuánto hielo se derrite para enfriar la muestra de enzima, desde la temperatura ambiente (19.5°C) hasta la temperatura del baño de hielo?

17.59 • Un lingote de plata de 4.00 kg se saca de un horno a 750.0°C y se coloca sobre un gran bloque de hielo a 0.0°C. Suponiendo que todo el calor cedido por la plata se usa para fundir el hielo, ¿cuánto hielo se funde?

17.60 •• Un calorímetro de cobre de 0.100 kg contiene 0.160 kg de agua y 0.0180 kg de hielo en equilibrio térmico a presión atmosférica. Si 0.750 kg de plomo a 255°C se dejan caer en el calorímetro, ¿qué temperatura final se alcanza? Suponga que no se pierde calor al entorno.

17.61 •• Un recipiente con paredes térmicamente aisladas contiene 2.40 kg de agua y 0.450 kg de hielo, todo a 0.0°C. El tubo de salida de una caldera en la que hierve agua a presión atmosférica se inserta en el agua del recipiente. ¿Cuántos gramos de vapor deben condensarse dentro del recipiente (que también está a presión atmosférica), para elevar la temperatura del sistema a 28.0°C? Desprecie el calor transferido al recipiente.

Sección 17.7 Mecanismos de transferencia de calor

17.62 •• Dos barras, una de bronce y otra de cobre, están unidas extremo con extremo. La longitud de la barra de latón es 0.200 m y la de cobre es 0.800 m. Cada segmento tiene un área de sección transversal de 0.00500 m^2. El extremo libre del segmento de latón está en agua hirviendo y el extremo libre del segmento de cobre se encuentra en una mezcla de hielo y agua, en ambos casos a la presión atmosférica nor-

mal. Los lados de las varillas están aislados, por lo que no hay pérdida de calor a los alrededores. *a*) ¿Cuál es la temperatura del punto en el que los segmentos de latón y cobre se unen? *b*) ¿Qué masa de hielo se funde en 5.00 min por el calor conducido por la varilla compuesta?

17.63 • Suponga que la varilla de la figura 17.23*a* es de cobre, tiene 45.0 cm de longitud y área de sección transversal de 1.25 cm^2. Sea $T_H = 100.0°C$ y $T_C = 0.0°C$. En el estado estable final, calcule: *a*) el gradiente de la temperatura a lo largo de la varilla, *b*) la corriente de calor en la varilla, *c*) la temperatura de la varilla a 12.0 cm de su extremo izquierdo.

17.64 •• Un extremo de una varilla metálica aislada se mantiene a 100.0°C, y el otro se mantiene a 0.00°C con una mezcla de hielo-agua. La varilla tiene 60.0 cm de longitud y área de sección transversal de 1.25 cm^2. El calor conducido por la varilla funde 8.50 g de hielo en 10.0 min. Calcule la conductividad térmica k del metal.

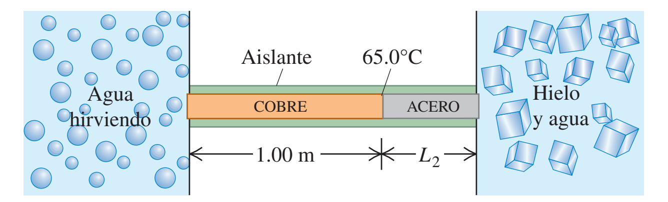
17.65 •• Un carpintero construye una pared exterior con una capa externa de madera de 3.0 cm de espesor y una capa interna de espuma de poliestireno de 2.2 cm de espesor. La madera tiene $k = 0.080$ W/m·K y el poliestireno $k = 0.010$ W/m·K. La temperatura de la superficie interior es de 19.0°C, y la exterior, −10.0°C. *a*) Calcule la temperatura en la unión entre la madera y la espuma de poliestireno. *b*) Calcule la rapidez de flujo de calor por metro cuadrado a través de esta pared.

17.66 • Un horno de cocina eléctrico tiene un área de pared total de 1.40 m^2 y está aislado con una capa de fibra de vidrio de 4.00 cm de espesor. La superficie interior de la fibra de vidrio está a 175°C, y la exterior, a 35.0°C. La fibra de vidrio tiene una conductividad térmica de 0.040 W/m·K. *a*) Calcule la corriente de calor en el aislante, tratándolo como una placa plana con un área de 1.40 m^2. *b*) ¿Qué aporte de potencia eléctrica requiere el elemento calentador para mantener esta temperatura?

17.67 • BIO **Conducción a través de la piel.** La sangre desempeña un papel importante en la eliminación de calor del cuerpo al llevar este calor directamente a la superficie, donde se puede irradiar. Sin embargo, este calor aún tiene que viajar a través de la piel antes de que se pueda irradiar. Supondremos que la sangre es llevada a la capa inferior de la piel a una temperatura de 37.0°C y que la superficie externa de la piel está a 30.0°C. La piel varía en espesor de 0.50 mm a unos cuantos milímetros en las palmas y plantas, de manera que supondremos un espesor medio de 0.75 mm. Una persona de 165 lb y 6 ft de altura tiene un área superficial de aproximadamente 2.0 m^2 y pierde calor con una rapidez neta de 75 W mientras descansa. Con base en nuestras suposiciones, ¿cuál es la conductividad térmica de la piel de esta persona?

17.68 • Una varilla larga y aislada para evitar pérdidas de calor por sus costados está en contacto térmico perfecto en un extremo con agua hirviendo (a presión atmosférica) y con una mezcla de agua y hielo en el otro (figura E17.68). La varilla consiste en un tramo de 1.00 m de cobre (con un extremo en contacto con agua hirviendo) unido por su extremo a un tramo de acero de longitud L_2 (con un extremo en contacto con la mezcla de hielo y agua). Ambos tramos tienen un área de sección transversal de 4.00 cm^2. La temperatura en la unión cobre-acero es de 65.0°C una vez que se alcanza el estado de equilibrio. *a*) ¿Cuánto calor por segundo fluye del agua hirviendo a la mezcla de hielo y agua? *b*) ¿Qué longitud L_2 tiene el tramo de acero?

Figura **E17.68**



17.69 • Una olla con base de acero de 8.50 mm de espesor y área de 0.150 m^2 descansa en una estufa caliente. El agua dentro de la olla está a 100.0°C y se evaporan 0.390 kg cada 3.00 min. Calcule la temperatura de la superficie inferior de la olla, que está en contacto con la estufa.

17.70 •• Imagine que le piden diseñar una varilla cilíndrica de acero de 50.0 cm de longitud, con sección transversal circular, que conducirá 150.0 J/s desde un horno a 400.0°C a un recipiente con agua hirviente que está a 1 atmósfera. ¿Qué diámetro debe tener la varilla?

17.71 •• Una ventana tiene dimensiones de 1.40 m × 2.50 m y está hecha de vidrio de 5.20 mm de espesor. En un día de invierno, la temperatura exterior es de −20.0°C, mientras que la confortable temperatura en el interior es de 19.5°C. *a*) ¿A qué tasa se ha perdido calor a través de la ventana por conducción? *b*) ¿A qué tasa se perdería el calor a través de la ventana, si usted la cubriera con una capa de papel de 0.750 mm de espesor (conductividad térmica de 0.0500 W/m·K)?

17.72 • Calcule la tasa de radiación de energía por unidad de área de un cuerpo negro a: *a*) 273 K y *b*) 2730 K.

17.73 • **Tamaño de un filamento de bombilla.** La temperatura de operación del filamento de tungsteno de una bombilla incandescente es de 2450 K, y su emisividad es de 0.350. Calcule el área superficial del filamento de una bombilla de 150 W, si toda la energía eléctrica consumida por la bombilla es radiada por el filamento en forma de ondas electromagnéticas. (Solo una fracción de la radiación aparece como luz visible).

17.74 •• La emisividad del tungsteno es de 0.350. Una esfera de tungsteno con radio de 1.50 cm se suspende dentro de una cavidad grande, cuyas paredes están a 290.0 K. ¿Qué aporte de potencia se requiere para mantener la esfera a una temperatura de 3000.0 K, si se desprecia la conducción de calor por los soportes?

17.75 • **El tamaño de las estrellas.** La superficie caliente luminosa de las estrellas emite energía en forma de radiación electromagnética. Es una buena aproximación suponer $e = 1$ para estas superficies. Calcule los radios de las siguientes estrellas (supóngalas esféricas): *a*) Rigel, la estrella azul brillante de la constelación de Orión, que radia energía a una tasa de 2.7×10^{32} W y tiene una temperatura superficial de 11,000 K; *b*) Procyon B (visible solo con un telescopio), que radia energía a una tasa de 2.1×10^{23} W y tiene temperatura superficial de 10,000 K. *c*) Compare sus respuestas con el radio de la Tierra, el del Sol y la distancia entre la Tierra y el Sol. (Rigel es un ejemplo de estrella *supergigante*; Procyon B es un ejemplo de estrella *enana blanca*).

PROBLEMAS

17.76 •• Suponga que pudiera construirse un aro de acero ajustado al ecuador terrestre a una temperatura de 20.0°C. ¿Cuánto se separaría el aro de la Tierra, si la temperatura del aro aumentara en 0.500 C°?

17.77 ••• Imagine que propone una nueva escala de temperatura en la que las temperaturas se dan en °M. Usted define 0.0°M como el punto de fusión normal del mercurio, y 100.0°M, como el punto de ebullición normal del mercurio. *a*) Exprese el punto de ebullición normal del agua en °M. *b*) ¿A cuántos C° correspondería un cambio de temperatura de 10.0 M°?

17.78 • PA, CALC Un peso de 250 kg cuelga del techo atado con un alambre delgado de cobre. En su modo fundamental, este alambre vibra a la frecuencia de la nota *la* de concierto (440 Hz). Después se incrementa la temperatura del alambre en 40 C°. *a*) ¿Cuánto cambiará la frecuencia fundamental? ¿Aumentará o disminuirá? *b*) Calcule el cambio porcentual de la rapidez de la onda en el alambre. *c*) Calcule el cambio porcentual de la longitud de la onda estacionaria fundamental en el alambre. ¿Aumentará o disminuirá?

17.79 ••• Imagine que está preparando pesto para pasta y tiene una taza medidora cilíndrica de 10.0 cm de altura hecha de vidrio ordinario [$\beta = 2.7 \times 10^{-5}$ (C°)$^{-1}$] llena con aceite de olivo [$\beta = 6.8 \times 10^{-4}$ (C°)$^{-1}$] hasta una altura de 2.00 mm por debajo del borde de la taza. En un principio, la taza y el aceite están a temperatura ambiente (22.0°C). El teléfono suena y usted se olvida del aceite de olivo, que por descuido dejó calentando sobre la estufa encendida. La taza y el aceite se calientan lentamente, y tienen la misma temperatura. ¿A qué temperatura comenzará a derramarse el aceite?

17.80 •• La cinta de acero de 30.0 m de un topógrafo es correcta a una temperatura de 20.0°C. La distancia entre dos puntos, medida por esta cinta en un día que su temperatura es 5.00°C, es 25.970 m. ¿Cuál es la distancia real entre los puntos?

17.81 •• PA Un péndulo de Foucault consiste en una esfera de latón con un diámetro de 35.0 cm, suspendida de un cable de acero de 10.5 m de largo (ambas mediciones se hicieron a 20.0°C). Por una negligencia en el diseño, la esfera oscilante libra el suelo por una distancia de solo 2.00 mm, cuando la temperatura es de 20.0°C. ¿A qué temperatura la esfera comenzará a rozar el suelo?

17.82 •• Usted vierte 108 cm^3 de etanol, a una temperatura de −10.0°C, en un cilindro graduado inicialmente a 20.0°C, llenándolo hasta el borde superior. El cilindro está hecho de vidrio con un calor específico de 840 J/kg·K y un coeficiente de expansión volumétrica de 1.2×10^{-5} K^{-1}; su masa es de 0.110 kg. La masa del etanol es de 0.0873 kg. *a*) ¿Cuál será la temperatura final del etanol, una vez que se alcanza el equilibrio térmico? *b*) ¿Cuánto etanol se desbordará del cilindro antes de alcanzar el equilibrio térmico?

17.83 •• Una varilla metálica de 30.0 cm de longitud se expande 0.0650 cm cuando se calienta de 0.0 a 100.0°C. Una varilla de otro metal con la misma longitud se expande 0.0350 cm con el mismo aumento de temperatura. Una tercera varilla, también de 30.0 cm, se compone de tramos de los metales anteriores unidos extremo con extremo y se expande 0.0580 cm entre 0.0 y 100.0°C. Calcule la longitud de cada tramo de la varilla compuesta.

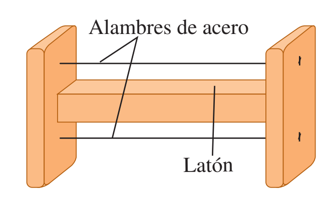
17.84 •• Una fresca mañana de sábado (4.0°C), una piloto llena los tanques de su Pitts S-2C (un avión biplaza para acrobacias) hasta su capacidad máxima de 106.0 L. Antes de volar el domingo por la mañana, cuando la temperatura es otra vez de 4.0°C, la piloto revisa el nivel de combustible y encuentra solo 103.4 L de gasolina en los tanques. Recuerda que el sábado en la tarde hizo calor, y que la expansión térmica de la gasolina hizo que el combustible faltante saliera por la ventila del tanque. *a*) ¿Qué temperatura máxima (en °C) alcanzaron el combustible y el tanque esa tarde de sábado? El coeficiente de expansión volumétrica de la gasolina es de 9.5×10^{-4} K^{-1}, y el tanque es de aluminio. *b*) Si quería tener el máximo de combustible disponible para su vuelo, ¿con cuántos litros debió llenar el tanque la piloto?

17.85 ••• *a*) La ecuación (17.12) da el esfuerzo requerido para mantener constante la longitud de una varilla cuando su temperatura cambia. Demuestre que, si se permite que la longitud cambie una cantidad ΔL cuando la temperatura varía una cantidad ΔT, el esfuerzo será igual a

$$\frac{F}{A} = Y\left(\frac{\Delta L}{L_0} - \alpha \Delta T\right)$$

donde F es la tensión en la varilla, L_0 es su longitud original, A es el área de la sección transversal, α es su coeficiente de expansión lineal y Y es su módulo de Young. *b*) Una barra de latón gruesa tiene proyecciones en sus extremos, como se muestra en la figura P17.85. Dos alambres finos de acero, tendidos entre las proyecciones, tienen tensión cero cuando el sistema está a 20°C. ¿Cuál es el esfuerzo de tensión en los alambres, si el sistema se calienta a 140°C? Haga suposiciones simplificadoras si es necesario, pero especifíquelas.

Figura **P17.85**



17.86 •• PA Un alambre de metal, con densidad r y módulo de Young Y, se estira entre soportes rígidos. A la temperatura T, la rapidez de una onda transversal es v_1. Cuando la temperatura se aumenta a $T + \Delta T$, la rapidez disminuye a $v_2 < v_1$. Determine el coeficiente de expansión lineal del alambre.

17.87 •• PA Desafinado. La cuerda de la nota *si* de una guitarra está hecha de acero (densidad 7800 kg/m^3), mide 63.5 cm de largo y tiene un diámetro de 0.406 mm. La frecuencia fundamental es $f = 247.0$ Hz. *a*) Encuentre la tensión de la cuerda. *b*) Si la tensión F se cambia por una pequeña cantidad ΔF, la frecuencia f cambia en una cantidad pequeña Δf. Demuestre que

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta F}{2F}$$

c) La cuerda se ajusta a una frecuencia fundamental de 247.0 Hz cuando su temperatura es de 18.5°C. El hecho de tocarla vigorosamente puede hacer que la temperatura de la cuerda aumente, cambiando su frecuencia de vibración. Encuentre Δf si la temperatura de la cuerda se eleva a 29.5°C. La cuerda de acero tiene un módulo de Young de 2.00×10^{11} Pa y un coeficiente de expansión lineal de 1.20×10^{-5} (C°)$^{-1}$. Suponga que la temperatura del cuerpo de la guitarra se mantiene constante. ¿La frecuencia de vibración aumentará o disminuirá?

17.88 ••• Una varilla de acero con 0.450 m de longitud y una de aluminio con 0.250 m de longitud, ambas con el mismo diámetro, se colocan extremo con extremo entre soportes rígidos sin esfuerzo inicial en ellas. Ahora su temperatura se incrementa 60.0 C°. Calcule el esfuerzo en cada varilla. (*Sugerencia:* Considere que la longitud de la varilla combinada no cambia, pero las longitudes de las varillas individuales sí. Véase el problema 17.85).

17.89 •• Un anillo de acero con diámetro interior de 2.5000 in a 20.0°C se calienta y se ensambla alrededor de un eje de latón con diámetro exterior de 2.5020 in a 20.0°C. *a*) ¿A qué temperatura debe calentarse el anillo durante el ensamble? *b*) Si el anillo y el eje se enfrían juntos, digamos con aire líquido, ¿a qué temperatura se saldrá el anillo del eje?

17.90 •• Esfuerzo de volumen por un aumento de temperatura. *a*) Demuestre que, si un objeto sometido a presión se calienta sin dejar que se expanda, el aumento de presión es

$$\Delta p = B\beta \Delta T$$

donde se supone que el módulo volumétrico B y el coeficiente de expansión volumétrica promedio β son positivos y constantes. *b*) ¿Qué presión se necesita para evitar que un bloque de acero se expanda, si su temperatura aumenta de 20.0 a 35.0°C?

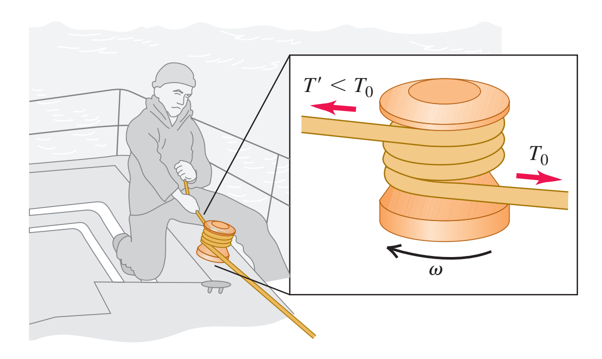
17.91 •• Un líquido se encierra en un cilindro metálico provisto de un pistón del mismo metal. Inicialmente, el sistema está a una presión de 1.00 atm (1.013×10^5 Pa) y a una temperatura de 30.0°C. Se empuja el pistón hacia abajo, hasta que la presión sobre el líquido se incrementa en 50.0 atm y se fija en esta posición. Calcule la nueva temperatura a la que la presión del líquido será otra vez de 1.00 atm. Suponga que el cilindro tiene resistencia suficiente para que su volumen no se altere por los cambios de presión, solo por los de temperatura. Use el resultado deducido en el problema 17.90. (*Sugerencia:* Véase la sección 11.4).
Compresibilidad del líquido: $k = 8.50 \times 10^{-10}$ Pa^{-1}
Coeficiente de expansión volumétrica del líquido: $\beta = 4.80 \times 10^{-4}$ K^{-1}
Coeficiente de expansión volumétrica del metal: $\beta = 3.90 \times 10^{-5}$ K^{-1}

17.92 •• Usted enfría un trozo de hierro de 100.0 g al rojo vivo (temperatura 745°C) dejándolo caer en una taza aislada con masa insignificante, que contiene 85.0 g de agua a 20.0°C. Suponiendo que no hay intercambio de calor con los alrededores, *a*) ¿cuál será la temperatura final del agua y *b*) cuál será la masa final del hierro y del agua que quede?

17.93 • **PA** **Reingreso de naves espaciales.** Una nave espacial de aluminio gira alrededor de la Tierra con una rapidez de 7700 m/s. *a*) Calcule la razón entre su energía cinética y la energía requerida para elevar su temperatura de 0 a 600°C. (El punto de fusión del aluminio es de 660°C. Suponga un calor específico constante de 910 J/kg·K). *b*) Analice la importancia de su respuesta para el problema del reingreso a la atmósfera terrestre de una nave tripulada.

17.94 • **PA** Un cabrestante es un tambor o cilindro giratorio sobre el que se desliza una cuerda para amplificar de manera considerable su tensión, al tiempo que se mantienen libres sus extremos (figura P17.94). Puesto que la tensión adicional es causada por fricción, se genera energía térmica. *a*) Si la diferencia de tensión entre los extremos de la cuerda es de 520.0 N y el cabrestante tiene 10.0 cm de diámetro y gira una vez cada 0.900 s, calcule la tasa de generación de energía térmica. ¿Por qué no importa el número de vueltas? *b*) Si el cabrestante es de hierro y tiene una masa de 6.00 kg, ¿con qué rapidez aumenta su temperatura? Suponga que la temperatura en el cabrestante es uniforme y que toda la energía térmica generada fluye hacia él.

Figura **P17.94**



17.95 •• **CALC** **Ley de Debye T^3.** A temperaturas muy bajas, la capacidad calorífica molar de la sal de roca varía con la temperatura como T^3 según la ley de Debye:

$$C = k\frac{T^3}{\Theta^3}$$

donde $k = 1940$ J/mol·K y $\Theta = 281$ K. *a*) ¿Cuánto calor se requiere para elevar la temperatura de 1.50 mol de sal de roca de 10.0 a 40.0 K? (*Sugerencia:* Use la ecuación (17.18) en la forma $dQ = nC\,dT$ e integre). *b*) Calcule la capacidad calorífica molar media en este intervalo. *c*) Calcule la capacidad calorífica molar verdadera a 40.0 K.

17.96 •• **PA** Una persona con masa de 70.0 kg está sentada en una tina de 190.0 cm por 80.0 cm; antes de que la persona entre, el agua tenía 16.0 cm de profundidad. El agua está a una temperatura de 37.0°C. Suponga que el agua se enfriara espontáneamente para formar hielo a 0.0°C y que toda la energía liberada se usara para lanzar al pobre bañista verticalmente hacia arriba. ¿Qué altura alcanzaría? (Como veremos en el capítulo 20, la conservación de la energía permite este suceso, pero lo prohíbe la segunda ley de la termodinámica).

17.97 • **Aire caliente en una clase de física.** *a*) Un estudiante típico que escucha atentamente una clase de física produce 100 W de calor. ¿Cuánto calor desprende un grupo de 90 estudiantes de física, en una aula durante una clase de 50 min? *b*) Suponga que toda la energía térmica del inciso *a*) se transfiere a los 3200 m^3 de aire del aula. El aire tiene un calor específico de 1020 J/kg·K y una densidad de 1.20 kg/m^3. Si no hay fugas de calor y el sistema de aire acondicionado está apagado, ¿cuánto aumentará la temperatura del aire durante la clase de 50 min? *c*) Si el grupo está en examen, la producción de calor por estudiante aumenta a 280 W. ¿Cuánto aumenta la temperatura en 50 min en este caso?

17.98 ••• **CALC** La capacidad calorífica molar de cierta sustancia varía con la temperatura, según la ecuación empírica:

$$C = 29.5 \text{ J/mol}\cdot\text{K} + (8.20 \times 10^{-3} \text{ J/mol}\cdot\text{K}^2)T$$

¿Cuánto calor se necesita para modificar la temperatura de 3.00 moles de la sustancia de 27 a 227°C? (*Sugerencia:* Use la ecuación (17.18) en la forma $dQ = nC\,dT$ e integre).

17.99 ••• Para su cabaña campestre, usted decide construir un refrigerador rústico de espuma de poliestireno y planea mantener fresco el interior con un bloque de hielo, cuya masa inicial es de 24.0 kg. La caja tiene dimensiones de 0.500 m × 0.800 m × 0.500 m. El agua del hielo derretido se recolecta en el fondo de la caja. Suponga que el bloque de hielo está a 0.00°C y que la temperatura exterior es de 21.0°C. Si la tapa de la caja vacía nunca se abre y usted desea que el interior de la caja permanezca a 5.00°C durante una semana exactamente, hasta que el hielo se derrita, ¿cuál debe ser el grosor de la espuma de poliestireno?

17.100 •• **Calefacción con agua caliente o con vapor.** En un sistema casero de calefacción por agua caliente, entra agua a 70.0°C (158.0°F) a los radiadores, de donde sale a 28.0°C (82.4°F). El sistema se va a reemplazar por uno de vapor de agua, en el que el vapor a presión atmosférica se condensa en los radiadores, y sale de estos a 35.0°C (95.0°F). ¿Cuántos kilogramos de vapor suministrarán la misma cantidad de calor que suministraba 1.00 kg de agua caliente en el primer sistema?

17.101 ••• Un calorímetro de cobre con masa de 0.446 kg contiene 0.0950 kg de hielo. El sistema está inicialmente a 0.0°C. *a*) Si se le agregan 0.0350 kg de vapor de agua a 100.0°C y 1.00 atm de presión, ¿qué temperatura final alcanzará el calorímetro y su contenido? *b*) A la temperatura final, ¿cuántos kilogramos habrá de hielo, cuántos de agua líquida y cuántos de vapor?

17.102 • Un recipiente de espuma de poliestireno de masa despreciable contiene 1.75 kg de agua y 0.450 kg de hielo. Más hielo, proveniente de un refrigerador a −15.0°C, se agrega a la mezcla en el recipiente, y cuando se alcanza el equilibrio térmico, la masa total del hielo en el recipiente es de 0.868 kg. Suponiendo que no hay intercambio de calor con los alrededores, ¿cuál es la masa de hielo que se agregó?

17.103 ••• En un recipiente de masa despreciable, 0.0400 kg de vapor de agua a 100°C y presión atmosférica se agregan a 0.200 kg de agua a 50.0°C. *a*) Si no se transfiere calor con el entorno, ¿qué temperatura final alcanzará el sistema? *b*) A la temperatura final, ¿cuántos kilogramos hay de vapor de agua y cuántos de agua líquida?

17.104 •• **BIO** **Aislamiento de los mamíferos.** Los animales en climas fríos a menudo dependen de *dos* capas de aislamiento: una capa de grasa en el cuerpo (de conductividad térmica 0.20 W/m·K) rodeada por una capa de aire atrapado dentro de la piel o debajo. Podemos modelar un oso negro (*Ursus americanus*) como una esfera de 1.5 m de diámetro que tiene una capa de grasa de 4.0 cm de espesor. (En realidad, el espesor varía según la estación, pero estamos interesados en la hibernación, cuando la capa de grasa es más gruesa). En los estudios de hibernación del oso, se encontró que la superficie externa de la capa de la piel está a 2.7°C durante ese periodo, mientras que la superficie interior de la capa de grasa está a 31.0°C. *a*) ¿Cuál es la temperatura en la interfase grasa interna-piel? *b*) ¿Qué grosor de la capa de aire (contenida dentro de la piel) hará que el oso pierda calor a una tasa de 50.0 W?

17.105 ••• Un trabajador vierte 1.250 kg de plomo fundido a una temperatura de 327.3°C en 0.5000 kg de agua a una temperatura de 75.00°C, en un recipiente aislado de masa despreciable. Suponiendo que no hay pérdida de calor hacia los alrededores, calcule la masa de plomo y del agua remanente en el recipiente cuando los materiales alcanzan el equilibrio térmico.

17.106 •• Un método experimental para medir la conductividad térmica de un material aislante consiste en construir una caja del material y medir el aporte de potencia a un calentador eléctrico dentro de la caja, que mantiene el interior a una temperatura medida por encima de la temperatura de la superficie exterior. Suponga que en un aparato así se requiere un aporte de potencia de 180 W para mantener la superficie interior de la caja 65.0 C° (aproximadamente 120 F°) arriba de la temperatura de la superficie exterior. El área total de la caja es de 2.18 m^2, y el espesor de la pared es de 3.90 cm. Calcule la conductividad térmica del material en unidades del SI.

17.107 •• **Efecto de una ventana en una puerta.** Un carpintero construye una puerta de madera sólida de 2.00 m $\times$ 0.95 m $\times$ 5.0 cm. Su conductividad térmica es $k = 0.120$ W/m·K. Las películas de aire en las superficies interior y exterior de la puerta tienen la misma resistencia térmica combinada que un espesor adicional de 1.8 cm de madera sólida. La temperatura interior es de 20.0°C, y la exterior, de −8.0°C. *a*) Calcule la tasa de flujo de calor a través de la puerta. *b*) ¿En qué factor aumenta el flujo de calor, si en la puerta se coloca una ventana cuadrada de 0.500 m por lado? El vidrio tiene un espesor de 0.450 cm y una conductividad térmica de 0.80 W/m·K. Las películas de aire a ambos lados del cristal tienen una resistencia térmica total igual a la de otros 12.0 cm de vidrio.

17.108 • Un plafón de madera con resistencia térmica R_1 se cubre con una capa de aislante con resistencia térmica R_2. Demuestre que la resistencia térmica efectiva de la combinación es $R = R_1 + R_2$.

17.109 •• Calcule el cociente entre las razones de pérdida de calor a través de una ventana de un solo vidrio con área de 0.15 m^2 y a través de una ventana de doble vidrio con la misma área. Cada vidrio tiene un espesor de 4.2 mm, y el espacio entre los dos vidrios de la ventana doble es de 7.0 mm. El vidrio tiene una conductividad térmica de 0.80 W/m·K. Las películas de aire en las superficies interior y exterior de ambas ventanas tienen una resistencia térmica combinada de 0.15 m^2·K/W.

17.110 • Se sueldan varillas de cobre, latón y acero para formar una Y. El área de sección transversal de cada varilla es de 2.00 cm^2. El extremo libre de la varilla de cobre se mantiene a 100.0°C; y los extremos libres de las varillas de latón y acero, a 0.0°C. Suponga que no hay pérdida de calor por los costados de las varillas, cuyas longitudes son: cobre, 13.0 cm; latón, 18.0 cm; acero, 24.0 cm. *a*) ¿Qué temperatura tiene el punto de unión? *b*) Calcule la corriente de calor en cada una de las tres varillas.

17.111 ••• CALC **Tiempo que tarda un lago en cubrirse de hielo.** *a*) Cuando la temperatura del aire está por debajo de 0°C, el agua en la superficie de un lago se congela para formar una plancha de hielo. ¿Por qué no se congela todo el volumen del lago? *b*) Demuestre que el espesor del hielo formado en la superficie de un lago es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo, si el calor de fusión del agua que se congela en la cara inferior de la capa de hielo atraviesa dicha capa por conducción. *c*) Suponiendo que la superficie superior del hielo está a −10°C y que la de abajo está a 0°C, calcule el tiempo que tardará en formarse una capa de hielo de 25 cm de espesor. *d*) Si el lago del inciso *c*) tiene una profundidad uniforme de 40 m, ¿cuánto tardaría en congelarse totalmente? ¿Es probable que eso ocurra?

17.112 •• Una varilla tiene inicialmente una temperatura uniforme de 0°C. Un extremo se mantiene a 0°C y el otro se pone en contacto con un baño de vapor a 100°C. La superficie de la varilla está aislada de modo que el calor solo puede fluir longitudinalmente por la varilla, que tiene un área transversal de 2.50 cm^2, longitud de 120 cm, conductividad térmica de 380 W/m·K, densidad de 1.00×10^4 kg/m^3 y calor específico de 520 J/kg·K. Considere un elemento cilíndrico corto de la varilla de 1.00 cm de longitud. *a*) Si el gradiente de temperatura en el extremo más frío de este elemento es de 140 C°/m, ¿cuántos joules de energía térmica fluyen por este extremo cada segundo? *b*) Si la temperatura media del elemento está aumentando a una tasa de 0.250C°/s, calcule el gradiente de temperatura en el otro extremo del elemento.

17.113 •• Una cabaña rústica tiene un piso cuya área es de 3.50 m $\times$ 3.00 m. Sus paredes, que miden 2.50 m de alto, están hechas de madera (conductividad térmica de 0.0600 W/m·K) de 1.80 cm de grosor y están aisladas con 1.50 cm de un material sintético. Cuando la temperatura exterior es de 2.00°C, es necesario calentar la habitación a una tasa de 1.25 kW para mantener su temperatura a 19.0°C. Calcule la conductividad térmica del material aislante. Desprecie la pérdida de calor a través del techo y el piso. Suponga que las superficies interna y externa de la pared tienen la misma temperatura que el aire en el interior y afuera de la cabaña.

17.114 • La tasa de energía radiante que llega del Sol a la atmósfera superior de la Tierra es de cerca de 1.50 kW/m^2. La distancia de la Tierra al Sol es de 1.50×10^{11} m, y el radio del Sol es de 6.96×10^8 m. *a*) Calcule la tasa de radiación de energía por unidad de área de la superficie solar. *b*) Si el Sol radia como cuerpo negro ideal, ¿qué temperatura tiene en su superficie?

17.115 ••• **Termo para helio líquido.** Un físico usa una lata cilíndrica de metal de 0.250 m de altura y 0.090 m de diámetro para guardar helio líquido a 4.22 K; a esa temperatura, el calor de vaporización del helio es de 2.09×10^4 J/kg. La lata está rodeada por completo de paredes que se mantienen a la temperatura del nitrógeno líquido a 77.3 K, con un vacío entre la lata y dichas paredes. ¿Cuánto helio se pierde por hora? La emisividad de la lata metálica es de 0.200. La única transferencia de calor entre la lata metálica y las paredes es por radiación.

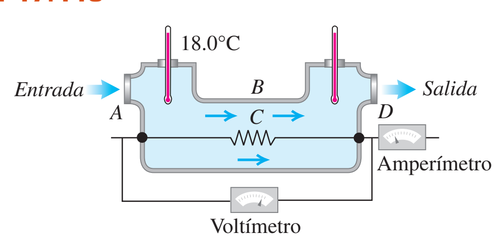
17.116 •• BIO **Tasa metabólica basal.** La tasa metabólica basal es la rapidez a la que la energía se produce en el cuerpo cuando una persona está en reposo. Una persona de 75 kg (165 lb) y 1.83 m (6 ft) de estatura tiene una superficie corporal de aproximadamente 2.0 m^2. *a*) ¿Cuál es la cantidad neta de calor que esta persona podría irradiar por segundo en una habitación a 18°C (alrededor de 65°F) si la temperatura de la superficie de la piel es de 30°C? (A estas temperaturas, casi todo el calor es la radiación infrarroja, para el que la emisividad del cuerpo es 1.0, independientemente de la cantidad de pigmento). *b*) Normalmente, el 80% de la energía producida por el metabolismo deriva en calor, mientras que el resto se dedica a funciones como el bombeo de la sangre y la reparación de las células. También normalmente, una persona en reposo puede deshacerse de este exceso de calor solo a través de la radiación. Utilice su respuesta del inciso *a*) para encontrar esta tasa metabólica basal de una persona.

17.117 •• BIO **Trotar en un día caluroso.** Usted probablemente ha visto a la gente correr en un clima demasiado caliente y se pregunta por qué lo hace. Como veremos, ¡hay buenas razones para no hacerlo! Al moverse enérgicamente, un corredor promedio de 68 kg de masa y área superficial de 1.85 m^2 produce energía a una velocidad de hasta 1300 W, 80% de la cual se convierte en calor. El corredor irradia calor, pero en realidad absorbe más calor del que irradia. En esos altos niveles de actividad, la temperatura de la piel se puede elevar a alrededor de 33°C en lugar de los usuales 30°C. (Vamos a despreciar la conducción, lo que elevaría aún más calor en su cuerpo). La única forma de que el cuerpo se deshaga de este calor adicional es por evaporación de agua (sudor). *a*) ¿Cuánto calor se produce por segundo solo por el acto de correr? *b*) ¿Cuánto calor *neto* por segundo gana el corredor solo por la radiación si la temperatura del aire es de 40.0°C (104°F)? (Recuerde que él irradia hacia afuera, pero el ambiente irradia hacia adentro). *c*) ¿Cuál es la cantidad *total* de exceso de calor que el cuerpo de este corredor debe eliminar por segundo? *d*) ¿Cuánta agua debe evaporar el cuerpo del corredor cada minuto debido a su actividad? El calor de vaporización del agua a la temperatura del cuerpo es 2.42×10^6 J/kg. *e*) ¿Cuántas botellas de 750 mL de agua debe beber después (o ¡de preferencia antes!) de correr durante media hora? Recordemos que un litro de agua tiene una masa de 1.0 kg.

17.118 •• BIO **Sobrecalentamiento mientras se corre.** *a*) Si el corredor en el problema anterior no pudiera deshacerse del exceso de calor, ¿cuánto aumentaría su temperatura corporal por arriba de la temperatura normal de 37ºC por correr media hora? El calor específico para un humano es aproximadamente 3500 J/kg·K. *b*) ¿A qué grado de fiebre (en °F) equivaldría este aumento de temperatura? ¿Este aumento debería ser motivo de preocupación? (Recuerde que la temperatura normal del cuerpo es de 98.6°F).

17.119 •• Un ingeniero está perfeccionando un calentador de agua eléctrico que suministra agua caliente continuamente. En la figura P17.119 se muestra un diseño de prueba. El agua fluye a una tasa de 0.500 kg/min, el termómetro de entrada registra 18.0°C, el voltímetro marca 120 V, y el amperímetro indica 15.0 A [lo que corresponde a una de potencia de entrada de (120 V) × (15.0 A) = 1800 W]. *a*) Cuando por fin se alcanza un estado estable final, ¿qué marca el termómetro de salida? *b*) ¿Por qué no necesitamos considerar la capacidad calorífica *mc* del aparato en sí?

Figura **P17.119**



17.120 • **Cuando un hámster ingiere alimento.** La producción de energía de un animal en actividad se denomina tasa metabólica basal (TMB) y es una medida de la conversión de energía de alimentos en otras formas de energía. Un calorímetro sencillo para medir la TMB consiste en una caja aislada provista de un termómetro para medir la temperatura del aire, el cual tiene una densidad de 1.20 kg/m^3 y un calor específico de 1020 J/kg·K. Un hámster de 50.0 g se coloca en un calorímetro que contiene 0.0500 m^3 de aire a temperatura ambiente. *a*) Cuando el hámster está corriendo en una rueda, la temperatura del aire del calorímetro sube 1.60 C° cada hora. ¿Cuánto calor genera el hámster al correr una hora? Suponga que todo este calor pasa al aire del calorímetro. Desprecie el calor que pasa a las paredes de la caja y al termómetro, y suponga que no se transfiere calor al entorno. *b*) Suponiendo que el hámster convierte semillas en calor con una eficiencia del 10% y que las semillas tienen un valor energético de 24 J/g, ¿cuántos gramos de semillas debe comer el hámster cada hora para obtener la energía calculada en el inciso *a*)?

17.121 •• Las capas de hielo de Groenlandia y la Antártida contienen aproximadamente el 1.75% del agua total (por masa) de la superficie terrestre; los océanos contienen un 97.5%, y el otro 0.75% es agua subterránea. Suponga que las capas de hielo, que actualmente se encuentran a una temperatura media aproximada de −30°C, de algún modo se deslizan hacia el océano y se derriten. ¿Cuál sería la disminución de temperatura del océano que se produciría como resultado de ello? Suponga que la temperatura media del agua del océano es actualmente de 5.00°C.

17.122 •• **¿Por qué las estaciones se retrasan?** En el hemisferio norte, el 21 de junio (solsticio de verano) es a la vez el día más largo del año y el día en que los rayos del Sol caen sobre la Tierra más verticalmente, por lo que entregan mayor cantidad de calor a la superficie. Sin embargo, por lo general el clima más caliente del verano ocurre alrededor de un mes más tarde. Veamos por qué es así. Debido al gran calor específico del agua, los océanos se calientan más lentamente que la tierra (y también se enfrían más lentamente en invierno). Además hojeando la información pertinente en las tablas incluidas en este libro, es útil saber que aproximadamente dos tercios de la superficie de la Tierra corresponden a océanos compuestos de agua salada que tiene un calor específico de 3980 J/kg·K y que los océanos, en promedio, tienen 4000 m de profundidad. Normalmente, un promedio de 1050 W/m^2 de energía solar cae sobre la superficie terrestre, y los océanos absorben esencialmente toda la luz que incide sobre ellos. Sin embargo, la mayor parte de esa luz se absorbe en los 100 m superiores de la superficie. Las profundidades no cambian de temperatura con la estación. Suponga que la luz solar incide sobre la superficie durante solo 12 horas al día y que el océano conserva todo el calor que absorbe. ¿Cuál será el aumento de la temperatura de los 100 m superiores de los océanos durante el mes siguiente al solsticio de verano? ¿Parece lo suficientemente considerable para ser perceptible?

PROBLEMAS DE DESAFÍO

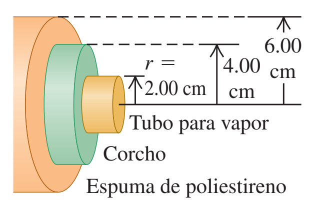
17.123 ••• CALC Suponga que ambos extremos de la varilla de la figura 17.23*a* se mantienen a una temperatura de 0°C y que la distribución de temperatura inicial a lo largo de la varilla está dada por $T = (100°\text{C})$ sen $\pi x/L$, donde x se mide desde el extremo izquierdo de la varilla. La varilla de cobre tiene longitud $L = 0.100$ m y área de sección transversal de 1.00 cm^2. *a*) Muestre la distribución inicial de temperatura en un diagrama. *b*) ¿Cuál es la distribución final de temperatura después de mucho tiempo? *c*) Trace curvas que, en su opinión, representen la distribución de temperatura en instantes intermedios. *d*) Determine el gradiente de temperatura inicial en los extremos de la varilla. *e*) Calcule la corriente de calor inicial desde los extremos de la varilla hacia los cuerpos que están en contacto con ellos. *f*) ¿Qué corriente de calor inicial hay en el centro de la varilla? Explique. ¿Qué corriente de calor hay en este punto en un instante posterior? *g*) ¿Qué valor tiene la *difusividad térmica* $k/\rho c$ del cobre, y en qué unidad se expresa? (Aquí, k es la conductividad térmica, $\rho = 8.9 \times 10^3$ kg/m^3 es la densidad y c es el calor específico). *h*) ¿Cuál es la rapidez inicial de cambio de la temperatura en el centro de la varilla? *i*) ¿Cuánto tiempo tardaría el centro de la varilla en alcanzar su temperatura final si la temperatura sigue disminuyendo con esa rapidez? (Este tiempo se llama *tiempo de relajación* de la varilla). *j*) Por las gráficas del inciso *c*), ¿cabría esperar que la rapidez de cambio de la temperatura en el punto medio se mantenga constante, aumente o disminuya en función del tiempo? *k*) Determine la rapidez inicial de cambio de la temperatura en un punto de la varilla situado a 2.5 cm de su extremo izquierdo.

17.124 ••• CALC *a*) Un cascarón esférico tiene radios interior y exterior a y b, respectivamente, y las temperaturas en las superficies interior y exterior son T_2 y T_1, respectivamente. La conductividad térmica del material del cascarón es k. Deduzca una ecuación para la corriente total de calor a través del cascarón. *b*) Deduzca una ecuación para la variación de temperatura dentro del cascarón del inciso *a*); es decir, calcule T en función de r, la distancia desde el centro del cascarón. *c*) Un cilindro hueco tiene longitud L, radio interior a y radio exterior b, y las temperaturas en las superficies interior y exterior son T_2 y T_1, respectivamente. (El cilindro podría representar una tubería de agua caliente aislada, por ejemplo). La conductividad térmica del material del cilindro es k. Deduzca una ecuación para la corriente total de calor a través de las paredes del cilindro. *d*) Para el cilindro del inciso *c*), deduzca una ecuación para la variación de temperatura dentro de las paredes del cilindro. *e*) Para el cascarón esférico del inciso *a*) y el cilindro hueco del inciso *c*), demuestre que la ecuación para la corriente total de calor en cada caso se reduce a la ecuación (17.21) para flujo de calor lineal, cuando el cascarón o el cilindro son es muy delgados.

17.125 ••• Una tubería de vapor de agua de 2.00 cm de radio, que lleva vapor a 140°C, está rodeada por una camisa cilíndrica con radios interior y exterior de 2.00 y 4.00 cm, respectivamente, hecha con un tipo de corcho cuya conductividad térmica es de 4.00×10^{-2} W/m·K.

Esta camisa se encuentra rodeada a la vez por una camisa cilíndrica de espuma de poliestireno con conductividad térmica de 1.00×10^{-2} W/m·K y radios interior y exterior de 4.00 cm y 6.00 cm, respectivamente (figura P17.125). La superficie exterior de la espuma de poliestireno está en contacto con aire a 15°C. Suponga que esta superficie exterior tiene una temperatura de 15°C. *a*) ¿Cuál es la temperatura para un radio de 4.00 cm donde se unen las dos capas aislantes. *b*) Calcule la tasa total de transferencia de calor hacia afuera de un tramo de 2.00 m de tubería. (*Sugerencia:* Use la expresión que se encontró en el inciso *c*) del problema de desafío 17.124).


Figura **P17.125**



17.126 ••• PA Cambio de temperatura en un reloj. Un reloj de péndulo está diseñado para dar un tic en un segundo en cada oscilación de lado a lado del péndulo (es decir, da dos tics por periodo completo). *a*) ¿El reloj se adelantará cuando hace calor y se atrasará cuando hace frío, o al revés? Explique su razonamiento. *b*) Cierto reloj de péndulo da la hora correcta a 20.0°C. La varilla del péndulo es de acero, y su masa puede despreciarse en comparación con la masa de la lenteja. ¿Cuál es el cambio fraccionario de longitud de la varilla cuando se enfría a 10.0°C? *c*) ¿Cuántos segundos por día se adelanta o se atrasa el reloj a 10.0°C? *d*) ¿Con qué exactitud debe controlarse la temperatura para que el reloj no se atrase ni se adelante más de 1.00 s al día? ¿La respuesta depende del periodo del péndulo?

17.127 ••• BIO Un paseo en el Sol. Considere una pobre alma perdida que camina a 5 km/h en un día caluroso en el desierto, vestida solo con un traje de baño. La temperatura de la piel de esta persona tiende a aumentar por cuatro mecanismos: **i.** se genera energía por reacciones metabólicas en el cuerpo a una tasa de 280 W, y casi toda esta energía se convierte en calor que fluye hacia la piel; **ii.** se suministra calor a la piel por convección del aire exterior con una rapidez de $k'A_{piel}(T_{aire} \times T_{pie1})$, donde k' es 54 J/h·C°·m^2, el área de piel expuesta A_{piel} es de 1.5 m^2, la temperatura del aire T_{aire} es de 47°C, y la temperatura de la piel T_{piel}, es de 36°C; **iii.** la piel absorbe energía radiante del Sol a una tasa de 1400 W/m^2; **iv.** la piel absorbe energía radiante del entorno, que tiene una temperatura de 47°C. *a*) Calcule la tasa neta (en watts) con que estos cuatro mecanismos calientan la piel de la persona. Suponga que la emisividad de la piel es $e = 1$ y que su temperatura inicial es de 36°C. ¿Qué mecanismo es el más importante? *b*) ¿Con qué rapidez (en L/h) debe evaporarse sudor de la piel de esta persona para mantener una temperatura constante en la piel? (El calor de vaporización del agua a 36°C es de 2.42×10^6 J/kg). *c*) Suponga ahora que la persona está protegida por ropa clara ($e \approx 0$), de modo que el área de piel expuesta es de solo 0.45 m^2. ¿Qué tasa de transpiración se requiere ahora? Analice la utilidad de la vestimenta tradicional que usa la gente del desierto.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

No. "Calor" se refiere a transferencia de energía de un cuerpo a otro, debido a una diferencia de temperatura entre los cuerpos. Los cuerpos no *contienen* calor.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

17.1 Respuesta: ii. Un termómetro de líquido en tubo en realidad mide su propia temperatura. Si el termómetro permanece en agua caliente suficiente tiempo, llegará al equilibrio térmico con el agua y su temperatura será la misma que la del agua.

17.2 Respuesta: iv. Tanto una banda bimetálica como un termómetro de resistencia miden su propia temperatura. Para que esta sea igual a la temperatura del objeto que se está midiendo, el termómetro y el objeto deben estar en contacto y en equilibrio térmico. Un termómetro arterial temporal detecta la radiación infrarroja en la piel de una persona. Así que no hay necesidad de que el detector y la piel estén a la misma temperatura.

17.3 Respuesta: i, iii, ii, v, iv. Para comparar estas temperaturas, conviértalas todas a la escala Kelvin. Para **i**, la temperatura Kelvin es $T_K = T_C + 273.15 = 0.00 + 273.15 = 273.15$ K; para **ii**, $T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32°) = \frac{5}{9}(0.00° - 32°) = -17.78°C$ $\frac{5}{9}$ y $T_K = T_C + 273.15 = -17.78 + 273.15 = 255.37$ K; para **iii**, $T_K = 260.00$ K; para **iv**, $T_K = 77.00$ K, y para **v**, $T_K = T_C + 273.15 = -180.00 + 273.15 = 93.15$ K.

17.4 Respuesta: ii y iii. El metal 2 debe expandirse más que el metal 1 cuando se calienta, así que debe tener un mayor coeficiente de expansión lineal α. En la tabla 17.1 vemos que dos metales con valores de α más grandes que el del cobre son el aluminio y el latón, aunque no el acero.

17.5 Respuesta: ii, i, iv, iii. En los casos **i** y **ii**, la cantidad relevante es el calor específico c de la sustancia, que es la cantidad de calor requerido para elevar la temperatura de 1 *kilogramo* de esa sustancia en 1 K (1 C°). De acuerdo con la tabla 17.3, estos valores son **i.** 138 J para el mercurio y **ii.** 2428 J para el etanol. En los casos **iii** y **iv** necesitamos la capacidad calorífica molar C, que es la cantidad de calor requerida para elevar la temperatura de 1 *mol* de esa sustancia en 1 C°. De nuevo, a partir de la tabla 17.3, estos valores son **iii.** 27.7 J para el mercurio y **iv.** 111.9 J para el etanol. (El cociente de capacidades caloríficas molares es diferente del cociente de calores específicos porque un mol de mercurio y un mol de etanol tienen masas diferentes).

17.6 Respuesta: iv. En un tiempo t, el sistema va del punto b al punto e de la figura 17.21. De acuerdo con esta figura, en el tiempo $t/2$ (a la mitad de la distancia sobre el eje horizontal entre b y e), el sistema está a 100°C y todavía está en ebullición; es decir, es una mezcla de líquido y gas. Esto implica que la mayoría del calor agregado se invierte en evaporar el agua.

17.7 Respuesta: ii. Cuando usted toca una de las paredes, el calor fluye de su mano a la pared, que está a temperatura más baja. Cuanto más rápido fluya el calor desde su mano, más frío percibirá usted. La ecuación (17.21) indica que la tasa de flujo de calor es proporcional a la conductividad térmica k. De acuerdo con la tabla 17.5, el cobre tiene conductividad térmica mucho más alta (385.0 W/m·K) que el acero (50.2 W/m·K) o que el concreto (0.8 W/m·K); por ello, la pared de cobre se siente más fría al tacto.

Problema práctico

Respuestas: ***a*)** 14.26 K **_b_)** 0.427 kg/h

18 PROPIEDADES TÉRMICAS DE LA MATERIA



? Cuanto más elevada es la temperatura de un gas, mayor es la energía cinética media de sus moléculas. ¿Qué tan rápidas son las moléculas que se mueven en el aire encima de una sartén (100°C) en comparación con las que se encuentran en el aire circundante de la cocina (25°C)?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo relacionar la presión, el volumen y la temperatura de un gas.
- Cómo las interacciones entre las moléculas de una sustancia determinan las propiedades de esta.
- De qué forma la presión y la temperatura de un gas se relacionan con la energía cinética de sus moléculas.
- Cómo las capacidades caloríficas de un gas revelan si sus moléculas giran o vibran.
- Qué determina si una sustancia es un gas, un líquido o un sólido.

La cocina es un lugar excelente para estudiar la forma en que las propiedades de la materia dependen de la temperatura. Cuando hervimos agua en una tetera, el aumento de temperatura produce vapor que sale silbando a alta presión. Si olvidamos perforar una papa antes de hornearla, el vapor a alta presión que se produce en su interior puede hacer que reviente. El vapor de agua del aire puede condensarse en gotitas de líquido en las paredes de un vaso con agua helada; y si acabamos de sacar el vaso del congelador, se formará escarcha en las paredes al solidificarse el vapor.

Todos estos ejemplos muestran las interrelaciones de las propiedades a gran escala, o *macroscópicas*, de una sustancia, como presión, volumen, temperatura y masa de la sustancia. Sin embargo, también podemos describir una sustancia desde una perspectiva *microscópica*. Esto implica investigar cantidades a pequeña escala, como las masas, velocidades, energías cinéticas y los momentos lineales de las moléculas individuales que constituyen una sustancia.

Las descripciones macroscópica y microscópica están íntimamente relacionadas. Por ejemplo, las fuerzas de choque (microscópicas) que se presentan cuando las moléculas de aire inciden en una superficie sólida (como la piel) causan la presión atmosférica (macroscópica). La presión atmosférica estándar es de 1.01×10^5 Pa; para generar esta presión, 10^{32} moléculas golpean la piel cada día ¡con una rapidez media de más de 1700 km/h (1000 mi/h)!

En este capítulo iniciaremos el estudio de las propiedades térmicas de la materia examinando algunos de sus aspectos macroscópicos. Prestaremos especial atención al *gas ideal*, una de las formas de la materia más fáciles de entender. Aprovechando lo que sabemos acerca del momento lineal y de la energía cinética, relacionaremos las propiedades macroscópicas del gas ideal con el comportamiento microscópico de sus moléculas individuales. También usaremos las ideas microscópicas para entender las capacidades caloríficas de los gases y sólidos. Por último, examinaremos las distintas fases de la materia (gaseosa, líquida y sólida) y las condiciones en que se presenta cada una.

18.1 Ecuaciones de estado



ActivPhysics 8.4: State Variables and Ideal Gas Law

Las condiciones en que existe un material dado se describen con cantidades físicas como presión, volumen, temperatura y cantidad de sustancia. Por ejemplo, un tanque de oxígeno para soldar tiene un manómetro y una etiqueta que indica su volumen. Podríamos agregar un termómetro y pesar el tanque para determinar su masa. Estas variables describen el *estado* del material y se llaman **variables de estado**.

El volumen V de una sustancia suele estar determinado por su presión p, temperatura T y cantidad de sustancia, descrita por la masa m_{total} o por el número de moles n. (Designamos a la masa total de una sustancia m_{total} porque más adelante en este capítulo usaremos m para referirnos a la masa de una molécula). Normalmente, no es posible cambiar una de estas variables sin alterar otra. Si el tanque de oxígeno se calienta, la presión aumenta; si se calienta demasiado, hace explosión.

En unos cuantos casos, la relación entre p, V, T y m (o n) es tan sencilla que podemos expresarla mediante una **ecuación de estado**; si es demasiado complicada, podemos usar gráficas o tablas numéricas. Aun así, la relación entre las variables sigue existiendo; la llamaremos ecuación de estado aunque no conozcamos la ecuación real.

He aquí una ecuación de estado sencilla (aunque aproximada) para un material sólido. El coeficiente térmico de expansión de volumen β (véase la sección 17.4) es el cambio fraccionario de volumen $\Delta V/V_0$ por cambio unitario de temperatura, y la compresibilidad k (véase la sección 11.4) es el negativo del cambio fraccionario de volumen $\Delta V/V_0$ por cambio unitario de presión. Si cierta cantidad de material tiene un volumen V_0 cuando la presión es p_0 y la temperatura es T_0, el volumen V a una presión p y temperatura T ligeramente distintas es aproximadamente

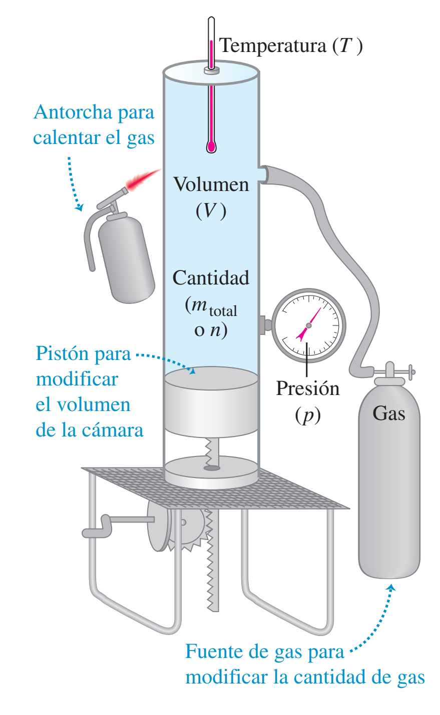
$$V = V_0[1 + \beta(T - T_0) - k(p - p_0)] \qquad (18.1)$$

[El término $k(p - p_0)$ tiene signo negativo porque un *aumento* en la presión causa una *disminución* del volumen].

La ecuación del gas ideal

Otra ecuación de estado sencilla es la del *gas ideal*. La figura 18.1 muestra un sistema experimental para estudiar el comportamiento de un gas. El cilindro tiene un pistón móvil para variar el volumen, la temperatura puede modificarse por calentamiento, y podemos bombear cualquier cantidad de gas que deseemos al cilindro. Luego medimos la presión, el volumen, la temperatura y la cantidad de gas. Observe que *presión* se refiere tanto a la fuerza por unidad de área ejercida por el cilindro sobre el gas como a la fuerza ejercida por el gas sobre el cilindro; por la tercera ley de Newton, estas deben ser iguales.

18.1 Sistema hipotético para estudiar el comportamiento de los gases. Si calentamos el gas, variamos el volumen con un pistón móvil y añadimos más gas, podremos controlar la presión p, el volumen V, la temperatura T y el número n de moles del gas.



Por lo general, lo más fácil es describir la cantidad de un gas en términos del número de moles n, en vez de la masa. (Hicimos esto al definir la capacidad calorífica molar en la sección 17.5). La **masa molar** M de un compuesto (a veces llamada *peso molecular*) es la masa de un mol, y la masa total m_{total} de una cantidad dada de ese compuesto es el número de moles n multiplicado por la masa de un mol M:

$$m_{total} = nM \qquad \text{(masa total, número de moles y masa molar)} \qquad (18.2)$$

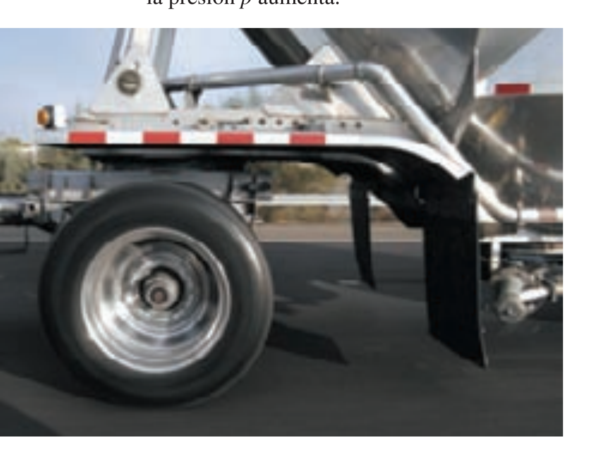
De esta forma, si conocemos el número de moles de gas en el cilindro, podemos determinar la masa del gas mediante la ecuación (18.2).

Las mediciones del comportamiento de diversos gases dan origen a tres conclusiones:

1. El volumen V es proporcional al número de moles n. Si duplicamos el número de moles, manteniendo constantes la temperatura y la presión, el volumen se duplica.

2. El volumen varía *inversamente* con la presión absoluta p. Si duplicamos la presión manteniendo constantes la temperatura T y el número de moles n, el gas se comprime a la mitad de su volumen inicial. Dicho de otro modo, pV = constante cuando n y T son constantes.
3. La presión es proporcional a la temperatura *absoluta*. Si duplicamos la temperatura absoluta, manteniendo constantes el volumen y el número de moles, la presión se duplica. En otras palabras, p = (constante)T si n y V son constantes.

18.2 La ecuación del gas ideal $pV = nRT$ da una buena descripción del aire dentro de un neumático inflado, donde la presión es aproximadamente de 3 atmósferas y la temperatura es demasiado alta para que el nitrógeno o el oxígeno se licuen. Conforme el neumático se calienta (T aumenta), el volumen V cambia solo ligeramente, pero la presión p aumenta.



Estas tres relaciones se pueden combinar en una sola ecuación, llamada **ecuación del gas ideal**:

$$pV = nRT \qquad \text{(ecuación del gas ideal)} \tag{18.3}$$

donde R es una constante de proporcionalidad. El **gas ideal** es un gas para el que la ecuación (18.3) se cumple con precisión para *todas* las presiones y temperaturas. Se trata de un modelo idealizado; funciona mejor a presiones muy bajas y altas temperaturas, cuando las moléculas del gas están muy separadas y en rápido movimiento. El modelo funciona razonablemente bien (dentro de un escaso margen porcentual) a presiones moderadas (unas cuantas atmósferas) y temperaturas muy por encima de aquella en la que el gas se licua (figura 18.2).

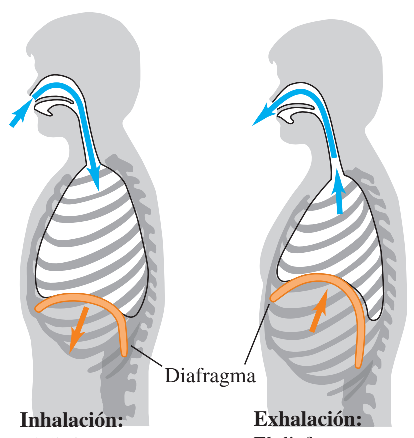
Se podría esperar que la constante R de la ecuación del gas ideal tuviera distintos valores para diferentes gases, pero resulta ser la misma para *todos* los gases, al menos a baja presión y alta temperatura. Llamamos a R la **constante de los gases** (o *constante del gas ideal*); su valor numérico depende de las unidades de p, V y T. En unidades del SI, con p en Pa (1 Pa = 1 N/m^2) y V en m^3, el mejor valor numérico actual de R es

$$R = 8.314472(15)\ \text{J/mol} \cdot \text{K}$$

o $R = 8.314$ J/mol·K con cuatro cifras significativas. Observe que las unidades de presión multiplicada por volumen son las unidades de trabajo o energía (por ejemplo, N/m^2 por m^3); por eso R tiene unidades de energía por mol por unidad de temperatura absoluta. En los cálculos químicos, los volúmenes suelen expresarse en litros (L) y las presiones en atmósferas (atm). En este sistema, con cuatro cifras significativas,

$$R = 0.08206\ \frac{\text{L} \cdot \text{atm}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Aplicación Respiración y la ecuación del gas ideal
Al respirar, confía en la ecuación del gas ideal $pV = nRT$. La contracción del músculo del diafragma en forma de cúpula aumenta el volumen V de la cavidad torácica (que encierra los pulmones), disminuyendo su presión p. La presión baja hace que los pulmones se expandan y se llenen de aire. (La temperatura T se mantiene constante). Al exhalar, el diafragma se relaja, permitiendo que los pulmones se contraigan y expulsen el aire.



Inhalación: El diafragma se contrae; los pulmones se expanden

Exhalación: El diafragma se relaja; los pulmones se contraen

Podemos expresar la ecuación del gas ideal ecuación (18.3) en términos de la masa m_{total} del gas, usando $m_{\text{total}} = nM$ de la ecuación (18.2):

$$pV = \frac{m_{\text{total}}}{M} RT \tag{18.4}$$

De esto, podemos obtener una expresión para la densidad $\rho = m_{\text{total}}/V$ del gas:

$$\rho = \frac{pM}{RT} \tag{18.5}$$

CUIDADO **Densidad contra presión** Al usar la ecuación (18.5), cerciórese de distinguir entre la letra griega r ("rho") para la densidad y la letra p para la presión.

Para una *masa constante* (o número constante de moles) del gas ideal, el producto nR es constante, por lo que la cantidad pV/T también es constante. Si los subíndices 1 y 2 se refieren a dos estados cualesquiera de la misma masa de gas, entonces

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \text{constante} \qquad \text{(gas ideal, con masa constante)} \tag{18.6}$$

Observe que usted no necesita el valor de R para usar esta ecuación.

Ya utilizamos la proporcionalidad entre la presión y la temperatura absoluta; de hecho, en el capítulo 17 definimos una escala de temperatura en términos de la presión en un termómetro de gas a volumen constante. Esto podría hacer parecer que la relación presión-temperatura de la ecuación del gas ideal, ecuación (18.3), es solo un resultado de la forma como definimos temperatura. Sin embargo, la ecuación también nos dice qué sucede cuando cambiamos el volumen o la cantidad de sustancia. Además, sucede que la escala del termómetro de gas tiene una correspondencia cercana con una escala de temperatura que definiremos en el capítulo 20 y que *no* depende de las propiedades de ningún material específico. Por ahora, consideremos que la ecuación (18.6) se basa en tal escala de temperatura independiente del material.

Estrategia para resolver problemas 18.1 Gas ideal

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* A menos que se especifique otra cosa en el problema, se puede usar la ecuación del gas ideal en cualquier situación en la que es preciso determinar el estado (presión, volumen, temperatura y/o número de moles) de un gas.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Liste las cantidades conocidas y desconocidas. Identifique las incógnitas.
2. Si el problema solo se refiere a un estado del sistema, se utiliza la ecuación (18.3), $pV = nRT$.
3. Si el problema implica densidad ρ en vez de n y V, se utiliza la ecuación (18.5), $\rho = pM/RT$, como una alternativa a la ecuación (18.3).
4. En problemas que tratan dos estados (digamos 1 y 2) de la misma cantidad de gas, si conoce todas menos una de las seis cantidades p_1, p_2, V_1, V_2, T_1 y T_2, utilice la ecuación (18.6), $p_1V_1/T_1 = p_2V_2/T_2 =$ constante. De otra manera, utilice la ecuación (18.3) o la (18.5), según la que sea adecuada.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Use unidades consistentes. (Las unidades del SI son totalmente consistentes). El enunciado del problema implicará que un sistema de unidades es claramente mejor que otros. Realice las conversiones pertinentes, tal como de atmósferas a pascales o de litros a metros cúbicos.
2. A veces tendrá que convertir entre masa m_{total} y número de moles n. La relación es $m_{total} = Mn$, donde M es la masa molar. Tenga cuidado: si usa la ecuación (18.4), *deberá* usar las mismas unidades de masa para m_{total} y M. Si M está en gramos por mol (como es habitual para masas molares), m_{total} deberá estar en gramos. Si quiere usar m_{total} en kg, deberá convertir M a kg/mol. Por ejemplo, la masa molar del oxígeno es de 32 g/mol o 32×10^{-3} kg/mol.
3. Recuerde que en las ecuaciones de los gases ideales, T es siempre una temperatura *absoluta* (Kelvin) y p es una presión absoluta (no manométrica).
4. Despeje las incógnitas.

EVALUAR *la respuesta:* ¿Sus resultados tienen sentido físico? Utilice puntos de referencia, tales como el resultado del ejemplo 18.1, que veremos a continuación en donde un mol de gas a una atmósfera de presión ocupa un volumen de 22.4 litros.

Ejemplo 18.1 Volumen de un gas a TPE



¿Cuál es el volumen de un recipiente que contiene exactamente 1 mol de un gas ideal a *temperatura y presión estándar* (TPE), que se define como $T = 0°C = 273.15$ K y $p = 1$ atm $= 1.013 \times 10^5$ Pa?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema implica las propiedades de un solo estado de un gas ideal, por lo que utilizaremos la ecuación (18.3). Nos dan la presión p y la temperatura T y el número de moles n: nuestra incógnita es el correspondiente volumen V.

EJECUTAR: Con la ecuación (18.3), usando R en J/mol·K,

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{(1\ \text{mol})(8.314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(273.15\ \text{K})}{1.013 \times 10^5\ \text{Pa}}$$
$$= 0.0224\ \text{m}^3 = 22.4\ \text{L}$$

EVALUAR: A TPE, 1 mol de un gas ideal ocupa 22.4 L. Este es el volumen de un cubo de 0.282 m (11.1 pulgadas) en un lado, o de una esfera 0.350 m (13.8 in) de diámetro.

Ejemplo 18.2 Compresión de gas en un motor de automóvil



En un motor de automóvil, una mezcla de aire y gasolina se comprime en los cilindros antes de encenderse. Un motor representativo tiene una razón de compresión de 9.00 a 1: esto implica que el gas en los cilindros se comprime a de su volumen original (figura 18.3). Las válvulas de admisión y de escape están cerradas durante la compresión, por lo que la cantidad de gas es constante. ¿Cuál es la temperatura final del gas comprimido si su temperatura inicial es de 27°C y sus presiones inicial y final son 1.00 y 21.7 atm, respectivamente?

Continúa

SOLUCIÓN

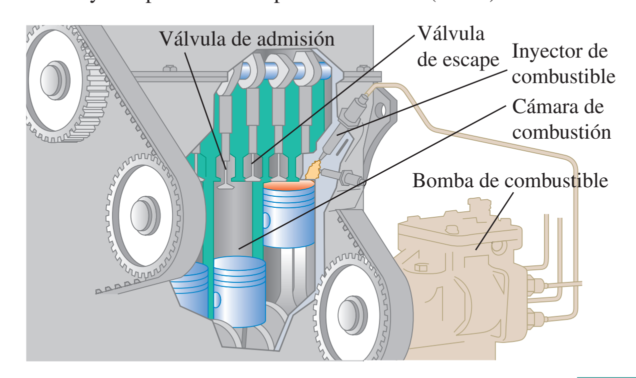
IDENTIFICAR y PLANTEAR: En este problema se nos pide comparar dos estados de la misma cantidad de gas ideal, por lo que utilizaremos la ecuación (18.6). En el estado no comprimido, $p_1 = 1.00$ atm y $T_1 = 27°C = 300$ K. En el estado comprimido, $p_2 = 21.7$ atm. No nos dan los volúmenes de los cilindros, pero se sabe que $V_1 = 9.00\,V_2$. La temperatura T_2 del gas comprimido es la incógnita.

EJECUTAR: Despejamos T_2 de la ecuación (18.6):

$$T_2 = T_1\frac{p_2V_2}{p_1V_1} = (300\text{ K})\frac{(21.7\text{ atm})V_2}{(1.00\text{ atm})(9.00V_2)} = 723\text{ K} = 450°\text{C}$$

EVALUAR: Esta es la temperatura de la mezcla aire-gasolina *antes* de encenderse; al iniciar la combustión, la temperatura sube aún más.

18.3 Vista recortada de un motor de automóvil. Mientras la mezcla aire-gasolina se comprime antes de la ignición, las válvulas de admisión y escape están en la posición cerrada (arriba).



Ejemplo 18.3 Masa de aire en un tanque de buceo



Un tanque "vacío" para buceo, hecho de aluminio, tiene 11.0 L de aire a 21°C y 1 atm. Cuando el tanque se llena rápidamente con una compresora, la temperatura del aire es de 42°C y la presión manométrica es de 2.10×10^7 Pa. ¿Qué masa de aire se agregó? (El aire es una mezcla de gases: aproximadamente 78% de nitrógeno, 21% de oxígeno y 1% de otros gases; su masa molar media es de 28.8 g/mol = 28.8×10^{-3} kg/mol).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Nuestra incógnita es la diferencia $m_2 - m_1$ entre la masa presente al final (estado 2) y al principio (estado 1). Nos dan la masa molar del aire (M), por lo que podemos usar la ecuación (18.2) para obtener la incógnita si conocemos el número de moles presentes en los estados 1 y 2. Determinamos n_1 y n_2 aplicando individualmente la ecuación (18.3) a cada estado.

EJECUTAR: Debemos convertir las temperaturas a la escala Kelvin sumándoles 273, y convertir las presiones a absolutas sumándoles 1.013×10^5 Pa. El volumen del tanque apenas se ve afectado por el aumento de la temperatura y la presión, por lo que $V_2 = V_1$. De acuerdo con la ecuación (18.3), los números de moles en el tanque vacío (n_1) y en el tanque lleno (n_2) son

$$n_1 = \frac{p_1V_1}{RT_1} = \frac{(1.013 \times 10^5\text{ Pa})(11.0 \times 10^{-3}\text{ m}^3)}{(8.314\text{ J/mol}\cdot\text{K})(294\text{ K})} = 0.46\text{ mol}$$

$$n_2 = \frac{p_2V_2}{RT_2} = \frac{(2.11 \times 10^7\text{ Pa})(11.0 \times 10^{-3}\text{ m}^3)}{(8.314\text{ J/mol}\cdot\text{K})(315\text{ K})} = 88.6\text{ moles}$$

Agregamos $n_2 - n_1 = 88.6$ moles $- 0.46$ mol $= 88.1$ moles al tanque. De acuerdo con la ecuación (18.2), la masa agregada es: $M(n_2 - n_1) = (28.8 \times 10^{-3}\text{ kg/mol})(88.1\text{ moles}) = 2.54$ kg.

EVALUAR: La masa agregada es considerable; bien podríamos usar una báscula para determinar si el tanque está vacío o lleno.

Ejemplo 18.4 Variación de la presión atmosférica con la altura



Calcule la variación de la presión atmosférica con la altura en la atmósfera terrestre, suponiendo que la temperatura es 0°C en todos sus puntos. Considere que $g = 9.80\text{ m/s}^2$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Conforme la altura y aumenta, tanto la presión atmosférica p como la densidad ρ disminuyen. Por lo tanto, tenemos *dos* funciones desconocidas de y; para despejarlas, necesitamos dos ecuaciones independientes. Una de ellas es la del gas ideal, ecuación (18.5), que se expresa en términos de p y ρ. La otra es la ecuación (12.4), la relación entre p, ρ y y en un fluido en equilibrio, que se encuentra en la sección 12.2: $dp/dy = -\rho g$. Se nos dijo que supusiéramos que g y T son iguales en todas las elevaciones; también se supuso que la atmósfera tiene la misma composición química y, por consiguiente, la misma masa molar M en todas las alturas. Combinamos las dos ecuaciones y despejamos $p(y)$.

EJECUTAR: Sustituimos $\rho = pM/RT$ en $dp/dy = -\rho g$, separamos variables e integramos, tomando p_1 como la presión a la altura y_1 y p_2 como la presión a y_2:

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{pM}{RT}g$$

$$\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}\int_{y_1}^{y_2}dy$$

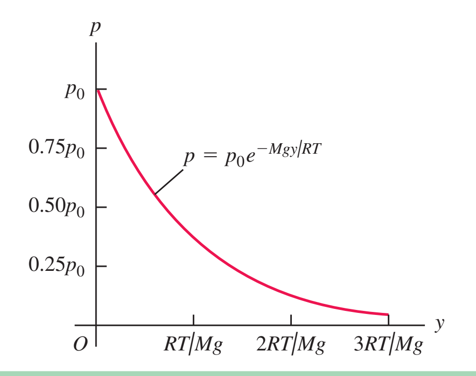
$$\ln\frac{p_2}{p_1} = -\frac{Mg}{RT}(y_2 - y_1)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = e^{-Mg(y_2-y_1)/RT}$$

Sea ahora $y_1 = 0$ en el nivel del mar, y sea la presión ahí $p_0 = 1.013 \times 10^5$ Pa. Entonces, la presión p a cualquier altura y es

$$p = p_0e^{-Mgy/RT}$$

EVALUAR: De acuerdo con nuestro cálculo, la presión disminuye exponencialmente con la altura. La curva de la figura 18.4 muestra que la pendiente dp/dy se vuelve menos negativa a mayor elevación. Ese resultado es lógico, ya que $dp/dy = -\rho g$ y la densidad también dis-



18.4 Variación de la presión atmosférica p con la altura y, suponiendo una temperatura T constante.

minuye al aumentar la altura. En la cima del monte Everest, donde $y = 8863$ m,

$$\frac{Mgy}{RT} = \frac{(28.8 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol})(9.80\ \text{m/s}^2)(8863\ \text{m})}{(8.314\ \text{J/mol} \cdot \text{K})(273\ \text{K})} = 1.10$$

$$p = (1.013 \times 10^5\ \text{Pa})e^{-1.10} = 0.337 \times 10^5\ \text{Pa} = 0.33\ \text{atm}$$

La suposición de temperatura constante no es realista, y g disminuye un poco al aumentar la altura (véase el problema de desafío 18.92). Aun así, el ejemplo revela por qué los montañistas deben llevar oxígeno en el Monte Everest. También indica por qué los aviones a reacción, que comúnmente vuelan a altitudes comprendidas entre 8000 y 12,000 m, *deben* tener cabinas presurizadas para garantizar la comodidad y la salud de los pasajeros.

Ecuación de Van der Waals

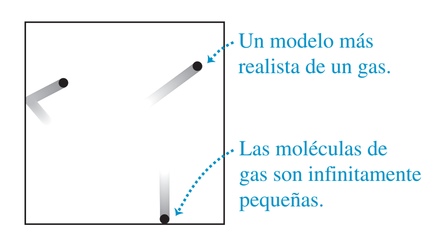
La ecuación del gas ideal, ecuación (18.3), se puede obtener a partir de un modelo molecular sencillo que desprecia los volúmenes de las moléculas mismas y las fuerzas de atracción entre ellas (figura 18.5*a*). Examinaremos ese modelo en la sección 18.3. Por ahora, mencionaremos otra ecuación de estado, la **ecuación de Van der Waals**, que hace correcciones aproximadas por estas dos omisiones (figura 18.5*b*). La ecuación fue desarrollada en el siglo XIX por el físico holandés J. D. Van der Waals; la interacción atómica que vimos en la sección 14.4 se llamó *interacción de Van der Waals* en su honor. La ecuación de Van der Waals es

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \tag{18.7}$$

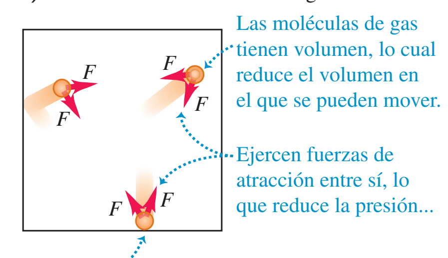
Las constantes a y b son constantes empíricas, diferentes para cada gas; b representa aproximadamente el volumen de un mol de moléculas, por lo que el volumen total de las moléculas es nb y el volumen neto disponible para que se muevan es $V - nb$. La constante a depende de las fuerzas de atracción intermoleculares, que reducen la presión del gas para valores dados de n, V y T *juntando* las moléculas al tiempo que estas *empujan* las paredes del recipiente. La reducción de presión es proporcional al número de moléculas por unidad de volumen en una capa cerca de la pared (las moléculas que ejercen la presión sobre la pared), y también es proporcional al número por unidad de volumen en la siguiente capa más allá de la pared (que son las que atraen). Así, la reducción de presión debida a fuerzas intermoleculares es proporcional a n^2/V^2.

Cuando n/V es un valor pequeño (es decir, cuando el gas está *diluido*), la distancia media entre moléculas es grande, las correcciones de la ecuación de Van der Waals se vuelven insignificantes y la ecuación (18.7) se reduce a la ecuación del gas ideal. Por ejemplo, para dióxido de carbono (CO_2) gaseoso, las constantes de la ecuación de Van der Waals son $a = 0.364\ \text{J} \cdot \text{m}^3/\text{mol}^2$ y $b = 4.27 \times 10^{-5}\ \text{m}^3/\text{mol}$. Vimos en el ejemplo 18.1 que un mol de un gas ideal a $T = 0°\text{C} = 273.15$ K y $p = 1\ \text{atm} = 1.013 \times 10^5$ Pa ocupa un volumen $V = 0.0224\ \text{m}^3$; de acuerdo con la ecuación (18.7), un mol de CO_2

a) Modelo idealizado de un gas



b) Un modelo más realista de un gas



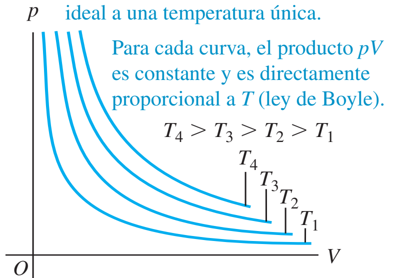
18.5 Un gas modelado mediante *a*) la ecuación del gas ideal y *b*) la ecuación de Van der Waals.

que ocupara este volumen a esta temperatura estaría a una presión 532 Pa menor que 1 atm, una diferencia de solo 0.5% con respecto al valor para el gas ideal.

Gráficas pV

En principio, podríamos representar la relación p-V-T gráficamente como una *superficie* en un espacio tridimensional con coordenadas p, V y T. Esta representación a veces ayuda a entender el comportamiento global de una sustancia, pero las gráficas bidimensionales ordinarias suelen ser más adecuadas. Una de las más útiles es un conjunto de curvas de presión en función del volumen, cada una para una temperatura constante dada. Una gráfica de este tipo se llama **gráfica pV**. Cada curva, que representa el comportamiento a cierta temperatura, se denomina **isoterma**, o *isoterma pV*.

18.6 Isotermas o curvas de temperatura constante, para una cantidad constante de un gas ideal. La temperatura más alta es T_4; la inferior es T_1. Esta es una representación gráfica de la ecuación de estado del gas ideal.

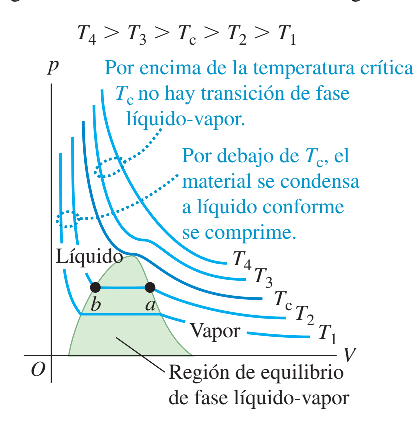


La figura 18.6 muestra isotermas pV para una cantidad constante de gas ideal. Ya que $p = nRT/V$ de la ecuación (18.3), a lo largo de una isoterma (T constante), la presión p es inversamente proporcional al volumen V, y las isotermas son curvas hiperbólicas.

La figura 18.7 presenta una gráfica pV para un material que *no* obedece la ecuación del gas ideal. A temperaturas por debajo de T_c, las isotermas tienen regiones planas en las que podemos comprimir el material (esto es, reducir el volumen V) sin aumentar la presión p. La observación del gas revela que se está *condensando* de la fase de vapor (gas) a la de líquido. Las partes planas de las isotermas en la parte sombreada de la figura 18.7 representan condiciones de *equilibrio de fase* líquido-vapor. Al disminuir el volumen, más y más material pasa de vapor a líquido, pero la presión no cambia. (Para mantener la temperatura constante durante la condensación, debemos eliminar el calor de vaporización, como se explicó en la sección 17.6).

Cuando comprimimos un gas así a temperatura constante T_2 en la figura 18.7, es vapor hasta llegar al punto a, donde comienza a licuarse; al reducirse más el volumen, más material se licua, y *tanto* la presión *como* la temperatura permanecen constantes. En el punto b, todo el material se encuentra en estado líquido. Cualquier compresión posterior requiere un aumento muy rápido en la presión, porque los líquidos en general son mucho menos compresibles que los gases. A una temperatura constante menor T_1 se presenta un comportamiento similar, pero la condensación comienza a menor presión y mayor volumen que a T_2 constante. A temperaturas mayores que T_c, *no* hay transición de fase al comprimirse el material; a las temperaturas más altas, como T_4, las curvas semejan las de gas ideal de la figura 18.6. Llamamos a T_c la *temperatura crítica* del material. En la sección 18.6 veremos qué pasa con la fase del gas por encima de la temperatura crítica.

18.7 Gráfica pV para un gas no ideal, que muestra isotermas para temperaturas mayores y menores que la temperatura crítica T_c. La región de equilibrio líquido-vapor se muestra como el área sombreada. A temperaturas aún menores, el material podría experimentar transiciones de fase de líquido a sólido o de gas a sólido; esto no se muestra en la gráfica.



Usaremos gráficas pV a menudo en los siguientes dos capítulos. Mostraremos que el *área* bajo una curva pV (sea o no isoterma) representa el *trabajo* efectuado por el sistema durante un cambio de volumen. Este trabajo, a la vez, está directamente relacionado con la transferencia de calor y con los cambios en la *energía interna* del sistema.

Evalúe su comprensión de la sección 18.1 Clasifique los siguientes gases ideales en orden decreciente de acuerdo con el número de moles: **i.** 1 atm de presión, 1 L de volumen y 300 K de temperatura; **ii.** 2 atm de presión, 1 L de volumen y 300 K de temperatura; **iii.** 1 atm de presión, 2 L de volumen y 300 K de temperatura; **iv.** 1 atm de presión, 1 L de volumen y 600 K de temperatura; **v.** 2 atm de presión, 1 L de volumen y 600 K de temperatura. ❙

18.2 Propiedades moleculares de la materia

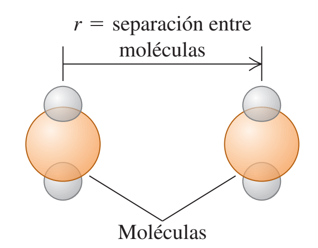
Hemos estudiado varias propiedades de la materia en volumen, como elasticidad, densidad, tensión superficial, capacidad calorífica y ecuaciones de estado. Ahora queremos ver con mayor detalle la relación entre el comportamiento en volumen y la estructura *molecular*. Comenzaremos con un análisis general de la estructura molecular de la materia. En las dos secciones siguientes desarrollaremos el modelo cinético-molecular de un gas ideal, y obtendremos de este modelo molecular la ecuación de estado y una expresión para la capacidad calorífica.

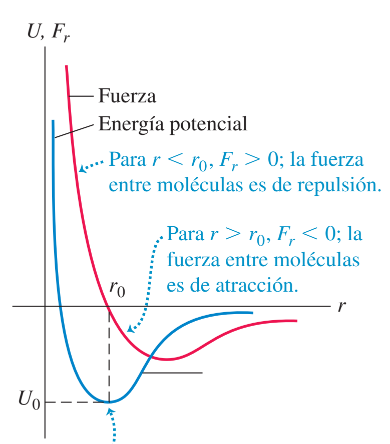
Moléculas y fuerzas intermoleculares

Toda sustancia química conocida se compone de **moléculas** idénticas. Las moléculas más pequeñas contienen un solo átomo y su tamaño es del orden de 10^{-10} m; las más grandes contienen muchos átomos y son al menos 10,000 veces más grandes. En los gases, las moléculas se mueven de forma casi independiente; en líquidos y sólidos se mantienen unidas por fuerzas intermoleculares, las cuales surgen de las interacciones de las partículas con carga eléctrica que constituyen las moléculas. Las fuerzas gravitacionales entre las moléculas son insignificantes en comparación con las fuerzas eléctricas.

La interacción de dos cargas eléctricas *puntuales* se describe con una fuerza (de repulsión para cargas iguales, de atracción para cargas distintas) cuya magnitud es proporcional a $1/r^2$, donde r es la distancia entre los puntos. Estudiaremos esta relación, llamada *ley de Coulomb*, en el capítulo 21 (volumen 2). Las moléculas *no* son cargas puntuales, sino estructuras complejas que contienen carga tanto positiva como negativa, y sus interacciones son más complejas. La fuerza entre las moléculas de un gas varía con la distancia r entre las moléculas aproximadamente como se muestra en la figura 18.8, donde una F_r positiva corresponde a una fuerza de repulsión, y una F_r negativa corresponde a una fuerza de atracción. Cuando las moléculas están alejadas, las fuerzas intermoleculares son muy pequeñas y generalmente de atracción. Al comprimirse un gas y juntarse sus moléculas, las fuerzas de atracción aumentan. La fuerza intermolecular es cero a una separación de equilibrio r_0, que corresponde aproximadamente al espaciado de las moléculas en los estados líquido y sólido. En los líquidos y sólidos se requieren presiones relativamente grandes para comprimir apreciablemente la sustancia. Esto indica que, a distancias moleculares un poco *menores* que la separación de equilibrio, las fuerzas se vuelven *repulsivas* y relativamente grandes.

18.8 La fuerza entre moléculas y su energía potencial de interacción dependen de su separación r.



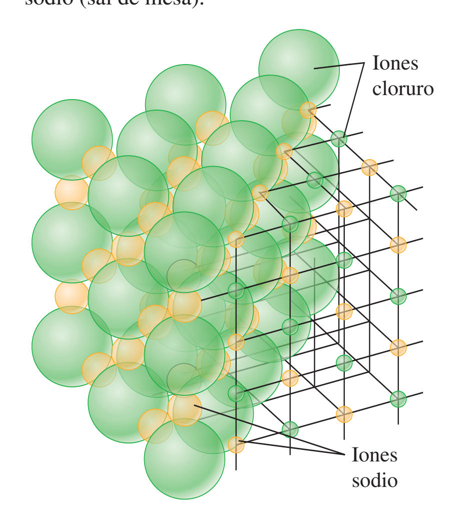


La figura 18.8 también muestra la energía potencial en función de r. Esta función tiene un *mínimo* en r_0, donde la fuerza es cero. Las dos curvas están relacionadas por $F_r(r) = -dU/dr$, como vimos en la sección 7.4. Semejante función de energía potencial se denomina **pozo de potencial**. Una molécula en reposo a una distancia r_0 de otra necesitaría una energía adicional $|U_0|$, la "profundidad" del pozo de potencial, para "escapar" a un valor indefinidamente grande de r.

Las moléculas siempre están en movimiento; su energía cinética normalmente aumenta con la temperatura. A temperaturas muy bajas, la energía cinética media de una molécula puede ser mucho *menor* que la profundidad del pozo de potencial. Las moléculas se condensan entonces a la fase líquida o sólida con distancias intermoleculares medias cercanas a r_0. A temperaturas mayores, la energía cinética media se hace mayor que la profundidad $|U_0|$ del pozo de potencial. Las moléculas pueden entonces escapar de la fuerza intermolecular y quedar libres para moverse independientemente, como en la fase gaseosa de la materia.

En los *sólidos*, las moléculas vibran alrededor de puntos más o menos fijos. En un sólido cristalino, esos puntos están dispuestos en una *red cristalina*. La figura 18.9 representa la estructura cúbica cristalina del cloruro de sodio, y la figura 18.10 es una imagen de microscopio de barrido por tunelamiento de los átomos de silicio individuales en la superficie de un cristal.

18.9 Representación esquemática de la estructura cristalina cúbica del cloruro de sodio (sal de mesa).

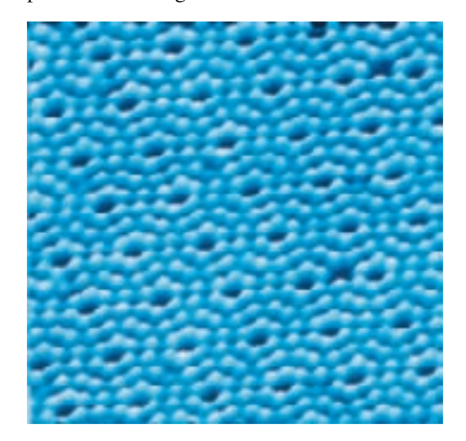


La vibración de las moléculas de un sólido alrededor de sus posiciones de equilibrio puede ser casi armónica simple si el pozo de potencial tiene forma aproximadamente parabólica a distancias cercanas a r_0. (Analizamos este tipo de movimiento armónico simple en la sección 14.4). No obstante, si la curva de energía potencial sube más gradualmente para $r > r_0$ que para $r < r_0$, como en la figura 18.8, la posición media se desplazará a una r mayor al aumentar la amplitud. Como señalamos en la sección 17.4, esta es la base de la expansión térmica.

En un *líquido*, las distancias intermoleculares no suelen ser mucho mayores que en la fase sólida de la misma sustancia, pero las moléculas tienen una libertad de movimiento mucho mayor. Los líquidos solo muestran estructuras regulares en las inmediaciones de unas cuantas moléculas.

Las moléculas de un *gas* suelen estar muy separadas y por ello solo tienen fuerzas de atracción muy pequeñas. Una molécula de gas se mueve en línea recta hasta chocar con otra molécula o con una pared del recipiente. En términos moleculares, el *gas ideal* es un gas cuyas moléculas *no* ejercen fuerzas de atracción entre sí (véase la figura 18.5*a*) y, por lo tanto, no tienen energía *potencial*.

18.10 Imagen de microscopio de barrido por tunelamiento de la superficie de un cristal de silicio. El área que se muestra solo tiene 9.0 nm (9.0×10^{-9} m) de anchura. Cada "cuenta" azul es un átomo individual de silicio; se puede ver claramente cómo estos átomos están dispuestos en una matriz (casi) perfecta de hexágonos.



A bajas temperaturas, casi todas las sustancias comunes están en la fase sólida. Al aumentar la temperatura, las sustancias se funden y luego se evaporan. Desde un punto de vista molecular, estas transiciones van en la dirección de energía cinética molecular creciente, por lo que la temperatura y la energía cinética molecular están íntimamente relacionadas.

Moles y número de Avogadro

Hemos usado el mol como medida de cantidad de sustancia. Un **mol** de cualquier elemento o compuesto químico puro contiene un número definido de moléculas, igual para todos los elementos y compuestos. La definición oficial del SI es:

Un mol es la cantidad de sustancia que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0.012 kg de carbono 12.

En nuestra explicación, las "entidades elementales" son moléculas. (En una sustancia monoatómica como el carbono o el helio, cada molécula tiene un solo átomo). Los átomos de un elemento dado pueden existir en varias formas isotópicas, que son químicamente idénticas pero tienen diferente masa atómica; "carbono 12" se refiere a un isótopo específico del carbono.

El número de moléculas en un mol se denomina **número de Avogadro** y se denota con N_A. El mejor valor numérico actual para N_A es

$$N_A = 6.02214179(30) \times 10^{23} \text{ moléculas/mol (número de Avogadro)}$$

La *masa molar M* de un compuesto es la masa de un mol. Esto es igual a la masa m de una sola molécula multiplicada por el número de Avogadro.

$$M = N_A m \quad \text{(masa molar, número de Avogadro y masa de una molécula)} \qquad (18.8)$$

Cuando la molécula consiste en un solo átomo, es común usar el término *masa atómica* en vez de masa molar o peso molecular.

Ejemplo 18.5 Masa atómica y molecular



Calcule la masa de un solo átomo de hidrógeno y la masa de una molécula de oxígeno.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema implica la relación entre la masa de una molécula o de un átomo (nuestra incógnita) y la correspondiente masa molar M. Usaremos la ecuación (18.8) en la forma $m = M/N_A$ y tomaremos los valores de las masas atómicas de la tabla periódica de los elementos (véase el apéndice D).

EJECUTAR: La masa atómica (masa molar) del hidrógeno atómico es $M_H = 1.008$ g/mol. Por lo tanto, la masa m_H de un solo átomo de hidrógeno es

$$m_H = \frac{1.008 \text{ g/mol}}{6.022 \times 10^{23} \text{ átomos/mol}} = 1.674 \times 10^{-24} \text{ g/átomo}$$

La masa atómica del oxígeno es de 16.0 g/mol, por lo que la masa molar del oxígeno, que tiene moléculas diatómicas (dos átomos), es de 32.0 g/mol. La masa de una sola molécula de oxígeno es

$$m_{O_2} = \frac{32.0 \text{ g/mol}}{6.022 \times 10^{23} \text{ moléculas/mol}} = 53.1 \times 10^{-24} \text{ g/molécula}$$

EVALUAR: Cabe señalar que los valores del apéndice D son las masas atómicas *medias* de una muestra natural de cada elemento. Tal muestra podría contener varios *isótopos* del elemento, cada uno con masa atómica distinta. Las muestras naturales de hidrógeno y oxígeno se componen casi exclusivamente de un solo isótopo.

Evalúe su comprensión de la sección 18.2 Imagine que pudiera ajustar el valor de r_0 para las moléculas de cierto compuesto químico (figura 18.8) con una perilla. Si se duplicara el valor de r_0, la densidad de la forma sólida del compuesto sería: **i.** dos veces mayor; **ii.** cuatro veces mayor; **iii.** ocho veces mayor; **iv.** $\frac{1}{2}$; **v.** $\frac{1}{4}$; **vi.** $\frac{1}{8}$.



18.3 Modelo cinético-molecular del gas ideal

MasteringPHYSICS

PhET: Balloons & Buoyancy
PhET: Friction
PhET: Gas Properties
ActivPhysics 8.1: Characteristics of a Gas

El objetivo de cualquier teoría molecular de la materia es comprender las propiedades *macroscópicas* de la materia en términos de su estructura y comportamiento atómicos o moleculares. Una vez que comprendemos esto, podemos diseñar materiales con las propiedades específicas deseadas. Las teorías han conducido al desarrollo de aceros de alta resistencia, materiales semiconductores para dispositivos electrónicos, y un sinnúmero de otros materiales esenciales para la tecnología contemporánea.

En esta sección y las siguientes, consideraremos un modelo molecular sencillo del gas ideal. Este *modelo cinético-molecular* representa el gas como un gran número de partículas que rebotan dentro de un recipiente cerrado. En esta sección usaremos el modelo cinético-molecular para entender la relación entre la ecuación de estado del gas ideal (ecuación 18.3) y las leyes de Newton. En la siguiente sección usaremos el modelo cinético-molecular para predecir la capacidad calorífica molar de un gas ideal. Luego ampliaremos el modelo para incluir "partículas" que no sean puntos, sino que tengan tamaño finito.

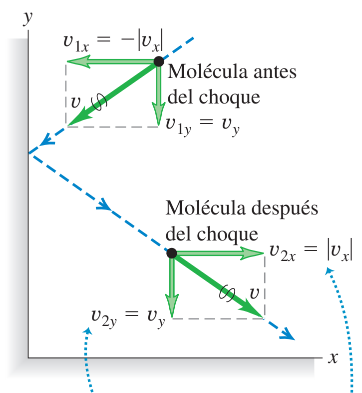
La siguiente explicación del modelo cinético-molecular abarca varios pasos, y tal vez el lector tenga que repasarla varias veces para entender cómo funciona todo. ¡No se desanime!

A continuación se presentan las suposiciones de nuestro modelo:

1. Un recipiente con volumen V contiene un número muy grande N de moléculas idénticas, cada una con masa m.
2. Las moléculas se comportan como partículas puntuales; su tamaño es pequeño en comparación con la distancia media entre partículas y las dimensiones del recipiente.
3. Las moléculas están en constante movimiento. Las moléculas chocan ocasionalmente con las paredes del recipiente. Estos choques son perfectamente elásticos.
4. Las paredes del recipiente son perfectamente rígidas y con masa infinita; no se mueven.

CUIDADO **Moléculas contra moles** Asegúrese de no confundir N, el número de *moléculas* del gas, con n, el número de *moles*. El número de moléculas es igual al número de moles multiplicado por el número de Avogadro: $N = nN_A$.

18.11 Choque elástico de una molécula con la pared de un recipiente idealizado.



Colisiones y presión de gas

Durante los choques, las moléculas ejercen *fuerzas* sobre las paredes del recipiente; este es el origen de la *presión* del gas. En un choque representativo (figura 18.11) la componente de velocidad paralela a la pared no cambia, y la componente perpendicular a la pared invierte su dirección sin cambiar de magnitud.

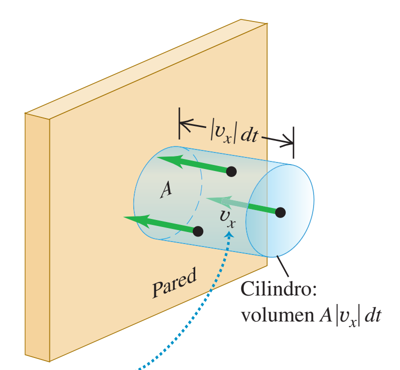
De acuerdo con nuestro programa, primero determinaremos el *número* de choques por unidad de tiempo para cierta área de pared A. Luego calcularemos el cambio de momento lineal total asociado con estos choques y la fuerza necesaria para provocar ese cambio. Así podremos determinar la presión, que es la fuerza por unidad de área, y comparar el resultado con la ecuación del gas ideal. Encontraremos una conexión directa entre la temperatura del gas y la energía cinética de sus moléculas.

Para comenzar, supondremos que todas las moléculas del gas tienen la misma *magnitud* de la componente x de velocidad, $|v_x|$. Esto no es correcto, pero ayuda a aclarar las ideas básicas. Después demostraremos que esta suposición no es realmente necesaria.

Como se muestra en la figura 18.11, en cada choque la componente x de velocidad cambia de $-|v_x|$ a $+|v_x|$. Así, la componente x del momento lineal cambia de $-m|v_x|$ a $+m|v_x|$, y el *cambio* de la componente x del momento lineal es $m|v_x| - (-m|v_x|) = 2m|v_x|$.

Si una molécula va a chocar con cierta área de pared A durante un breve intervalo de tiempo dt, al comenzar dt deberá estar, cuando mucho, a una distancia $|v_x|\,dt$ de la pared (figura 18.12) y dirigida hacia la pared. Así, el número de moléculas que chocan con A durante dt es igual al número de moléculas que están dentro de un cilindro

18.12 Para que una molécula golpee la pared dentro del área A durante un intervalo de tiempo dt, debe moverse en dirección hacia la pared y estar dentro del cilindro sombreado de altura $|v_x|\,dt$ al principio del intervalo.



con área de la base A y longitud $|v_x|\,dt$ cuya velocidad x está dirigida hacia la pared. El volumen de este cilindro es $A|v_x|\,dt$. Suponiendo que el número de moléculas por unidad de volumen (N/V) es uniforme, el *número* de moléculas en este cilindro es $(N/V)(A|v_x|\,dt)$. En promedio, la mitad de estas moléculas se están acercando a la pared y la mitad se está alejando, por lo que el número de choques con A durante dt es

$$\frac{1}{2}\left(\frac{N}{V}\right)(A|v_x|\,dt)$$

Para el sistema de todas las moléculas del gas, el cambio total de momento lineal dP_x durante dt es el *número* de choques multiplicado por $2m|v_x|$:

$$dP_x = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{V}\right)(A|v_x|\,dt)(2m|v_x|) = \frac{NAmv_x{}^2\,dt}{V} \qquad (18.9)$$

(Estamos usando P mayúscula para el momento lineal total y p para la presión. ¡Tenga cuidado!). Escribimos $v_x{}^2$ en vez de $|v_x|^2$ en la expresión final porque el cuadrado del valor absoluto de un número es igual al cuadrado de ese número. La *tasa* de cambio de la componente de momento lineal P_x es

$$\frac{dP_x}{dt} = \frac{NAmv_x{}^2}{V} \qquad (18.10)$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton, esta tasa de cambio del momento lineal es igual a la fuerza ejercida por el área de pared A sobre las moléculas del gas. Por la *tercera* ley de Newton, esta es igual y opuesta a la fuerza ejercida *sobre* la pared *por* las moléculas. La presión p es la magnitud de la fuerza ejercida sobre la pared por unidad de área, y obtenemos

$$p = \frac{F}{A} = \frac{Nmv_x{}^2}{V} \qquad (18.11)$$

La presión ejercida por el gas depende del número de moléculas por volumen (N/V), la masa m por molécula y la rapidez de las moléculas.

Presión y energías cinéticas moleculares

Mencionamos que $|v_x|$ *no* es realmente igual para todas las moléculas, pero podríamos haber organizado las moléculas en grupos con la misma $|v_x|$ dentro de cada grupo, y luego sumado las contribuciones resultantes a la presión. El efecto neto de esto es simplemente sustituir $v_x{}^2$ en la ecuación (18.11) por el valor *medio* de $v_x{}^2$, que denotamos con $(v_x{}^2)_{\text{med}}$. Además, podemos relacionar $(v_x{}^2)_{\text{med}}$ con la *rapidez* de las moléculas. La rapidez v de cualquier molécula está relacionada con las componentes de velocidad v_x, v_y y v_z por

$$v^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2$$

Podemos promediar esta relación para todas las moléculas:

$$(v^2)_{\text{med}} = (v_x{}^2)_{\text{med}} + (v_y{}^2)_{\text{med}} + (v_z{}^2)_{\text{med}}$$

Sin embargo, en nuestro modelo no hay una diferencia real entre las direcciones x, y y z. (Las rapideces moleculares son muy altas en un gas típico, por lo que los efectos de la gravedad son insignificantes). Se deduce que $(v_x{}^2)_{\text{med}}$, $(v_y{}^2)_{\text{med}}$ y $(v_z{}^2)_{\text{med}}$ deben ser *iguales*. Por lo tanto, $(v^2)_{\text{med}}$ es igual $3(v_x{}^2)_{\text{med}}$ y

$$(v_x{}^2)_{\text{med}} = \frac{1}{3}(v^2)_{\text{med}}$$

por lo que la ecuación (18.11) se convierte en

$$pV = \frac{1}{3}Nm(v^2)_{\text{med}} = \frac{1}{3}N\left[\frac{1}{2}m(v^2)_{\text{med}}\right] \qquad (18.12)$$

Observamos que $\frac{1}{2}m(v^2)_{\text{med}}$ es la energía cinética de traslación media de una sola molécula. El producto de esto por el número de moléculas N es igual a la energía cinética

aleatoria total K_{tr} del movimiento de traslación de todas las moléculas. (La notación K_{tr} nos recuerda que esta energía está asociada al movimiento de *traslación*. Podría haber energías adicionales relacionadas con la rotación y la vibración de las moléculas). El producto pV es igual a dos tercios de la energía cinética de traslación total:

$$pV = \frac{2}{3}K_{tr} \tag{18.13}$$

Ahora comparamos esto con la ecuación del gas ideal,

$$pV = nRT$$

que se basa en estudios experimentales del comportamiento de los gases. Para que las dos ecuaciones concuerden, debemos tener

$$K_{tr} = \frac{3}{2}nRT \quad \text{(energía cinética de traslación media de } n \text{ moles de gas ideal)} \tag{18.14}$$

Este resultado tan sencillo indica que K_{tr} es *directamente proporcional* a la temperatura absoluta T (figura 18.13).

La energía cinética de traslación media de una sola molécula es la energía cinética de traslación total K_{tr} de todas las moléculas dividida entre el número de moléculas, N:

$$\frac{K_{tr}}{N} = \frac{1}{2}m(v^2)_{med} = \frac{3nRT}{2N}$$

También, el número total de moléculas N es el número de moles n multiplicado por el número de Avogadro N_A, de manera que

$$N = nN_A \qquad \frac{n}{N} = \frac{1}{N_A}$$

y

$$\frac{K_{tr}}{N} = \frac{1}{2}m(v^2)_{med} = \frac{3}{2}\left(\frac{R}{N_A}\right)T \tag{18.15}$$

La proporción R/N_A aparece con frecuencia en la teoría molecular; se llama **constante de Boltzmann**, k:

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}}{6.022 \times 10^{23} \text{ moléculas/mol}}$$

$$= 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/molécula} \cdot \text{K}$$

(El mejor valor numérico actual de k es $1.3806504(24) \times 10^{-23}$ J/molécula · K). Podemos replantear la ecuación (18.15) en términos de k:

$$\frac{1}{2}m(v^2)_{med} = \frac{3}{2}kT \quad \text{(energía cinética de traslación media de una molécula de gas)} \tag{18.16}$$

Esto muestra que la energía cinética de traslación media *por molécula* depende solo de la temperatura; no de la presión ni del volumen, ni tampoco del tipo de molécula. Podemos obtener la energía cinética de traslación media *por mol* multiplicando la ecuación (18.16) por el número de Avogadro y usando la relación $M = N_A m$:

$$N_A\frac{1}{2}m(v^2)_{med} = \frac{1}{2}M(v^2)_{med} = \frac{3}{2}RT \quad \text{(energía cinética de traslación media por mol de gas)} \tag{18.17}$$

La energía cinética de traslación de un mol de gas ideal depende solo de T.

18.13 El aire veraniego (arriba) es más cálido que el aire invernal (abajo); es decir, la energía cinética de traslación media de las moléculas de aire es mayor durante el verano.





Por último, a veces es útil plantear la ecuación del gas ideal sobre una base molecular. Usamos $N = N_A n$ y $R = N_A k$ para obtener esta forma alternativa:

$$pV = NkT \tag{18.18}$$

Esto indica que podemos considerar la constante de Boltzmann k como una constante de los gases "por molécula", en vez de la R "por mol" que normalmente se usa.

Rapideces moleculares

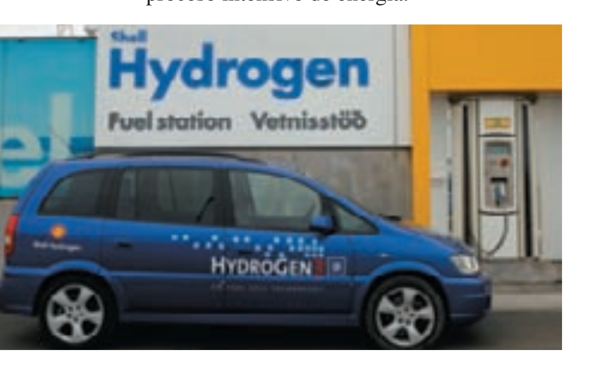
A partir de las ecuaciones (18.16) y (18.17), podemos obtener expresiones para la raíz cuadrada de $(v^2)_{med}$, llamada **rapidez eficaz** o **raíz cuadrática media** (o **rapidez rms**, por las siglas de *root-mean-square speed*) v_{rms}:

$$v_{rms} = \sqrt{(v^2)_{med}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad \text{(rapidez eficaz de una molécula de gas)} \tag{18.19}$$

Tal vez parezca más natural caracterizar las rapideces moleculares por su valor *medio* y no por v_{rms}, pero vemos que v_{rms} se obtiene más directamente de las ecuaciones (18.16) y (18.17). Para calcular la rapidez eficaz, elevamos al cuadrado cada rapidez molecular, sumamos, dividimos entre el número de moléculas y sacamos la raíz cuadrada; v_{rms} es la *raíz* de la *media* de los *cuadrados* (*root mean square*, en inglés). El ejemplo 18.7 ilustra este procedimiento.

Las ecuaciones (18.16) y (18.19) indican que, a una temperatura dada T, las moléculas de gas con diferente masa m tienen la misma energía cinética media pero diferente rapidez eficaz. En promedio, las moléculas de nitrógeno ($M = 28$ g/mol) del aire se mueven más rápidamente que las de oxígeno ($M = 32$ g/mol). Las moléculas de hidrógeno ($M = 2$ g/mol) son las más rápidas; por eso casi no hay hidrógeno en la atmósfera terrestre, a pesar de ser el elemento más común del universo (figura 18.14). Una fracción apreciable de cualesquier moléculas de H_2 en la atmósfera rebasaría la "rapidez de escape" de la Tierra, que es de 1.12×10^4 m/s (calculada en el ejemplo 13.5, sección 13.3) y escaparía al espacio. Los gases más pesados y lentos no pueden escapar con tanta facilidad, y por ello predominan en nuestra atmósfera.

18.14 Mientras el hidrógeno es un combustible deseable para los vehículos, es solo un indicio constituyente en nuestra atmósfera (solo hay el 0.00005% de hidrógeno por volumen). Por consiguiente, el combustible de hidrógeno tiene que generarse mediante electrólisis del agua, que por sí solo es un proceso intensivo de energía.



La suposición de que los choques de las moléculas con las paredes del recipiente son perfectamente elásticos es una simplificación excesiva. Investigaciones más detalladas revelan que, casi siempre, las moléculas se adhieren a las paredes durante un breve lapso y luego salen con una rapidez que es característica de la temperatura *de la pared*. No obstante, el gas y la pared por lo regular están en equilibrio térmico y tienen la misma temperatura, por lo que no hay transferencia neta de energía entre el gas y la pared, y este descubrimiento no altera la validez de nuestras conclusiones.

Estrategia para resolver problemas 18.2 Teoría cinético-molecular



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Use los resultados del modelo cinético-molecular siempre que le pidan relacionar las propiedades macroscópicas de un gas, como presión y temperatura, con propiedades microscópicas, como la rapidez molecular.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:
1. Identifique las cantidades conocidas y las incógnitas que se van a calcular.
2. Elija la ecuación (o ecuaciones) a usar del grupo de las ecuaciones (18.14), (18.16) y (18.19).

EJECUTAR *la solución* como sigue: Utilice las unidades de manera consistente. Tenga especial cuidado con lo siguiente:
1. Las unidades acostumbradas para la masa molar M son gramos/mol; estas unidades suelen omitirse en las tablas. En ecuaciones como la (18.19), cuando se usan unidades del SI, se debe expresar M en kilogramos por mol. Por ejemplo, para el oxígeno = 32 g/mol = 32×10^{-3} kg/mol.
2. ¿Está trabajando "por molécula" (con m, N y k) o "por mol" (con M, n y R)? Para comprobar unidades, piense que N tiene unidades de "moléculas"; entonces m tiene unidades de "masa por molécula" y k tiene unidades de "joules por molécula por kelvin". De manera similar, n tiene unidades de moles; entonces M tiene unidades de masa por mol y R tiene unidades de joules por mol por kelvin.
3. Recuerde que T siempre es temperatura *absoluta* (Kelvin).

EVALUAR *la respuesta:* ¿Son razonables las respuestas? He aquí un punto de referencia: las rapideces moleculares típicas a temperatura ambiente son de varios cientos de metros por segundo.



Ejemplo 18.6 Cálculo de energía cinética molecular y v_{rms}

a) Calcule la energía cinética de traslación media de una molécula de un gas ideal a 27°C. *b*) Calcule la energía cinética de traslación aleatoria total de las moléculas de un mol de ese gas. *c*) Calcule la rapidez eficaz de las moléculas de oxígeno a esta temperatura.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema implica la energía cinética de traslación de un gas ideal por molécula y por mol, así como la rapidez eficaz v_{rms} de las moléculas en el gas. Nos dan la temperatura $T = 27°C = 300$ K y $n = 1$ mol; utilice la masa molecular m del oxígeno. Usaremos la ecuación (18.16) para determinar la energía cinética media de una molécula, la ecuación (18.14) para obtener la energía cinética molecular total y la ecuación (18.19) para encontrar v_{rms}.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (18.16),

$$\frac{1}{2}m(v^2)_{med} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})$$
$$= 6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$$

b) Según la ecuación (18.14), la energía cinética de un mol es

$$K_{tr} = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}(1 \text{ mol})(8.314 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(300 \text{ K}) = 3740 \text{ J}$$

c) Encontramos la masa por molécula m y la masa molar M del oxígeno molecular en el ejemplo 18.5. Usando la ecuación (18.19), podemos calcular a v_{rms} de dos maneras:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})}{5.31 \times 10^{-26} \text{ kg}}}$$
$$= 484 \text{ m/s} = 1740 \text{ km/h} = 1080 \text{ mi/h}$$

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3(8.314 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(300 \text{ K})}{32.0 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}}} = 484 \text{ m/s}$$

EVALUAR: La respuesta del inciso *a*) no depende de la masa de la molécula. Podemos comprobar nuestro resultado del inciso *b*) observando que la energía cinética de traslación por mol debe ser igual a la media de la energía cinética de traslación por molécula del inciso *a*) multiplicada por el número de Avogadro N_A: $K_{tr} = (6.022 \times 10^{23}$ moléculas$)(6.21 \times 10^{-21}$ J/molécula$) = 3740$ J.



Ejemplo 18.7 Rapideces rms y media

Cinco moléculas de gas elegidas al azar viajan con rapideces de 500, 600, 700, 800 y 900 m/s. Calcule la rapidez rms. ¿Cuál es la rapidez *media*?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Para resolver este problema, usamos la definición del valor eficaz (rms) y la media de un conjunto de números. Para encontrar el valor cuadrático medio (v_{rms}), elevamos al cuadrado cada valor de rapidez, obtenemos el promedio (la media) de esos cuadrados y luego calculamos la raíz cuadrada del resultado. Encontramos v_{med} de la manera habitual.

EJECUTAR: El valor medio de v^2 y la v_{rms} resultante para las cinco moléculas son

$$(v^2)_{med} = \frac{500^2 + 600^2 + 700^2 + 800^2 + 900^2}{5} \text{ m}^2/\text{s}^2$$
$$= 5.10 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_{rms} = \sqrt{(v^2)_{med}} = 714 \text{ m/s}$$

La rapidez promedio v_{med} es

$$v_{med} = \frac{500 + 600 + 700 + 800 + 900}{5} \text{ m/s} = 700 \text{ m/s}$$

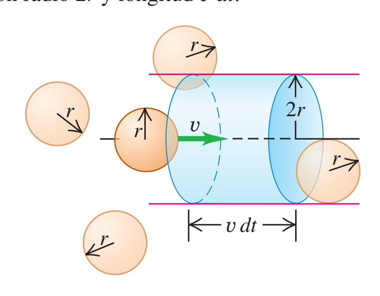
EVALUAR: Vemos que, en general, v_{rms} y v_{med} *no* son iguales. En términos generales, v_{rms} da más peso a las rapideces más altas.

Choques entre moléculas

No hemos considerado la posibilidad de que dos moléculas de gas choquen. Si realmente son puntos, *nunca* chocan; pero consideremos un modelo más realista en el que las moléculas son esferas rígidas con radio r. ¿Con qué frecuencia chocan con otras moléculas? ¿Cuánto viajan, en promedio, entre choques? Podemos obtener respuestas aproximadas del siguiente modelo, un tanto primitivo.

Considere N moléculas esféricas con radio r en un volumen V. Suponga que solo una molécula se mueve: chocará con otra molécula cuando la distancia entre sus centros sea $2r$. Suponga que dibujamos un cilindro con radio $2r$, con su eje paralelo a la velocidad de la molécula (figura 18.15). La molécula que se mueve choca con cualquier otra molécula cuyo centro está dentro de este cilindro. En un tiempo corto dt, una molécula con rapidez v recorre una distancia $v\,dt$, chocando con cualquier molécula que esté en el volumen cilíndrico con radio $2r$ y longitud $v\,dt$. El volumen del cilindro es $4\pi r^2 v\,dt$. Hay N/V moléculas por unidad de volumen, por lo que el número dN de las que tienen su centro en este cilindro es

$$dN = 4\pi r^2 v\,dt\,N/V$$



18.15 En un tiempo dt una molécula con radio r choca con cualquier otra molécula que esté dentro de un volumen cilíndrico con radio $2r$ y longitud $v\,dt$.

Así, el número de choques por *unidad de tiempo* es

$$\frac{dN}{dt} = \frac{4\pi r^2 v N}{V}$$

Este resultado supone que solo se mueve una molécula. El análisis se complica mucho más si todas las moléculas se mueven a la vez. En tal caso, los choques son más frecuentes, y la ecuación anterior debe multiplicarse por un factor de $\sqrt{2}$:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{4\pi \sqrt{2}\, r^2 v N}{V}$$

El tiempo medio t_{med} entre choques, llamado *tiempo libre medio*, es el recíproco de esta expresión:

$$t_{med} = \frac{V}{4\pi \sqrt{2}\, r^2 v N} \qquad (18.20)$$

La distancia media recorrida entre choques se llama **trayectoria libre media** y se denota con λ (la letra griega lambda). En nuestro sencillo modelo, esta trayectoria es simplemente la rapidez v de la molécula multiplicada por t_{med}:

$$\lambda = v t_{med} = \frac{V}{4\pi \sqrt{2}\, r^2 N} \quad \text{(trayectoria libre media de una molécula de gas)} \qquad (18.21)$$

18.16 Si usted trata de caminar entre una multitud, su trayectoria libre media —es decir, la distancia que usted puede desplazarse en promedio sin chocar con alguien— depende del tamaño de las personas y de qué tan cerca estén entre sí.



La trayectoria libre media es inversamente proporcional al número de moléculas por unidad de volumen (N/V) e inversamente proporcional al área de sección transversal πr^2 de una molécula; cuantas más moléculas haya y mayor sea su tamaño, más corta será la distancia media entre choques (figura 18.16). Observe que la trayectoria libre media *no* depende de la rapidez de la molécula.

Podemos expresar la ecuación (18.21) en términos de propiedades macroscópicas del gas, utilizando la ecuación del gas ideal en la forma de la ecuación (18.18), $pV = NkT$. Tenemos

$$\lambda = \frac{kT}{4\pi \sqrt{2}\, r^2 p} \qquad (18.22)$$

Si se aumenta la temperatura a presión constante, el gas se expande, la distancia media entre moléculas se incrementa y λ aumenta. Si se aumenta la presión a temperatura constante, el gas se comprime y λ disminuye.



Ejemplo 18.8 Cálculo de la trayectoria libre media

a) Estime la trayectoria libre media de una molécula de aire a 27°C y 1 atm. Modele las moléculas como esferas con radio $r = 2.0 \times 10^{-10}$ m. *b*) Estime la trayectoria libre media de una molécula de oxígeno con $v = v_{rms}$ a 27°C y 1 atm.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema utiliza los conceptos de trayectoria libre media y tiempo libre medio (que son nuestras incógnitas). Usaremos la ecuación (18.22) para determinar la trayectoria libre media λ. Entonces, utilizamos la relación básica $\lambda = v t_{med}$ de la ecuación (18.21) con $v = v_{rms}$ para encontrar el tiempo libre medio t_{med}.

EJECUTAR: *a*) A partir de la ecuación (18.22):

$$\lambda = \frac{kT}{4\pi\sqrt{2} r^2 p} = \frac{(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})}{4\pi\sqrt{2}(2.0 \times 10^{-10}\ \text{m})^2(1.01 \times 10^5\ \text{Pa})}$$
$$= 5.8 \times 10^{-8}\ \text{m}$$

b) De acuerdo con el ejemplo 18.6, para oxígeno a 27°C, la rapidez eficaz es $v_{rms} = 484$ m/s, por lo que el tiempo libre medio para una molécula con esta rapidez es

$$t_{med} = \frac{\lambda}{v} = \frac{5.8 \times 10^{-8}\ \text{m}}{484\ \text{m/s}} = 1.2 \times 10^{-10}\ \text{s}$$

¡Esta molécula choca unas 10^{10} veces por segundo!

EVALUAR: Observe que a partir de las ecuaciones (18.21) y (18.22) la *trayectoria* libre media no depende de la rapidez de la molécula, pero el *tiempo* libre medio sí. Las moléculas más lentas tienen un intervalo de tiempo medio t_{med} mayor entre choques que las rápidas, pero la *distancia* media λ entre choques es la misma, sea cual fuere la rapidez de la molécula. Nuestra respuesta al inciso *a*) indica que la molécula no va lejos entre colisiones, pero la trayectoria libre media es de varios cientos de veces el radio molecular *r*.

Evalúe su comprensión de la sección 18.3 Clasifique los siguientes gases *a*) de mayor a menor rapidez rms de las moléculas y *b*) de mayor a menor energía cinética de traslación media de una molécula: **i.** oxígeno ($M = 32.0$ g/mol) a 300 K; **ii.** nitrógeno ($M = 28.0$ g/mol) a 300 K; **iii.** oxígeno a 330 K; **iv.** nitrógeno a 330 K.



18.4 Capacidades caloríficas

Cuando presentamos el concepto de capacidad calorífica en la sección 17.5, hablamos de maneras de *medir* el calor específico o la capacidad calorífica molar de un material. Ahora veremos cómo podemos *predecir* estos valores a partir de la teoría.

Capacidades caloríficas de los gases

La base de nuestro análisis es que el calor es *energía* en tránsito. Si agregamos calor a una sustancia, aumentamos su energía molecular. En esta explicación mantendremos el volumen de gas constante para no tener que preocuparnos por la transferencia de energía mediante trabajo mecánico. Si dejamos que el gas se expanda, efectuará trabajo empujando las paredes móviles de su recipiente, y tendríamos que incluir esta transferencia de energía adicional en los cálculos. Volveremos a este caso más general en el capítulo 19. Por ahora, con el volumen constante, nos interesa C_V, la capacidad calorífica molar *a volumen constante*.

En el sencillo modelo cinético-molecular de la sección 18.3, la energía molecular consiste solo en la energía cinética de traslación K_{tr} de las moléculas puntuales. Esta energía es directamente proporcional a la temperatura absoluta T, como se muestra en la ecuación (18.14), $K_{tr} = \frac{3}{2}nRT$. Cuando el cambio de temperatura dT es pequeño, el cambio correspondiente de la energía cinética es

$$dK_{tr} = \frac{3}{2}nR\,dT \tag{18.23}$$

A partir de la definición de capacidad calorífica molar a volumen constante, C_V (véase la sección 17.5), también tenemos

$$dQ = nC_V\,dT \tag{18.24}$$

donde dQ es el aporte de calor necesario para un cambio de temperatura dT. Ahora bien, si K_{tr} representa la energía molecular total, como hemos supuesto, dQ y dK_{tr} deben ser *iguales* (figura 18.17). Igualando las ecuaciones (18.23) y (18.24), obtenemos

$$nC_V\,dT = \frac{3}{2}nR\,dT$$

$$C_V = \frac{3}{2}R \qquad \text{(gas ideal de partículas puntuales)} \tag{18.25}$$

Este resultado sorprendentemente sencillo indica que la capacidad calorífica molar (a volumen constante) es $3R/2$ para *todo* gas cuyas moléculas pueden representarse como puntos.

¿La ecuación (18.25) concuerda con los valores medidos de capacidades caloríficas molares? En unidades del SI, la ecuación (18.25) da

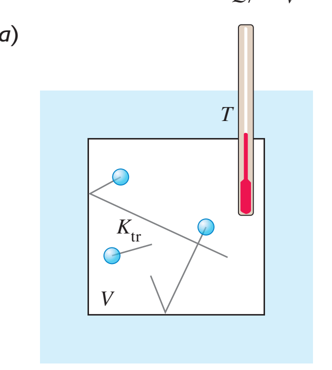
$$C_V = \frac{3}{2}(8.314\ \text{J/mol}\cdot\text{K}) = 12.47\ \text{J/mol}\cdot\text{K}$$

Como comparación, la tabla 18.1 presenta valores medidos de C_V para varios gases. Vemos que, para los gases *monoatómicos*, nuestra predicción es excelente, pero difiere mucho para los gases diatómicos y poliatómicos.

Esta comparación nos dice que nuestro modelo de moléculas puntuales es bueno para gases monoatómicos, pero para moléculas diatómicas y poliatómicas necesitamos algo más complejo. Por ejemplo, podemos visualizar una molécula diatómica como *dos* masas

18.17 *a*) Volumen fijo V de un gas ideal monoatómico. *b*) Si se agrega una cantidad de calor dQ al gas, la energía cinética de traslación total aumenta en $dK_{tr} = dQ$, y la temperatura aumenta en $dT = dQ/nC_V$.

a)



b)

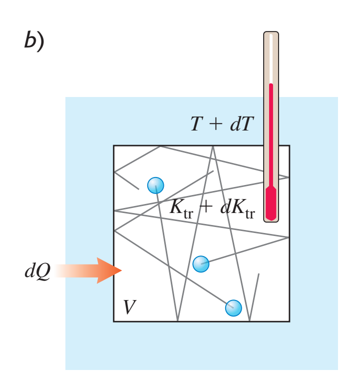
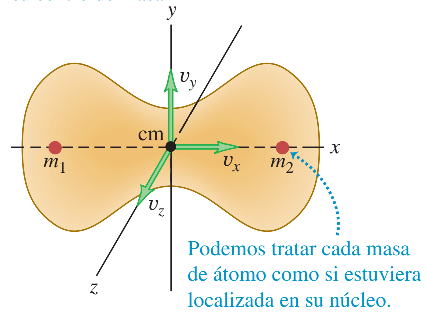


Tabla 18.1 Capacidades caloríficas molares de gases

Tipo de gas	Gas	C_V (J/mol · K)
Monoatómico	He	12.47
	Ar	12.47
Diatómico	H_2	20.42
	N_2	20.76
	O_2	20.85
	CO	20.85
Poliatómico	CO_2	28.46
	SO_2	31.39
	H_2S	25.95

18.18 Movimientos de una molécula diatómica.

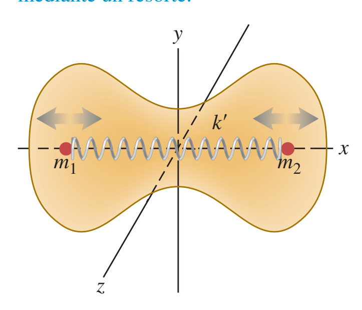
a) **Movimiento de traslación.** La molécula se mueve como un todo; su velocidad puede describirse como las componentes x, y y z de su centro de masa



b) **Movimiento de rotación.** La molécula gira alrededor de su centro de masa. Esta molécula tiene dos ejes independientes de rotación.

Ejes independientes de rotación

c) **Movimiento vibracional.** La molécula oscila como si los núcleos estuvieran conectados mediante un resorte.



puntuales, como una pequeña mancuerna elástica, con una fuerza de interacción interatómica como la que se representa en la figura 18.8. Una molécula así podría tener energía cinética adicional asociada con la *rotación* alrededor de ejes que pasan por su centro de masa. Los átomos también podrían tener un movimiento *vibratorio* sobre la línea que los une, con energías cinética y potencial adicionales. Las posibilidades se muestran en la figura 18.18.

Cuando fluye calor hacia un gas *monoatómico* a volumen constante, *toda* la energía agregada aumenta la energía cinética molecular de traslación. La ecuación (18.23) indica que esto aumenta la temperatura. Pero cuando la temperatura aumenta en la misma cantidad en un gas *diatómico* o *poliatómico*, se requiere calor adicional para el aumento en las energías rotacional y vibracional. Por ello, los gases poliatómicos tienen capacidades caloríficas molares *mayores* que los monoatómicos, como se aprecia en la tabla 18.1.

¿Cómo sabemos cuánta energía corresponde a cada tipo de movimiento adicional de una molécula compleja, en comparación con la energía cinética de traslación? El nuevo principio que necesitamos es el de **equipartición de la energía**. Este principio se puede deducir de consideraciones complejas de mecánica estadística que rebasan nuestro alcance, por lo que lo trataremos como un axioma.

El principio de equipartición de la energía afirma que cada componente de velocidad (lineal o angular) tiene, en promedio, una energía cinética asociada por molécula de $\frac{1}{2}kT$, o la mitad del resultado de multiplicar la constante de Boltzmann por la temperatura absoluta. El número de componentes de velocidad necesarias para describir cabalmente el movimiento de una molécula se denomina número de **grados de libertad**. En el caso de un gas monoatómico, hay tres grados de libertad (para las componentes de velocidad v_x, v_y y v_z); esto da una energía cinética media total por molécula de $3(\frac{1}{2}kT)$, congruente con la ecuación (18.16).

En el caso de una molécula *diatómica*, hay dos posibles ejes de rotación, perpendiculares entre sí y perpendiculares al eje de la molécula. (No incluimos la rotación alrededor del eje de la molécula porque en choques ordinarios no hay forma de que este movimiento cambie). Si asignamos cinco grados de libertad a una molécula diatómica, la energía cinética media total por molécula es $\frac{5}{2}kT$ en vez de $\frac{3}{2}kT$. La energía cinética total de n moles es $K_{\text{total}} = nN_A(\frac{5}{2}kT) = \frac{5}{2}n(kN_A)T = \frac{5}{2}nRT$, y la capacidad calorífica molar (a volumen constante) es

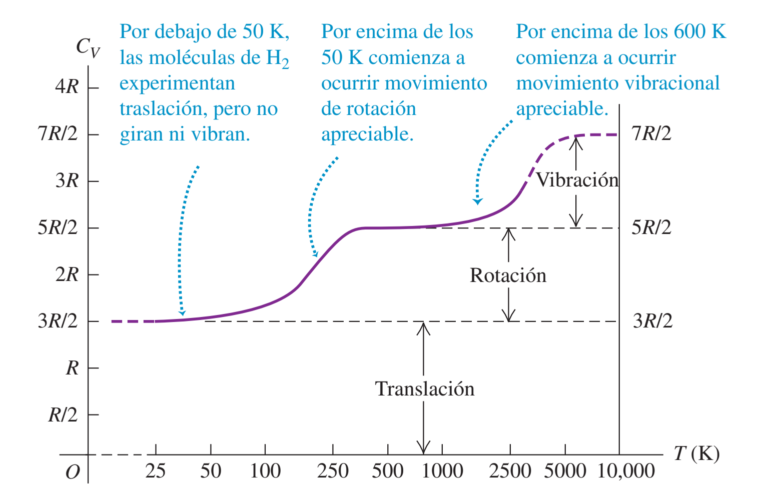
$$C_V = \frac{5}{2}R \qquad \text{(gas diatómico, incluida la rotación)} \qquad (18.26)$$

En unidades del SI,

$$C_V = \frac{5}{2}(8.314\ \text{J/mol}\cdot\text{K}) = 20.79\ \text{J/mol}\cdot\text{K}$$

Esto concuerda muy cercanamente con los valores medidos para gases diatómicos, que aparecen en la tabla 18.1.

El movimiento *vibracional* también puede contribuir a las capacidades caloríficas de los gases. Los enlaces moleculares no son rígidos; pueden estirarse y doblarse, y las vibraciones resultantes dan lugar a grados de libertad y energías adicionales. Sin embargo, en la mayoría de los gases diatómicos, la vibración *no* contribuye apreciablemente a la capacidad calorífica. La razón es sutil e implica conceptos de mecánica cuántica. En pocas palabras, la energía de vibración solo puede cambiar en pasos finitos. Si el cambio de energía del primer paso es mucho mayor que la energía de la mayoría de las moléculas, casi todas estas permanecerán en el estado de movimiento de mínima energía. En tal caso, un cambio de temperatura no altera apreciablemente su energía vibracional media, y los grados de libertad vibracionales quedan "excluidos". En moléculas más complejas, las diferencias entre los niveles de energía permitidos llegan a ser mucho menores, y la vibración *sí* contribuye a la capacidad calorífica. La energía rotacional de una molécula también cambia en pasos finitos, pero estos suelen ser mucho más pequeños; la "exclusión" de grados



18.19 Valores experimentales de C_V, la capacidad calorífica molar a volumen constante, para el hidrógeno gaseoso (H_2). La temperatura está graficada en una escala logarítmica.

de libertad rotacionales solo se da en unos cuantos casos, como en la molécula de hidrógeno por debajo de 100 K.

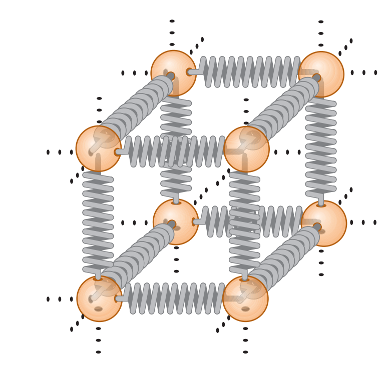
En la tabla 18.1, los valores grandes de C_V para algunas moléculas poliatómicas revelan las aportaciones de la energía de vibración. Además, una molécula con tres o más átomos que no están en línea recta tiene tres grados de libertad rotacionales, no dos.

Por lo anterior, cabe esperar que la capacidad calorífica dependa de la temperatura y que, en general, aumente al incrementarse T. La figura 18.19 muestra la dependencia de C_V con respecto a la temperatura para hidrógeno gaseoso (H_2), e indica las temperaturas a las que las energías de rotación y de vibración comienzan a contribuir a la capacidad calorífica.

Capacidades caloríficas de sólidos

Podemos realizar un análisis similar para la capacidad calorífica de un sólido cristalino. Consideremos un cristal formado por N átomos idénticos (un *sólido monoatómico*). Cada átomo está vinculado a una posición de equilibrio por fuerzas interatómicas. La elasticidad de los materiales sólidos demuestra que tales fuerzas permiten el estiramiento y la flexión de los enlaces. Podemos visualizar un cristal como una matriz de átomos conectados por pequeños resortes (figura 18.20). Cada átomo puede *vibrar* alrededor de su posición de equilibrio.

18.20 Para visualizar las fuerzas entre átomos vecinos de un cristal, imagine que cada átomo está conectado a sus vecinos mediante resortes.



Cada átomo tiene tres grados de libertad, correspondientes a sus tres componentes de velocidad. Según el principio de equipartición, cada átomo tiene una energía cinética media de $\frac{1}{2}kT$ por cada grado de libertad. Además, cada átomo tiene energía *potencial* asociada con la deformación elástica. En el caso de un oscilador armónico simple (que se explicó en el capítulo 14), no es difícil demostrar que la energía cinética media de un átomo es *igual* a su energía potencial media. En nuestro modelo de un cristal, cada átomo es básicamente un oscilador armónico tridimensional; puede demostrarse que la igualdad de las energías cinética y potencial también se cumple aquí, siempre que las fuerzas de "resorte" obedezcan la ley de Hooke.

Así, cabe esperar que cada átomo tenga una energía cinética media de $\frac{3}{2}kT$ y una energía potencial media de $\frac{3}{2}kT$, es decir, una energía total media de $3KT$ por átomo. Si el cristal contiene N átomos o n moles, su energía total es

$$E_{\text{total}} = 3NkT = 3nRT \qquad (18.27)$$

De lo anterior, concluimos que la capacidad calorífica molar de un cristal debería ser

$$C_V = 3R \qquad \text{(sólido monoatómico ideal)} \qquad (18.28)$$

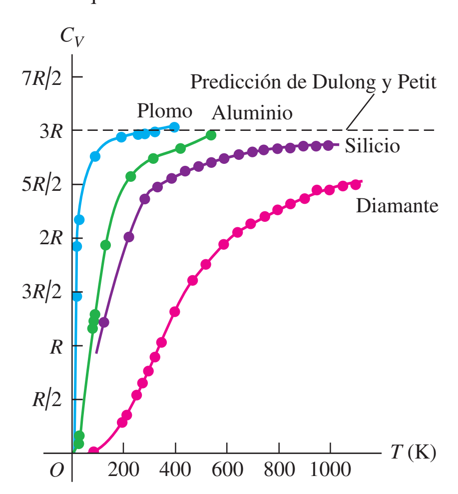
En unidades del SI,

$$C_V = (3)(8.314\ \text{J/mol}\cdot\text{K}) = 24.9\ \text{J/mol}\cdot\text{K}$$

Esta es la **regla de Dulong y Petit**, que conocimos como resultado *empírico* en la sección 17.5: todos los sólidos elementales tienen capacidades caloríficas molares cercanas a 25 J/mol·K. Ahora hemos *deducido* esta regla a partir de la teoría cinética. La concordancia solo es aproximada, pero, dada la sencillez de nuestro modelo, resulta muy significativa.

A bajas temperaturas, las capacidades caloríficas de la mayoría de los sólidos *disminuyen* al bajar la temperatura (figura 18.21) por la misma razón que los grados de libertad vibracionales de las moléculas se excluyen a bajas temperaturas. A muy bajas temperaturas, la cantidad kT es mucho *menor* que el paso de energía más pequeño que pueden dar los átomos en vibración. Por ello, casi todos los átomos permanecen en sus estados de mínima energía; el siguiente nivel de energía más alto está fuera de su alcance. La energía vibracional media por átomo es entonces *menor* que $3kT$, y la capacidad calorífica por molécula es *menor* que $3k$. A temperaturas más altas, cuando kT es *grande* en comparación con el paso de energía mínimo, se cumple el principio de equipartición y la capacidad calorífica total es de $3k$ por molécula o $3R$ por mol, como predice la relación de Dulong y Petit. El entendimiento cuantitativo de la variación de las capacidades caloríficas con la temperatura fue uno de los triunfos de la mecánica cuántica durante su desarrollo inicial en la década de 1920.

18.21 Valores experimentales de C_V para plomo, aluminio, silicio y diamante. A altas temperaturas, C_V para los sólidos se acerca a $3R$, en concordancia con la regla de Dulong y Petit. A bajas temperaturas, C_V es mucho menor que $3R$.



Evalúe su comprensión de la sección 18.4 Un cilindro con volumen fijo contiene hidrógeno gaseoso (H_2) a 25 K. Ahora se agrega calor al gas a ritmo constante hasta que su temperatura llega a 500 K. ¿La temperatura del gas aumenta a ritmo constante? ¿Por qué? Si no, ¿la temperatura aumenta con mayor rapidez cerca del principio o cerca del final de este proceso?

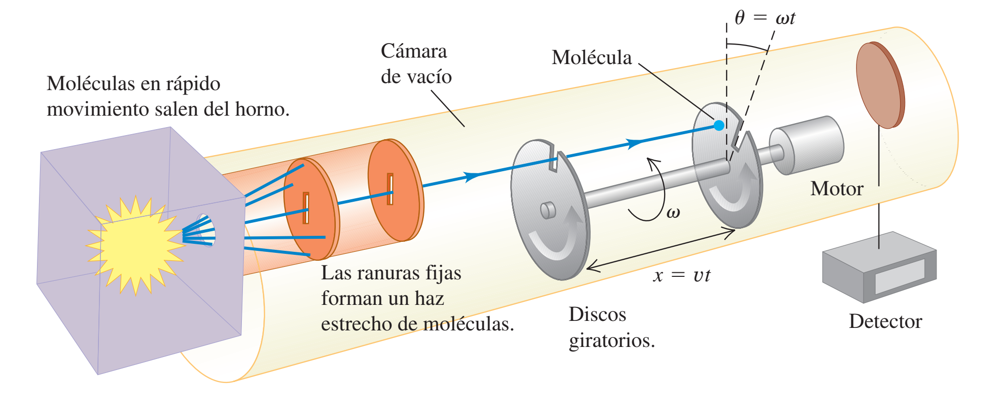
18.5 Rapideces moleculares

Como mencionamos en la sección 18.3, no todas las moléculas de un gas tienen la misma rapidez. La figura 18.22 muestra un sistema experimental para medir la distribución de las rapideces moleculares. Una sustancia se vaporiza en un horno; las moléculas de vapor escapan por una abertura en la pared del horno hacia una cámara de vacío. Una serie de ranuras bloquea el paso de todas las moléculas excepto las de un haz angosto, dirigido a un par de discos giratorios. Una molécula que pasa por la ranura del primer disco es bloqueada por el segundo disco a menos que llegue justo cuando la ranura del segundo disco está alineada con el haz. Los discos funcionan como un selector de rapidez que deja pasar solo moléculas dentro de un intervalo estrecho de velocidades. Ese intervalo puede variarse alterando la rapidez de rotación de los discos, y podemos medir cuántas moléculas hay en cada intervalo de rapidez.

Para describir los resultados de estas mediciones, definimos una función $f(v)$ llamada *función de distribución*. Si observamos un total de N moléculas, el número dN cuya rapidez está en el intervalo entre v y $v + dv$ está dado por

$$dN = Nf(v)\,dv \tag{18.29}$$

18.22 Una molécula con rapidez v pasa por la ranura del primer disco giratorio. Al llegar la molécula al segundo disco giratorio, las ranuras han girado el ángulo de desfasamiento θ. Si $v = \omega x/\theta$, la molécula pasará por la ranura del segundo disco giratorio y llegará al detector.



También podemos decir que la *probabilidad* de que una molécula elegida al azar tenga una rapidez en el intervalo de v a $v + dv$ es $f(v)dv$. Por lo tanto, $f(v)$ es la probabilidad por unidad de *intervalo* de rapidez; *no* es igual a la probabilidad de que una molécula tenga una rapidez exactamente igual a v. Dado que las probabilidades son números puros, $f(v)$ tiene unidades del recíproco de la rapidez (s/m).

La figura 18.23*a* muestra funciones de distribución para tres temperaturas distintas. A cada temperatura, la altura de la curva para cualquier valor de v es proporcional al número de moléculas cuya rapidez es cercana a v. El máximo de la curva representa la *rapidez más probable* v_{mp} para la temperatura en cuestión. Al aumentar la temperatura, la energía cinética molecular media aumenta, y el máximo de $f(v)$ se desplaza a rapideces cada vez más altas.

La figura 18.23*b* muestra que el área bajo la curva entre dos valores cualesquiera de v representa la fracción de todas las moléculas cuya rapidez está en ese intervalo. Toda molécula debe tener *algún* valor de v, por lo que la integral de $f(v)$ sobre toda v debe ser 1 para cualquier T.

Si conocemos $f(v)$, podemos calcular la rapidez más probable v_{mp}, la rapidez media v_{med} y la rapidez eficaz v_{rms}. Para obtener v_{mp}, basta con encontrar el punto donde $df/dv = 0$; esto da el valor de la rapidez en el que la curva tiene su máximo. Para obtener v_{med}, tomamos el número $Nf(v)\,dv$ de moléculas cuya rapidez está dentro de cada intervalo dv, multiplicamos cada número por la rapidez correspondiente v, sumamos todos estos productos (integrando desde $v = 0$ hasta infinito) y dividimos entre N. Es decir,

$$v_{med} = \int_0^{\infty} v f(v)\,dv \tag{18.30}$$

La rapidez rms se obtiene de forma similar; la media de v^2 está dada por

$$(v^2)_{med} = \int_0^{\infty} v^2 f(v)\,dv \tag{18.31}$$

y v_{rms} es la raíz cuadrada de esto.

Distribución de Maxwell-Boltzmann

La función $f(v)$ que describe la distribución real de la rapidez molecular se llama **distribución de Maxwell-Boltzmann**, y se puede deducir de consideraciones de mecánica estadística que rebasan nuestro alcance. He aquí el resultado:

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} \quad \text{(distribución de Maxwell-Boltzmann)} \tag{18.32}$$

También podemos expresar esta función en términos de la energía cinética de traslación de una molécula, que denotamos con ϵ; es decir, $\epsilon = \frac{1}{2}mv^2$. Invitamos al lector a que compruebe que, cuando esto se sustituye en la ecuación (18.32), el resultado es

$$f(v) = \frac{8\pi}{m}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \epsilon e^{-\epsilon/kT} \tag{18.33}$$

Esta forma indica que el exponente de la función de distribución de Maxwell-Boltzmann es $-\epsilon/kT$ y que la forma de la curva depende de la magnitud relativa de ϵ y kT en cada punto. Dejamos que el lector demuestre (véase el ejercicio 18.48) que el *máximo* de cada curva se presenta donde $\epsilon = kT$ y corresponde a la rapidez más probable v_{mp} dada por

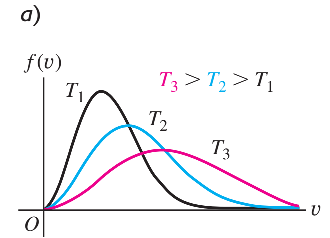
$$v_{mp} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \tag{18.34}$$

Para calcular la rapidez media, sustituimos la ecuación (18.32) en la ecuación (18.30) e integramos, haciendo un cambio de variable $v^2 = x$ e integrando por partes. El resultado es

$$v_{med} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \tag{18.35}$$

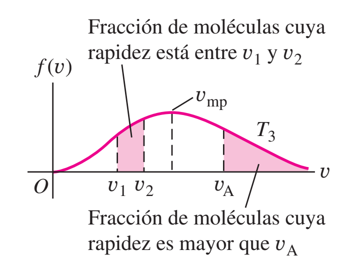
18.23 *a*) Curvas de la función de distribución de Maxwell-Boltzmann $f(v)$ para diversas temperaturas. *b*) Las áreas sombreadas bajo cada curva representan la fracción de moléculas cuya rapidez está dentro de cierto intervalo. La rapidez más probable v_{mp} para una temperatura dada está en el máximo de la curva.

a)



Conforme aumenta la temperatura:
- La curva se aplana.
- El valor máximo se desplaza hacia mayor rapidez.

b)



MasteringPHYSICS

ActivPhysics 8.2: Maxwell-Boltzmann Distribution—Conceptual Analysis
ActivPhysics 8.3: Maxwell-Boltzmann Distribution—Quantitative Analysis

Por último, para calcular la rapidez eficaz (v_{rms}), sustituimos la ecuación (18.32) en la (18.31). La evaluación de la integral resultante requiere algo de acrobacia matemática, pero podemos encontrarla en una tabla de integrales. El resultado es

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \qquad (18.36)$$

Este resultado concuerda con la ecuación (18.19); *debe* concordar para que la distribución de Maxwell-Boltzmann sea congruente con el principio de equipartición y el resto de nuestros cálculos de teoría cinética.

La tabla 18.2 muestra la fracción de las moléculas de gas ideal cuya rapidez es *menor que* diversos múltiplos de v_{rms}. Estas cifras se obtuvieron por integración numérica, y son las mismas para todos los gases que se comportan como gas ideal.

Tabla 18.2 Fracciones de moléculas de un gas ideal cuya rapidez es menor que diversos múltiplos de v/v_{rms}

v/v_{rms}	Fracción
0.20	0.011
0.40	0.077
0.60	0.218
0.80	0.411
1.00	0.608
1.20	0.771
1.40	0.882
1.60	0.947
1.80	0.979
2.00	0.993

La distribución de rapideces moleculares en los líquidos es similar, pero no idéntica, a la distribución en gases. Podemos entender la presión de vapor de un líquido y el fenómeno de ebullición con base en ella. Suponga que una molécula necesita una rapidez mínima v_A (figura 18.23*b*) para escapar de la superficie de un líquido al vapor adyacente. El número de tales moléculas, representado por el área bajo la "cola" de cada curva (a la derecha de v_A), aumenta rápidamente con la temperatura. Así, la rapidez con que pueden escapar las moléculas depende mucho de la temperatura. Este proceso se equilibra con otro en el que moléculas de la fase de vapor chocan inelásticamente con la superficie y quedan atrapadas en la fase líquida. El número de moléculas que corren esta suerte por unidad de tiempo es proporcional a la presión en la fase de vapor. El equilibrio de fases entre líquido y vapor se presenta cuando estos dos procesos en competencia se efectúan exactamente con la misma rapidez. De esta forma, si conocemos las distribuciones de rapidez de las moléculas a diversas temperaturas, estaremos en condiciones de predecir teóricamente la presión de vapor en función de la temperatura. Cuando se evapora líquido, son las moléculas de alta velocidad las que escapan de la superficie. Las que quedan tienen menor energía en promedio, y nos permiten ver el enfriamiento por evaporación desde una perspectiva molecular.

La rapidez de muchas reacciones químicas a menudo depende marcadamente de la temperatura, y esto se explica con la distribución de Maxwell-Boltzmann. Cuando chocan dos moléculas que podrían reaccionar, solo habrá reacción si las moléculas están tan cerca que las distribuciones de carga eléctrica de sus electrones interactúan fuertemente. Esto requiere una energía mínima, llamada *energía de activación* y, por lo tanto, cierta rapidez molecular mínima. La figura 18.23*a* indica que el número de moléculas en la cola de elevada rapidez de la curva aumenta rápidamente con la temperatura. Además, cabe esperar que la rapidez de cualquier reacción que dependa de una energía de activación aumente rápidamente con la temperatura.

Aplicación Energía de activación y actividad de la polilla
Este esfíngido de género *Manduca* no puede volar si la temperatura de sus músculos es inferior a 29°C. La razón es que las reacciones catalizadas por enzimas y que hacen posible el metabolismo aeróbico y la acción muscular requieren una energía molecular mínima (energía de activación). Al igual que con las moléculas en un gas ideal, a bajas temperaturas muy pocas de las moléculas implicadas en estas reacciones tienen energía alta. Al aumentar la temperatura, más moléculas tienen la energía mínima requerida y las reacciones tienen lugar a una velocidad mayor. Arriba de 29°C, se genera suficiente energía para permitir que el esfíngido vuele.

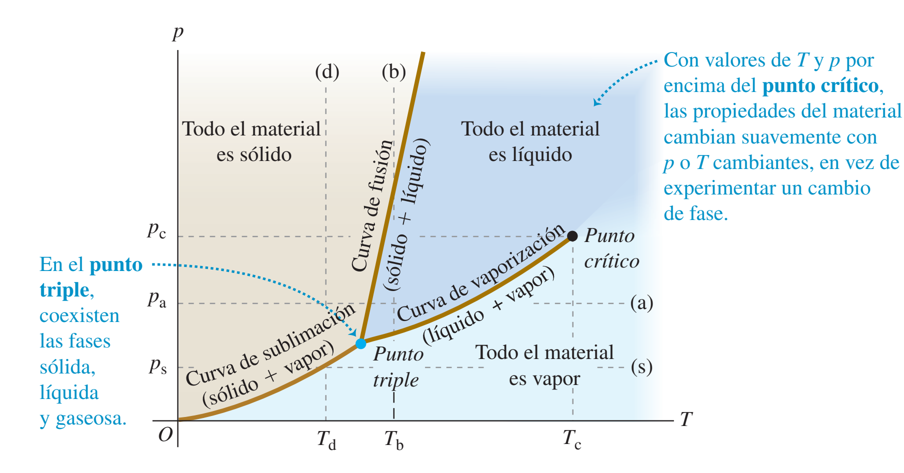


Evalúe su comprensión de la sección 18.5 Una cantidad de gas que contiene N moléculas tiene una función de distribución de rapidez $f(v)$. ¿Cuántas moléculas tienen rapidez entre v_1 y $v_2 > v_1$? **i.** $\int_0^{v_2} f(v)\,dv - \int_0^{v_1} f(v)\,dv$; **ii.** $N[\int_0^{v_2} f(v)\,dv - \int_0^{v_1} f(v)\,dv]$; **iii.** $\int_0^{v_1} f(v)\,dv - \int_0^{v_2} f(v)\,dv$; **iv.** $N[\int_0^{v_1} f(v)\,dv - \int_0^{v_2} f(v)\,dv]$; **v.** ninguna de las anteriores. ❙



18.6 Fases de la materia

Un gas ideal es el sistema más simple que podemos analizar desde una perspectiva molecular porque despreciamos las interacciones entre las moléculas. Sin embargo, son precisamente esas interacciones las que hacen que la materia se condense en las fases líquida y sólida en ciertas condiciones. Por ello, no es sorprendente que el análisis teórico de la estructura y el comportamiento de líquidos y sólidos sea mucho más complicado que en el caso de los gases. No trataremos de llevar muy lejos una perspectiva microscópica, pero podemos hablar en general de fases de la materia, equilibrio de fases y transiciones de fase.



18.24 Diagrama de fases *pT* representativo, con regiones de temperatura y presión en las que existen las distintas fases y en las que se dan cambios de fase.

En la sección 17.6, vimos que cada fase es estable solo en ciertos intervalos de temperatura y presión. La transición de una fase a otra normalmente se da en condiciones de **equilibrio de fases** entre las dos fases y, para una presión dada, esto solo ocurre a una temperatura específica. Podemos representar estas condiciones en una gráfica con ejes p y T, llamada **diagrama de fases**; la figura 18.24 es un ejemplo. Cada punto del diagrama representa un par de valores de p y T.

En cada punto en la figura 18.24, solo puede existir una fase, excepto sobre las líneas, donde pueden coexistir dos fases en equilibrio de fases. La curva de fusión separa las áreas de sólido y de líquido, y representa posibles condiciones de equilibrio de fases sólido-líquido. De manera similar, la curva de vaporización separa las áreas de líquido y de vapor, y la de sublimación separa las áreas de sólido y de vapor. Las tres curvas se unen en el **punto triple**, la única condición en que pueden coexistir las tres fases (figura 18.25). En la sección 17.3, usamos la temperatura de punto triple del agua para definir la escala de temperatura Kelvin. En la tabla 18.3 se incluyen datos de punto triple para varias sustancias.

Si agregamos calor a una sustancia a una presión constante p_a, la sustancia pasa por una serie de estados representados por la línea horizontal (a) de la figura 18.24. Las temperaturas de fusión y ebullición a esta presión son aquellas en que la línea interseca las curvas de fusión y vaporización, respectivamente. Si la presión es p_s, el calentamiento a presión constante transforma la sustancia de sólido directamente a vapor. Este proceso se llama *sublimación*; la intersección de la línea (s) con la curva de sublimación da la temperatura T_s a la que se da sublimación a una presión p_s. A cualquier presión menor que la del punto triple, no puede existir fase líquida. La presión de punto triple para el dióxido de carbono es de 5.1 atm. A presión atmosférica normal, el dióxido de carbono sólido (“hielo seco”) se sublima; no hay fase líquida a esta presión.

La línea (b) de la figura 18.24 representa compresión a temperatura constante T_b. El material pasa de vapor a líquido y luego a sólido en los puntos en que la línea (b) cruza las curvas de vaporización y fusión, respectivamente. La línea (d) muestra compresión a temperatura constante a una temperatura más baja T_d; el material pasa de vapor a sólido donde la línea (d) cruza la curva de sublimación.

En la gráfica pV de la figura 18.7 vimos que solo hay una transición de fase líquido-vapor cuando la temperatura y la presión son menores que en el punto de la parte superior del área sombreada rotulada “Región de equilibrio de fase líquido-vapor”. Ese punto corresponde al punto final en la parte superior de la curva de vaporización en la figura 18.24; se llama **punto crítico**, y los valores correspondientes de p y T se denominan presión y temperatura críticas, p_c y T_c. Un gas a presión *mayor* que la crítica no se separa en dos fases cuando se enfría a presión constante (sobre una línea horizontal arriba del punto crítico en la figura 18.24). En vez de ello, sus propiedades cambian, de forma gradual y continua, de las que ordinariamente asociamos con los gases (baja densidad, alta compresibilidad) a las propiedades de un líquido (alta densidad, baja compresibilidad) *sin transición de fase*.

18.25 La presión atmosférica terrestre es más alta que la presión del punto triple del agua [véase la línea *a*) en la figura 18.24]. Dependiendo de la temperatura, el agua puede existir como vapor (en la atmósfera), como líquido (en el océano) o como sólido (en el iceberg que vemos aquí).



Tabla 18.3 Datos de punto triple

Sustancia	Temperatura (K)	Presión (Pa)
Hidrógeno	13.80	0.0704×10^5
Deuterio	18.63	0.171×10^5
Neón	24.56	0.432×10^5
Nitrógeno	63.18	0.125×10^5
Oxígeno	54.36	0.00152×10^5
Amoniaco	195.40	0.0607×10^5
Dióxido de carbono	216.55	5.17×10^5
Dióxido de azufre	197.68	0.00167×10^5
Agua	273.16	0.00610×10^5



PhET: States of Matter

Si esto parece increíble, consideremos las transiciones a la fase líquida en puntos cada vez más altos en la curva de vaporización. Al acercarnos al punto crítico, las *diferencias* en las propiedades físicas (como densidad y compresibilidad) entre las fases de líquido y de vapor se hacen cada vez más pequeñas. Exactamente *en* el punto crítico, las diferencias se vuelven cero, y desaparece la distinción entre líquido y vapor. El calor de vaporización también se reduce al acercarnos al punto crítico, y también se vuelve cero en ese punto.

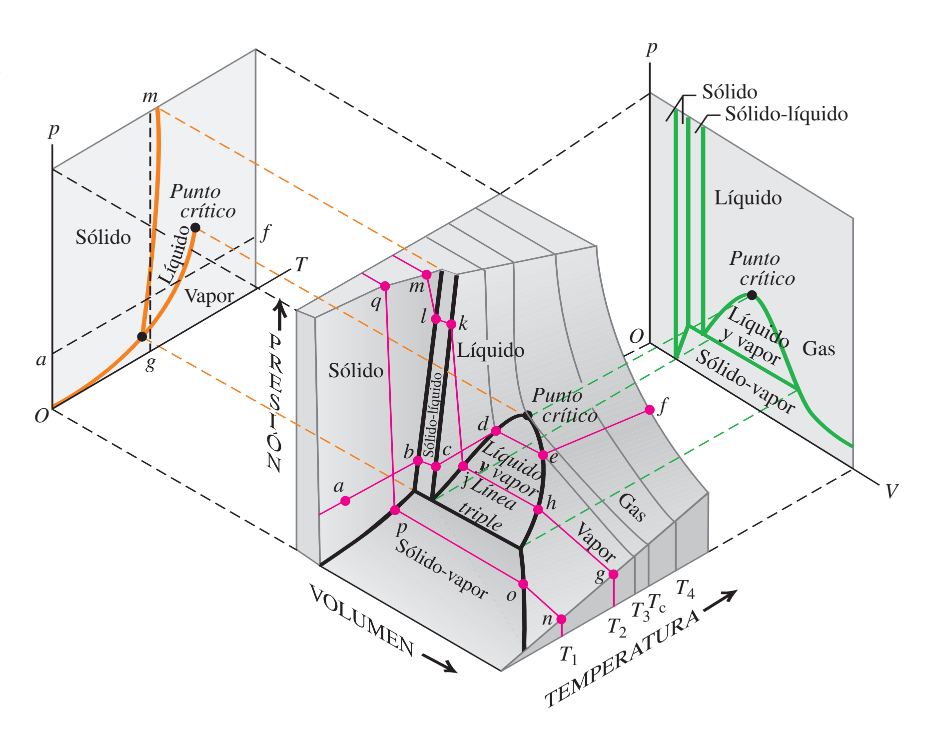
Para casi todos los materiales conocidos, las presiones críticas son mucho mayores que la presión atmosférica, y por ello no observamos este comportamiento en la vida diaria. Por ejemplo, el punto crítico del agua está en 647.4 K y 221.2×10^5 Pa (aproximadamente 218 atm o 3210 psi). Sin embargo, las calderas de vapor a alta presión en las plantas generadoras de electricidad suelen operar a presiones y temperaturas muy por encima del punto crítico.

Muchas sustancias pueden existir en más de una fase sólida. Un ejemplo conocido es el carbono, que existe como hollín no cristalino, grafito y diamante cristalino. El agua es otro ejemplo; se han observado hasta ocho tipos de hielo, con diferentes estructuras cristalinas y propiedades físicas, a presiones muy altas.

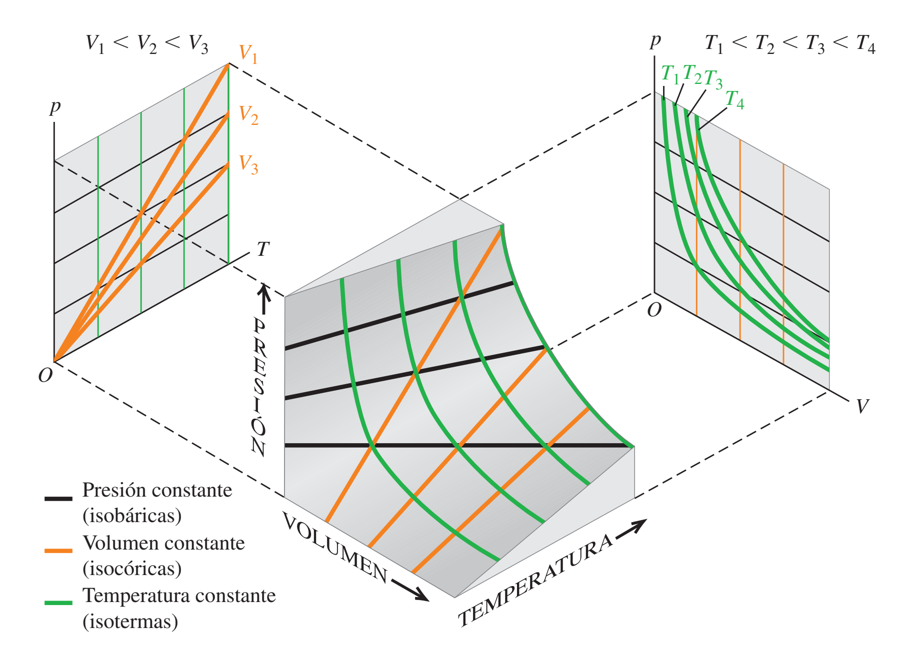
Superficies pVT

En la sección 18.1 comentamos que la ecuación de estado de cualquier material puede representarse gráficamente como una superficie en un espacio tridimensional con coordenadas p, V y T. Visualizar una superficie así puede ayudarnos a entender el comportamiento de los materiales a diferentes temperaturas y presiones. La figura 18.26 muestra una superficie pVT típica. Las líneas delgadas representan isotermas pV; su proyección en el plano pV daría una gráfica similar a la de la figura 18.7. Estas isotermas pV representan líneas de contorno de la superficie pVT, de manera análoga a como las líneas de contorno de un mapa topográfico representan la elevación (la tercera dimensión) en cada punto. Las proyecciones de los bordes de la superficie en el plano pT dan el diagrama de fases pT de la figura 18.24.

La línea *abcdef* en la figura 18.26 representa calentamiento a presión constante, con fusión en *bc* y vaporización en *de*. Observe los cambios de volumen que se presentan al aumentar T siguiendo esta línea. La línea *ghjklm* corresponde a una compresión isotérmica (a temperatura constante), con licuefacción en *hj* y solidificación en *kl*. Entre estas, los segmentos *gh* y *jk* representan compresión isotérmica con aumento de presión; estos aumentos son mucho mayores en la región líquida *jk* y en la región



18.26 Superficie pVT para una sustancia que se expande al fundirse. También se muestran proyecciones de las fronteras sobre la superficie en los planos pT y pV.



18.27 Superficie pVT para un gas ideal. A la izquierda, cada línea roja corresponde a cierto volumen constante; a la derecha, cada línea verde corresponde a cierta temperatura constante.

sólida *lm* que en la región de vapor *gh*. Por último, *nopq* representa solidificación isotérmica directamente de la fase de vapor, como en la formación de copos de nieve o escarcha.

La figura 18.27 muestra la superficie pVT mucho más sencilla para una sustancia que obedece la ecuación de estado del gas ideal en todas las condiciones. Las proyecciones de las curvas de temperatura constante en el plano pV corresponden a las curvas de la figura 18.6, y las proyecciones de las curvas de volumen constante en el plano pT muestran la proporcionalidad directa de la presión y la temperatura absoluta.

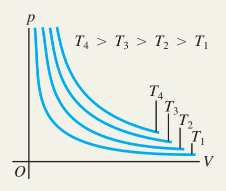
Evalúe su comprensión de la sección 18.6 La presión atmosférica media en Marte es de 6.0×10^2 Pa. ¿Podría haber lagos o ríos en Marte en la actualidad? ¿Y en el pasado, cuando, según se cree, la presión atmosférica era considerablemente mayor que ahora?

RESUMEN



Ecuación de estado: La presión p, el volumen V y la temperatura absoluta T de una cantidad dada de una sustancia están relacionadas por una ecuación de estado. Esa relación implica únicamente estados de equilibrio, con p y T uniformes en todo el sistema. La ecuación de estado del gas ideal, ecuación (18.3), implica el número de moles n y una constante R que es la misma para todos los gases. (Véase los ejemplos 18.1 a 18.4).

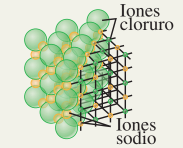
$$pV = nRT \quad (18.3)$$



Propiedades molares de la materia: La masa molar M de una sustancia pura es la masa por mol. La masa total m_{total} de una cantidad de sustancia es igual a M multiplicada por el número de moles n. El número de Avogadro N_A es el número de moléculas que hay en un mol. La masa m de una molécula individual es M dividida entre N_A. (Véase el ejemplo 18.5).

$$m_{total} = nM \quad (18.2)$$

$$M = N_A m \quad (18.8)$$



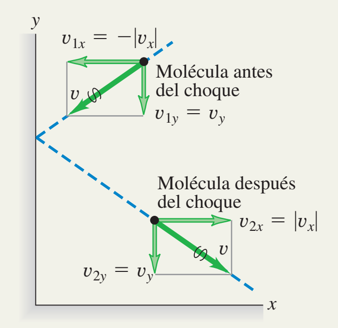
Modelo cinético-molecular de un gas ideal: En un gas ideal, la energía cinética de traslación total del gas en conjunto (K_{tr}) y la energía cinética de traslación media por molécula $[\frac{1}{2}m(v^2)_{med}]$ son proporcionales a la temperatura absoluta T. La rapidez eficaz de las moléculas de un gas ideal es proporcional a la raíz cuadrada de T. En estas expresiones interviene la constante de Boltzmann $k = R/N_A$. (Véase los ejemplos 18.6 y 18.7). La trayectoria libre media λ de las moléculas de un gas ideal depende del número de moléculas por volumen (N/V) y del radio molecular r. (Véase el ejemplo 18.8).

$$K_{tr} = \frac{3}{2}nRT \quad (18.14)$$

$$\frac{1}{2}m(v^2)_{med} = \frac{3}{2}kT \quad (18.16)$$

$$v_{rms} = \sqrt{(v^2)_{med}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (18.19)$$

$$\lambda = vt_{med} = \frac{V}{4\pi\sqrt{2}r^2N} \quad (18.21)$$

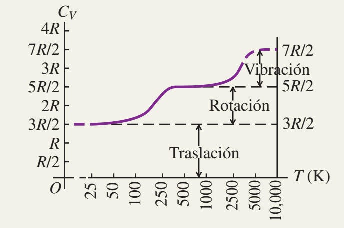


Capacidades caloríficas: La capacidad calorífica molar C_V a volumen constante se puede expresar como múltiplo sencillo de la constante de los gases R en ciertos casos idealizados: el gas monoatómico ideal [ecuación (18.25)]; el gas diatómico ideal con inclusión de energía rotacional [ecuación (18.26)], y el sólido monoatómico ideal [ecuación (18.28)]. Podemos aproximar satisfactoriamente muchos sistemas reales con esas idealizaciones.

$$C_V = \frac{3}{2}R \text{ (gas monoatómico)} \quad (18.25)$$

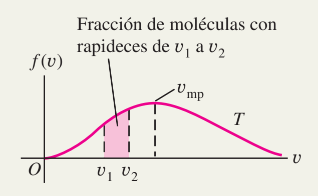
$$C_V = \frac{5}{2}R \text{ (gas diatómico)} \quad (18.26)$$

$$C_V = 3R \text{ (sólido monoatómico)} \quad (18.28)$$

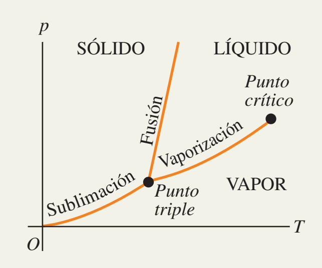


Rapidez molecular: Las rapideces de las moléculas de un gas ideal se distribuyen según la distribución de Maxwell-Boltzmann $f(v)$. La cantidad $f(v)\,dv$ describe la fracción de las moléculas que tiene rapideces entre v y $v + dv$.

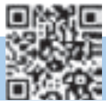
$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} \quad (18.32)$$



Fases de la materia: La materia ordinaria existe en las fases sólida, líquida y gaseosa. Un diagrama de fases muestra las condiciones en las que dos fases pueden coexistir en equilibrio. Las tres fases pueden coexistir en el punto triple. La curva de vaporización termina en el punto crítico, arriba del cual desaparece la distinción entre las fases líquida y gaseosa.



PROBLEMA PRÁCTICO Gas en Europa, la luna de Júpiter



Un astronauta que visita un satélite de Júpiter, Europa, deja en la superficie un bote de 1.20 moles de gas nitrógeno (28.0 g/mol) a 25.0°C. Europa no tiene una atmósfera significativa, y la aceleración de la gravedad en su superficie es de 1.30 m/s^2. Al bote le brota una fuga, permitiendo que las moléculas escapen por un agujero pequeño. *a*) ¿Cuál es la altura máxima (en km) arriba de la superficie de Europa a la que llega una molécula de nitrógeno cuya velocidad es igual a la rapidez rms? Suponga que la molécula se disparó hacia arriba fuera del agujero del bote, y desprecie la variación de g con la altura. *b*) La rapidez de escape de Europa es 2025 m/s. ¿Puede alguna de las moléculas de nitrógeno escapar de Europa e ir al espacio?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Dibuje un esquema de la situación, que muestre todas las dimensiones relevantes.
2. Liste las cantidades conocidas y desconocidas, e identifique las incógnitas.
3. ¿Cómo va a encontrar la rapidez rms de las moléculas de nitrógeno? ¿Qué principio se utiliza para encontrar la altura máxima que una molécula puede alcanzar con esta rapidez?
4. ¿La rapidez rms de moléculas en un gas ideal representa la rapidez máxima de las moléculas? Si no es así, ¿cuál es la rapidez máxima?

EJECUTAR

5. Despeje la rapidez rms y utilícela para calcular la altura máxima que puede alcanzar una molécula con esta rapidez.
6. Utilice el resultado del paso 5 para responder a la pregunta del inciso *b*).

EVALUAR

7. ¿Sus resultados dependen de la cantidad de gas en el recipiente? ¿Por qué?
8. ¿Cómo cambian los resultados de los pasos 5 y 6 si el cilindro de gas se hubiera dejado en Ganímedes, el satélite de Júpiter que tiene una mayor gravedad en la superficie que Europa y una rapidez de escape superior? Al igual que Europa, Ganímedes no tiene una atmósfera significativa.

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P18.1 En la sección 18.1 se dice que, en condiciones ordinarias, no es posible cambiar individualmente la presión, el volumen o la temperatura sin afectar las demás. Sin embargo, al evaporarse un líquido, su volumen cambia, aunque su presión y temperatura sean constantes. ¿Es incongruente esto? ¿Por qué?

P18.2 En la ecuación del gas ideal, ¿podría emplearse la temperatura Celsius equivalente en vez de la temperatura Kelvin si se usara un valor numérico apropiado de la constante R? ¿Por qué?

P18.3 En una mañana fría podemos "ver nuestro aliento". ¿Es verdad esto? ¿Qué vemos realmente? ¿Este fenómeno depende de la temperatura del aire, de la humedad o de ambos factores? Explique.

P18.4 Cuando se conduce un automóvil cierta distancia, la presión del aire en los neumáticos aumenta. ¿Por qué? ¿Es aconsejable extraer aire para reducir la presión? ¿Por qué?

P18.5 El refrigerante de un radiador de automóvil se mantiene a una presión mayor que la atmosférica. ¿Por qué es deseable esto? La tapa del radiador libera refrigerante si la presión manométrica de este alcanza cierto valor, por lo regular 15 lb/in^2. ¿Por qué no simplemente se sella el sistema?

P18.6 Los alimentos sin envolver que se encuentran en un congelador sufren deshidratación, conocida como "quemadura de congelador". ¿Por qué?

P18.7 La "liofilización" implica el mismo proceso que la "quemadura de congelador" mencionada en la pregunta P18.6. Para liofilizar los alimentos, estos generalmente se congelan, se colocan en una cámara de vacío y se irradian con infrarrojo. ¿Por qué se usa vacío? ¿Por qué se usa radiación? ¿Qué ventajas podría tener la liofilización sobre el secado ordinario?

P18.8 Un grupo de estudiantes viajaron en auto desde su universidad (casi al nivel del mar) a las montañas para esquiar el fin de semana. Al llegar, descubrieron que las bolsas de papas fritas que llevaban se habían reventado. ¿Qué causó esto?

P18.9 ¿Cómo enfría nuestro cuerpo la evaporación del sudor de la piel?

P18.10 Un recipiente rígido y perfectamente aislado tiene una membrana que divide su volumen en mitades. Un lado contiene un gas a una temperatura absoluta T_0 y presión p_0, mientras que la otra mitad está completamente vacía. De repente, se forma un pequeño orificio en la membrana, permitiendo que el gas se filtre hacia la otra mitad hasta que termina por ocupar el doble de su volumen original. En términos de T_0 y p_0, ¿cuál será la nueva temperatura y presión del gas cuando se distribuye equitativamente en ambas mitades del recipiente? Explique su razonamiento.

P18.11 *a*) ¿Qué tiene más átomos, 1 kg de hidrógeno o 1 kg de plomo? ¿Cuál tiene más masa? *b*) ¿Qué tiene más átomos, un mol de hidrógeno o un mol de plomo? ¿Cuál tiene más masa? Explique su razonamiento.

P18.12 Use los conceptos del modelo cinético-molecular para explicar *a*) por qué la presión de un gas en un recipiente rígido aumenta al añadirse calor al gas y *b*) por qué la presión de un gas aumenta cuando lo comprimimos, aunque no alteremos su temperatura.

P18.13 La proporción de diversos gases en la atmósfera cambia un poco con la altura. ¿Cabría esperar que la proporción de oxígeno a gran altura fuera mayor o menor que en el nivel del mar, en comparación con la proporción de nitrógeno? ¿Por qué?

P18.14 Comente esta afirmación: *si se mezclan dos gases, para que estén en equilibrio térmico deben tener la misma rapidez molecular media*. ¿Es correcta? Explique por qué.

P18.15 El modelo cinético-molecular contiene un supuesto oculto con respecto a la temperatura de las paredes del recipiente. ¿Cuál es? ¿Qué sucedería si no fuera válido?

P18.16 La temperatura de un gas ideal es directamente proporcional a la energía cinética media de sus moléculas. Si un contenedor con gas ideal pasa junto a usted a 2000 m/s, ¿es mayor su temperatura que si estuviera en reposo? Explique su razonamiento.

P18.17 Si se aumenta la presión de un gas monoatómico ideal mientras se mantiene constante el número de moles, ¿qué sucede con la energía cinética de traslación media de un átomo del gas? ¿Es posible modificar *tanto* el volumen *como* la presión del gas ideal y mantener constante la energía cinética de traslación media de sus átomos? Explique.

P18.18 Al deducir la ecuación del gas ideal del modelo cinético-molecular, despreciamos la energía potencial debida a la gravedad terrestre. ¿Se justifica esta omisión? ¿Por qué?

P18.19 La deducción de la ecuación del gas ideal incluyó la suposición de que el número de moléculas es muy grande y podemos calcular la fuerza media debida a muchos choques. Sin embargo, esa ecuación solo se cumple con exactitud a bajas presiones, donde las moléculas son pocas y dispersas. ¿Hay una incongruencia aquí? Explique.

P18.20 Un tanque de almacenamiento de gas tiene una pequeña fuga. La presión en el tanque baja con mayor rapidez si el gas es hidrógeno o helio que si es oxígeno. ¿Por qué?

P18.21 Considere dos muestras de gas ideal que están a la misma temperatura. La muestra A tiene la misma masa total que B, pero sus moléculas tienen mayor masa molar. ¿En cuál muestra es mayor la energía cinética total? ¿Su respuesta depende de la estructura molecular de los gases? ¿Por qué?

P18.22 La temperatura de un gas monoatómico ideal aumenta de 25 a 50°C. ¿Aumenta al doble la energía cinética de traslación media de cada átomo de gas? Explique. Si su respuesta es no, ¿cuál sería la temperatura final si la energía cinética de traslación media se duplicara?

P18.23 Si se quiere aumentar al doble la rapidez eficaz de los átomos de un gas ideal, ¿en qué factor deberá aumentarse la temperatura Kelvin del gas? Explique.

P18.24 *a*) Si usted aplica la misma cantidad de calor a 1.00 mol de un gas monoatómico ideal y a 1.00 mol de un gas diatómico ideal, ¿cuál de ellos (si acaso) aumentará más su temperatura? *b*) Físicamente, *¿por qué* los gases diatómicos tienen mayor capacidad calorífica molar que los gases monoatómicos?

P18.25 La explicación en la sección 18.4 concluyó que todos los gases diatómicos ideales tienen la misma capacidad calorífica C_V. ¿Significa esto que se requiere la misma cantidad de calor para elevar la temperatura de 1.0 g de cada uno de ellos en 1.0 K? Explique su razonamiento.

P18.26 Con respecto a un gas que contiene N moléculas, ¿sería correcto decir que el número de moléculas con rapidez v es igual a $f(v)$? ¿O que ese número está dado por $Nf(v)$? Explique sus respuestas.

P18.27 Imagine un filtro de aire especial en la ventana de una casa. Los diminutos agujeros del filtro solo dejan salir moléculas que se mueven con más de cierta rapidez mínima, y solo dejan entrar moléculas que se mueven con menor rapidez. ¿Qué efecto tendría este filtro sobre la temperatura interior de la casa? (Resulta que la segunda ley de la termodinámica, que veremos en el capítulo 20, nos dice que tan maravilloso filtro es imposible de fabricar).

P18.28 Un vaso con agua a temperatura ambiente se coloca en una campana en la que se va reduciendo gradualmente la presión del aire. Cuando la presión del aire se reduce lo suficiente, el agua comienza a hervir. La temperatura del agua no aumenta al hervir; de hecho, *baja* un poco. Explique estos fenómenos.

P18.29 Es fácil resbalar caminando sobre hielo, sobre todo si usamos patines de hielo. ¿Qué nos dice esto acerca de cómo el punto de fusión del hielo depende de la presión? Explique su respuesta.

P18.30 Las ventosas hidrotermales son aberturas en el fondo oceánico que descargan agua muy caliente. El agua que sale de una de ellas cerca de la costa de Oregon, a 2400 m de profundidad, está a 279°C. A pesar de su alta temperatura, el agua no hierve. ¿Por qué?

P18.31 Las áreas oscuras de la superficie lunar se llaman *mares*, y en alguna época se pensó que eran cuerpos de agua. En realidad, estos "mares" son llanuras de lava solidificada. Considerando que no hay atmósfera en la Luna, ¿cómo se puede explicar la ausencia de agua líquida en su superficie?

P18.32 Además de las instrucciones normales impresas en una caja de arroz, hay "instrucciones para cocer a gran altura". La única diferencia es que se sugiere usar un mayor volumen de agua y mayor tiempo de cocción para cocer el arroz a gran altura. ¿Por qué dependen de la altura las instrucciones?

EJERCICIOS

Sección 18.1 Ecuaciones de estado

18.1 • Un tanque de 20.0 L contiene 4.86×10^{-4} kg de helio a 18.0°C. La masa molar del helio es de 4.00 g/mol. *a*) ¿Cuántos moles de helio hay en el tanque? *b*) ¿Cuál es la presión en el tanque en pascales y atmósferas?

18.2 •• Helio gaseoso con un volumen de 2.60 L, a 0.180 atm de presión y una temperatura de 41.0°C, se calienta hasta duplicar la presión y el volumen. *a*) Calcule la temperatura final. *b*) ¿Cuántos gramos de helio hay? La masa molar del helio es de 4.00 g/mol.

18.3 • Un tanque cilíndrico tiene un pistón ajustado que permite modificar el volumen del tanque. Originalmente, el tanque contiene 0.110 m^3 de aire a 0.355 atm de presión. Se tira lentamente del pistón hasta aumentar el volumen del aire a 0.390 m^3. Si la temperatura permanece constante, ¿qué valor final tiene la presión?

18.4 • Un tanque de 3.00 L contiene aire a 3.00 atm y 20.0°C. El tanque se sella y se enfría hasta que la presión es de 1.00 atm. *a*) ¿Qué temperatura tiene ahora el gas en grados Celsius? Suponga que el volumen del tanque es constante. *b*) Si la temperatura se mantiene en el valor determinado en el inciso *a*) y el gas se comprime, ¿qué volumen tendrá cuando la presión vuelva a ser de 3.00 atm?

18.5 • **Atmósferas planetarias.** *a*) Calcule la densidad de la atmósfera en la superficie de Marte (donde la presión es de 650 Pa y la temperatura es normalmente de 253 K, con una atmósfera de CO_2), en Venus (con una temperatura media de 730 K y presión de 92 atm, con una atmósfera de CO_2), y en la luna de Saturno, Titán (donde la presión es de 1.5 atm y la temperatura de −178°C con una atmosfera de N_2). *b*) Compare cada una de estas densidades con la de la atmósfera terrestre, que es de 1.20 kg/m^3. Consulte la tabla periódica en el apéndice D para determinar las masas molares.

18.6 •• Imagine que tiene varios globos idénticos. Y determina experimentalmente que uno de ellos se revienta si su volumen excede 0.900 L. La presión del gas dentro del globo es igual a la atmosférica (1.00 atm). *a*) Si el aire dentro del globo está a una temperatura cons-

tante de 22.0°C y se comporta como gas ideal, ¿qué masa de aire podrá introducir en uno de esos globos sin que se reviente? *b*) Repita el inciso *a*) considerando que el gas es helio en vez de aire.

18.7 •• Un Jaguar XK8 convertible tiene un motor de ocho cilindros. Al principio de su carrera de compresión, uno de los cilindros contiene 499 cm^3 de aire a presión atmosférica (1.01×10^5 Pa) y temperatura de 27.0°C. Al final de la carrera, el aire se ha comprimido a un volumen de 46.2 cm^3 y la presión manométrica aumentó a 2.72×10^6 Pa. Calcule la temperatura final.

18.8 •• Un soldador llena un tanque de 0.0750 m^3 con oxígeno (masa molar = 32.0 g/mol) a una presión manométrica de 3.00×10^5 Pa y una temperatura de 37.0°C. El tanque tiene una pequeña fuga, y con el tiempo se escapa algo de oxígeno. Cierto día en que la temperatura es de 22.0°C, la presión manométrica del oxígeno en el tanque es de 1.80×10^5 Pa. Calcule *a*) la masa inicial de oxígeno y *b*) la masa que se fugó.

18.9 •• Un tanque cilíndrico grande contiene 0.750 m^3 de nitrógeno gaseoso a 27°C y 7.50×10^3 Pa (presión absoluta). El tanque tiene un pistón ajustado que permite modificar el volumen. Determine la presión si el volumen se reduce a 0.480 m^3 y la temperatura se aumenta a 157°C.

18.10 • Un recipiente cilíndrico y vacío de 1.50 m de largo y 90.0 cm de diámetro se va a llenar con oxígeno puro a 22.0°C para almacenarse en una estación espacial. Para guardar tanto como sea posible, la presión absoluta del oxígeno será de 21.0 atm. La masa molar del oxígeno es 32.0 g/mol. *a*) ¿Cuántos moles de oxígeno puede almacenar este recipiente? *b*) Para alguien que levante este recipiente, ¿por cuántos kilogramos aumenta este gas la masa que habrá de ser levantada?

18.11 • El gas dentro de un globo siempre tiene una presión casi igual a la presión atmosférica, pues esta es la presión aplicada al exterior del globo. Un globo se llena con helio (un gas casi ideal) hasta un volumen de 0.600 L a 19.0°C. ¿Qué volumen tendrá el globo si se le enfría hasta el punto de ebullición del nitrógeno líquido (77.3 K)?

18.12 • **Desviaciones con respecto a la ecuación del gas ideal.** Para el dióxido de carbono (CO_2) gaseoso, las constantes de la ecuación de Van der Waals son: $a = 0.364\ \text{J}\cdot\text{m}^3/\text{mol}^2$ y $b = 4.27 \times 10^{-5}\ \text{m}^3/\text{mol}$. *a*) Si 1.00 mol de CO_2 gaseoso a 350 K se confina a un volumen de 400 cm^3, calcule la presión del gas usando la ecuación del gas ideal y la de Van der Waals. *b*) ¿Cuál ecuación da una presión menor? ¿Por qué? ¿Qué diferencia porcentual hay entre los dos resultados? *c*) El gas se mantiene a la misma temperatura mientras se expande hasta un volumen de 4000 cm^3. Repita los cálculos de los incisos *a*) y *b*). *d*) Explique por qué estos cálculos demuestran que la ecuación de Van der Waals es equivalente a la del gas ideal si el cociente n/V es pequeño.

18.13 •• Si una cierta cantidad de gas ideal ocupa un volumen V a TPE en la Tierra, ¿cuál sería su volumen (en términos de V) en Venus, donde la temperatura es de 1003°C y la presión es de 92 atm?

18.14 • Un buzo observa una burbuja de aire que sube del fondo de un lago (donde la presión absoluta es de 3.50 atm) a la superficie (donde es de 1.00 atm). La temperatura en el fondo es de 4.0°C, y en la superficie, de 23.0°C. *a*) Calcule la razón entre el volumen de la burbuja al llegar a la superficie y el que tenía en el fondo. *b*) ¿Puede el buzo detener la respiración sin peligro mientras sube del fondo del lago a la superficie? ¿Por qué?

18.15 • Un tanque metálico con un volumen de 3.10 L revienta si la presión absoluta del gas que contiene excede 100 atm. *a*) Si 11.0 moles de gas ideal se ponen en el tanque a 23.0°C, ¿a qué temperatura podrá calentarse el gas antes de que se rompa el tanque? Desprecie la expansión térmica del tanque. *b*) Con base en su respuesta al inciso *a*), ¿es razonable despreciar la expansión térmica del tanque? Explique su respuesta.

18.16 • Tres moles de gas ideal están en una caja cúbica rígida que mide 0.200 m por lado. *a*) ¿Qué fuerza ejerce el gas sobre cada una de las seis caras de la caja cuando su temperatura es de 20.0°C? *b*) ¿Qué fuerza ejerce si su temperatura se aumenta a 100.0°C?

18.17 • Con las suposiciones del ejemplo 18.4 (sección 18.1), ¿a qué altura sobre el nivel del mar la presión del aire es el 90% de la presión en el nivel del mar?

18.18 • Haga las mismas suposiciones del ejemplo 18.4 (sección 18.1). ¿Cómo disminuye porcentualmente la presión del aire al subir del nivel del mar a una elevación de 100 m, en comparación con la que se observa al subir del nivel del mar a una elevación de 1000 m? Si su segunda respuesta no es 10 veces la primera, explique por qué.

18.19 •• *a*) Calcule la masa de nitrógeno presente en un volumen de 3000 cm^3 si la temperatura del gas es de 22.0°C y la presión absoluta de 2.00×10^{-13} atm es un vacío parcial que se obtiene fácilmente en los laboratorios. *b*) ¿Cuál es la densidad (en kg/m^3) del N_2?

18.20 •• Suponiendo que el aire tiene una temperatura uniforme de 0.0°C (como en el ejemplo 18.4), ¿cuál es la densidad del aire a una altura de 1.00 km como un porcentaje de la densidad en la superficie?

18.21 • A una altura de 11,000 m (altura de crucero de un avión a reacción comercial), la temperatura del aire es de −56.5°C y su densidad es de 0.364 kg/m^3. ¿Cuál es la presión de la atmósfera a esa altura? (*Nota:* La temperatura a esta altura no es la misma que en la superficie, por lo que no puede usarse el cálculo del ejemplo 18.4 de la sección 18.1).

Sección 18.2 Propiedades moleculares de la materia

18.22 • Una molécula orgánica grande tiene una masa de 1.41×10^{-21} kg. ¿Cuál es la masa molar de este compuesto?

18.23 •• Suponga que usted hereda de su tío (un químico excéntrico) 3.00 moles de oro cuando este metal se cotiza a $14.75 por gramo. Consulte la tabla periódica en el apéndice D y la tabla 12.1. *a*) ¿Cuál es el valor del oro aproximando al dólar más cercano? *b*) Si usted tiene su oro en forma de pepita esférica, ¿cuál será el diámetro de esta?

18.24 •• Las bombas de vacío modernas alcanzan fácilmente presiones del orden de 10^{-13} atm en el laboratorio. Considere un volumen de aire y trate al aire como un gas ideal. *a*) A una presión de 9.00×10^{-14} atm y una temperatura ordinaria de 300.0 K, ¿cuántas moléculas hay en un volumen de 1.00 cm^3? *b*) ¿Cuántas moléculas estarían presentes a la misma temperatura pero a una presión de 1.00 atm?

18.25 •• La nebulosa Laguna (figura E18.25) es una nube de hidrógeno gaseoso que está a 3900 años luz de la Tierra. La nube tiene unos 45 años luz de diámetro y brilla a causa de su elevada temperatura de

Figura **E18.25**



7500 K. (El gas alcanza esta temperatura gracias a las estrellas que están dentro de la nebulosa). La nube es muy poco densa; apenas hay 80 moléculas por cm^3. *a*) Calcule la presión del gas (en atm) en la nebulosa Laguna, y compárela con la presión de laboratorio mencionada en el ejercicio 18.24. *b*) Las películas de ciencia ficción a veces muestran naves que son sacudidas por turbulencia al viajar por nubes de gas como la nebulosa Laguna. ¿Le parece realista eso? ¿Por qué?

18.26 •• En un gas en condiciones estándar, ¿cuánto mide una arista de un cubo que contiene tantas moléculas como personas hay en la Tierra (unas 6×10^9)?

18.27 • ¿Cuántos moles hay en un frasco con 1.00 kg de agua? ¿Cuántas moléculas? La masa molar del agua es de 18.0 g/mol.

18.28 •• **¿Qué tan cerca están las moléculas de gas?** Considere un gas ideal a 27°C y a una presión de 1.00 atm. Para tener una idea de qué tan cerca están estas moléculas entre sí, en promedio, imagine que se encuentran separadas de manera uniforme, cada una en el centro de un pequeño cubo. *a*) ¿Cuál es la longitud de la arista de cada cubo si cubos adyacentes se tocan pero no se traslapan? *b*) ¿Cómo se compara esta distancia con el diámetro de una molécula típica? *c*) ¿Cómo se compara esta separación con la que existe entre los átomos de sólidos, los cuales comúnmente se encuentran a 0.3 nm de distancia?

18.29 •• Considere 5.00 moles de agua líquida. *a*) ¿Qué volumen ocupa esta cantidad de agua? La masa molar del agua es de 18.0 g/mol. *b*) Imagine que las moléculas, en promedio, están separadas de manera uniforme, cada una en el centro de un cubo pequeño. ¿Cuánto mide la arista de cada cubo si los cubos adyacentes se tocan pero no se traslapan? *c*) Compare esta distancia con el diámetro de una molécula.

Sección 18.3 Modelo cinético-molecular del gas ideal

18.30 • Un matraz contiene una mezcla de los gases neón (Ne), kriptón (Kr) y radón (Rn). Compare *a*) las energías cinéticas medias de los tres tipos de átomos, y *b*) la rapidez eficaz de sus moléculas. [*Sugerencia:* La tabla periódica del apéndice D presenta la masa molar (en g/mol) de todos los elementos, bajo el símbolo químico correspondiente].

18.31 • **Difusión gaseosa del uranio.** *a*) A menudo se utiliza un proceso llamado *difusión gaseosa* para separar isótopos de uranio, es decir, átomos del elemento que tienen diferentes masas, como ^{235}U y ^{238}U. El único compuesto de uranio que es gaseoso a temperaturas ordinarias es el hexafluoruro de uranio, UF_6. Especule cómo las moléculas de $^{235}UF_6$ y $^{238}UF_6$ se podrían separar por difusión. *b*) Las masas molares de $^{235}UF_6$ y $^{238}UF_6$ son 0.349 kg/mol y 0.352 kg/mol, respectivamente. Si el hexafluoruro de uranio actúa como gas ideal, ¿cuál es la razón entre las rapideces eficaces de las moléculas de $^{235}UF_6$ y de $^{238}UF_6$, suponiendo que la temperatura es uniforme?

18.32 • Las ideas de valor medio y eficaz se pueden aplicar a cualquier distribución. Un grupo de 150 estudiantes obtuvo los siguientes puntajes en un examen de 100 puntos:

Puntaje	Número de estudiantes
10	11
20	12
30	24
40	15
50	19
60	10
70	12
80	20
90	17
100	10

a) Calcule el puntaje medio del grupo. *b*) Calcule el puntaje eficaz del grupo.

18.33 • Tenemos dos cajas del mismo tamaño, *A* y *B*. Cada una contiene gas que se comporta como gas ideal. Insertamos un termómetro en cada caja y vemos que el gas de la caja *A* está a 50°C, mientras que el de la caja *B* está a 10°C. Esto es todo lo que sabemos acerca del gas contenido en las cajas. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones *deben* ser verdad? ¿Cuáles *podrían* ser verdad? *a*) La presión en *A* es mayor que en *B*. *b*) Hay más moléculas en *A* que en *B*. *c*) *A* y *B* no contienen el mismo tipo de gas. *d*) Las moléculas en *A* tienen en promedio más energía cinética por molécula que las de *B*. *e*) Las moléculas en *A* se mueven con mayor rapidez que las de *B*. Explique en qué basó sus respuestas.

18.34 • Un recipiente con volumen de 1.48 L está inicialmente vacío. Entonces se llena con 0.226 g de N_2. Suponga que la presión del gas es lo suficientemente baja como para que el gas obedezca la ley de los gases ideales con un alto grado de exactitud. Si la rapidez eficaz de las moléculas de gas es 182 m/s, ¿cuál es la presión del gas?

18.35 •• *a*) Un deuterón, ^2_1H, es el núcleo de un isótopo de hidrógeno y consiste en un protón y un neutrón. El plasma de deuterones en un reactor de fusión nuclear debe calentarse a cerca de 300 millones de K. Calcule la rapidez rms de los deuterones. ¿Es una fracción apreciable de la rapidez de la luz ($c = 3.0 \times 10^8$ m/s)? *b*) ¿Qué temperatura tendría el plasma si la rapidez rms de los deuterones fuera igual a $0.10c$?

18.36 • **Clima en Marte.** La atmósfera de Marte está constituida en su mayor parte por CO_2 (masa molar de 44.0 g/mol) bajo una presión de 650 Pa, y supondremos que se mantiene constante. En muchos lugares la temperatura varía de 0.0°C en el verano a −100°C en el invierno. En el transcurso de un año de Marte, ¿cuáles son los intervalos *a*) de rapidez rms de las moléculas de CO_2 y *b*) de la densidad (en moles/m^3) de la atmósfera?

18.37 •• *a*) El oxígeno (O_2) tiene una masa molar de 32.0 g/mol. Calcule la energía cinética de traslación media de una molécula de oxígeno a 300 K. *b*) ¿Cuál es el valor medio del cuadrado de su rapidez? *c*) Calcule su rapidez rms. *d*) Calcule el momento lineal de una molécula de oxígeno que viaja con esa rapidez. *e*) Suponga que una molécula de oxígeno que viaja con esta rapidez rebota entre los costados opuestos de un recipiente cúbico de 0.10 m por lado. ¿Qué fuerza media ejerce la molécula sobre cada una de las paredes del recipiente? (Suponga que la velocidad de la molécula es perpendicular a los dos costados que golpea). *f*) Calcule la fuerza media por unidad de área. *g*) ¿Cuántas moléculas de oxígeno viajando con esta rapidez se necesitan para producir una presión media de 1 atm? *h*) Calcule el número de moléculas de oxígeno contenidas realmente en un recipiente de este tamaño a 300 K y presión atmosférica. *i*) Su respuesta al inciso *h*) deberá ser tres veces mayor que su respuesta en *g*). ¿Cuál es el origen de esta discrepancia?

18.38 •• Calcule la trayectoria libre media de las moléculas de aire a una presión de 3.50×10^{-13} atm y una temperatura de 300 K. (Esta presión se puede obtener fácilmente en el laboratorio; véase el ejercicio 18.24). Al igual que en el ejemplo 18.8, modele las moléculas de aire como esferas con radio de 2.0×10^{-10} m.

18.39 •• ¿A qué temperatura es la rapidez eficaz de las moléculas de nitrógeno igual a la de las moléculas de hidrógeno a 20.0°C? [*Sugerencia:* La tabla periódica del apéndice D indica la masa molar (en g/mol) de todos los elementos, bajo el símbolo químico correspondiente. La masa molar del H_2 es dos veces la de un átomo de hidrógeno; algo análogo sucede con el N_2].

18.40 • Las partículas de humo en el aire suelen tener masas del orden de 10^{-16} kg. El movimiento browniano (rápido e irregular) de estas partículas, resultado de choques con las moléculas de aire, se puede

observar al microscopio. *a*) Calcule la rapidez eficaz del movimiento browniano de una partícula con una masa de 3.00×10^{-16} kg en aire a 300 K. *b*) ¿Sería diferente esa rapidez si la partícula estuviera en hidrógeno gaseoso a la misma temperatura? Explique su respuesta.

Sección 18.4 Capacidades caloríficas

18.41 • *a*) ¿Cuánto calor se requiere para aumentar la temperatura de 2.50 moles de un gas diatómico ideal en 50.0 K cerca de la temperatura ambiente si el gas se mantiene a volumen constante? *b*) ¿Cuál es la respuesta a la pregunta del inciso *a*) si el gas es monoatómico en vez de diatómico?

18.42 •• Recipientes perfectamente rígidos contienen cada uno *n* moles de gas ideal: uno de ellos es hidrógeno (H_2) y el otro es neón (Ne). Si se requieren 300 J de calor para aumentar la temperatura del hidrógeno en 2.50°C, ¿en cuántos grados elevará la misma cantidad de calor la temperatura del neón?

18.43 •• *a*) Calcule el calor específico a volumen constante del nitrógeno gaseoso (N_2) y compárelo con el del agua líquida. La masa molar del N_2 es 28.0 g/mol. *b*) Se calienta 1.00 kg de agua, con volumen constante de 1.00 L, de 20.0 a 30.0°C en una tetera. Con la misma cantidad de calor, ¿cuántos kilogramos de aire a 20.0°C se podrían calentar a 30.0°C? ¿Qué volumen (en litros) ocuparía ese aire a 20.0°C y 1.00 atm de presión? Suponga, para simplificar, que el aire es 100% N_2.

18.44 •• *a*) Calcule el calor específico a volumen constante del vapor de agua, suponiendo que la molécula triatómica no lineal tiene tres grados de libertad de traslación y tres rotacionales, y que el movimiento vibracional no contribuye. La masa molar del agua es 18.0 g/mol. *b*) El calor específico real del vapor de agua a baja presión es de cerca de 2000 J/kg · K. Compare esto con su cálculo y comente el papel real del movimiento vibracional.

18.45 •• *a*) Utilice la ecuación 18.28 para calcular el calor específico a volumen constante del aluminio en unidades de J/kg · K. Consulte la tabla periódica en el apéndice D. *b*) Compare la respuesta en el inciso *a*) con el valor que se da en la tabla 17.3. Trate de explicar cualquier discordancia entre estos dos valores.

Sección 18.5 Rapideces moleculares

18.46 • Para nitrógeno gaseoso (N_2), ¿cuál debe ser la temperatura si la rapidez del 94.7% de las moléculas es menor que *a*) 1500 m/s; *b*) 1000 m/s; *c*) 500 m/s? Use la tabla 18.2. La masa molar del N_2 es 28.0 g/mol.

18.47 • Para dióxido de carbono diatómico gaseoso (CO_2, masa molar = 44.0 g/mol) a $T = 300$ K, calcule *a*) la rapidez más probable v_{mp}; *b*) la rapidez media v_{med}; *c*) la rapidez eficaz v_{rms}.

18.48 • **CALC** Demuestre que $f(v)$, dada por la ecuación (18.33), es máxima con $\epsilon = kT$. Use este resultado para obtener la ecuación (18.34).

Sección 18.6 Fases de la materia

18.49 • Se calienta agua sólida (hielo) desde una temperatura muy baja. *a*) ¿Qué presión externa mínima p_1 debe aplicársele para observar una transición de fase de fusión? Describa la sucesión de transiciones de fase que se da si la presión aplicada p es tal que $p < p_1$. *b*) Por arriba de cierta presión máxima p_2, no se observa transición de ebullición. ¿Cuál es la presión? Describa la sucesión de transiciones de fase que se presenta si $p_1 < p < p_2$.

18.50 • Las abullonadas nubes cúmulo, compuestas por gotitas de agua, se forman a baja altura en la atmósfera. Las tenues nubes cirrus, compuestas por cristales de hielo, se forman a mayor altura. Determine la altura *y* (medida con respecto al nivel del mar) por arriba de la cual solo puede haber nubes cirrus. En un día típico y a alturas de menos de 11 km, la temperatura a una altura *y* está dada por $T = T_0 - \alpha y$, donde $T_0 = 15.0°C$ y $\alpha = 6.0\ C°/1000$ m.

18.51 • La atmósfera de Marte es 95.3% dióxido de carbono (CO_2) y aproximadamente 0.03% vapor de agua. La presión atmosférica es de solo 600 Pa, y la temperatura superficial varía entre −30 y −100°C. Los casquetes de hielo polar contienen CO_2 sólido y agua sólida. ¿Podría haber CO_2 *líquido* en la superficie de Marte? ¿Y agua líquida? ¿Por qué?

18.52 • Un aula de física tiene un volumen de 216 m^3. *a*) Para una presión de 1.00 atm y una temperatura de 27.0°C, use la ley de los gases ideales para calcular el número de moléculas de aire en la habitación. Suponga que todo el aire es N_2. *b*) Calcule la densidad de partículas, es decir, el número de moléculas de N_2 por centímetro cúbico. *c*) Calcule la masa del aire del aula.

PROBLEMAS

18.53 •• **PA BIO** **Efecto de la altitud sobre los pulmones.** *a*) Calcule el *cambio* en la presión de aire que experimentará si sube una montaña de 1000 m, suponiendo que la temperatura y la densidad del aire no cambian en esta distancia y que estos valores eran de 22°C y 1.2 kg/m^3, respectivamente, en la parte inferior de la montaña. (Considere que el resultado del ejemplo 18.4 no es aplicable, ya que la expresión que se deduce en ese ejemplo considera la variación de la densidad del aire con la altitud y en este problema se nos dice que debemos despreciar dicha variación). *b*) Si tomó una inhalación de 0.50 L a los pies de la montaña y lograra mantener el aire hasta llegar a la cima, ¿cuál sería el volumen de este cuando lo exhale allí?

18.54 •• **PA BIO** **Descompresiones.** Si los buzos de aguas profundas salen a la superficie demasiado rápido, burbujas de nitrógeno en la sangre podrían expandirse y ocasionar una fatalidad. Este fenómeno se conoce como *descompresión*. Si un buzo se eleva rápidamente desde una profundidad de 25 m en el lago Michigan (que es agua dulce), ¿cuál será el volumen en la superficie de una burbuja de N_2 que ocupó 1.0 mm^3 en su sangre en la profundidad más baja? ¿Le parece que esta diferencia es lo suficientemente grande como para constituir un problema? (Suponga que la diferencia de presión se debe solo a que cambia la presión del agua, no a una diferencia de temperatura, una suposición que es razonable, ya que somos criaturas de sangre caliente).

18.55 ••• **PA** Un globo de aire caliente permanece suspendido porque el aire caliente a presión atmosférica es menos denso que el aire frío a la misma presión. Si el volumen del globo es 500.0 m^3 y el aire circundante está a 15.0°C, ¿cuál debe ser la temperatura del aire en el globo para levantar una carga total de 290 kg (además de la masa de aire caliente)? La densidad del aire a 15.0°C y a presión atmosférica es 1.23 kg/m^3.

18.56 •• *a*) Use la ecuación (18.1) para estimar el cambio de volumen de una esfera sólida de acero cuyo volumen inicial es de 11 L, después de que la temperatura y la presión se aumentan de 21°C y 1.013×10^5 Pa a 42°C y 2.10×10^7 Pa. (*Sugerencia:* Consulte los capítulos 11 y 17 para determinar los valores de β y *k*). *b*) En el ejemplo 18.3 se despreció el cambio de volumen de un tanque de 11 L para buceo. ¿Se justifica esa aproximación? Explique.

18.57 ••• Un cilindro de 1.00 m de altura con diámetro interior de 0.120 m contiene gas propano (masa molar 44.1 g/mol) que se usará en una parrillada. Inicialmente, el tanque se llena hasta que la presión manométrica es de 1.30×10^6 Pa y la temperatura es 22.0°C. La temperatura del gas se mantiene constante mientras el tanque se vacía parcialmente hasta que la presión manométrica es de 2.50×10^5 Pa. Calcule la masa de propano que se utilizó.

18.58 • **PA** Durante una inmersión de prueba en 1939 antes de ser aceptado por la armada de Estados Unidos, el submarino *Squalus* se hundió en un punto donde la profundidad del agua era de 73.0 m. La temperatura en la superficie era de 27.0°C, y en el fondo, 7.0°C. La densidad del agua de mar es de 1030 kg/m^3. *a*) Se usó una campana de inmersión con forma de cilindro circular de 2.30 m de altura, abierto abajo y cerrado arriba, para rescatar a 33 tripulantes atrapados en el *Squalus*. Al bajar la campana al fondo, ¿a qué altura subió el agua dentro de la campana? (*Sugerencia:* Puede despreciarse la relativamente pequeña variación en la presión del agua entre el fondo de la campana y la superficie del agua dentro de la campana). *b*) ¿Con qué presión manométrica debió haberse suministrado aire comprimido a la campana en el fondo para expulsar de ella toda el agua?

18.59 • **Atmósfera de Titán.** Titán, el satélite más grande de Saturno, tiene una gruesa atmósfera de nitrógeno. En su superficie, la presión es de 1.5 atmósferas terrestres y la temperatura es de 94 K. *a*) ¿Cuál es la temperatura de la superficie en °C? *b*) Calcule la densidad de la superficie en la atmósfera de Titán en moléculas por metro cúbico. *c*) Compare la densidad de la atmósfera superficial de Titán con la densidad de la atmósfera de la Tierra a 22°C. ¿Cuál de ellos tiene la atmósfera más densa?

18.60 • **Presión en Venus.** En la superficie de Venus la temperatura media es de 460°C como resultado del efecto de invernadero (¡calentamiento global!), la presión es de 92 atmósferas terrestres y la aceleración debida a la gravedad es de $0.894g_{\text{Tierra}}$. La atmósfera es casi toda CO_2 (masa molar, 44.0 g/mol) y la temperatura permanece notablemente constante. Supondremos que la temperatura no cambia en lo absoluto con la altitud. *a*) ¿Cuál es la presión atmosférica 1.00 km arriba de la superficie de Venus? Exprese su respuesta en atmósferas de Venus y en atmósferas de la Tierra. *b*) ¿Cuál es la rapidez eficaz de las moléculas de CO_2 en la superficie de Venus y a una altura de 1.00 km?

18.61 •• Un neumático de automóvil tiene un volumen de 0.0150 m^3 en un día frío cuando la temperatura del aire en el neumático es de 5.0°C y la presión atmosférica es de 1.02 atm. En estas condiciones, la presión manométrica en el neumático es de 1.70 atm (aproximadamente 25 lb/in^2). Después de 30 min de viajar en carretera, la temperatura del aire en los neumáticos aumenta a 45.0°C, y el volumen a 0.0159 m^3. Determine la presión manométrica ahora.

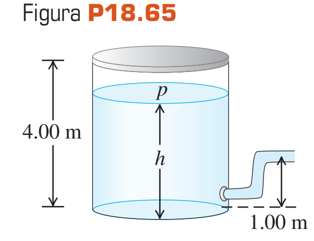
18.62 •• Un matraz de 1.50 L, provisto de una llave de paso, contiene etano gaseoso (C_2H_6) a 300 K y presión atmosférica (1.013×10^5 Pa). La masa molar del etano es de 30.1 g/mol. El sistema se calienta a 490 K, con la llave abierta a la atmósfera. Luego se cierra la llave y el matraz se enfría a su temperatura original. *a*) Calcule la presión final del etano en el matraz. *b*) ¿Cuántos gramos de etano quedan en el matraz?

18.63 •• **PA** Un globo con un volumen de 750 m^3 se va a llenar con hidrógeno a presión atmosférica (1.01×10^5 Pa). *a*) Si el hidrógeno se guarda en cilindros de 1.90 m^3 a una presión manométrica de 1.20×10^6 Pa, ¿cuántos cilindros se necesitarán? Suponga que la temperatura del hidrógeno se mantiene constante. *b*) ¿Qué peso total (además del peso del gas) puede sostener el globo si el gas y el aire circundante están a 15.0°C? La masa molar del hidrógeno (H_2) es de 2.02 g/mol. La densidad del aire a 15.0°C y la presión atmosférica es de 1.23 kg/m^3. Repase la explicación de la flotación del capítulo 12. *c*) ¿Qué peso se podría sostener si el globo se llenara con helio (masa molar de 4.00 g/mol) en vez de hidrógeno, también a 15.0°C?

18.64 •• Un tanque cilíndrico vertical contiene 1.80 moles de un gas ideal a una presión de 0.500 atm y a 20.0°C. La parte circular del tanque tiene un radio de 10.0 cm y el gas tiene un pistón que puede moverse sin fricción hacia arriba y hacia abajo en el cilindro. Hay vacío encima del pistón. *a*) ¿Cuál es la masa de este pistón? *b*) ¿Qué altura tiene la columna de gas que sostiene el pistón?

18.65 •• **PA** Un tanque grande de agua tiene una manguera conectada como se ilustra en la figura P18.65. El tanque está sellado por arriba y tiene aire comprimido entre la superficie del agua y la tapa. Cuando la altura del agua h es de 3.50 m, la presión absoluta p del aire comprimido es de 4.20×10^5 Pa. Suponga que ese aire se expande a temperatura constante, y considere que la presión atmosférica es 1.00×10^5 Pa. *a*) ¿Con qué rapidez sale agua por la manguera cuando $h = 3.50$ m? *b*) Al salir agua del tanque, h disminuye. Calcule la rapidez de flujo para $h = 3.00$ m y $h = 2.00$ m. *c*) ¿En qué valor de h se detiene el flujo?

Figura **P18.65**



18.66 •• **BIO** Una persona en reposo consume 0.50 L de oxígeno a 1.00 atm y 20.0°C. El aire inhalado es 21.0% oxígeno. *a*) ¿Cuántas moléculas de oxígeno consume esta persona con cada inhalación? *b*) Suponga que esta persona ahora está descansando a una altura de 2000 m, pero la temperatura sigue siendo de 20.0°C. Suponiendo que el porcentaje de oxígeno y el volumen por inhalación son los mismos que los que se mencionaron antes, ¿cuántas moléculas de oxígeno consume ahora esta persona con cada inhalación? *c*) Si el cuerpo aún requiere el mismo número de moléculas de oxígeno por segundo que a nivel del mar para mantener sus funciones, explique por qué algunas personas reportan que "les falta aire" a grandes alturas.

18.67 •• **BIO** **¿Cuántos átomos tenemos?** Estime el número de átomos que hay en el cuerpo de una estudiante de física de 50 kg. Considere que el cuerpo humano es en su mayor parte agua, que tiene una masa molar de 18.0 g/mol y que cada molécula de agua contiene tres átomos.

18.68 • El tamaño de una molécula de oxígeno es del orden de 2.0×10^{-10} m. Haga una estimación de la presión a la que el volumen finito de las moléculas deberá causar desviaciones apreciables con respecto al comportamiento de gas ideal a temperaturas ordinarias ($T = 300$ K).

18.69 •• Usted tiene dos recipientes idénticos, uno contiene el gas A y el otro contiene el gas B. Las masas de estas moléculas son $m_A = 3.34 \times 10^{-27}$ kg y $m_B = 5.34 \times 10^{-26}$ kg. Ambos gases están a la misma presión y a 10.0°C. *a*) ¿Cuáles moléculas (A o B) tienen la mayor energía cinética de traslación por molécula y la mayor rapidez rms? Ahora usted desea elevar la temperatura de solo uno de esos recipientes, de manera que ambos gases tengan la misma rapidez rms. *b*) ¿De cuál gas elevaría la temperatura? *c*) ¿A qué temperatura logrará su cometido? *d*) Una vez que haya logrado su meta, ¿qué moléculas (A o B) tienen ahora la mayor energía cinética de traslación media por molécula?

18.70 • **Colisiones de insectos.** Una jaula cúbica de 1.25 m por lado contiene 2500 abejas furiosas; cada una vuela aleatoriamente a 1.10 m/s. Podemos modelar estos insectos como esferas de 1.50 cm de diámetro. En promedio, *a*) ¿qué distancia viaja entre choques una abeja representativa? *b*) ¿Cuál es el tiempo medio entre choques? *c*) ¿Cuántos choques por segundo tiene una abeja?

18.71 •• Usted infla un globo esférico hasta que alcance un diámetro de 50.0 cm y la presión absoluta en su interior sea de 1.25 atm y la temperatura de 22.0°C. Suponga que todo el gas es N_2 con masa molar de 28.0 g/mol. *a*) Calcule la masa de una sola molécula de N_2. *b*) ¿Cuánta energía cinética de traslación tiene una molécula promedio de N_2? *c*) ¿Cuántas moléculas de N_2 hay en el globo? *d*) ¿Cuál es la energía cinética de traslación *total* de las moléculas en el globo?

18.72 • **PA** *a*) Calcule el aumento de energía potencial gravitacional de una molécula de nitrógeno (masa molar, 28.0 g/mol) para un aumento de elevación de 400 m cerca de la superficie terrestre. *b*) ¿Con qué aumento de temperatura obtendremos la misma energía cinética media de una molécula de nitrógeno en ese cambio de altura? *c*) ¿Es posible que una molécula de nitrógeno cerca del nivel del mar, donde $T = 15.0°C$, suba a 400 m? ¿Es probable que lo haga sin chocar con otras moléculas en el camino? Explique.

18.73 •• **PA, CALC** **El potencial Lennard-Jones.** Una función de energía potencial de uso común para la interacción de dos moléculas (véase la figura 18.8) es el potencial Lennard-Jones 6-12:

$$U(r) = U_0\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_0}{r}\right)^{6}\right]$$

donde r es la distancia entre los centros de las moléculas, y U_0 y R_0 son constantes positivas. La fuerza $F(r)$ que corresponde a este potencial está dada por la ecuación (14.26). *a*) Grafique $U(r)$ y $F(r)$ contra r. *b*) Sea r_1 el valor de r en el que $U(r) = 0$, y sea r_2 el valor de r en el que $F(r) = 0$. Indique la ubicación de r_1 y r_2 en sus gráficas. ¿Cuál de ellos representa la separación de equilibrio entre las moléculas? *c*) Determine los valores de r_1 y r_2 en términos de R_0. Además, determine la relación r_1/r_2. *d*) Si las moléculas están separadas una distancia r_2 [como se calculó en el inciso *c*)], ¿cuánto trabajo debe efectuarse para separarlas de manera que $r \to \infty$?

18.74 • *a*) Calcule la energía cinética de traslación aleatoria total de 5.00 L de hidrógeno gaseoso (masa molar, 2.016 g/mol) a una presión de 1.01×10^5 Pa y temperatura de 300 K. (*Sugerencia:* Utilice el procedimiento del problema 18.71 como guía). *b*) Si el tanque que contiene el gas se coloca en un rápido avión que se desplaza a 300.0 m/s, ¿en qué porcentaje aumenta la energía cinética *total* del gas? *c*) Como la energía cinética de las moléculas de gas es mayor cuando este se encuentra en el avión, ¿significa esto que su temperatura aumentó? Explique.

18.75 • La rapidez de propagación de una onda sonora en aire a 27°C es de 350 m/s. Para comparar, calcule *a*) v_{rms} para las moléculas de nitrógeno y *b*) el valor rms de v_x a esta temperatura. La masa molar del nitrógeno (N_2) es 28.0 g/mol.

18.76 • **Hidrógeno en el Sol.** La superficie del Sol está aproximadamente a 5800 K y consiste principalmente en átomos de hidrógeno. *a*) Calcule la rapidez rms de un átomo de hidrógeno a esta temperatura. (La masa de un átomo de hidrógeno es de 1.67×10^{-27} kg). *b*) La rapidez de escape para que una partícula salga de la influencia gravitacional del Sol está dada por $(2GM/R)^{1/2}$, donde M es la masa del Sol, R es su radio y G es la constante gravitacional (véase el ejemplo 13.5, sección 13.3). Use los datos del apéndice F para calcular esta rapidez de escape. *c*) ¿Pueden escapar cantidades apreciables de hidrógeno del Sol? ¿Puede escapar *algo* de hidrógeno? Explique.

18.77 •• **PA** *a*) Demuestre que un proyectil con masa m puede "escapar" de la superficie de un planeta si se lanza verticalmente hacia arriba con una energía cinética mayor que mgR_p, donde g es la aceleración debida a la gravedad en la superficie del planeta y R_p es el radio del planeta. Ignore la resistencia del aire. (Véase el problema 18.76). *b*) Si el planeta en cuestión es la Tierra, ¿a qué temperatura la energía cinética de traslación media de una molécula de nitrógeno (masa molar, 28.0 g/mol) es igual a la requerida para escapar? ¿Y de una molécula de hidrógeno (masa molar, 2.02 g/mol)? *c*) Repita el inciso *b*) para la Luna, para la que $g = 1.63$ m/s^2 y $R_p = 1740$ km. *d*) Aunque la Tierra y la Luna tienen temperaturas superficiales medias similares, la Luna prácticamente no tiene atmósfera. Use sus resultados de los incisos *b*) y *c*) para explicar esto.

18.78 • **Atmósferas planetarias.** *a*) La temperatura en la parte superior de la capa de nubes multicolores de Júpiter es de cerca de 140 K. La temperatura en la parte superior de la troposfera de la Tierra, a una altura aproximada de 20 km, es de cerca de 220 K. Calcule la rapidez rms de las moléculas de hidrógeno en ambos entornos. Dé sus respuestas en m/s y como una fracción de la rapidez de escape del planeta respectivo (véase el problema 18.76). *b*) El hidrógeno gaseoso (H_2) es poco común en la atmósfera terrestre; en cambio, en la atmósfera de Júpiter, el 89% de las moléculas son de H_2. Explique por qué, usando sus resultados del inciso *a*). *c*) Suponga que un astrónomo afirma haber descubierto una atmósfera de oxígeno (O_2) en el asteroide Ceres. ¿Es creíble esto? Ceres tiene una masa igual a 0.014 veces la de la Luna, una densidad de 2400 kg/m^3 y una temperatura superficial de cerca de 200 K.

18.79 •• *a*) ¿Para qué masa de molécula o partícula es v_{rms} igual a 1.00 mm/s a 300 K? *b*) Si la partícula es un cristal de hielo, ¿cuántas moléculas contiene? La masa molar del agua es 18.0 g/mol. *c*) Calcule el diámetro de la partícula si es un trozo esférico de hielo. ¿Sería visible a simple vista?

18.80 •• Al describir las capacidades caloríficas de los sólidos en la sección 18.4, dijimos que la energía potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$ de un oscilador armónico promediada durante un periodo del movimiento es igual a la energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ promediada durante un periodo. Demuestre este resultado usando las ecuaciones (14.13) y (14.15) para la posición y la velocidad de un oscilador armónico simple. Por sencillez, suponga que la posición y velocidad iniciales hacen que el ángulo de fase f sea cero. *Sugerencia:* Use las identidades trigonométricas $\cos^2(\theta) = [1 + \cos(2\theta)]/2$ y $\text{sen}^2(\theta) = [1 - \cos(2\theta)]/2$. ¿Qué valor medio tiene $\cos(2wt)$ promediado durante un periodo?

18.81 •• Es posible crear sólidos cristalinos con un espesor de una sola capa de átomos. Estos cristales "bidimensionales" se crean depositando átomos en una superficie muy plana. *a*) Si los átomos de un cristal bidimensional solo pueden moverse dentro del plano del cristal, ¿qué capacidad calorífica molar tendrán a temperatura ambiente? Dé su respuesta como múltiplo de R y en J/mol·K. *b*) A muy bajas temperaturas, ¿la capacidad calorífica molar de un cristal bidimensional será mayor, menor o igual que el resultado obtenido en el inciso *a*)? Explique por qué.

18.82 •• *a*) Calcule la energía cinética *rotacional* total de las moléculas de 1.00 mol de un gas diatómico a 300 K. *b*) Calcule el momento de inercia de una molécula de oxígeno (O_2) para rotación sobre el eje y o el eje z de la figura 18.18*b*. Trate la molécula como dos puntos masivos (que representan los átomos de oxígeno) separados una distancia de 1.21×10^{-10} m. La masa molar de los *átomos* de oxígeno es de 16.0 g/mol. *c*) Calcule la velocidad angular rms de rotación de una molécula de oxígeno alrededor del eje y o del eje z de la figura 18.18*b*. Compare su respuesta con la velocidad angular de un componente giratorio típico de una máquina (10,000 rev/min).

18.83 • Para cada uno de los gases poliatómicos de la tabla 18.1, calcule el valor de la capacidad calorífica molar a volumen constante, C_V, suponiendo que no hay energía vibracional. Compare sus resultados con los valores medidos que se dan en la tabla y calcule la fracción de la capacidad calorífica total que se debe a la vibración para cada uno de los tres gases. (*Nota:* CO_2 es lineal, SO_2 y H_2S no lo son. Recuerde que una molécula poliatómica lineal tiene dos grados de libertad rotacionales, y una molécula no lineal tiene tres).

18.84 •• **CALC** *a*) Demuestre que $\int_0^\infty f(v)\,dv = 1$, donde $f(v)$ es la distribución de Maxwell-Boltzmann de la ecuación (18.32). *b*) En términos de la definición física de $f(v)$, explique por qué la integral del inciso *a*) *debe* tener ese valor.

18.85 •• **CALC** Calcule la integral de la ecuación (18.31), $\int_0^\infty v^2 f(v)\,dv$, y compare este resultado con $(v^2)_{med}$ dada por la ecuación (18.16). (*Sugerencia:* Puede usar la integral tabulada

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1}\alpha^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

donde n es un entero positivo y a es una constante positiva).

18.86 •• **CALC** Calcule la integral de la ecuación (18.30), $\int_0^\infty v f(v)\,dv$, y compare su resultado con v_{med} dada por la ecuación (18.35). (*Sugerencia:* Haga el cambio de variable $v^2 = x$ y use la integral tabulada

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\,dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

donde n es un entero positivo y a es una constante positiva).

18.87 •• **CALC** *a*) Explique por qué en un gas de N moléculas, el número de moléculas cuya rapidez está en el intervalo *finito* de v a $v + \Delta v$ es $\Delta N = N\int_v^{v+\Delta v} f(v)\;dv$. *b*) Si Δv es pequeño, $f(v)$ es aproximadamente constante en el intervalo, y $\Delta N \approx Nf(v)\Delta v$. Para oxígeno gaseoso ($O_2$, masa molar = 32.0 g/mol) a $T = 300$ K, use esta aproximación para calcular el número de moléculas cuya rapidez está a $\Delta v = 20$ m/s o menos de v_{mp}. Exprese su respuesta como múltiplo de N. *c*) Repita el inciso *b*) para velocidades dentro de $\Delta v = 20$ m/s o menos de $7v_{\text{mp}}$. *d*) Repita los incisos *b*) y *c*) para una temperatura de 600 K. *e*) Repita los incisos *b*) y *c*) para una temperatura de 150 K. *f*) ¿Qué le dicen estos resultados acerca de la forma de la distribución en función de la temperatura? ¿Concuerdan sus conclusiones con lo que se muestra en la figura 18.23?

18.88 • **Meteorología.** La *presión de vapor* es la presión de la fase de vapor de una sustancia cuando está en equilibrio con la fase sólida o líquida de la sustancia. La *humedad relativa* es la presión parcial del vapor de agua en el aire dividida entre la presión de vapor del agua a esa misma temperatura, expresada como porcentaje. El aire está saturado cuando la humedad es del 100%. *a*) La presión de vapor del agua a 20.0°C es de 2.34×10^3 Pa. Si la temperatura del aire es de 20.0°C y la humedad relativa es de 60%, determine la presión parcial del vapor de agua en la atmósfera (esto es, la presión debida exclusivamente al vapor de agua). *b*) En las condiciones del inciso *a*), ¿qué masa de agua hay en 1.00 m^3 de aire? (La masa molar del agua es de 18.0 g/mol. Suponga que el vapor de agua puede tratarse como gas ideal).

18.89 • **El punto de rocío.** La presión de vapor del agua (véase el problema 18.88) disminuye al bajar la temperatura. Si se mantiene constante la cantidad de vapor de agua en el aire mientras se enfría este, se llega a una temperatura, llamada *punto de rocío*, en la que la presión parcial y la presión de vapor coinciden y el vapor está saturado. Si el aire se enfría más, se condensará vapor a líquido hasta que la presión parcial otra vez sea igual a la presión de vapor a esa temperatura. La temperatura en un cuarto es de 30.0°C. Un meteorólogo enfría una lata metálica agregándole gradualmente agua fría. Cuando la temperatura de la lata llega a 16.0°C, se forman gotas de agua en la superficie exterior de la lata. Calcule la humedad relativa del aire del cuarto a 30.0°C. La siguiente tabla indica la presión de vapor del agua a diversas temperaturas:

Temperatura (°C)	Presión de vapor (Pa)
10.0	1.23×10^3
12.0	1.40×10^3
14.0	1.60×10^3
16.0	1.81×10^3
18.0	2.06×10^3
20.0	2.34×10^3
22.0	2.65×10^3
24.0	2.99×10^3
26.0	3.36×10^3
28.0	3.78×10^3
30.0	4.25×10^3

18.90 ••• **Altura a la que se forman nubes.** En un día primaveral en el Medio Oeste de Estados Unidos, la temperatura del aire en la superficie es de 28.0°C. Se forman abullonadas nubes cúmulo a una altura en la que la temperatura del aire es igual al punto de rocío (véase el problema 18.89). Si la temperatura del aire disminuye al aumentar la altura, a razón de 0.6 C°/100 m, ¿a qué altura sobre el suelo se formarán las nubes si la humedad relativa en la superficie es de 35% y 80%? (*Sugerencia:* Use la tabla del problema 18.89).

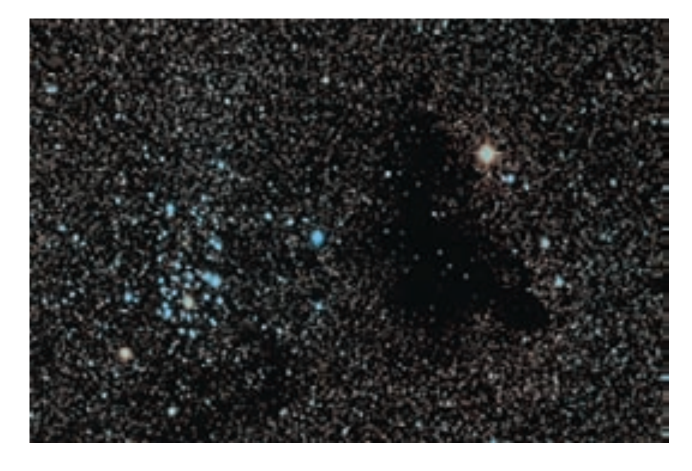
PROBLEMAS DE DESAFÍO

18.91 ••• **PA** **Nebulosas oscuras y el medio interestelar.** El área oscura de la figura P18.91 en la que parece no haber estrellas es una *nebulosa oscura*, una nube de gas frío en el espacio interestelar que contiene suficiente material para tapar la luz de las estrellas que están detrás. Una nebulosa oscura típica tiene un diámetro del orden de 20 años luz y contiene unos 50 átomos de hidrógeno por cm^3 (hidrógeno monoatómico, *no* H_2) a una temperatura cercana a 20 K. (Un año luz es la distancia que la luz viaja en el vacío en un año y es igual a 9.46×10^{15} m). *a*) Estime la trayectoria libre media de un átomo de hidrógeno en una nebulosa oscura. El radio de un átomo de hidrógeno es de 5.0×10^{-11} m. *b*) Estime la rapidez rms de un átomo de hidrógeno y el tiempo libre medio (el tiempo medio entre choques para un átomo dado). Con base en este resultado, ¿cree que los choques atómicos, como los que dan pie a la formación de moléculas de H_2, son muy importantes para determinar la composición de la nebulosa? *c*) Estime la presión dentro de una nebulosa oscura. *d*) Compare la rapidez rms de un átomo de hidrógeno con la rapidez de escape en la superficie de la nebulosa (si se supone esférica). Si el espacio que rodea a la nebulosa estuviera vacío, ¿sería estable una nube así, o tendería a evaporarse? *e*) La estabilidad de las nebulosas oscuras se explica por la presencia de *medio interestelar* (MIE), un gas menos denso aún que permea el espacio y en el que están incrustadas las nebulosas oscuras. Demuestre que, para que las nebulosas oscuras estén en equilibrio con el MIE, el número de átomos por volumen N/V y la temperatura T de las nebulosas oscuras y el MIE deben estar relacionados por

$$\frac{(N/V)_{\text{nebulosa}}}{(N/V)_{\text{MIE}}} = \frac{T_{\text{MIE}}}{T_{\text{nebulosa}}}$$

f) En las cercanías del Sol, el MIE contiene cerca de 1 átomo de hidrógeno en 200 cm^3. Estime la temperatura del MIE en las cercanías del Sol, y compárela con la temperatura de la superficie solar cuyo valor es cercano a 5800 K. ¿Se quemaría una nave moviéndose con rapidez constante en el espacio interestelar? ¿Por qué?

Figura **P18.91**



18.92 ••• **CALC** **Atmósfera de la Tierra.** En la *troposfera*, la parte de la atmósfera que se extiende desde la superficie hasta una altura

aproximada de 11 km, la temperatura no es uniforme, sino que disminuye al aumentar la altura. *a*) Demuestre que si la variación de temperatura se aproxima con la relación lineal

$$T = T_0 - \alpha y$$

donde T_0 es la temperatura en la superficie terrestre y T es la temperatura a una altura y, la presión p a la altura y está dada por

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{Mg}{R\alpha}\ln\left(\frac{T_0 - \alpha y}{T_0}\right)$$

donde p_0 es la presión en la superficie terrestre y M es la masa molar del aire. El coeficiente α se denomina razón de decaimiento de temperatura. Este varía con las condiciones atmosféricas; pero un valor medio sería 0.6 C°/100 m. *b*) Demuestre que el resultado anterior se reduce al resultado del ejemplo 18.4 (sección 18.1) en el límite en el que $\alpha \to 0$. *c*) Con $\alpha = 0.6$ C°/100 m, calcule p para $y = 8863$ m y compare su respuesta con el resultado del ejemplo 18.4. Tome $T_0 = 288$ K y $p_0 = 1.00$ atm.

18.93 ••• En el ejemplo 18.7 (sección 18.3) vimos que $v_{rms} > v_{med}$. No es difícil demostrar que esto *siempre* sucede. (La única excepción es cuando las partículas tienen la misma rapidez; en tal caso, $v_{rms} = v_{med}$). *a*) Para dos partículas con rapidez v_1 y v_2, demuestre que $v_{rms} \geq v_{med}$, sean cuales fueren los valores numéricos de v_1 y v_2. Después, demuestre que $v_{rms} > v_{med}$ si $v_1 \neq v_2$. *b*) Suponga que, para un conjunto de N partículas, se sabe que $v_{rms} > v_{med}$. Otra partícula, con rapidez u, se agrega al conjunto de partículas. Si denotamos las nuevas rapideces rms y media con v'_{rms} y v'_{med}, demuestre que

$$v'_{rms} = \sqrt{\frac{Nv_{rms}{}^2 + u^2}{N+1}} \quad \text{y} \quad v'_{med} = \frac{Nv_{med} + u}{N+1}$$

c) Use las expresiones del inciso *b*) para demostrar que $v'_{rms} > v'_{med}$, sea cual fuere el valor numérico de u. *d*) Explique por qué sus resultados de *a*) y *c*) juntos demuestran que $v_{rms} > v_{med}$ para cualquier conjunto de partículas si no todas las partículas tienen la misma rapidez.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

De acuerdo con la ecuación (18.19), la rapidez eficaz de una molécula de gas es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta T. El intervalo de temperaturas que estamos considerando es de $(25 + 273.15)$ K = 298 K a $(100 + 273.15)$ K = 373 K. Por lo tanto, las rapideces aumentan en un factor de $\sqrt{(373\text{ K})/(298\text{ K})} = 1.12$; es decir, hay un aumento del 12%. Si bien 100°C se siente mucho más caliente que 25°C, la diferencia de rapideces moleculares es relativamente pequeña.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

18.1 Respuesta: ii y iii (empate), i y v (empate), iv. Podemos rescribir la ecuación del gas ideal, ecuación (18.3), como $n = pV/RT$. Esto nos dice que el número de moles n es proporcional a la presión y al volumen, e inversamente proporcional a la temperatura absoluta. Por lo tanto, en comparación con **i**, el número de moles en cada caso es **ii.** $(2)(1)/(1) = 2$ veces más, **iii.** $(1)(2)/(1)$ 2 veces más, **iv.** $(1)(1)/(2) = \frac{1}{2}$ y **v.** $(2)(1)/(2) = 1$, es decir, igual.

18.2 Respuesta: vi. El valor de r_0 determina la separación en equilibrio de las moléculas de la fase sólida, así que un aumento de r_0 al doble implica duplicar la separación. Por lo tanto, un cubo sólido de este compuesto aumentaría de 1 cm de lado a 2 cm. El volumen sería entonces $2^3 = 8$ veces mayor y la densidad (masa dividida entre volumen) sería $\frac{1}{8}$ de la original.

18.3 Respuestas: *a*) iv, ii, iii, i; *b*) iii y iv (empate), i y ii (empate) *a*) La ecuación (18.19) nos dice que $v_{rms} = \sqrt{3RT/M}$, de manera que la rapidez eficaz es proporcional a la raíz cuadrada del cociente de la temperatura absoluta T y la masa molar M. En comparación con **i**, el oxígeno a 300 K, v_{rms} en los otros casos es **ii.** $\sqrt{(32.0\text{ g/mol})/(28.0\text{ g/mol})} = 1.07$ veces más rápido, **iii.** $\sqrt{(330\text{ K})/(300\text{ K})} = 1.05$ veces más rápido y **iv.** $\sqrt{(330\text{ K})(32.0\text{ g/mol})/(300\text{ K})(28.0\text{ g/mol})} = 1.12$ veces más rápido. *b*) De acuerdo con la ecuación (18.16), la energía cinética de traslación media por molécula es $\frac{1}{2}m(v^2)_{med} = \frac{3}{2}kT$, que es directamente proporcional a T e independiente de M. Tenemos $T = 300$ K para los casos **i** y **ii**, y $T = 330$ K para los casos **iii** y **iv**, de manera que $\frac{1}{2}m(v^2)_{med}$ tiene valores iguales para los casos **iii** y **iv**, y valores iguales (pero más pequeños) para los casos **i** y **ii.**

18.4 Respuestas: no, cerca del principio La adición de una cantidad pequeña de calor dQ al gas produce un cambio de temperatura dT, donde $dQ = nC_V dT$, ecuación (18.24). La figura 18.19 muestra que C_V para el H_2 varía con la temperatura entre 25 y 500 K, así que una cantidad dada de calor produce diferentes cambios de temperatura durante el proceso. Por lo tanto, la temperatura *no* aumentará a ritmo constante. El cambio de temperatura $dT = dQ/nC_V$ es inversamente proporcional a C_V, por lo que la temperatura aumenta más rápidamente al principio del proceso cuando la temperatura es más baja y el valor de C_V es más pequeño (véase la figura 18.19).

18.5 Respuesta: ii. La figura 18.23*b* muestra que la *fracción* de moléculas con rapideces entre v_1 y v_2 es igual al área bajo la curva de $f(v)$ contra v desde $v = v_1$ a $v = v_2$. Esto es igual a la integral $\int_{v_1}^{v_2} f(v)\,dv$, que a la vez es igual a la diferencia entre las integrales $\int_0^{v_2} f(v)\,dv$ (la fracción de moléculas con rapideces de 0 a v_2 y $\int_0^{v_1} f(v)\,dv$ (la fracción de moléculas con rapideces de 0 a la menor rapidez v_1). El *número* de moléculas con rapideces de v_1 a v_2 es igual a la fracción de moléculas en este intervalo de rapidez multiplicado por N, el número total de moléculas,

18.6 Respuestas: no, sí La presión de punto triple del agua (tabla 18.3) es 6.10×10^2 Pa. La presión atmosférica actual en Marte es un poco menor y corresponde a la línea rotulada p_s en la figura 18.24. Por lo tanto, no puede existir agua líquida en la superficie de Marte, así que no hay lagos ni ríos. Los científicos de los planetas han llegado a la conclusión de que en el pasado, cuando la atmósfera era más densa, pudo haber existido, y casi seguramente existió, agua líquida en Marte.

Problema práctico

Respuestas: ***a*)** 102 km ***b*)** sí

19 PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA



? Una locomotora de vapor opera aprovechando la primera ley de la termodinámica: el agua se calienta y hierve, y el vapor al expandirse efectúa trabajo que impulsa a la locomotora. ¿Sería posible que el vapor de agua impulsara la locomotora efectuando trabajo al *condensarse*?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo representar la transferencia de calor y el trabajo efectuado en un proceso termodinámico.
- Cómo calcular el trabajo efectuado por un sistema termodinámico cuando cambia su volumen.
- Qué se entiende por trayectoria entre estados termodinámicos.
- Cómo utilizar la primera ley de la termodinámica para relacionar transferencia de calor, trabajo efectuado y cambio de energía interna.
- A distinguir entre los procesos adiabático, isocórico, isobárico e isotérmico.
- Cómo sabemos que la energía interna de un gas ideal depende solo de su temperatura.
- La diferencia entre capacidades caloríficas molares a volumen constante y a presión constante, y cómo utilizar estas cantidades al realizar cálculos.
- Cómo analizar los procesos adiabáticos en un gas ideal.

Cada vez que conducimos un automóvil, que encendemos un acondicionador de aire o cocinamos algún alimento, recibimos los beneficios prácticos de la *termodinámica*, es decir, el estudio de las relaciones donde intervienen calor, trabajo mecánico, y otros aspectos de la energía y de su transferencia. Por ejemplo, en el motor de un automóvil, se genera calor por la reacción química entre el oxígeno y la gasolina vaporizada en sus cilindros. El gas caliente empuja los pistones de los cilindros, efectuando trabajo mecánico que se utiliza para impulsar el vehículo. Este es un ejemplo de *proceso termodinámico*.

La primera ley de la termodinámica es fundamental para entender estos procesos y es una extensión del principio de conservación de la energía. Dicha ley amplía este principio para incluir el intercambio de energía tanto por transferencia de calor como por trabajo mecánico, e introduce el concepto de la *energía interna* de un sistema. La conservación de la energía desempeña un papel vital en todas las áreas de la física, en tanto que la primera ley de la termodinámica tiene una utilidad muy amplia. Para plantear las relaciones de energía con precisión, necesitaremos el concepto de *sistema termodinámico*, y estudiaremos el *calor* y el *trabajo* como dos formas de introducir energía en semejante sistema o de extraerla de él.

19.1 El maíz en la olla es un sistema termodinámico. En el proceso termodinámico que se muestra aquí, se agrega calor al sistema y este efectúa trabajo sobre el entorno para levantar la tapa de la olla.



19.1 Sistemas termodinámicos

Ya estudiamos la transferencia de energía mediante trabajo mecánico (capítulo 6) y por transferencia de calor (capítulos 17 y 18). Ahora podemos combinar y generalizar estos principios.

Siempre hablaremos de transferencia de energía hacia o desde algún *sistema* específico. El sistema podría ser un dispositivo mecánico, un organismo biológico o cierta cantidad de material como el refrigerante de un acondicionador de aire o el vapor de agua que se expande en una turbina. En general, un **sistema termodinámico** es cualquier conjunto de objetos que conviene considerar como una unidad, y que podría intercambiar energía con el entorno. Un ejemplo conocido es una cantidad de granos de maíz

para elaborar rosetas (palomitas) en una olla con tapa. Al colocarse la olla en una estufa, se agrega energía al maíz por conducción de calor. Al reventarse el maíz y expandirse, realiza trabajo ejerciendo una fuerza hacia arriba sobre la tapa y la desplaza (figura 19.1). El *estado* del maíz cambia en este proceso, ya que el volumen, la temperatura y la presión del maíz se modifican cuando revienta. Un proceso así, donde hay cambios en el estado de un sistema termodinámico, se denomina **proceso termodinámico**.

En mecánica, a menudo usamos el concepto de *sistema* en relación con los diagramas de cuerpo libre y la conservación de la energía y el momento lineal. En los sistemas *termodinámicos*, al igual que en todos los demás, es indispensable definir con claridad desde un principio exactamente lo que está incluido en el sistema y lo que no. Solo así podremos describir sin ambigüedad las transferencias de energía al sistema y desde este. En nuestro ejemplo del maíz para elaborar rosetas, definimos el sistema como el maíz, sin incluir la olla, la tapa ni la estufa.

La termodinámica tiene sus raíces en muchos problemas prácticos además del inflado de palomitas (rosetas) de maíz (figura 19.2). El motor de gasolina en un automóvil, los motores a reacción de un avión y los motores en los cohetes de un vehículo de lanzamiento usan el calor de la combustión del combustible para realizar trabajo mecánico e impulsar el vehículo. El tejido muscular de los organismos vivos metaboliza la energía química del alimento y realiza trabajo mecánico sobre el entorno del organismo. Una máquina o una turbina de vapor usa el calor de combustión del carbón u otro combustible para realizar trabajo mecánico, como al impulsar un generador eléctrico o arrastrar un tren.

19.2 *a*) Un motor de cohete usa el calor de combustión de su combustible para realizar trabajo impulsando el vehículo. *b*) El ser humano y otros organismos biológicos son sistemas demasiado complicados como para analizarlos completamente en este libro; no obstante, los mismos principios básicos de termodinámica son válidos en ellos.

a) *b*)



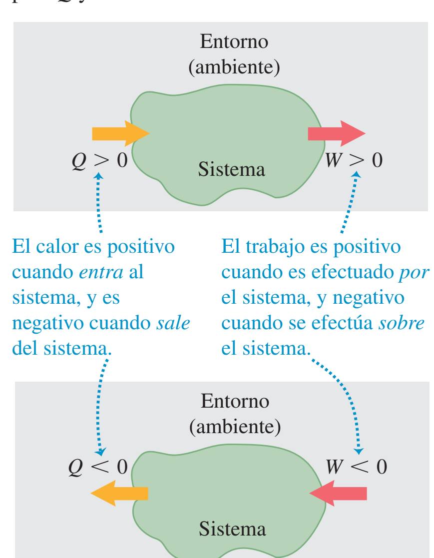
Signos del calor y el trabajo en termodinámica

Describimos las relaciones de energía de cualquier proceso termodinámico en términos de la cantidad de calor Q agregada *al* sistema y el trabajo W realizado *por* este. Tanto Q como W pueden ser positivos, negativos o cero (figura 19.3). Un valor positivo de Q representa flujo de calor *hacia* el sistema, con un suministro de energía correspondiente; una Q negativa representa flujo de calor hacia *afuera* del sistema. Un valor positivo de W representa trabajo realizado *por* el sistema contra el entorno, como el de un gas en expansión y, por lo tanto, corresponde a la energía que *sale* del sistema. Un W negativo, como el realizado durante la compresión de un gas, cuando el entorno realiza trabajo *sobre el gas*, representa energía que *entra* en el sistema. Usaremos estas convenciones de manera consistente en los ejemplos de este capítulo y el siguiente.

CUIDADO **Tenga en cuenta el signo del trabajo W** Observe que nuestra regla de signos para el trabajo es *opuesta* a la que usamos en mecánica, donde siempre hablamos del trabajo realizado por las fuerzas que actúan *sobre* un cuerpo. En termodinámica, suele ser más conveniente tomar W como el trabajo efectuado *por* el sistema, de modo que cuando un sistema se expanda, la presión, el cambio de volumen y el trabajo sean todos positivos. ¡Tenga cuidado de usar las reglas de signos para el trabajo y el calor de forma consistente!

Evalúe su comprensión de la sección 19.1 En el ejemplo 17.8 (sección 17.6), ¿qué signo tiene Q para el café? ¿Y para la taza de aluminio? Si un bloque se desliza por una superficie horizontal con fricción, ¿qué signo tiene W para el bloque?

19.3 Un sistema termodinámico podría intercambiar energía con su entorno (ambiente) mediante calor, trabajo o ambos. Tome nota de las convenciones de signos para Q y W.



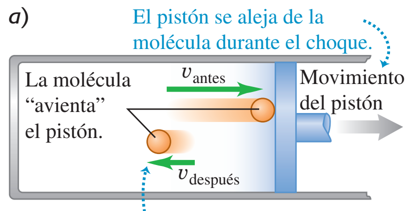
19.2 Trabajo realizado al cambiar el volumen

Una cantidad de gas en un cilindro con un pistón móvil es un ejemplo sencillo pero común de sistema termodinámico. Los motores de combustión interna, las máquinas de vapor y las compresoras de refrigeradores y acondicionadores de aire usan alguna versión de este tipo de sistema. En las siguientes secciones usaremos el sistema de gas en un cilindro para explorar varios tipos de procesos donde hay transformaciones de energía.

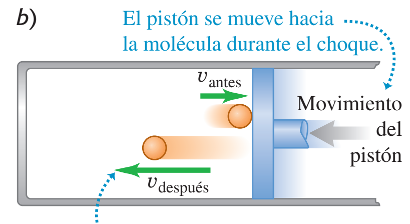
Usaremos una perspectiva microscópica, basada en las energías cinética y potencial de las moléculas individuales de un material, para desarrollar nuestra intuición con respecto a las cantidades termodinámicas. No obstante, es importante entender que los principios centrales de la termodinámica pueden tratarse *macroscópicamente*, sin referencia a modelos microscópicos. De hecho, parte de la utilidad y generalidad de la termodinámica radica en que *no* depende de los detalles estructurales de la materia.

19.4 Una molécula que golpea un pistón *a*) efectúa trabajo positivo si el pistón se aleja de la molécula y *b*) efectúa trabajo negativo si el pistón se acerca a la molécula. Por lo tanto, un gas efectúa trabajo positivo cuando se expande como en *a*), y trabajo negativo cuando se comprime como en *b*).

a)



b)



Consideremos primero el *trabajo* efectuado por un sistema durante un cambio de volumen. Al expandirse un gas, empuja las superficies de sus fronteras, las cuales se mueven hacia afuera; por lo tanto, siempre realiza trabajo positivo. Lo mismo sucede con cualquier sólido o fluido que se expande a presión, como el maíz de la figura 19.1.

Podemos entender el trabajo efectuado por un gas en un cambio de volumen considerando sus moléculas. Cuando una de ellas choca contra una superficie estacionaria, ejerce una fuerza momentánea sobre ella pero no realiza trabajo porque la superficie no se mueve. En cambio, si la superficie se mueve, como un pistón de un motor de gasolina, la molécula *sí* realiza trabajo sobre la superficie durante el choque. Si el pistón de la figura 19.4*a* se mueve a la derecha, de modo que aumente el volumen del gas, las moléculas que golpean el pistón ejercen una fuerza a lo largo de una distancia y realizan trabajo *positivo* sobre el pistón. Si este se mueve a la izquierda (figura 19.4*b*), reduciendo el volumen del gas, se realiza trabajo positivo *sobre* la molécula durante el choque. Por lo tanto, las moléculas de gas realizan trabajo *negativo* sobre el pistón.

La figura 19.5 muestra un sistema cuyo volumen puede cambiar (un gas, líquido o sólido) en un cilindro con pistón móvil. Suponga que el área transversal del cilindro es A y la presión ejercida por el sistema en la cara del pistón es p. La fuerza total F ejercida por el sistema sobre el pistón es $F = pA$. Si el pistón se mueve hacia afuera una distancia infinitesimal dx, el trabajo dW realizado por dicha fuerza es

$$dW = F\,dx = pA\,dx$$

Pero

$$A\,dx = dV$$

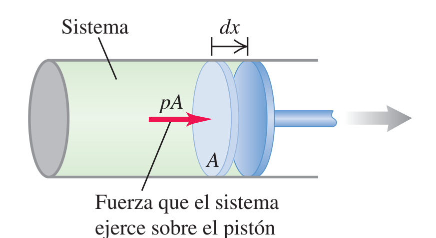
donde dV *es* el cambio infinitesimal de volumen del sistema. Así, podemos expresar el trabajo efectuado por el sistema en este cambio infinitesimal de volumen como

$$dW = p\,dV \qquad (19.1)$$

En un cambio finito de volumen de V_1 a V_2,

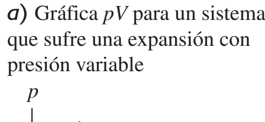
$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV \qquad \text{(trabajo efectuado en un cambio de volumen)} \qquad (19.2)$$

19.5 El trabajo infinitesimal realizado por el sistema durante la pequeña expansión dx es $dW = pA\,dx$.

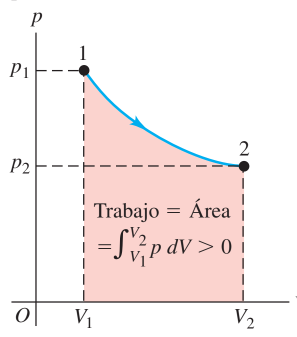


En general, la presión del sistema puede variar durante un cambio de volumen. Eso sucede, por ejemplo, en los cilindros de un motor de automóvil durante el movimiento hacia arriba y hacia abajo de los pistones. Para evaluar la integral de la ecuación (19.2), hay que saber cómo varía la presión en función del volumen. Podemos representar esta relación en una gráfica de p en función de V (una gráfica pV, que describimos al final de la sección 18.1). La figura 19.6*a* muestra un ejemplo sencillo. En esta figura, la ecuación (19.2) se representa gráficamente como el *área* bajo la curva

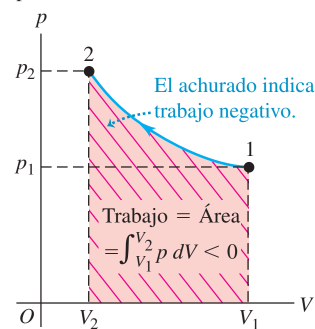
19.6 El trabajo efectuado es igual al área bajo la curva en una gráfica pV.



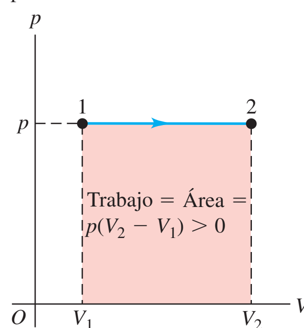
a) Gráfica pV para un sistema que sufre una expansión con presión variable



b) Gráfica pV para un sistema que sufre una compresión con presión variable



c) Gráfica pV para un sistema que sufre una expansión con presión constante



de p contra V entre los límites V_1 y V_2. (En la sección 6.3 usamos una interpretación similar del trabajo efectuado por una fuerza F como el área bajo la curva de F contra x entre los límites x_1 y x_2).

De acuerdo con la regla planteada en la sección 19.1, el trabajo es *positivo* cuando un sistema se *expande*. En una expansión del estado 1 al 2 en la figura 19.6*a*, el área bajo la curva y el trabajo son positivos. Una *compresión* de 1 a 2 en la figura 19.6*b* da un área *negativa*; cuando un sistema se comprime, su volumen disminuye y realiza trabajo *negativo* sobre su entorno (véase también la figura 19.4*b*).

CUIDADO **Use los subíndices 1 y 2 con precaución** Al usar la ecuación (19.2), recuerde siempre que V_1 es el volumen *inicial* y V_2 es el volumen *final*. Por ello, se invirtieron los subíndices 1 y 2 en la figura 19.6*b*, en comparación con la figura 19.6*a*, aunque ambos procesos se dan entre los mismos dos estados termodinámicos.

Si la presión p permanece constante mientras el volumen cambia de V_1 a V_2 (figura 19.6*c*), el trabajo efectuado por el sistema es

$$W = p(V_2 - V_1) \quad \text{(trabajo efectuado en un cambio de volumen a presión constante)} \qquad (19.3)$$

MasteringPHYSICS® **ActivPhysics 8.5:** Work Done By a Gas

En cualquier proceso donde el volumen sea *constante*, el sistema no efectúa trabajo porque no hay desplazamiento.

Ejemplo 19.1 Expansión isotérmica de un gas ideal



Un gas de comportamiento ideal sufre una expansión *isotérmica* (a temperatura constante) a una temperatura T, durante la cual su volumen cambia de V_1 a V_2. ¿Cuánto trabajo efectúa el gas?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La ley del gas ideal, ecuación (18.3), nos indica que si se mantiene constante la temperatura T de n moles de un gas ideal, la cantidad $pV = nRT$ también permanece constante: p y V están en relación inversa. Si V cambia, también debe cambiar p, por lo cual *no podemos* usar la ecuación (19.3) para calcular el trabajo efectuado. En vez de ello, debemos usar la ecuación (19.2). Para evaluar la integral en esta ecuación, necesitamos conocer p en función de V; para esto se utiliza la ecuación (18.3).

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (18.3),

$$p = \frac{nRT}{V}$$

Sustituimos esto en la integral de la ecuación (19.2), sacamos las constantes n, R y T, y evaluamos la integral:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV$$

$$= nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln\frac{V_2}{V_1} \quad \text{(gas ideal, proceso isotérmico)}$$

Podemos rescribir esta expresión para W en términos de p_1 y p_2. Ya que $pV = nRT$ es constante

$$p_1V_1 = p_2V_2 \quad \text{o} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

Por lo que

$$W = nRT \ln\frac{p_1}{p_2} \quad \text{(gas ideal, proceso isotérmico)}$$

EVALUAR: Comprobamos nuestro resultado recordando que, en una expansión, $V_2 > V_1$ y el cociente V_2/V_1 es mayor que 1. El logaritmo de un número mayor que 1 es positivo, por lo que $W > 0$, como debería ser. Como comprobación adicional, examinemos nuestra segunda expresión para W: en una expansión isotérmica, el volumen aumenta y la presión disminuye, por lo que $p_2 < p_1$, el cociente $p_1/p_2 > 1$ y $W = nRT \ln(p_1/p_2)$ es de nuevo positivo.

Estos resultados también son válidos para una *compresión* isotérmica de un gas, en la que $V_2 < V_1$ y $p_2 > p_1$.

Evalúe su comprensión de la sección 19.2 Una cantidad de un gas ideal sufre una expansión que incrementa su volumen de V_1 a $V_2 = 2V_1$. La presión final del gas es p_2. ¿El gas efectúa más trabajo sobre su ambiente, si la expansión es a *presión* constante o a *temperatura* constante? **i.** A presión constante; **ii.** a temperatura constante; **iii.** se efectúa la misma cantidad de trabajo en ambos casos; **iv.** no hay suficiente información para determinarlo.

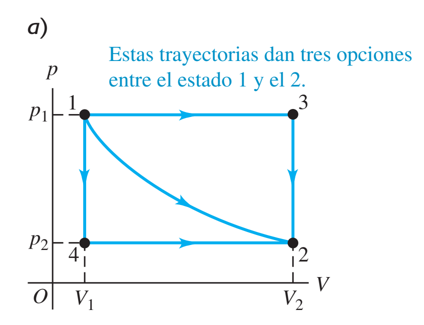


19.3 Trayectorias entre estados termodinámicos

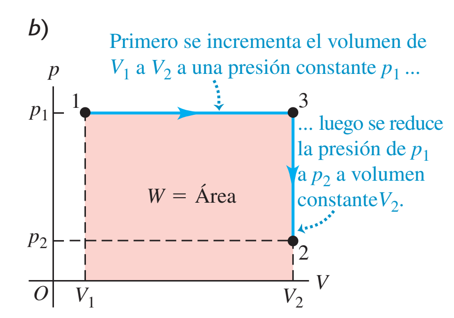
Hemos visto que, si un proceso termodinámico implica un cambio de volumen, el sistema realiza trabajo (positivo o negativo) sobre su entorno. También entrará o saldrá calor del sistema durante el proceso, si hay una diferencia de temperatura entre el sistema y su entorno. Veamos ahora cómo el trabajo efectuado por el sistema y el calor agregado a él durante un proceso termodinámico dependen de cómo se realiza el proceso.

19.7 El trabajo efectuado por el sistema durante una transición entre dos estados depende de la trayectoria recorrida.

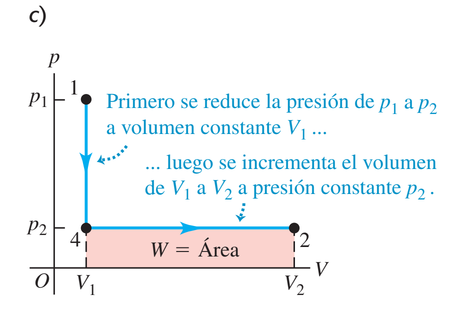
a)



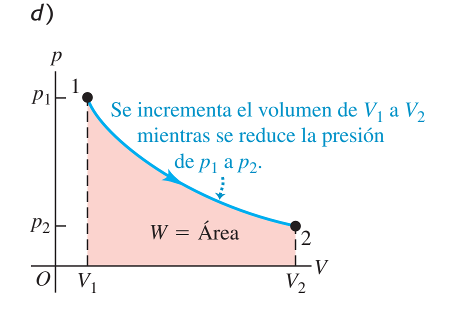
b)



c)



d)



Trabajo efectuado en un proceso termodinámico

Cuando un sistema termodinámico cambia de un estado inicial a uno final, pasa por una serie de estados intermedios, a los que llamamos **trayectoria**. Siempre hay un número infinito de posibilidades para dichos estados intermedios. Si todos son estados de equilibrio, la trayectoria podrá verse en una gráfica *pV* (figura 19.7*a*). El punto 1 representa un estado inicial con presión p_1 y volumen V_1, y el punto 2 representa un estado final con presión p_2 y volumen V_2. Para pasar del estado 1 al 2, podríamos mantener la presión en p_1 mientras el sistema se expande al volumen V_2 (punto 3, figura 19.7*b*), y luego reducir la presión a p_2 (tal vez reduciendo la temperatura) mientras se mantiene el volumen en V_2 (al punto 2 del diagrama). El trabajo efectuado por el sistema durante este proceso es el área bajo la línea $1 \rightarrow 3$; no se efectúa trabajo durante el proceso a volumen constante $3 \rightarrow 2$. O bien, el sistema podría seguir la trayectoria $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ (figura 19.7*c*); en tal caso, el trabajo es el área bajo la línea $4 \rightarrow 2$, ya que no se efectúa trabajo durante el proceso a volumen constante $1 \rightarrow 4$. La curva continua de 1 a 2 (figura 19.7*d*) es otra posibilidad, y el trabajo para esta trayectoria es diferente del que se realiza en cualquiera de las otras.

Concluimos que *el trabajo realizado por el sistema depende no solo de los estados inicial y final, sino también de los estados intermedios, es decir, de la trayectoria*. Además, podemos llevar al sistema por una serie de estados que formen un ciclo completo, como $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$. En este caso, el estado final será el mismo que el inicial, pero el trabajo total efectuado por el sistema *no* es cero. (De hecho, se representa en la gráfica con el área encerrada por el ciclo; ¿puede usted demostrarlo? Véase el ejercicio 19.7). Por lo tanto, no tiene sentido hablar de la cantidad de trabajo *contenida en* un sistema. En cierto estado, un sistema puede tener valores definidos de las coordenadas de estado *p*, *V* y *T*; no obstante, sería absurdo decir que tiene un valor definido de *W*.

Calor agregado en un proceso termodinámico

Al igual que el trabajo, el *calor* agregado a un sistema termodinámico cuando cambia de estado depende de la trayectoria del estado inicial al final. Por ejemplo, suponga que nos interesa cambiar el volumen de cierta cantidad de gas ideal de 2.0 a 5.0 L manteniendo la temperatura en $T = 300$ K. La figura 19.8 muestra dos formas diferentes de hacerlo. En la figura 19.8*a*, el gas está en un cilindro provisto de un pistón, con un volumen inicial de 2.0 L. Dejamos que el gas se expanda lentamente, suministrando calor con el calentador eléctrico para mantener la temperatura en $T = 300$ K. Después de expandirse de esta forma lenta, controlada e isotérmica, el gas alcanza su volumen final de 5.0 L, absorbiendo una cantidad definida de calor en el proceso.

La figura 19.8*b* ilustra un proceso distinto que conduce al mismo estado final. El recipiente está rodeado por paredes aislantes y se encuentra dividido por una membrana delgada rompible en dos compartimentos. La parte inferior tiene un volumen de 2.0 L, y la superior, de 3.0 L. En el compartimento inferior colocamos la misma cantidad del mismo gas que en la figura 19.8*a*, también a $T = 300$ K. El estado inicial es el mismo que antes. Ahora rompemos la membrana; el gas sufre una expansión rápida sin control, sin que pase calor por las paredes aislantes. El volumen final es de 5.0 L,

como en la figura 19.8*a*. El gas no realiza trabajo durante esta expansión porque no empuja contra algo que se mueva. Esta expansión sin control de un gas a un vacío se denomina **expansión libre**; hablaremos más de ella en la sección 19.6.

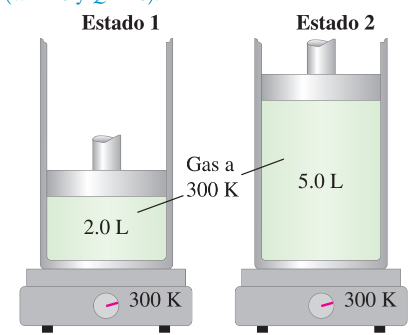
Se ha observado experimentalmente que, si un gas con comportamiento ideal sufre una expansión libre, no hay cambio de temperatura. Por lo tanto, el estado final del gas es el mismo que en la figura 19.8*a*. Los estados intermedios (presiones y volúmenes) durante la transición del estado 1 al 2 son muy diferentes en ambos casos; las figuras 19.8*a* y 19.8*b* representan *dos trayectorias distintas* que conectan los *mismos estados* 1 y 2. En la trayectoria de la figura 19.8*b*, *no* se transfiere calor al sistema, y este no efectúa trabajo. Al igual que el trabajo, *el calor depende no solo de los estados inicial y final, sino también de la trayectoria.*

Por esta dependencia de la trayectoria, es absurdo decir que un sistema "contiene" cierta cantidad de calor. Para ver esto, suponga que asignamos un valor arbitrario al "calor de un cuerpo" en algún estado de referencia. Entonces, es de suponer que el "calor en el cuerpo" en algún otro estado sería igual al calor en el estado de referencia más el calor agregado cuando el cuerpo pasa al segundo estado. Pero eso es ambiguo, como acabamos de ver: el calor agregado depende de la *trayectoria* que se sigue del estado de referencia al segundo estado. Debemos concluir que *no* hay una forma congruente de definir el "calor en un cuerpo"; no es un concepto útil.

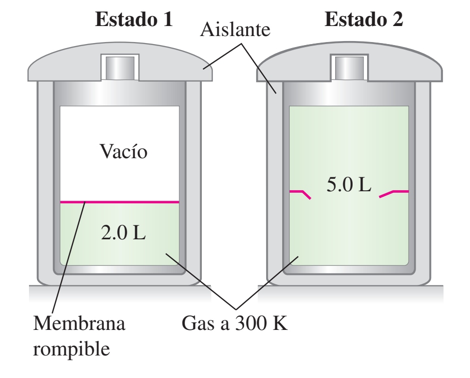
Si bien no tiene sentido hablar del "trabajo en un cuerpo" o el "calor en un cuerpo", *sí* lo tiene hablar de la cantidad de *energía interna* en un cuerpo. Este importante concepto es nuestro siguiente tema.

19.8 *a*) Expansión isotérmica lenta y controlada de un gas de un estado inicial 1 a un estado final 2, con la misma temperatura pero menor presión. *b*) Expansión rápida, sin control, del mismo gas, partiendo del mismo estado 1 y terminando en el mismo estado 2.

a) El sistema realiza trabajo sobre el pistón; la plancha caliente agrega calor al sistema ($W > 0$ y $Q > 0$).



b) El sistema no efectúa trabajo; ni entra ni sale calor del sistema ($W = 0$ y $Q = 0$).



Evalúe su comprensión de la sección 19.3 El sistema que se describe en la figura 19.7*a* experimenta cuatro procesos termodinámicos distintos. Cada proceso se representa en una gráfica *pV* como una recta que va de un estado inicial a uno final. (Estos procesos son diferentes de los que se representan en las gráficas *pV* de la figura 19.7). Ordene los procesos del más positivo al más negativo, con base en la cantidad de trabajo efectuado por el sistema. **i.** $1 \rightarrow 2$; **ii.** $2 \rightarrow 1$; **iii.** $3 \rightarrow 4$; **iv.** $4 \rightarrow 3$.

19.4 Energía interna y la primera ley de la termodinámica

La energía interna es uno de los conceptos más importantes de la termodinámica. En la sección 7.3, cuando hablamos de los cambios de energía de un cuerpo que se desliza con fricción, mencionamos que calentar un cuerpo aumentaba su energía interna y que enfriarlo la disminuía. Pero, ¿qué *es* energía interna? Podemos verla de varios modos; comencemos con uno basado en las ideas de la mecánica. La materia consiste en átomos y moléculas, y estas se componen de partículas que tienen energías cinética y potencial. Definimos *tentativamente* la **energía interna** de un sistema como la suma de las energías cinéticas de todas sus partículas constituyentes, más la suma de todas las energías potenciales de interacción entre ellas.

CUIDADO **¿Es interna?** Observe que la energía interna *no* incluye la energía potencial debida a la interacción entre el sistema y su entorno. Si el sistema es un vaso con agua, colocarlo en una repisa alta aumenta su energía potencial gravitacional debida a la interacción entre el vaso y la Tierra; sin embargo, esto no afecta las interacciones de las moléculas del agua entre sí, por lo que la energía interna del agua no cambia.

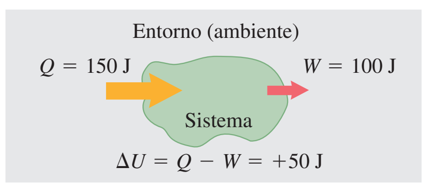
MasteringPHYSICS

ActivPhysics 8.6: Heat, Internal Energy, and First Law of Thermodynamics

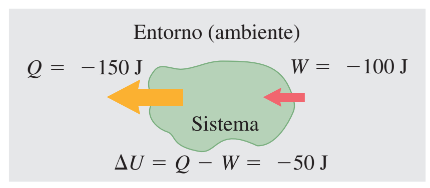
Usamos el símbolo U para la energía interna. (Usamos el mismo símbolo para energía potencial en mecánica. Tenga presente que U tiene un significado distinto en termodinámica). Durante un cambio de estado del sistema, la energía interna podría cambiar de un valor inicial U_1 a uno final U_2. Denotamos el cambio en energía interna con $\Delta U = U_2 - U_1$.

19.9 En un proceso termodinámico, la energía interna U de un sistema puede *a*) aumentar ($\Delta U > 0$), *b*) disminuir ($\Delta U < 0$) o *c*) permanecer sin cambio ($\Delta U = 0$).

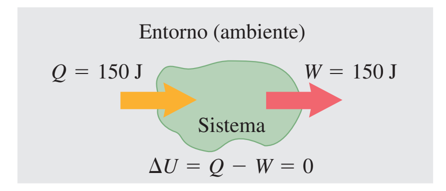
a) Se agrega al sistema más calor que el trabajo efectuado por este: aumenta la energía interna del sistema.



b) Sale del sistema más calor que el trabajo efectuado: disminuye la energía interna del sistema.



c) El calor agregado al sistema es igual al trabajo que este realiza: no cambia la energía interna del sistema.



Aplicación La primera ley de la termodinámica durante el ejercicio
Su cuerpo es un sistema termodinámico. Cuando hace ejercicio, su cuerpo realiza trabajo (por ejemplo, el trabajo que implica levantar el cuerpo como un todo en una flexión hacia arriba). Por lo tanto, $W > 0$. Su cuerpo también se calienta durante el ejercicio; mediante la transpiración y algunos otros medios, el cuerpo se deshace de este calor, así que $Q < 0$. Puesto que Q es negativo y W es positivo, $\Delta U = Q - W < 0$ y disminuye la energía interna del cuerpo. Por eso el ejercicio ayuda a bajar de peso: utiliza un poco de la energía almacenada en el cuerpo en forma de grasa.



Cuando agregamos cierta cantidad de calor Q a un sistema y este no realiza trabajo durante el proceso (por lo que $W = 0$), la energía interna aumenta en una cantidad igual a Q; es decir, $\Delta U = Q$. Cuando el sistema efectúa un trabajo W expandiéndose contra su entorno y no se agrega calor durante ese proceso, sale energía del sistema y disminuye la energía interna: W es positivo, Q es cero y $\Delta U = -W$. Si hay *tanto* transferencia de calor *como* trabajo, el cambio *total* de energía interna es

$$U_2 - U_1 = \Delta U = Q - W \qquad \text{(primera ley de la termodinámica)} \qquad (19.4)$$

Podemos reacomodar esto así:

$$Q = \Delta U + W \qquad (19.5)$$

El mensaje de la ecuación (19.5) es que, en general, cuando se agrega calor Q a un sistema, una parte de esta energía agregada permanece en el sistema, modificando su energía interna en una cantidad ΔU; el resto sale del sistema cuando este efectúa un trabajo W contra su entorno. Puesto que W y Q pueden ser positivos, negativos o cero, ΔU puede ser positiva, negativa o cero para diferentes procesos (figura 19.9).

La ecuación (19.4) o la (19.5) es la **primera ley de la termodinámica**, que es una generalización del principio de conservación de la energía para incluir la transferencia de energía como calor y como trabajo mecánico. Como veremos en capítulos posteriores, este principio se puede extender a clases de fenómenos aún más amplias, mediante la identificación de formas adicionales de energía y de transferencia de energía. En todas las situaciones donde parecía que la energía total en todas las formas conocidas no se conserva, fue posible identificar una nueva forma de energía tal que la energía total, incluida la nueva forma, *sí* se conserva. Hay energía asociada a campos eléctricos, campos magnéticos y, según la teoría de la relatividad, a la masa misma.

Comprensión de la primera ley de la termodinámica

Al principio de esta explicación, definimos tentativamente la energía interna en términos de energías cinética y potencial microscópicas. No obstante, esto tiene desventajas. *Calcular* la energía interna de este modo para cualquier sistema real sería demasiado complicado. Además, esta definición no es *operativa* porque no describe cómo determinar la energía interna a partir de cantidades físicas que podamos medir directamente.

Veamos la energía interna de otro modo. Para empezar, definimos el *cambio* de energía interna ΔU durante cualquier cambio de un sistema como la cantidad dada por la ecuación (19.4), $\Delta U = Q - W$. Esta *sí* es una definición operativa, porque podemos medir Q y W; no define la U misma, solo ΔU. Esta no es una deficiencia, ya que podemos *definir* que la energía interna de un sistema tiene cierto valor en algún estado de referencia, y luego usar la ecuación (19.4) para definir la energía interna en cualquier otro estado. Esto es análogo a la forma como manejamos la energía potencial en el capítulo 7, donde definimos arbitrariamente que la energía potencial de un sistema mecánico era cero en cierta posición.

Esta nueva definición intercambia una dificultad por otra. Si definimos ΔU con la ecuación (19.4), entonces, cuando el sistema pase del estado 1 al 2 por dos trayectorias distintas, ¿cómo sabemos que ΔU es el mismo para las dos trayectorias? Ya vimos que, en general, Q y W *no* son iguales para diferentes trayectorias. Si ΔU, que es $Q - W$, también depende de la trayectoria, ΔU será ambiguo. De ser así, el concepto de energía interna de un sistema merecerá la misma crítica que el concepto erróneo de cantidad de calor contenida en un sistema, como vimos al final de la sección 19.3.

La única forma de contestar esta pregunta es *experimentando*. Medimos Q y W para varios materiales, cambios de estado y trayectorias, con la finalidad de saber si ΔU depende o no de la trayectoria. Los resultados de todas esas investigaciones son claros e inequívocos: en tanto que Q y W dependen de la trayectoria, $\Delta U = Q - W$ *es independiente de la trayectoria. El cambio de energía interna de un sistema durante*

un proceso termodinámico depende solo de los estados inicial y final, no de la trayectoria que lleva de uno al otro.

De esta manera, la experimentación es la justificación definitiva para creer que un sistema termodinámico en cierto estado tiene una energía interna única que depende solo de ese estado. Un planteamiento equivalente es que la energía interna U de un sistema es función de las coordenadas de estado: p, V y T (de hecho, de cualesquiera dos de ellas, ya que las tres variables están relacionadas por la ecuación de estado).

Es correcto decir que la primera ley de la termodinámica, dada por la ecuación (19.4) o la (19.5), representa la conservación de la energía en procesos termodinámicos. No obstante, un aspecto *adicional* importante de la primera ley es el hecho de que la energía interna depende solo del estado del sistema (figura 19.10). En cambios de estado, el cambio de energía interna es independiente de la trayectoria.

Todo esto parecería un tanto abstracto si nos contentamos con pensar que la energía interna es energía mecánica microscópica. No hay nada incorrecto en esa perspectiva, y la usaremos varias veces en nuestra explicación. Sin embargo, si queremos definiciones *operativas* precisas, la energía interna, como el calor, puede y debe definirse de forma independiente de la estructura microscópica detallada del material.

19.10 La energía interna de una taza de café depende únicamente de su estado termodinámico: cuánta agua y café molido contiene, y a qué temperatura está. No depende de cómo se preparó el café, es decir, de la trayectoria termodinámica que llevó a su estado actual.



Procesos cíclicos y sistemas aislados

Vale la pena mencionar dos casos especiales de la primera ley de la termodinámica. Un proceso que tarde o temprano hace volver un sistema a su estado inicial es un *proceso cíclico*. En un proceso así, el estado final es el mismo que el inicial, por lo que el cambio *total* de energía interna debe ser cero. Entonces,

$$U_2 = U_1 \qquad \text{y} \qquad Q = W$$

Si el sistema realiza una cantidad neta de trabajo W durante este proceso, deberá haber entrado en el sistema una cantidad igual de energía como calor Q. Pero no es necesario que Q o W individualmente sean cero (figura 19.11).

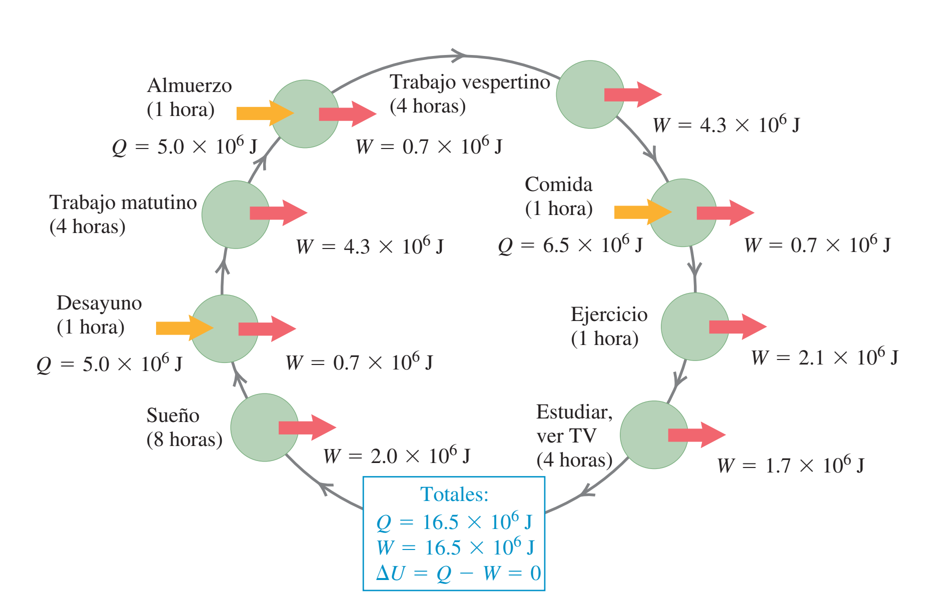
Otro caso especial se da en un *sistema aislado*, que no realiza trabajo sobre su entorno ni intercambia calor con él. Para cualquier proceso que se efectúa en un sistema aislado:

$$W = Q = 0$$

y, por lo tanto,

$$U_2 = U_1 = \Delta U = 0$$

En otras palabras, *la energía interna de un sistema aislado es constante*.



19.11 Todos los días, nuestro cuerpo (un sistema termodinámico) realiza un proceso termodinámico cíclico como el que se representa aquí. Se agrega calor Q metabolizando alimento, y el cuerpo realiza un trabajo W al respirar, caminar y efectuar otras actividades. Si volvemos al mismo estado al final del día, $Q = W$ y el cambio neto de nuestra energía interna es cero.

Estrategia para resolver problemas 19.1 Primera ley de la termodinámica



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La primera ley de la termodinámica es el planteamiento de la ley de conservación de la energía en su forma más general. Podemos aplicarla a *cualquier* situación en la que nos interesen los cambios de energía interna de un sistema, el flujo de calor hacia un sistema o desde este, o el trabajo efectuado por o sobre un sistema.

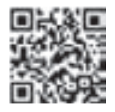
PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

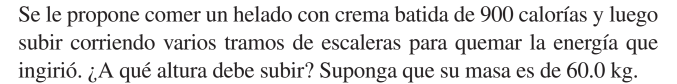
1. Defina cuidadosamente el sistema termodinámico.
2. Si el proceso termodinámico tiene más de un paso, identifique los estados inicial y final para cada paso.
3. Identifique las cantidades conocidas y las incógnitas.
4. Compruebe que tiene suficientes ecuaciones. La primera ley, $\Delta U = Q - W$, solo puede aplicarse una vez a cada paso de un proceso termodinámico, por lo que en muchos casos se necesitarán ecuaciones adicionales. Las más utilizadas son la ecuación (19.2), $W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$, que da el trabajo W efectuado durante un cambio de volumen y la ecuación de estado del material que constituye el sistema termodinámico (para un gas ideal, $pV = nRT$).

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Asegúrese de utilizar las unidades de manera consistente. Si p está en Pa y V en m^3, W debe estar en joules. Si una capacidad calorífica se da en calorías, lo más fácil suele ser convertirla en joules. Cuando utilice $n = m_{\text{total}}/M$ para convertir masa total a número n de moles, recuerde que, si m_{total} está en kilogramos, M debe estar en *kilogramos* por mol; y usualmente las unidades para M son *gramos* por mol.
2. El cambio de energía interna ΔU en cualquier proceso termodinámico o serie de procesos es independiente de la trayectoria, ya sea que la sustancia se comporte como gas ideal o no. Si puede calcular ΔU para *cualquier* trayectoria entre los estados final e inicial dados, conoce ΔU para *cada trayectoria posible* entre estos estados; entonces podrá relacionar las diversas cantidades de energía para otras trayectorias.
3. Si un proceso consta de varios pasos, tabule Q, W y ΔU para cada paso, con un renglón por paso y con las Q, W y ΔU que se forman en las columnas (véase el ejemplo 19.4). Puede aplicar la primera ley a cada renglón y sumar cada columna y aplicar la primera ley a las sumas. ¿Entiende por qué?
4. Despeje las incógnitas siguiendo los pasos 1 a 3.

EVALUAR *la respuesta:* Verifique que sus resultados sean razonables. En particular, asegúrese de que cada respuesta tenga el signo algebraico correcto. Recuerde que Q positivo implica *entrada* de calor en el sistema, y Q negativo implica *salida* de calor del sistema. W positivo significa que el sistema efectúa trabajo *sobre* su entorno; mientras que un valor negativo de W implica que el entorno efectúa trabajo *sobre* el sistema.





Ejemplo 19.2 Para quemar el postre

Se le propone comer un helado con crema batida de 900 calorías y luego subir corriendo varios tramos de escaleras para quemar la energía que ingirió. ¿A qué altura debe subir? Suponga que su masa es de 60.0 kg.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El sistema termodinámico es su cuerpo. El objetivo de subir corriendo las escaleras es lograr que el estado final del sistema sea igual al inicial (ni más gordo ni más delgado). Por lo tanto, no hay cambio neto de energía interna: $\Delta U = 0$. Comer helado corresponde a un flujo de calor hacia su cuerpo, y usted efectúa trabajo al subir las escaleras. Podemos relacionar estas cantidades usando la primera ley de la termodinámica. Nos dicen que $Q = 900$ calorías alimentarias (900 kcal) de calor entran en su organismo. El trabajo necesario para elevar su masa m una altura h es $W = mgh$; la incógnita es h.

EJECUTAR: Usamos la primera ley de la termodinámica: $\Delta U = 0 = Q - W$, por lo que $W = mgh = Q$. Por lo tanto, la altura que hay que subir es $h = Q/mg$. Primero convertimos unidades: $Q = (900\ \text{kcal})(4186\ \text{J}/1\ \text{kcal}) = 3.77 \times 10^6\ \text{J}$. Entonces,

$$h = \frac{Q}{mg} = \frac{3.77 \times 10^6\ \text{J}}{(60.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)} = 6410\ \text{m}$$

EVALUAR: Hemos supuesto una eficiencia del 100% en la conversión de energía alimentaria en trabajo mecánico; esto no es muy realista. De hecho, la distancia real que tendría que ascender es *menor* que los 6140 m (aproximadamente 21,000 ft).



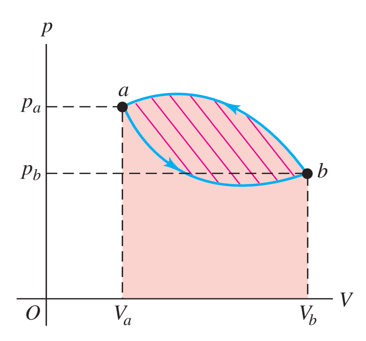
Ejemplo 19.3 Un proceso cíclico

La figura 19.12 es una gráfica pV para un proceso *cíclico*, donde los estados inicial y final son iguales. Como se muestra, el estado del sistema inicia en el punto a y procede en sentido antihorario en la gráfica pV hasta b y vuelve a a, siendo el trabajo total $W = -500$ J. *a*) ¿Por qué es negativo el trabajo? *b*) Calcule el cambio de energía interna y el calor agregado en el proceso.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Debemos relacionar el cambio de energía interna, el calor agregado y el trabajo realizado en un proceso termodinámico. Por ello, podemos aplicar la primera ley de la termodinámica. El proceso es cíclico y tiene dos pasos: $a \to b$ siguiendo la curva inferior de la figura 19.12, y de $b \to a$ siguiendo la curva superior. Sin embargo, los incisos *a*) y *b*) se refieren al proceso cíclico *completo* $a \to b \to a$.

19.12 El trabajo neto efectuado por el sistema en el proceso *aba* es de −500 J. ¿Cuál habría sido si el proceso se hubiera realizado en sentido horario en esta gráfica *pV*?



EJECUTAR: *a*) El trabajo realizado en cualquier paso es igual al área bajo la curva en el diagrama *pV*, tomando el área como positiva si $V_2 > V_1$ y negativa si $V_2 < V_1$; esta regla obtiene los signos que resultan de las integraciones reales de la ecuación (19.2), $W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$. Por consiguiente, el área bajo la curva inferior de $a \rightarrow b$ es positiva, pero menor que el valor absoluto del área (negativa) bajo la curva superior de $b \rightarrow a$. Por lo tanto, el área neta (la encerrada por la trayectoria y marcada con diagonales rojas) y el trabajo W son negativos. En otras palabras, se realizan 500 J más de trabajo *sobre* el sistema, en comparación con el trabajo efectuado *por* el sistema.

b) En este y en cualquier otro proceso cíclico, $\Delta U = 0$, por lo que $Q = W$. Aquí, esto significa $Q = -500$ J, es decir, deben *salir* 500 joules de calor del sistema.

EVALUAR:
En los procesos cíclicos, el trabajo total es positivo si el proceso se recorre en dirección horaria en el diagrama *pV* que representa el ciclo, y es negativo si el proceso se recorre en dirección antihoraria.

Ejemplo 19.4 Comparación de procesos termodinámicos



La gráfica *pV* de la figura 19.13 muestra una serie de procesos termodinámicos. En el proceso *ab*, se agregan 150 J de calor al sistema; en el proceso $b \rightarrow d$, se agregan 600 J. Calcule *a*) el cambio de energía interna en el proceso $a \rightarrow b$; *b*) el cambio de energía interna en el proceso $a \rightarrow b \rightarrow d$ (azul claro), y *c*) el calor total agregado en el proceso $a \rightarrow c \rightarrow d$ (azul oscuro).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En todos los procesos, usaremos $\Delta U = Q - W$ para determinar la cantidad deseada. Nos dan $Q_{a\rightarrow b} = +150$ J y $Q_{b\rightarrow d} = +600$ J (los dos valores son positivos porque se *agrega* calor al sistema). Las incógnitas son *a*) ΔU_{ab}, *b*) ΔU_{abd} y *c*) Q_{acd}.

EJECUTAR: *a*) No hay cambio de volumen durante el proceso $a \rightarrow b$, por lo que el sistema no realiza trabajo: $W_{ab} = 0$ y $\Delta U_{ab} = Q_{ab} = 150$ J.

b) El proceso $b \rightarrow d$ es una expansión a presión constante, por lo que de acuerdo con la ecuación (19.3),

$$W_{bd} = p(V_2 - V_1) = (8.0 \times 10^4 \text{ Pa})(5.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 - 2.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = 240 \text{ J}$$

El trabajo total para el proceso $a \rightarrow b \rightarrow d$ es

$$W_{abd} = W_{ab} + W_{bd} = 0 + 240 \text{ J} = 240 \text{ J}$$

y el calor total es

$$Q_{abd} = Q_{ab} + Q_{bd} = 150 \text{ J} + 600 \text{ J} = 750 \text{ J}$$

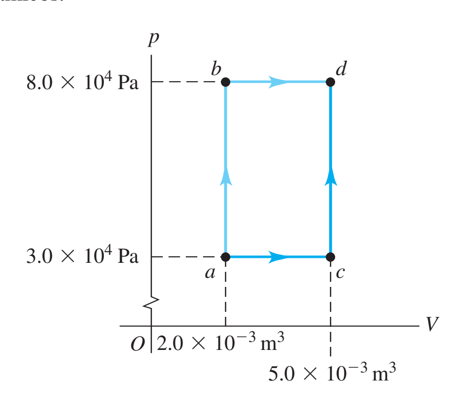
Aplicando la ecuación (19.4) a $a \rightarrow b \rightarrow d$, obtenemos

$$\Delta U_{abd} = Q_{abd} - W_{abd} = 750 \text{ J} - 240 \text{ J} = 510 \text{ J}$$

c) Puesto que ΔU es *independiente de la trayectoria*, de *a* a *d*, el cambio de energía interna es el mismo para la trayectoria $a \rightarrow c \rightarrow d$ que para la $a \rightarrow b \rightarrow d$:

$$\Delta U_{acd} = \Delta U_{abd} = 510 \text{ J}$$

19.13 Gráfica *pV* que muestra los diversos procesos termodinámicos.



El trabajo total para la trayectoria $a \rightarrow c \rightarrow d$ es

$$W_{acd} = W_{ac} + W_{cd} = p(V_2 - V_1) + 0 = (3.0 \times 10^4 \text{ Pa})(5.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 - 2.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = 90 \text{ J}$$

Ahora aplicamos la ecuación (19.5) al proceso $a \rightarrow c \rightarrow d$:

$$Q_{acd} = \Delta U_{acd} + W_{acd} = 510 \text{ J} + 90 \text{ J} = 600 \text{ J}$$

Veamos una tabulación de las distintas cantidades:

Paso	Q	W	$\Delta U = Q - W$	Paso	Q	W	$\Delta U = Q - W$
ab	150 J	0 J	150 J	*ac*	?	90 J	?
bd	600 J	240 J	360 J	*cd*	?	0 J	?
abd	750 J	240 J	510 J	*acd*	600 J	90 J	510 J

EVALUAR: Asegúrese de que entiende cómo se determinó cada entrada de la tabla anterior. Aunque ΔU es igual (510 J) para $a \rightarrow b \rightarrow d$ y $a \rightarrow c \rightarrow d$, W (240 J contra 90 J) y Q (750 J contra 600 J) tienen valores muy diferentes para los dos procesos. Observe que aunque no tenemos suficiente información para obtener Q ni ΔU en los procesos $a \rightarrow c$ y $c \rightarrow d$, pudimos analizar el proceso compuesto $a \rightarrow c \rightarrow d$ comparándolo con el proceso $a \rightarrow b \rightarrow d$, que tiene los mismos estados inicial y final, y para el cual poseemos información más completa.



Ejemplo 19.5 Termodinámica del agua en ebullición

Un gramo de agua (1 cm^3) se convierte en 1671 cm^3 de vapor cuando se hierve a presión constante de 1 atm (1.013×10^5 Pa). El calor de vaporización a esta presión es $L_v = 2.256 \times 10^6$ J/kg. Calcule *a*) el trabajo efectuado por el agua al evaporarse y *b*) su aumento de energía interna.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El calor agregado hace que el sistema (el agua) cambie de la fase líquida a la gaseosa. Podemos aplicar la primera ley de la termodinámica, que es válida para *todos* los procesos termodinámicos. El agua se evapora a presión constante, por lo que podemos usar la ecuación (19.3) para calcular el trabajo W efectuado por el agua en evaporación conforme se expande. Conocemos la masa del agua y el calor de vaporización, por lo que podemos utilizar la ecuación (17.20), $Q = mL_v$, para calcular el calor Q agregado al agua. Podemos entonces determinar el cambio de energía interna empleando la ecuación (19.4), $\Delta U = Q - W$.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (19.3), el agua realiza trabajo

$$\begin{aligned} W &= p(V_2 - V_1) \\ &= (1.013 \times 10^5 \text{ Pa})(1671 \times 10^{-6} \text{ m}^3 - 1 \times 10^{-6} \text{ m}^3) \\ &= 169 \text{ J} \end{aligned}$$

b) Según la ecuación (17.20), el calor agregado al agua es

$$Q = mL_v = (10^{-3} \text{ kg})(2.256 \times 10^6 \text{ J/kg}) = 2256 \text{ J}$$

Entonces, a partir de la ecuación (19.4),

$$\Delta U = Q - W = 2256 \text{ J} - 169 \text{ J} = 2087 \text{ J}$$

EVALUAR: Para evaporar 1 gramo de agua, debemos agregar 2256 J de calor; casi toda esta energía (2087 J) permanece en el sistema como aumento de la energía interna. Los 169 J restantes salen del sistema cuando este efectúa trabajo contra su entorno al expandirse de líquido a vapor. (El aumento de energía interna se asocia en su mayor parte a las fuerzas intermoleculares de atracción que mantienen unidas a las moléculas en el estado líquido. Las energías potenciales correspondientes son mayores después de realizarse trabajo para separar las moléculas y formar el estado de vapor. Es como aumentar la energía potencial gravitacional de un elevador alejándolo del centro de la Tierra).

Cambios infinitesimales de estado

En los ejemplos anteriores, los estados inicial y el final difieren en una cantidad finita. Más adelante consideraremos cambios *infinitesimales* de estado donde se agrega una cantidad pequeña de calor dQ al sistema, este efectúa poco trabajo dW y la energía interna cambia en dU. En un proceso así, expresamos la primera ley en su forma diferencial:

$$dU = dQ - dW \quad \text{(primera ley de la termodinámica, proceso infinitesimal)} \tag{19.6}$$

En los sistemas que analizaremos, el trabajo dW está dado por $dW = p\,dV$, por lo que también podemos escribir la primera ley como:

$$dU = dQ - p\,dV \tag{19.7}$$

Evalúe su comprensión de la sección 19.4 Ordene los siguientes procesos termodinámicos del más positivo al más negativo, de acuerdo con el cambio de energía interna en cada uno. **i.** Cuando usted realiza 250 J de trabajo sobre un sistema, este transfiere 250 J de calor a su entorno; **ii.** cuando usted efectúa 250 J de trabajo sobre un sistema, este absorbe 250 J de calor de su entorno; **iii.** cuando un sistema realiza 250 J de trabajo sobre usted, se transfieren 250 J de calor a su entorno; **iv.** cuando un sistema efectúa 250 J de trabajo sobre usted, el sistema absorbe 250 J de calor desde el entorno.



19.5 Tipos de procesos termodinámicos



ActivPhysics 8.4: State Variables and Ideal Gas Law

En esta sección, describiremos cuatro clases específicas de procesos termodinámicos que ocurren con frecuencia en situaciones prácticas y que podemos resumir como "sin transferencia de calor" o *adiabáticos*, "a volumen constante" o *isocóricos*, "a presión constante" o *isobáricos*, y "a temperatura constante" o *isotérmicos*. Con algunos de ellos, podremos usar una versión simplificada de la primera ley de la termodinámica.

Proceso adiabático

Definimos un **proceso adiabático** como aquel donde no entra ni sale calor del sistema: $Q = 0$. Podemos evitar el flujo de calor ya sea rodeando el sistema con material térmicamente aislante o realizando el proceso con tal rapidez que no haya tiempo para un flujo de calor apreciable. Por la primera ley, para todo proceso adiabático,

$$U_2 - U_1 = \Delta U = -W \qquad \text{(proceso adiabático)} \tag{19.8}$$

Cuando un sistema se expande adiabáticamente, W es positivo (el sistema efectúa trabajo sobre su entorno), por lo que ΔU es negativo y la energía interna disminuye. Si un sistema se *comprime* adiabáticamente, W es negativo (el entorno efectúa trabajo sobre el sistema) y U aumenta. En muchos sistemas (aunque no en todos), el incremento de energía interna va acompañado por un aumento de temperatura, mientras que una disminución de energía interna va acompañada de un descenso en la temperatura (figura 19.14).

La carrera de compresión en un motor de combustión interna es un proceso aproximadamente adiabático. La temperatura aumenta al comprimirse la mezcla aire-combustible en el cilindro. La expansión del combustible quemado durante la carrera de potencia también es aproximadamente adiabática, con un descenso de temperatura. En la sección 19.8 consideraremos procesos adiabáticos en un gas ideal.

19.14 Cuando salta el corcho de una botella de champaña, los gases presurizados dentro de la botella se expanden rápidamente y realizan trabajo sobre el aire del exterior ($W > 0$). No hay tiempo para que intercambien calor con su entorno. Por ende, la expansión es adiabática ($Q = 0$). La energía interna de los gases en expansión disminuye ($\Delta U = -W < 0$), y su temperatura baja. Esto hace que el vapor de agua se condense y forme una nube en miniatura.



Proceso isocórico

Un **proceso isocórico** se efectúa a *volumen constante*. Si el volumen de un sistema termodinámico es constante, no efectúa trabajo sobre su entorno; por lo que $W = 0$ y

$$U_2 - U_1 = \Delta U = Q \qquad \text{(proceso isocórico)} \tag{19.9}$$

En un proceso isocórico, toda la energía agregada como calor permanece en el sistema como aumento de energía interna. Calentar un gas en un recipiente cerrado de volumen constante es un ejemplo de proceso isocórico. Los procesos $a \rightarrow b$ y $c \rightarrow d$ del ejemplo 19.4 son también ejemplos de procesos isocóricos. (Observe que hay tipos de trabajo que no implican un cambio de volumen. Por ejemplo, efectuamos trabajo sobre un fluido agitándolo. En algunos libros, "isocórico" implica que no se efectúa ningún tipo de trabajo).

Proceso isobárico

Un **proceso isobárico** se efectúa a *presión constante*. En general, ninguna de las tres cantidades ΔU, Q y W es cero en un proceso isobárico, pero aun así es fácil calcular W. De acuerdo con la ecuación (19.3),

$$W = p(V_2 - V_1) \qquad \text{(proceso isobárico)} \tag{19.10}$$

El ejemplo 19.5 se refiere a un proceso isobárico: hervir agua a presión constante (figura 19.15).

19.15 Casi todos los procesos de cocción son isobáricos, pues la presión del aire sobre una cazuela o sartén, o dentro de un horno de microondas, se mantiene prácticamente constante mientras se calientan los alimentos.

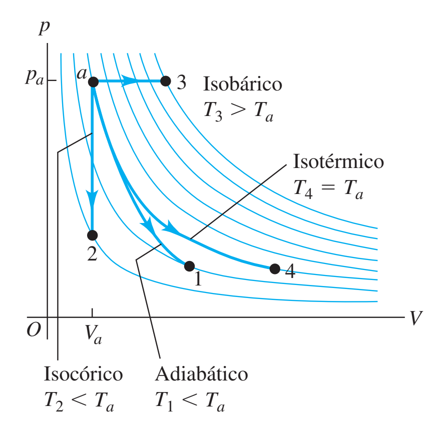


Proceso isotérmico

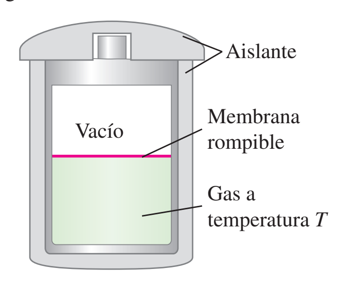
Un **proceso isotérmico** se efectúa a *temperatura constante*. Para ello, todo intercambio de calor con el entorno debe efectuarse con lentitud suficiente para que se mantenga el equilibrio térmico. En general, ninguna de las cantidades ΔU, Q o W es cero en un proceso isotérmico.

En algunos casos especiales, la energía interna de un sistema depende *únicamente* de su temperatura, no de su presión ni su volumen. El sistema más conocido que posee esta propiedad especial es el gas ideal, como veremos en la siguiente sección. En tales sistemas, si la temperatura es constante, la energía interna también lo es: $\Delta U = 0$ y $Q = W$. Es decir, toda la energía que entre en el sistema como calor Q deberá salir como trabajo W efectuado por el sistema. El ejemplo 19.1, que implica un gas ideal, es un ejemplo de proceso isotérmico donde U es constante. En casi todos los demás sistemas, la energía interna depende de la presión y de la temperatura, por lo que U podría variar incluso cuando T es constante.

19.16 Cuatro procesos distintos para una cantidad constante de gas ideal; todos parten del estado a. Para el proceso adiabático, $Q = 0$; para el isocórico, $W = 0$; y para el isotérmico, $\Delta U = 0$. La temperatura solo aumenta durante la expansión isobárica.



19.17 La membrana se rompe (o se retira) para iniciar la expansión libre del gas hacia la región al vacío.



La figura 19.16 muestra una gráfica pV para cada uno de estos cuatro procesos con una cantidad constante de gas ideal. La trayectoria seguida en un proceso adiabático (a a 1) se llama **adiabática**. Una línea vertical (volumen constante) es una **isocórica**; una línea horizontal (presión constante) es una **isobárica**, y una curva de temperatura constante (las líneas azul claro) es una **isoterma**.

Evalúe su comprensión de la sección 19.5 ¿Cuáles de los procesos de la figura 19.7 son isocóricos? ¿Cuáles son isobáricos? ¿Es posible saber si alguno de los procesos es isotérmico o adiabático?

19.6 Energía interna de un gas ideal

Ahora demostraremos que, para un gas ideal, la energía interna U depende solo de la temperatura, no de la presión ni del volumen. Consideremos de nuevo el experimento de expansión libre descrito en la sección 19.3. Un recipiente térmicamente aislado con paredes rígidas se divide en dos compartimentos usando una membrana (figura 19.17). Un compartimento tiene una cantidad de gas ideal; el otro está al vacío.

Cuando la membrana se rompe o se retira, el gas se expande para llenar ambas partes del recipiente. El gas no efectúa trabajo sobre su entorno porque las paredes del recipiente no se mueven, y no fluye calor a través del aislante. Por lo tanto, Q y W son cero, y la energía interna U es constante. Esto se cumple para cualquier sustancia, se trate o no de un gas ideal.

¿Cambia la *temperatura* durante una expansión libre? Supongamos que *sí* cambia, aunque la energía interna no lo hace. En tal caso, debemos concluir que la energía interna depende de la temperatura y del volumen, o bien de la temperatura y la presión, aunque desde luego no solo de la temperatura. Por otro lado, si T es constante durante una expansión libre, para la cual sabemos que U es constante a pesar de que tanto p como V cambian, tendremos que concluir que U depende solo de T, no de p ni de V.

Muchos experimentos han demostrado que, cuando un gas de baja densidad sufre una expansión libre, su temperatura *no* cambia. Tal gas es en esencia un gas ideal. La conclusión es la siguiente:

La energía interna de un gas ideal depende solo de su temperatura, no de su presión ni de su volumen.

Esta propiedad, además de la ecuación de estado del gas ideal, forma parte del modelo de gas ideal. Cerciórese de entender que, para el gas ideal, U solo depende de T, pues usaremos esto muchas veces.

En el caso de los gases que no se comportan como gas ideal, hay cambios de temperatura durante las expansiones libres, aunque la energía interna sea constante. Ello indica que la energía interna no puede depender *solo* de la temperatura; debe depender también de la presión. Desde la perspectiva microscópica, en la que U es la suma de las energías cinéticas y potenciales de todas las partículas que constituyen el sistema, esto no es sorprendente. Los gases de comportamiento no ideal suelen tener fuerzas de atracción intermoleculares y, cuando sus moléculas se separan, aumentan las energías potenciales correspondientes. Si la energía interna total es constante, las energías cinéticas deben disminuir. La temperatura está relacionada directamente con la energía *cinética* molecular; por lo tanto, en un gas así, una expansión libre usualmente va acompañada de una *caída* en la temperatura.

Evalúe su comprensión de la sección 19.6 ¿Es probable que la energía interna de un sólido sea independiente de su volumen, como sucede con el gas ideal? Explique su razonamiento. (*Sugerencia:* Véase la figura 18.20).

19.7 Capacidad calorífica de un gas ideal

Definimos el calor específico y la capacidad calorífica molar en la sección 17.5. También comentamos al final de esa sección que el calor específico o la capacidad calorífica molar de una sustancia dependen de las condiciones en que se agrega calor. Suele ser más fácil medir la capacidad calorífica de un gas en un recipiente cerrado en condiciones de volumen constante. La cantidad correspondiente es la **capacidad calorífica molar a volumen constante**, que se denota con C_V. En el caso de sólidos y líquidos, estas mediciones generalmente se realizan en la atmósfera a presión atmosférica constante, y llamamos a la cantidad correspondiente **capacidad calorífica molar a presión constante**, C_p. Si p y V no son constantes, tenemos un número infinito de capacidades caloríficas posibles.

Consideremos la C_V y C_p de un gas ideal. Para medir C_V, elevamos la temperatura del gas ideal en un recipiente rígido de volumen constante (despreciando su expansión térmica; figura 19.18*a*). Para medir C_p, dejamos que el gas se expanda apenas lo suficiente como para mantener la presión constante al aumentar la temperatura (figura 19.18*b*).

¿Por qué son diferentes estas dos capacidades caloríficas molares? La respuesta está en la primera ley de la termodinámica. En un aumento de temperatura con volumen constante, el sistema no efectúa trabajo, y el cambio de energía interna ΔU es igual al calor agregado Q. En un aumento de temperatura a presión constante, en cambio, el volumen *debe* aumentar; si no, la presión (dada por la ecuación de estado del gas ideal, $p = nRT/V$) no podría permanecer constante. Al expandirse el material, realiza un trabajo W. De acuerdo con la primera ley,

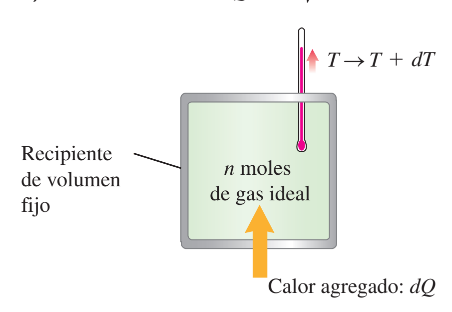
$$Q = \Delta U + W \tag{19.11}$$

Para un aumento de temperatura dado, el cambio de energía interna ΔU de un gas con comportamiento ideal tiene el mismo valor sin importar el proceso (recuerde que la energía interna del gas ideal solo depende de la temperatura, no de la presión ni del volumen). La ecuación (19.11) indica entonces que el suministro de calor en un proceso a presión constante debe ser *mayor* que en uno a volumen constante, porque se requiere energía adicional para el trabajo W realizado durante la expansión. Así, C_p del gas ideal es mayor que C_V. La gráfica pV de la figura 19.19 muestra esta relación. Para el aire, C_p es 40% mayor que C_V.

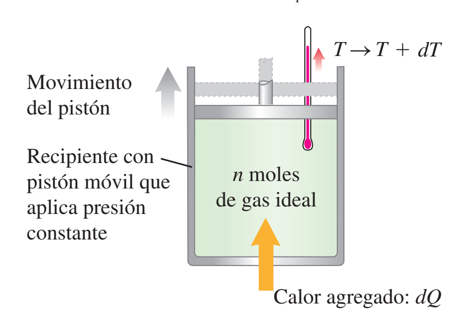
En el caso de unas cuantas sustancias (una de las cuales es el agua entre 0 y 4°C), el volumen *disminuye* durante el calentamiento. En este caso, W es negativo, el suministro de calor es *menor* que en el caso a volumen constante, y C_p es *menor* que C_V.

19.18 Medición de la capacidad calorífica molar de un gas ideal *a*) a volumen constante y *b*) a presión constante.

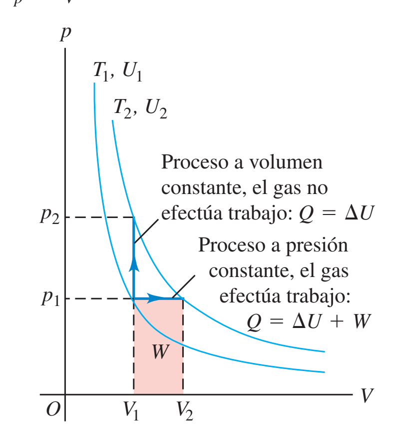
a) Volumen constante: $dQ = nC_V\,dT$



b) Presión constante: $dQ = nC_p\,dT$



19.19 Elevación de la temperatura del gas ideal de T_1 a T_2 mediante un proceso a volumen o a presión constante. En el gas ideal, U depende solo de T, por lo que ΔU es el mismo en ambos procesos. Sin embargo, en el proceso a presión constante, es preciso agregar más calor Q para aumentar U y también efectuar un trabajo W. Por lo tanto, $C_p > C_V$.



Relación entre C_p y C_V para un gas ideal

Podemos deducir una relación sencilla entre C_p y C_V para el gas ideal. Considere primero el proceso a *volumen* constante. Colocamos n moles de gas ideal a temperatura T en un recipiente de volumen constante, que colocamos en contacto térmico con un cuerpo más caliente; una cantidad infinitesimal de calor dQ fluye hacia el gas, y su temperatura aumenta en una cantidad infinitesimal dT. Por la definición de C_V, la capacidad calorífica molar a volumen constante,

$$dQ = nC_V\,dT \tag{19.12}$$

La presión aumenta durante este proceso, pero el gas no realiza trabajo ($dW = 0$) porque el volumen es constante. La primera ley en forma diferencial, ecuación (19.6), es $dQ = dU + dW$. Puesto que $dW = 0$, $dQ = dU$ y la ecuación (19.12) también puede escribirse como

$$dU = nC_V\,dT \tag{19.13}$$

Considere ahora un proceso a *presión* constante con el mismo cambio de temperatura dT. Colocamos el mismo gas en un cilindro con un pistón que permitimos moverse apenas lo suficiente para mantener una presión constante, como se indica en la figura 19.18*b*. Otra vez, ponemos el sistema en contacto con un cuerpo más caliente.

MasteringPHYSICS®

ActivPhysics 8.7: Heat Capacity
ActivPhysics 8.8: Isochoric Process
ActivPhysics 8.9: Isobaric Process
ActivPhysics 8.10: Isothermal Process

Al fluir calor hacia el gas, se expande a presión constante y efectúa trabajo. Por la definición de C_p, la capacidad calorífica molar a presión constante, la cantidad de calor dQ que entra en el gas es

$$dQ = nC_p\,dT \qquad (19.14)$$

El trabajo dW efectuado por el gas en este proceso a presión constante es

$$dW = p\,dV$$

También podemos expresar dW en términos del cambio de temperatura dT usando la ecuación de estado del gas ideal, $pV = nRT$. Al ser p constante, el cambio de V es proporcional al cambio de T:

$$dW = p\,dV = nR\,dT \qquad (19.15)$$

Ahora sustituimos las ecuaciones (19.14) y (19.15) en la primera ley, $dQ = dU + dW$. Obtenemos

$$nC_p\,dT = dU + nR\,dT \qquad (19.16)$$

Llegamos ahora al meollo del cálculo. El cambio de energía interna dU para el proceso a presión constante está dado aún por la ecuación (19.13), $dU = nC_V dT$, *pese a que ahora el volumen no es constante*. ¿Por qué? Recuerde lo dicho en la sección 19.6: una de las propiedades del gas ideal es que su energía interna depende *solo* de la temperatura. Por lo tanto, el *cambio* de energía interna durante un proceso debe estar determinado únicamente por el cambio de temperatura. Si la ecuación (19.13) es válida para el gas ideal durante un proceso, debe ser válida para el gas ideal durante *cualquier* proceso con el mismo dT. Por lo tanto, sustituimos dU en la ecuación (19.16) por $nC_V dT$:

$$nC_p\,dT = nC_V\,dT + nR\,dT$$

Al dividir cada término entre el factor común ndT:

$$C_p = C_V + R \qquad \text{(capacidades caloríficas molares del gas ideal)} \qquad (19.17)$$

Como lo anticipamos, la capacidad calorífica molar del gas ideal a presión constante es *mayor* que a volumen constante; la diferencia es la constante de los gases R. (Desde luego, R debe expresarse en las mismas unidades que C_p y C_V, como J/mol·K).

Hemos usado el modelo del gas ideal para deducir la ecuación (19.17), pero resulta que muchos gases reales a presiones moderadas se ajustan a él con muy poco error. En la tabla 19.1 se dan valores medidos de C_p y C_V para varios gases reales a baja presión; la diferencia en casi todos los casos es aproximadamente $R = 8.314$ J/mol·K.

La tabla también muestra que la capacidad calorífica molar de un gas está relacionada con su estructura molecular, como vimos en la sección 18.4. De hecho, las dos primeras columnas de la tabla 19.1 son las mismas de la tabla 18.1.

Tabla 19.1 Capacidades caloríficas molares de gases a baja presión

Tipo de gas	Gas	C_V (J/mol·K)	C_p (J/mol·K)	$C_p - C_V$ (J/mol·K)	$\gamma = C_p/C_V$
Monoatómico	He	12.47	20.78	8.31	1.67
	Ar	12.47	20.78	8.31	1.67
Diatómico	H_2	20.42	28.74	8.32	1.41
	N_2	20.76	29.07	8.31	1.40
	O_2	20.85	29.17	8.31	1.40
	CO	20.85	29.16	8.31	1.40
Poliatómico	CO_2	28.46	36.94	8.48	1.30
	SO_2	31.39	40.37	8.98	1.29
	H_2S	25.95	34.60	8.65	1.33

Cociente de capacidades caloríficas

La última columna de la tabla 19.1 da los valores del **cociente de capacidades caloríficas**, C_p/C_V, el cual es adimensional y se denota con γ (la letra griega gamma):

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} \qquad \text{(razón de capacidades caloríficas)} \qquad (19.18)$$

(Esto también se llama "cociente de calores específicos"). En el caso de los gases, C_p siempre es mayor que C_V, y γ siempre es mayor que 1. Esta cantidad desempeña un papel importante en los procesos *adiabáticos* de gases con comportamiento ideal, que estudiaremos en la siguiente sección.

Podemos usar nuestro análisis de la capacidad calorífica molar del gas ideal según la teoría cinética (sección 18.4) para predecir los valores de γ. Por ejemplo, un gas monoatómico con comportamiento ideal tiene $C_V = \frac{3}{2}R$. De acuerdo con la ecuación (19.17),

$$C_p = C_V + R = \tfrac{3}{2}R + R = \tfrac{5}{2}R$$

por lo que

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3} = 1.67$$

Como muestra la tabla 19.1, esto concuerda a grandes rasgos con los valores de γ calculados a partir de capacidades caloríficas medidas. Para la mayoría de los gases diatómicos a temperatura ambiente, $C_V = \frac{5}{2}R$, $C_p = C_V + R = \frac{7}{2}R$ y

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} = 1.40$$

lo cual también concuerda aproximadamente con los valores medidos.

Veamos un recordatorio final: para un gas ideal, el cambio de energía interna en *cualquier* proceso está dado por $\Delta U = nC_V\,\Delta T$, *sea constante el volumen o no*. Esta relación, muy útil en el siguiente ejemplo, se cumple para otras sustancias *solo* si el volumen es constante.

Ejemplo 19.6 Enfriamiento de una habitación



Una recámara común contiene unos 2500 moles de aire. Calcule el cambio de energía interna de esta cantidad de aire cuando se enfría de 35.0 a 26.0°C, a presión constante de 1.00 atm. Trate el aire como gas ideal con $\gamma = 1.400$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Nuestra incógnita es el cambio de energía interna ΔU de un gas ideal en un proceso a presión constante. Se nos dan el número de moles, el cambio de temperatura y el valor de γ del aire. Usaremos la ecuación (19.13), $\Delta U = nC_v\,\Delta T$, que nos da el cambio de energía interna para un gas ideal en *cualquier* proceso, *sea constante el volumen o no*. [Véase el análisis que sigue a la ecuación (19.16)]. Usaremos las ecuaciones (19.17) y (19.18) para encontrar C_V.

EJECUTAR: De acuerdo con las ecuaciones (19.17) y (19.18),

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}$$

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{8.314\ \text{J/mol}\cdot\text{K}}{1.400 - 1} = 20.79\ \text{J/mol}\cdot\text{K}$$

Entonces de la ecuación (19.13),

$$\begin{aligned}\Delta U &= nC_V\,\Delta T \\ &= (2500\ \text{mol})(20.79\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(26.0°\text{C} - 35.0°\text{C}) \\ &= -4.68 \times 10^5\ \text{J}\end{aligned}$$

EVALUAR: Para enfriar 2500 moles de aire de 35.0 a 26.0°C, un aparato de aire acondicionado debe extraer esta cantidad de energía interna del aire y transferirla al aire exterior. En el capítulo 20 analizaremos cómo se hace esto.

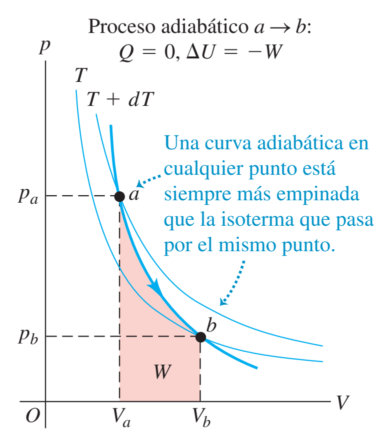
Evalúe su comprensión de la sección 19.7 Se quiere enfriar un cilindro de almacenamiento, que contiene 10 moles de gas comprimido, de 30 a 20°C. ¿Para qué clase de gas sería más sencillo? **i.** Un gas monoatómico; **ii.** un gas diatómico; **iii.** un gas poliatómico; **iv.** sería igual de sencillo para todos estos.

19.8 Procesos adiabáticos para un gas ideal

Un proceso adiabático, definido en la sección 19.5, es un proceso en el que no hay transferencia de calor entre un sistema y su entorno. Esto es una idealización; no obstante, un proceso es aproximadamente adiabático si el sistema está bien aislado, o si el proceso se efectúa con tal rapidez que no hay tiempo para que ocurra un flujo de calor apreciable.

En un proceso adiabático, $Q = 0$ y, por la primera ley, $\Delta U = -W$. En la gráfica pV de la figura 19.20 se muestra un proceso adiabático para el gas ideal. Al expandirse el gas de V_a a V_b, realiza trabajo positivo, por lo que su energía interna disminuye y su temperatura baja. Si el punto a, que representa el estado inicial, está en una isoterma a temperatura $T + dT$, entonces el punto b para el estado final está en una isoterma distinta a una temperatura menor T. Para un gas ideal, una curva adiabática en cualquier punto siempre es *más inclinada* que la isoterma que pasa por el mismo punto. Para una *compresión* adiabática de V_b a V_a, la situación se invierte y aumenta la temperatura.

19.20 Gráfica pV de un proceso adiabático ($Q = 0$) para un gas ideal. Al expandirse el gas de V_a a V_b, efectúa un trabajo positivo W sobre su entorno, su energía interna disminuye ($\Delta U = -W < 0$), y su temperatura baja de $T + dT$ a T. (También se muestra un proceso adiabático en la figura 19.16).



El aire en los tubos de salida de los compresores de aire usados en las gasolineras y los equipos para pintar por aspersión o para llenar tanques de buceo siempre está más caliente que el aire que entra en el compresor; la razón es que la compresión es rápida y, por ende, casi adiabática. Hay *enfriamiento* adiabático cuando abrimos una botella de una refrescante bebida gaseosa. El gas inmediatamente arriba de la superficie del líquido se expande rápidamente en un proceso casi adiabático; la temperatura del gas baja tanto que el vapor de agua que contiene se condensa, formando una nube miniatura (véase la figura 19.14).

CUIDADO **"Calentamiento" y "enfriamiento" sin calor** Tenga presente que, al hablar de "calentamiento adiabático" y "enfriamiento adiabático", en realidad queremos decir "subir la temperatura" y "bajar la temperatura", respectivamente. En un proceso adiabático, el cambio de temperatura se debe al trabajo realizado por el sistema o sobre él; *no* hay flujo de calor.

MasteringPHYSICS

ActivPhysics 8.11: Adiabatic Process

Gas ideal adiabático: relación entre V, T y p

Podemos deducir una relación entre el volumen y los cambios de temperatura para un proceso adiabático infinitesimal en un gas ideal. La ecuación (19.13) da el cambio de energía interna dU para *cualquier* proceso del gas ideal, adiabático o no, por lo que tenemos $dU = nC_V\,dT$. Además, el trabajo efectuado por el gas durante el proceso está dado por $dW = p\,dV$. Entonces, como $dU = -dW$ para un proceso adiabático, tenemos

$$nC_V\,dT = -p\,dV \tag{19.19}$$

Para obtener una relación que contenga solo el volumen V y la temperatura T, eliminamos p usando la ecuación del gas ideal en la forma $p = nRT/V$. Después de sustituir esto en la ecuación (19.19) y reacomodar:

$$nC_V\,dT = -\frac{nRT}{V}\,dV$$

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V}\frac{dV}{V} = 0$$

El coeficiente R/C_V se puede expresar en términos de $\gamma = C_p/C_V$. Tenemos

$$\frac{R}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \frac{C_p}{C_V} - 1 = \gamma - 1$$

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1)\frac{dV}{V} = 0 \qquad (19.20)$$

Como γ siempre es mayor que 1 para un gas, $(\gamma - 1)$ siempre es positivo. Esto implica que, en la ecuación (19.20), dV y dT siempre tienen signos opuestos. Una *expansión* adiabática de un gas ideal ($dV > 0$) siempre sucede con una *caída* de temperatura ($dT < 0$), y una *compresión* adiabática ($dV < 0$) siempre va acompañada de un *aumento* de temperatura ($dT > 0$); esto confirma nuestra predicción.

Para cambios finitos de temperatura y volumen, integramos la ecuación (19.20):

$$\ln T + (\gamma - 1)\ln V = \text{constante}$$

$$\ln T + \ln V^{\gamma-1} = \text{constante}$$

$$\ln(TV^{\gamma-1}) = \text{constante}$$

y, por último,

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante} \qquad (19.21)$$

Así, para un estado inicial (T_1, V_1) y un estado final (T_2, V_2),

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1} \quad \text{(proceso adiabático, gas ideal)} \qquad (19.22)$$

Puesto que usamos la ecuación del gas ideal para deducir las ecuaciones (19.21) y (19.22), las T siempre deben ser temperaturas *absolutas* (Kelvin).

También podemos convertir la ecuación (19.21) en una relación entre la presión y el volumen, eliminando T con la ayuda de la ecuación del gas ideal en la forma $T = pV/nR$. Sustituyendo esto en la ecuación (19.21), obtenemos

$$\frac{pV}{nR}V^{\gamma-1} = \text{constante}$$

o bien, puesto que n y R son constantes,

$$pV^{\gamma} = \text{constante} \qquad (19.23)$$

Para un estado inicial (p_1, V_1) y un estado final (p_2, V_2), la ecuación (19.23) se convierte en

$$p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma} \quad \text{(proceso adiabático, gas ideal)} \qquad (19.24)$$

También podemos calcular el *trabajo* efectuado por un gas con comportamiento ideal durante un proceso adiabático. Sabemos que $Q = 0$ y $W = -\Delta U$ para *cualquier* proceso adiabático. Para el gas ideal, $\Delta U = nC_V(T_2 - T_1)$. Si conocemos el número n de moles y las temperaturas inicial y final, T_1 y T_2, tenemos simplemente

$$W = nC_V(T_1 - T_2) \quad \text{(proceso adiabático, gas ideal)} \qquad (19.25)$$

También podemos usar $pV = nRT$ en esta ecuación para obtener

$$W = \frac{C_V}{R}(p_1V_1 - p_2V_2) = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1V_1 - p_2V_2) \quad \text{(proceso adiabático, gas ideal)} \qquad (19.26)$$

[Usamos el resultado $C_V = R/(\gamma - 1)$ del ejemplo 19.6]. Si el proceso es una expansión, la temperatura baja, T_1 es mayor que T_2, p_1V_1 es mayor que p_2V_2 y el trabajo es *positivo*, como esperaríamos. Si el proceso es una compresión, el trabajo es negativo.

En todo este análisis de los procesos adiabáticos, hemos usado la ecuación de estado del gas ideal, que solo es válida para estados de *equilibrio*. En sentido estricto, nuestros resultados solo son válidos para un proceso tan rápido, que no permite un intercambio de calor apreciable con el entorno (así que $Q = 0$ y el proceso es adiabático), pero que es lo bastante lento como para que el sistema no se aleje mucho del equilibrio térmico y mecánico. Aun si no se satisfacen estrictamente estas condiciones, las ecuaciones (19.22), (19.24) y (19.26) dan aproximaciones útiles.



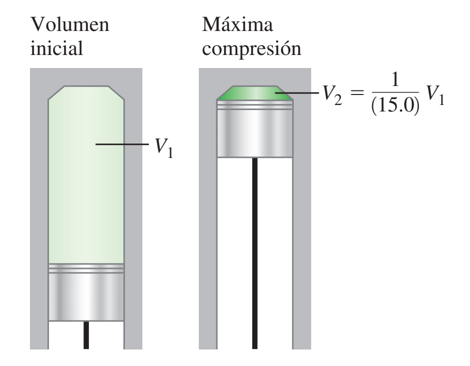
Ejemplo 19.7 Compresión adiabática en un motor a diesel

La razón de compresión de un motor a diesel es de 15.0 a 1; esto implica que el aire de los cilindros se comprime a $\frac{1}{(15.0)}$ de su volumen inicial (figura 19.21). *a*) Si la presión inicial es de 1.01×10^5 Pa y la temperatura inicial es de 27°C (300 K), calcule la presión y la temperatura finales después de la compresión adiabática. *b*) ¿Cuánto trabajo realiza el gas durante la compresión si el volumen inicial del cilindro es $1.00 \text{ L} = 1.00 \times 10^{-3} \text{ m}^3$? Utilice los valores $C_V = 20.8 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ y $\gamma = 1.400$ para el aire.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Como este problema tiene que ver con la compresión adiabática de un gas ideal, podemos utilizar los conceptos de esta sección. En el inciso *a*) nos dan la presión inicial y la temperatura inicial $p_1 = 1.01 \times 10^5$ Pa y $T_1 = 300$ K, y nos dicen que el cociente entre los volúmenes inicial y final es $V_1/V_2 = 15.0$. Podemos obtener la temperatura final T_2 con la ecuación (19.22), y la presión final p_2 con la ecuación (19.24). En el inciso *b*) nuestra incógnita es W, el trabajo realizado *por* el gas durante la compresión adiabática. Usamos la ecuación (19.26) para calcular W.

19.21 Compresión adiabática del aire en un cilindro de un motor a diesel.



EJECUTAR: *a*) De acuerdo con las ecuaciones (19.22) y (19.24),

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = (300 \text{ K})(15.0)^{0.40} = 886 \text{ K} = 613°\text{C}$$

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = (1.01 \times 10^5 \text{ Pa})(15.0)^{1.40}$$

$$= 44.8 \times 10^5 \text{ Pa} = 44 \text{ atm}$$

b) Según la ecuación (19.26), el trabajo efectuado es

$$W = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1V_1 - p_2V_2)$$

Utilizando $V_1/V_2 = 15.0$, esto se convierte en

$$W = \frac{1}{1.400 - 1}\left[\begin{array}{l}(1.01 \times 10^5 \text{ Pa})(1.00 \times 10^{-3} \text{ m}^3) \\ -\ (44.8 \times 10^5 \text{ Pa})\left(\dfrac{1.00 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{15.0}\right)\end{array}\right]$$

$$= -494 \text{ J}$$

EVALUAR: Si la compresión hubiera sido isotérmica, la presión final habría sido 15.0 atm. Sin embargo, como la temperatura también aumenta durante una compresión adiabática, la presión final es mucho mayor. Cuando se inyecta combustible en los cilindros cerca del final de la carrera de compresión, la alta temperatura que el aire alcanza durante la compresión hace que el combustible se encienda espontáneamente, sin necesidad de bujías.

Podemos comprobar nuestro resultado del inciso *b*) utilizando la ecuación (19.25). El número de moles de gas en el cilindro es

$$n = \frac{p_1V_1}{RT_1} = \frac{(1.01 \times 10^5 \text{ Pa})(1.00 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(300 \text{ K})} = 0.0405 \text{ mol}$$

Entonces la ecuación (19.25) da

$$W = nC_V(T_1 - T_2)$$
$$= (0.0405 \text{ mol})(20.8 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(300 \text{ K} - 886 \text{ K})$$
$$= -494 \text{ J}$$

El trabajo es negativo ya que el gas se comprime.

Evalúe su comprensión de la sección 19.8 Usted tiene cuatro muestras de gas ideal, cada una de las cuales contiene el mismo número de moles de gas y tiene igual temperatura, volumen y presión iniciales. Luego comprime cada muestra a la mitad de su volumen inicial. Ordene de mayor a menor las cuatro muestras, de acuerdo con el valor de su presión final. **i.** Un gas monoatómico comprimido isotérmicamente; **ii.** un gas monoatómico comprimido adiabáticamente; **iii.** un gas diatómico comprimido isotérmicamente; **iv.** un gas diatómico comprimido adiabáticamente.



RESUMEN



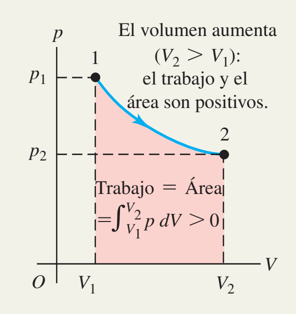
Calor y trabajo en los procesos termodinámicos: Un sistema termodinámico puede intercambiar energía potencial con su entorno por transferencia de calor o mediante trabajo mecánico. Cuando un sistema a presión p cambia su volumen de V_1 a V_2, efectúa una cantidad de trabajo W dada por la integral de p con respecto al volumen. Si la presión es constante, el trabajo efectuado es igual a p multiplicado por el cambio de volumen. Un valor negativo de W implica que se efectúa trabajo sobre el sistema. (Véase el ejemplo 19.1).

En cualquier proceso termodinámico, el calor agregado al sistema y el trabajo efectuado por el sistema no solo dependen de los estados inicial y final, sino también de la trayectoria (la serie de estados intermedios por los que pasa el sistema).

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV \quad (19.2)$$

$$W = p(V_2 - V_1) \quad (19.3)$$

(solo presión constante)



Primera ley de la termodinámica: La primera ley de la termodinámica establece que, cuando se agrega calor Q a un sistema mientras este efectúa un trabajo W, la energía interna U cambia en una cantidad igual a $Q - W$. Esta ley también se puede plantear para un proceso infinitesimal. (Véase los ejemplos 19.2, 19.3 y 19.5).

La energía interna de cualquier sistema termodinámico depende exclusivamente de su estado. El cambio de energía interna durante cualquier proceso depende únicamente de los estados inicial y final, no de la trayectoria seguida. La energía interna de un sistema aislado es constante. (Véase el ejemplo 19.4).

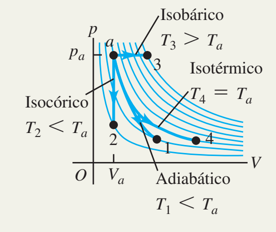
$$\Delta U = Q - W \quad (19.4)$$

$$dU = dQ - dW \quad (19.6)$$

(proceso infinitesimal)

Tipos de procesos termodinámicos importantes:

- Proceso adiabático: no entra calor al sistema ni sale de él, $Q = 0$.
- Proceso isocórico: volumen constante, $W = 0$.
- Proceso isobárico: presión constante, $W = p(V_2 - V_1)$.
- Proceso isotérmico: temperatura constante.



Termodinámica de los gases ideales: La energía interna de un gas ideal depende únicamente de su temperatura, no de su presión ni de su volumen. En el caso de otras sustancias, la energía interna generalmente depende tanto de la presión como de la temperatura.

Las capacidades caloríficas molares C_V y C_p del gas ideal difieren por R, la constante del gas ideal. El cociente adimensional de capacidades caloríficas, C_p/C_V, se denota con γ. (Véase el ejemplo 19.6).

$$C_p = C_V + R \quad (19.17)$$

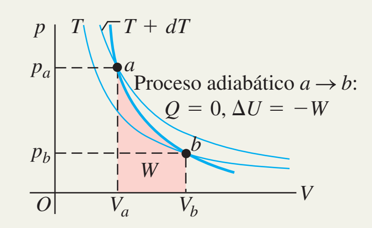
$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} \quad (19.18)$$

Procesos adiabáticos en gases ideales: En un proceso adiabático de un gas con comportamiento ideal, las cantidades $TV^{\gamma-1}$ y pV^{γ} son constantes. El trabajo efectuado por el gas ideal durante una expansión adiabática se puede expresar en términos de los valores inicial y final de la temperatura, o en términos de los valores inicial y final de la presión y el volumen. (Véase el ejemplo 19.7).

$$W = nC_V(T_1 - T_2)$$

$$= \frac{C_V}{R}(p_1V_1 - p_2V_2) \quad (19.25)$$

$$= \frac{1}{\gamma - 1}(p_1V_1 - p_2V_2) \quad (19.26)$$





PROBLEMA PRÁCTICO Trabajo realizado por un gas de Van der Waals

La ecuación de estado de Van der Waals, una representación aproximada del comportamiento de los gases a alta presión, está dada por la ecuación (18.7): $[p + (an^2/V^2)](V - nb) = nRT$, donde a y b son constantes que tienen valores distintos para diferentes gases. (En el caso especial de $a = b = 0$, esta es la ecuación de los gases ideales). *a*) Calcule el trabajo realizado por un gas con la ecuación de estado en una expansión isotérmica de V_1 a V_2. *b*) Para el gas etano (C_2H_6), $a = 0.554\ \text{J}\cdot\text{m}^3/\text{mol}^2$ y $b = 6.38 \times 10^{-5}\ \text{m}^3/\text{mol}$. Calcule el trabajo W efectuado por 1.80 moles de etano cuando se expande de $2.00 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$ a $4.00 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$ a una temperatura constante de 300 K. Realice el cálculo usando **i.** la ecuación de estado de Van der Waals y **ii.** la ecuación de estado de los gases ideales. *c*) ¿Para cuál ecuación de estado W es más grande? ¿Por qué habría de ser así?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Revise el análisis de la ecuación de estado de Van der Waals en la sección 18.1. ¿Cuál es la importancia de las cantidades a y b?
2. Determine cómo encontrar el trabajo realizado por un gas en expansión cuya presión p no depende de V en la misma forma que para un gas ideal. (*Sugerencia:* Véase la sección 19.2).
3. ¿Cómo va a encontrar el trabajo realizado por un gas ideal en expansión?

EJECUTAR

4. Encuentre la expresión general para el trabajo realizado por el gas de Van der Waals cuando se expande del volumen V_1 al volumen V_2. (*Sugerencia:* Si en su resultado establece que $a = b = 0$, esto se debe reducir a la expresión para el trabajo realizado por un gas ideal en expansión).
5. Utilice su resultado del paso 4 para resolver el inciso *b*) para el etano tratado como un gas de Van der Waals.
6. Utilice la fórmula que eligió en el paso 3 para resolver el inciso *b*) para el etano tratado como un gas ideal.

EVALUAR

7. ¿La diferencia entre W para las dos ecuaciones de estado es suficientemente grande como para ser significativa?
8. ¿El término con a en la ecuación de estado de Van der Waals aumenta o disminuye la cantidad de trabajo realizado? ¿Qué pasa con el término con b? ¿Cuál es más importante para el etano en este problema?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P19.1 En los siguientes procesos, el trabajo efectuado por el sistema (definido como un gas que se expande o se contrae) sobre el ambiente es positivo o negativo? *a*) La expansión de una mezcla aire-gasolina quemada en el cilindro de un motor de automóvil; *b*) abrir una botella de champaña; *c*) llenar un tanque de buceo con aire comprimido; *d*) la abolladura parcial de una botella de agua vacía y cerrada, al conducir descendiendo desde las montañas hacia el nivel del mar.

P19.2 No es correcto decir que un cuerpo contiene cierta cantidad de calor; no obstante, un cuerpo puede transferir calor a otro. Entonces, ¿cómo un cuerpo puede ceder algo que no tiene?

P19.3 ¿En qué situaciones debe usted efectuar más trabajo: al inflar un globo al nivel del mar o al inflar el mismo globo con el mismo volumen en la cima del Monte McKinley? Explique su respuesta en términos de presión y cambio de volumen.

P19.4 Si le dan los estados inicial y final de un sistema y el cambio correspondiente de energía interna, ¿podría determinar si dicho cambio se debió a trabajo o a transferencia de calor? Explique su respuesta.

P19.5 Analice la aplicación de la primera ley de la termodinámica a un alpinista que ingiere alimentos, se calienta y suda mucho durante un ascenso, y efectúa mucho trabajo mecánico para subir su cuerpo a la cima. El alpinista también se acalora durante el descenso. ¿La fuente de esta energía es la misma que durante el ascenso?

P19.6 Cuando se derrite hielo a 0°C, su volumen disminuye. ¿El cambio de energía interna es mayor, menor o igual que el calor agregado? ¿Cómo lo sabe?

P19.7 Usted sostiene un globo inflado sobre un conducto de aire caliente de su casa y observa que se expande lentamente. Después, usted lo aleja del conducto y lo deja enfriar a la temperatura ambiente. Durante la expansión, ¿cuál era mayor: el calor agregado al globo o el trabajo efectuado por el aire dentro de este? Explique su respuesta. (Suponga que el aire es un gas ideal). Una vez que el globo regresa a la temperatura ambiente, ¿cómo se compara el calor neto ganado o perdido por el aire dentro del globo con el trabajo neto efectuado sobre el aire circundante o con el trabajo realizado por este último?

P19.8 Usted hornea galletas con chispas de chocolate y las coloca, aún calientes, dentro un recipiente con una tapa suelta (sin cerrar herméticamente). ¿Qué tipo de proceso sufre el aire, dentro del recipiente, conforme las galletas se enfrían gradualmente a temperatura ambiente? (Isotérmico, isocórico, adiabático, isobárico o alguna combinación de ellos). Explique su respuesta.

P19.9 Imagine un gas constituido exclusivamente por electrones con carga negativa. Las cargas iguales se repelen, por lo que los electrones ejercen fuerzas de repulsión entre sí. ¿Cabría esperar que la temperatura de semejante gas aumentara, disminuyera o se mantuviera igual durante una expansión libre? ¿Por qué?

P19.10 Hay unos cuantos materiales que se contraen cuando aumenta su temperatura, como el agua entre 0 y 4°C. ¿Cabría esperar que C_p para tales materiales fuera mayor o menor que C_V? ¿Por qué?

P19.11 Si soplamos sobre el dorso de nuestra mano con la boca bien abierta, el aliento se siente tibio. En cambio, si cerramos parcialmente la boca como para pronunciar una "o" y soplamos sobre la mano, el aliento se siente fresco. ¿Por qué?

P19.12 Un gas ideal se expande mientras que la presión se mantiene constante. Durante este proceso, ¿hay flujo de calor hacia el gas o hacia afuera de este? Explique su respuesta.

P19.13 Se agita un líquido en forma irregular en un recipiente bien aislado y de ese modo experimenta un aumento de la temperatura. Considere el líquido como el sistema. ¿Se ha transferido calor? ¿Cómo lo sabe? ¿Se efectuó trabajo? ¿Cómo lo sabe? ¿Por qué es importante que la agitación sea irregular? ¿Cuál es el signo de ΔU? ¿Cómo lo sabe?

P19.14 Cuando se usa una bomba manual para inflar los neumáticos de una bicicleta, la bomba se calienta después de un rato. ¿Por qué? ¿Qué sucede con la temperatura del aire en la bomba al comprimirse? ¿Por qué sucede así? Cuando se levanta el mango de la bomba para succionar aire exterior hacia el interior de esta, ¿qué sucede con la temperatura del aire admitido? De nuevo, ¿por qué sucede eso?

P19.15 En el carburador de un motor para automóvil o avión, el aire fluye por una abertura relativamente pequeña y luego se expande. Si el tiempo es fresco y con niebla, llega a formarse hielo en esa abertura, aun cuando la temperatura del aire exterior esté arriba del punto de congelación. ¿Por qué?

P19.16 En un día soleado, se forman grandes "burbujas" de aire sobre la tierra que calienta el sol, las cuales se expanden gradualmente y, por último, se liberan para subir por la atmósfera. Las aves y los planeadores aprovechan estas "corrientes térmicas" para ganar altitud con facilidad. Esta expansión es, en esencia, un proceso adiabático. ¿Por qué?

P19.17 Los vientos prevalecientes en la isla hawaiana de Kauai soplan del noreste. Los vientos se enfrían al subir por las faldas del Monte Waialeale (altura 1523 m), haciendo que se condense vapor de agua y que llueva. Hay mucha más precipitación en la cima que en la base de la montaña. De hecho, el Monte Waialeale es el lugar más lluvioso del planeta, con una precipitación media de 11.7 m al año. ¿Qué hace que los vientos se enfríen?

P19.18 Aplicando las mismas consideraciones que en la pregunta P19.17, explique por qué la isla de Niihau, unos cuantos kilómetros al suroeste de Kauai, es casi un desierto, y los campos agrícolas de esa isla necesitan riego.

P19.19 En un proceso a volumen constante, $dU = nC_V\,dT$. En cambio, en un proceso a presión constante, *no* se cumple que $dU = nC_p dT$. ¿Por qué no?

P19.20 Cuando un gas se comprime adiabáticamente contra el aire circundante, su temperatura aumenta aunque no fluya calor hacia el gas. ¿De dónde proviene la energía que eleva la temperatura?

P19.21 Cuando un gas se expande adiabáticamente, efectúa trabajo sobre su entorno. Pero, si no fluye calor hacia el gas, ¿de dónde proviene la energía para efectuar trabajo?

P19.22 El gas que se utiliza para separar los dos isótopos de uranio ^{235}U y ^{238}U tiene la fórmula UF_6. Si se agrega calor a tasas iguales a un mol de UF_6 gaseoso y a un mol de H_2 gaseoso, ¿cuál temperatura esperaría usted que se elevara más rápido? Explique su respuesta.

EJERCICIOS

Sección 19.2 Trabajo realizado al cambiar el volumen y Sección 19.3 Trayectorias entre estados termodinámicos

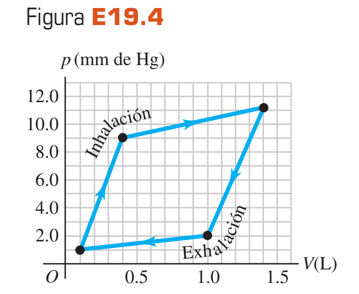
19.1 •• Dos moles de gas ideal se calientan a presión constante desde $T = 27°C$ hasta $T = 107°C$. *a*) Dibuje una gráfica *pV* para este proceso. *b*) Calcule el trabajo efectuado por el gas.

19.2 • Seis moles de gas ideal están en un cilindro provisto en un extremo con un pistón móvil. La temperatura inicial del gas es 27.0°C y la presión es constante. Como parte de un proyecto de diseño de maquinaria, calcule la temperatura final del gas una vez que haya efectuado 2.40×10^3 J de trabajo.

19.3 •• **CALC** Dos moles de gas ideal están comprimidos en un cilindro a temperatura constante de 65.0°C hasta que se triplique la presión original. *a*) Dibuje una gráfica *pV* para este proceso. *b*) Calcule la cantidad de trabajo efectuado.

19.4 •• **BIO** **Trabajo realizado por los pulmones.** La gráfica de la figura E19.4 muestra un diagrama *pV* del aire en un pulmón humano cuando una persona inhala y luego exhala una respiración profunda. Estas gráficas, obtenidas en la práctica clínica, normalmente están algo curvadas, pero modelamos una como un conjunto de líneas rectas de la misma forma general. (*Importante:* La presión indicada es la presión *manométrica*, *no* la presión absoluta). *a*) ¿Cuántos joules de trabajo *neto* realiza el pulmón de esta persona durante una respiración completa? *b*) El proceso que aquí se representa es algo diferente de los que se han estudiado, ya que el cambio de presión se debe a los cambios en la cantidad de gas en el pulmón, y no a los cambios de temperatura. (Piense en su propia respiración. Sus pulmones no se expanden ya que se han calentado). Si la temperatura del aire en el pulmón permanece en un valor razonable de 20°C, ¿cuál es el número máximo de moles en el pulmón de esta persona durante una respiración?

Figura **E19.4**



19.5 •• **CALC** Durante el tiempo en que 0.305 moles de un gas ideal experimentan una compresión isotérmica a 22.0°C, su entorno efectúa 468 J de trabajo sobre él. *a*) Si la presión final es de 1.76 atm, ¿cuál fue la presión inicial? *b*) Dibuje una gráfica *pV* para este proceso.

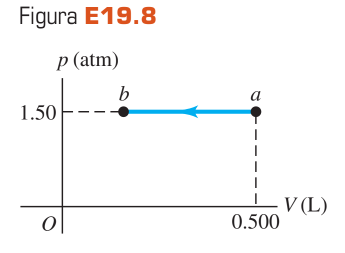
19.6 •• Un gas se somete a dos procesos. En el primero, el volumen permanece constante en 0.200 m^3 y la presión aumenta de 2.00×10^5 Pa a 5.00×10^5 Pa. El segundo proceso es una compresión a un volumen de 0.120 m^3, a presión constante de 5.00×10^5 Pa. *a*) Represente ambos procesos en una gráfica *pV*. *b*) Calcule el trabajo total efectuado por el gas durante los dos procesos.

19.7 • **Trabajo efectuado en un proceso cíclico.** *a*) En la figura 19.7*a*, considere el ciclo cerrado $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$, que es un proceso *cíclico* donde los estados inicial y final son iguales. Calcule el trabajo total efectuado por el sistema en este proceso y demuestre que es igual al área encerrada por dicho ciclo. *b*) ¿Qué relación hay entre el trabajo efectuado por el proceso del inciso *a*) y el que se realiza si se recorre el ciclo en el sentido opuesto, $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$? Explique su respuesta.

Sección 19.4 Energía interna y la primera ley de la termodinámica

19.8 •• La figura E19.8 muestra un diagrama *pV* para un gas ideal en el que la temperatura absoluta en *b* es un cuarto de la temperatura absoluta en *a*. *a*) ¿Qué volumen ocupa este gas en el punto *b*? *b*) ¿Cuántos joules de trabajo se realizó por o sobre el gas en este proceso? ¿El trabajo fue realizado por el gas o sobre este? *c*) ¿La energía interna del gas aumentó o disminuyó de *a* a *b*? ¿Cómo lo sabe? *d*) ¿El calor entró o salió del gas de *a* a *b*? ¿Cómo lo sabe?

Figura **E19.8**

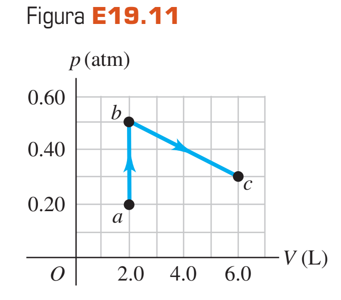


19.9 • Un gas en un cilindro se expande desde un volumen de 0.110 m^3 a 0.320 m^3. Fluye calor hacia el gas con la rapidez mínima que permite mantener la presión constante a 1.65×10^5 Pa durante la expansión. El calor total agregado es de 1.15×10^5 J. *a*) Calcule el trabajo efectuado por el gas. *b*) Calcule el cambio de energía interna del gas. *c*) ¿Importa si el gas tiene comportamiento ideal o no? ¿Por qué?

19.10 •• Cinco moles de un gas monoatómico con comportamiento ideal y temperatura inicial de 127°C se expanden. Al hacerlo, absorben 1200 J de calor y efectúan 2100 J de trabajo. Calcule la temperatura final del gas.

19.11 •• En la figura E19.11 se muestra el diagrama pV del proceso $a \rightarrow b \rightarrow c$ que implica 0.0175 moles de un gas ideal. *a*) ¿Cuál fue la temperatura más baja que alcanzó el gas en este proceso? ¿Dónde ocurrió? *b*) ¿Cuánto trabajo se realizó por o sobre el gas de a a b? ¿Y de b a c? *c*) Si se agregaron 215 J de calor en el gas durante $a \rightarrow b \rightarrow c$, ¿cuántos de esos joules se destinaron a la energía interna?

Figura **E19.11**



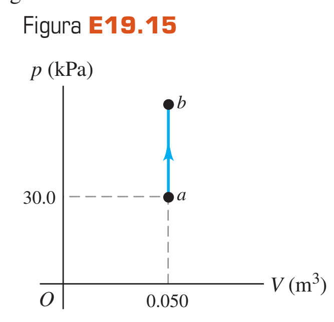
19.12 • Un gas en un cilindro se mantiene a presión constante de 1.80×10^5 Pa mientras se enfría y se comprime de 1.70 a 1.20 m^3. La energía interna del gas disminuye en 1.40×10^5 J. *a*) Calcule el trabajo efectuado por el gas. *b*) Obtenga el valor absoluto $|Q|$ del flujo de calor hacia o desde el gas, e indique la dirección del flujo. *c*) ¿Importa si el gas tiene comportamiento ideal o no? ¿Por qué?

19.13 • BIO **Rosquillas: ¡desayuno de campeones!** Una rosquilla contiene 2.0 g de proteínas, 17.0 g de carbohidratos y 7.0 g de grasas. Los valores medios de energía alimentaria de esas sustancias son de 4.0 kcal/g para las proteínas y los carbohidratos, y de 9.0 kcal/g para las grasas. *a*) Al hacer ejercicio intenso, una persona promedio consume energía a una tasa de 510 kcal/h. ¿Cuánto tiempo hay que hacer ejercicio para "quemar" una rosquilla? *b*) Si fuera posible convertir la energía de una rosquilla en energía cinética del cuerpo entero, ¿con qué rapidez se podría mover una persona después de comer una rosquilla? Suponga que la masa de la persona es de 60 kg y exprese su respuesta en m/s y en km/h.

19.14 • **Agua en ebullición a alta presión.** Cuando se hierve agua a una presión de 2.00 atm, el calor de vaporización es de 2.20×10^6 J/kg y el punto de ebullición es de 120°C. A esta presión, 1.00 kg de agua tiene un volumen de 1.00×10^{-3} m^3, y 1.00 kg de vapor de agua tiene un volumen de 0.824 m^3. *a*) Calcule el trabajo efectuado cuando se forma 1.00 kg de vapor de agua a esta temperatura. *b*) Calcule el incremento en la energía interna del agua.

19.15 • Un gas ideal se lleva de a a b en la gráfica pV que se aprecia en la figura E19.15. Durante este proceso, se agregan 700 J de calor y se duplica la presión. *a*) ¿Cuánto trabajo realiza el gas o se efectúa sobre este? Explique su respuesta. *b*) ¿Cómo se compara la temperatura del gas en a con su temperatura en b? Especifique. *c*) ¿Cómo se compara la energía interna del gas en a con la energía interna en b? De nuevo, especifique y explique su respuesta.

Figura **E19.15**

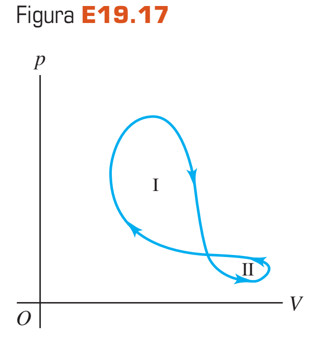


19.16 • Un sistema se lleva del estado a al b por las tres trayectorias de la figura E19.16. *a*) ¿Por qué trayectoria el trabajo efectuado por el sistema es máximo? ¿Y mínimo? *b*) Si $U_b > U_a$, ¿por cuál trayectoria es mayor el valor absoluto $|Q|$ de la transferencia de calor? Para esta trayectoria, ¿el sistema absorbe o desprende calor?

Figura **E19.16**

19.17 • Un sistema termodinámico experimenta un proceso cíclico como se muestra en la figura E19.17. El ciclo consiste en dos lazos cerrados: el lazo I y el II. *a*) Durante un ciclo completo, ¿el sistema efectúa trabajo positivo o negativo? *b*) En cada lazo, I y II, ¿el trabajo neto efectuado por el sistema es positivo o negativo? *c*) Durante un ciclo completo, ¿entra calor en el sistema o sale de él? *d*) En cada lazo, I y II, ¿entra calor en el sistema o sale de él?

Figura **E19.17**



Sección 19.5 Tipos de procesos termodinámicos, Sección 19.6 Energía interna de un gas ideal y Sección 19.7 Capacidad calorífica de un gas ideal

19.18 • Durante una compresión isotérmica de gas ideal, es preciso extraer 335 J de calor al gas para mantener la temperatura constante. ¿Cuánto trabajo efectúa el gas durante el proceso?

19.19 • Un cilindro contiene 0.250 moles de dióxido de carbono (CO_2) gaseoso a una temperatura de 27.0°C. El cilindro cuenta con un pistón sin fricción, el cual mantiene una presión constante de 1.00 atm sobre el gas. El gas se calienta hasta que su temperatura aumenta a 127.0°C. Suponga que el CO_2 se puede tratar como gas ideal. *a*) Dibuje una gráfica pV para este proceso. *b*) ¿Cuánto trabajo efectúa el gas en este proceso? *c*) ¿Sobre qué se efectúa ese trabajo? *d*) ¿Cuánto cambia la energía interna del gas? *e*) ¿Cuánto calor se suministró al gas? *f*) ¿Cuánto trabajo se habría efectuado si la presión hubiera sido de 0.50 atm?

19.20 • Un cilindro contiene 0.0100 moles de helio a $T = 27.0$°C. *a*) ¿Cuánto calor se requiere para elevar la temperatura a 67.0°C manteniendo constante el volumen? Dibuje una gráfica pV para este proceso. *b*) Si, en vez del volumen, se mantiene constante la presión del helio, ¿cuánto calor se requiere para elevar la temperatura de 27.0 a 67.0°C? Dibuje una gráfica pV para este proceso. *c*) ¿Qué explica la diferencia entre las respuestas a los incisos *a*) y *b*)? ¿En qué caso se requiere más calor? ¿Qué sucede con el calor adicional? *d*) Si el gas tiene comportamiento ideal, ¿cuánto cambia la energía interna en el inciso *a*)? ¿Y en el inciso *b*)? Compare las respuestas y explique cualquier diferencia.

19.21 • En un experimento para simular las condiciones dentro de un motor de automóvil, 0.185 moles de aire a una temperatura de 780 K y a una presión de 3.00×10^6 Pa están contenidos en un cilindro cuyo volumen es de 40.0 cm^3. Después se transfieren 645 J de calor al cilindro. *a*) Si el volumen del cilindro se mantiene fijo mientras se agrega el calor, ¿qué temperatura final alcanza el aire? Suponga que el aire es prácticamente nitrógeno puro y use los datos de la tabla 19.1 aunque la presión no sea baja. Dibuje una gráfica pV para este proceso. *b*) Calcule la temperatura final del aire, si se permite que el volumen del cilindro aumente mientras la presión se mantiene constante. Dibuje una gráfica pV para este proceso.

19.22 •• Cuando una cantidad de gas ideal monoatómico se expande a una presión constante de 4.00×10^4 Pa, el volumen del gas aumenta de 2.00×10^{-3} m^3 a 8.00×10^{-3} m^3. ¿Cuánto cambia la energía interna del gas?

19.23 • Fluye calor Q hacia un gas monoatómico con comportamiento ideal y el volumen aumenta mientras la presión se mantiene constante. ¿Qué fracción de la energía calorífica se usa para efectuar el trabajo de expansión del gas?

19.24 • Tres moles de un gas monoatómico ideal se expanden a una presión constante de 2.50 atm; el volumen del gas cambia de 3.20×10^{-2} m^3 a 4.50×10^{-2} m^3. *a*) Calcule las temperaturas inicial y final del gas. *b*) Calcule la cantidad de trabajo que efectúa el gas al expandirse. *c*) Determine la cantidad de calor agregado al gas. *d*) Calcule el cambio de energía interna del gas.

19.25 • Un cilindro con un pistón móvil contiene 3.00 moles de N_2 gaseoso (que se comporta como un gas ideal). *a*) El N_2 se calienta a volumen constante hasta que se agregan 1557 J de calor. Calcule el cambio de temperatura. *b*) Suponga que la misma cantidad de calor se agrega al N_2, pero en este tiempo se permite al gas expandirse mientras se mantiene a presión constante. Determine el cambio de temperatura. *c*) ¿En cuál caso, *a*) o *b*), la energía interna final del N_2 es mayor? ¿Cómo lo sabe? ¿Qué explica la diferencia entre ambos casos?

19.26 • Propano (C_3H_8) gaseoso se comporta como gas ideal con $\gamma = 1.127$. Determine la capacidad calorífica molar a volumen y presión constantes.

19.27 • **CALC** La temperatura de 0.150 moles de gas ideal se mantiene constante en 77.0°C, mientras su volumen se reduce al 25.0% de su volumen inicial. La presión inicial del gas es de 1.25 atm. *a*) Determine el trabajo efectuado por el gas. *b*) Determine el cambio de energía interna. *c*) ¿El gas intercambia calor con su entorno? Si lo hace, ¿de cuánto es el intercambio? ¿El gas absorbe o desprende calor?

19.28 • Un experimentador agrega 970 J de calor a 1.75 moles de un gas ideal, para calentarlo de 10.0 a 25.0°C a presión constante. El gas realiza +223 J de trabajo al expandirse. *a*) Calcule el cambio en la energía interna del gas. *b*) Calcule γ para el gas.

Sección 19.8 Procesos adiabáticos para un gas ideal

19.29 • Un gas monoatómico con comportamiento ideal que está a una presión de 1.50×10^5 Pa y ocupa un volumen de 0.0800 m^3 se comprime adiabáticamente a un volumen de 0.0400 m^3. *a*) Calcule la presión final. *b*) ¿Cuánto trabajo efectúa el gas? *c*) Determine la razón entre las temperaturas final e inicial del gas. ¿Esta compresión calienta o enfría el gas?

19.30 • En un proceso adiabático con un gas ideal, la presión disminuye. ¿La energía interna del gas aumenta o disminuye durante ese proceso? Explique su razonamiento.

19.31 •• Dos moles de monóxido de carbono (CO) están a una presión de 1.2 atm y ocupan un volumen de 30 litros. Después, el gas se comprime adiabáticamente a $\frac{1}{3}$ de ese volumen. Suponga que el gas tiene comportamiento ideal. ¿Cuánto cambia su energía interna? ¿La energía interna aumenta o disminuye? ¿La temperatura del gas aumenta o disminuye durante el proceso? Explique su respuesta.

19.32 • El motor de un automóvil deportivo Ferrari F355 admite aire a 20.0°C y 1.00 atm, y lo comprime adiabáticamente a 0.0900 veces el volumen original. El aire se puede tratar como gas ideal con $\gamma = 1.40$. *a*) Dibuje una gráfica *pV* para este proceso. *b*) Calcule la temperatura y presión finales.

19.33 • Durante una expansión adiabática, la temperatura de 0.450 moles de argón (Ar) baja de 50.0 a 10.0°C. El argón se puede tratar como gas ideal. *a*) Dibuje una gráfica *pV* para este proceso. *b*) ¿Cuánto trabajo realiza el gas? *c*) ¿Cuánto cambia la energía interna del gas?

19.34 •• Un jugador rebota un balón de baloncesto en el piso, comprimiéndolo 80% de su volumen original. Dentro del balón, el aire (que se supone esencialmente N_2 gaseoso) está originalmente a una temperatura de 20.0°C y a una presión de 2.00 atm. El diámetro interno del balón es de 23.9 cm. *a*) ¿A qué temperatura el aire en el balón alcanzará su compresión máxima? Suponga que la compresión es adiabática y considere que el gas tiene un comportamiento ideal. *b*) ¿Cuánto cambia la energía interna del aire entre el estado original del balón y su máxima compresión?

19.35 •• En un cálido día de verano, una masa grande de aire (presión atmosférica 1.01×10^5 Pa) se calienta con el suelo a una temperatura de 26.0°C y luego empieza a ascender por el aire circundante más frío. (Este puede tratarse aproximadamente como un proceso adiabático. ¿Por qué?). Calcule la temperatura de la masa del aire cuando se ha elevado a un nivel donde la presión atmosférica es de solo 0.850×10^5 Pa. Suponga que el aire es un gas ideal con $\gamma = 1.40$. (Esta tasa de enfriamiento con aire seco ascendente, que corresponde aproximadamente a 1°C por 100 m de altura, se denomina *gradiente adiabático seco*).

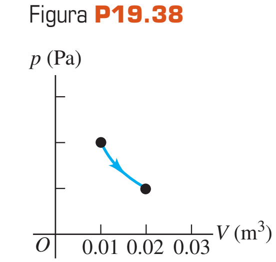
19.36 • Un cilindro contiene 0.100 moles de un gas monoatómico con comportamiento ideal a una presión inicial de 1.00×10^5 Pa, en un volumen de 2.50×10^{-3} m^3. *a*) Calcule la temperatura inicial del gas en kelvins. *b*) Se permite que el gas se expanda al doble de su volumen inicial. Calcule la temperatura (en kelvins) y la presión del gas al final del proceso, si la expansión es **i.** isotérmica, **ii.** isobárica, **iii.** adiabática.

PROBLEMAS

19.37 •• Un mol de gas ideal se comprime lentamente a un tercio de su volumen original. En esta compresión, el trabajo realizado sobre el gas tiene magnitud de 600 J. Para el gas, $C_p = 7R/2$. *a*) Si el proceso es isotérmico, ¿cuál es el flujo de calor *Q* para el gas? ¿El flujo de calor es hacia adentro o hacia afuera del gas? *b*) Si el proceso es isobárico, ¿cuál es el cambio en la energía interna del gas? ¿Aumenta o disminuye la energía interna?

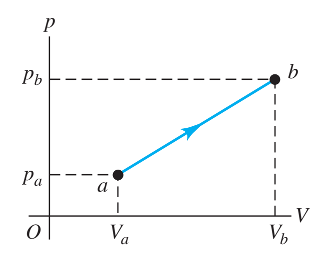
19.38 •• **CALC** La figura P19.38 muestra la gráfica *pV* para una expansión isotérmica de 1.50 moles de un gas ideal, a una temperatura de 15.0°C. *a*) ¿Cuál es el cambio en la energía interna del gas? Explique su respuesta. *b*) Calcule el trabajo efectuado por el gas (o sobre este) y el calor absorbido (o liberado) por el gas durante la expansión.

Figura **P19.38**



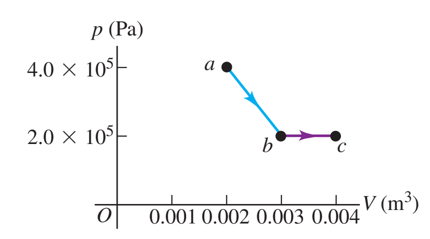
19.39 •• Una cantidad de aire se lleva del estado *a* al *b* siguiendo una trayectoria recta en una gráfica *pV* (figura P19.39). *a*) En este proceso, ¿la temperatura del gas aumenta, disminuye o no cambia? Explique su respuesta. *b*) Si $V_a = 0.0700$ m^3, $V_b = 0.1100$ m^3, $p_a = 1.00 \times 10^5$ Pa y $p_b = 1.40 \times 10^5$ Pa, ¿cuánto trabajo *W* efectúa el gas en este proceso? Suponga que el gas tiene comportamiento ideal.

Figura **P19.39**



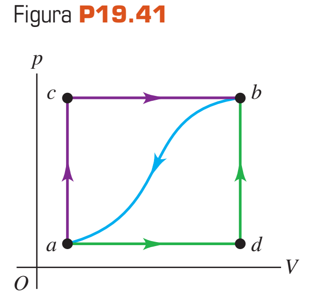
19.40 • Medio mol de un gas ideal se lleva del estado *a* al *c*, como se indica en la figura P19.40. *a*) Calcule la temperatura final del gas. *b*) Determine el trabajo efectuado por el gas (o sobre él), conforme pasa del estado *a* al *c*. *c*) En el proceso, ¿sale calor del sistema o entra a este? ¿Qué tanto calor? Explique su respuesta.

Figura **P19.40**



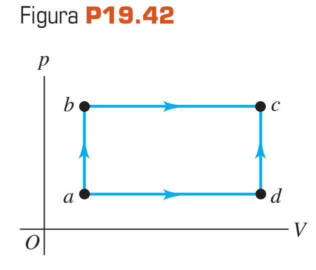
19.41 •• Cuando un sistema se lleva del estado a al b por la trayectoria $a \rightarrow c \rightarrow b$ (figura P19.41), 90.0 J de calor entran en el sistema y este efectúa 60.0 J de trabajo. *a*) ¿Cuánto calor entra en el sistema por la trayectoria $a \rightarrow d \rightarrow b$ si el trabajo efectuado por el sistema es de 15.0 J? *b*) Cuando el sistema regresa de b a a siguiendo la trayectoria curva, el valor absoluto del trabajo efectuado por el sistema es de 35.0 J. ¿El sistema absorbe o desprende calor? ¿Cuánto? *c*) Si $U_a = 0$ y $U_d = 8.0$ J, calcule el calor que se absorbe en los pro-cesos $a \rightarrow d$ y $d \rightarrow b$.

Figura **P19.41**



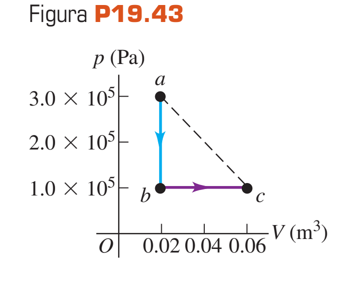
19.42 • Un sistema termodinámico se lleva del estado a al estado c de la figura P19.42 siguiendo la trayectoria $a \rightarrow b \rightarrow c$, o bien, la trayectoria $a \rightarrow d \rightarrow c$. Por la trayectoria $a \rightarrow b \rightarrow c$, el trabajo W efectuado por el sistema es de 450 J. Por la trayectoria $a \rightarrow d \rightarrow c$, W es de 120 J. Las energías internas de los cuatro estados que se ilustran en la figura son: $U_a = 150$ J, $U_b = 240$ J, $U_c = 680$ J y $U_d = 330$ J. Calcule el flujo de calor Q para cada uno de los cuatro procesos: $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$, $a \rightarrow d$ y $d \rightarrow c$. En cada proceso, ¿el sistema absorbe o desprende calor?

Figura **P19.42**



19.43 • Un volumen de aire (que se supone gas ideal) primero se enfría sin modificar su volumen y, luego, se expande sin cambiar su presión, como se indica en la trayectoria $a \rightarrow b \rightarrow c$ de la figura P19.43. *a*) ¿Cómo se compara la temperatura final del gas con su temperatura inicial? *b*) ¿Cuánto calor intercambia el aire con su entorno durante el proceso $a \rightarrow b \rightarrow c$? ¿El aire absorbe o libera calor en el proceso? Explique su respuesta. *c*) Si ahora el aire se expande del estado a al c por la trayectoria rectilínea que se indica, ¿cuánto calor intercambia con su entorno?

Figura **P19.43**



19.44 • Tres moles de argón gaseoso (que se supone gas ideal) originalmente están a presión de 1.50×10^4 Pa y a un volumen de 0.0280 m^3. Primero se calientan y se expanden a presión constante a un volumen de 0.0435 m^3, luego se calientan a volumen constante hasta que la presión llega a 3.50×10^4 Pa; después se enfrían y se comprimen a presión constante hasta que otra vez el volumen es de 0.0280 m^3, y por último se enfrían a volumen constante hasta que la presión se reduce a su valor original de 1.50×10^4 Pa. *a*) Elabore una gráfica pV para este ciclo. *b*) Calcule el trabajo total efectuado por el gas (o sobre este) durante el ciclo. *c*) Determine el calor neto intercambiado con el entorno. En general, ¿el gas pierde o gana calor?

19.45 •• Dos moles de un gas monoatómico con comportamiento ideal se someten al ciclo $a \rightarrow b \rightarrow c$. En un ciclo completo, salen 800 J de calor del gas. El proceso ab se efectúa a presión constante; y el proceso $b \rightarrow c$, a volumen constante. Los estados a y b tienen temperaturas $T_a = 200$ K y $T_b = 300$ K. *a*) Dibuje una gráfica pV para el ciclo. *b*) ¿Cuánto trabajo W se efectúa en el proceso $c \rightarrow a$?

19.46 •• Tres moles de gas ideal se llevan por el ciclo $a \rightarrow b \rightarrow c$ de la figura P19.46. Para este gas, $C_p = 29.1$ J/mol·K. El proceso $a \rightarrow c$ se efectúa a presión constante, el proceso $b \rightarrow a$ se efectúa a volumen constante y el proceso $c \rightarrow b$ es adiabático. La temperatura del gas en los estados a, c y b es $T_a = 300$ K, $T_c = 492$ K y $T_b = 600$ K. Calcule el trabajo total W del ciclo.


Figura **P19.46**

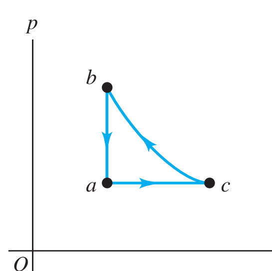
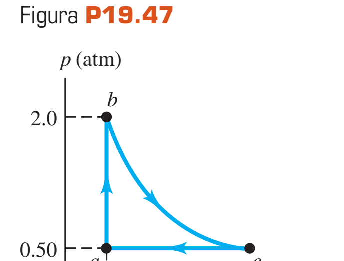


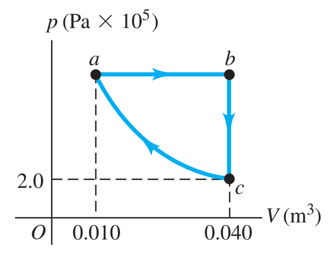
Figura **P19.47**



19.47 •• La figura P19.47 muestra un diagrama pV de 0.0040 moles del gas *ideal* H_2. La temperatura del gas no cambia durante el segmento $b \rightarrow c$. *a*) ¿Qué volumen ocupa este gas en el punto c? *b*) Encuentre la temperatura del gas en los puntos a, b y c. *c*) ¿Cuánto calor se fue dentro o fuera del gas durante los segmentos $a \rightarrow b$, $c \rightarrow a$ y $b \rightarrow c$? Indique si el calor ha entrado o salido del gas. *d*) Encuentre el cambio de la energía interna de este hidrógeno durante los segmentos $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$ y $c \rightarrow a$. Indique si la energía interna aumenta o disminuye durante cada uno de estos segmentos.

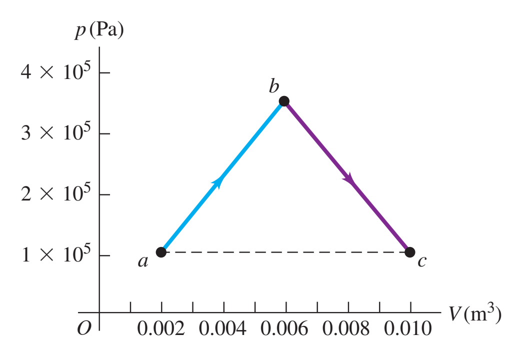
19.48 •• El gráfico en la figura P19.48 muestra un diagrama pV durante 3.25 moles de helio (He) *ideal* gaseoso. La parte $c \rightarrow a$ de este proceso es isotérmico. *a*) Encuentre la presión del He en el punto a. *b*) Determine la temperatura del He en los puntos a, b y c. *c*) ¿Cuánto calor entró o salió del He durante los segmentos $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$ y $c \rightarrow a$? En cada segmento, ¿el calor entra o sale? *d*) ¿En cuánto cambió la energía interna del He de a a b, de b a c y de c a a? Indique si esta energía aumenta o disminuye.


Figura **P19.48**



19.49 •• *a*) Una tercera parte de un mol de gas He se toma a lo largo de la trayectoria $a \rightarrow b?c$ representada por la línea continua en la figura P19.49. Suponga que el gas se puede tratar como ideal. ¿Cuánto calor se transfiere dentro o fuera del gas? *b*) Si, en vez de ello, el gas pasa del estado a al estado c a lo largo de la línea horizontal punteada en la figura P19.49, ¿cuánto calor se transfiere hacia adentro o hacia afuera del gas? *c*) ¿Cómo se compara Q en el inciso *b*) con Q del inciso *a*)? Explique su respuesta.

Figura **P19.49**



19.50 •• Dos moles de helio están inicialmente a una temperatura de 27.0°C y ocupan un volumen de 0.0300 m^3. Primero se expande el

helio a presión constante hasta que su volumen se duplica. Después, se expande adiabáticamente hasta que la temperatura vuelve a su valor inicial. Supongamos que el helio se puede tratar como un gas ideal. *a*) Dibuje un diagrama del proceso en el plano *pV*. *b*) ¿Cuál es el calor total suministrado al helio en el proceso? *c*) ¿Cuál es el cambio total de energía interna del helio? *d*) ¿Cuál es el trabajo total realizado por el helio? *e*) ¿Cuál es el volumen final del helio?

19.51 ••• Al empezar con 2.50 moles de N_2 gaseoso (que se supone ideal) en un cilindro a 1.00 atm y 20.0°C, un químico calienta primero el gas a volumen constante, agrega 1.52×10^4 J de calor, luego continúa calentando y permite que el gas se expanda a presión constante al doble de su volumen original. *a*) Calcule la temperatura final del gas. *b*) Determine la cantidad de trabajo efectuado por el gas. *c*) Calcule la cantidad de calor agregado al gas mientras se expande. *d*) Calcule el cambio de energía interna del gas en todo el proceso.

19.52 •• Nitrógeno gaseoso en un recipiente expandible se enfría de 50.0 a 10.0°C manteniendo constante la presión en 3.00×10^5 Pa. El calor total desprendido por el gas es 2.50×10^4 J. Suponga que el gas tiene comportamiento ideal. *a*) Calcule el número de moles del gas. *b*) Calcule el cambio de energía interna del gas. *c*) Calcule el trabajo efectuado por el gas. *d*) ¿Cuánto calor desprendería el gas con el mismo cambio de temperatura si el volumen fuera constante?

19.53 • En cierto proceso, un sistema desprende 2.15×10^5 J de calor, al tiempo que se contrae bajo una presión externa constante de 9.50×10^5 Pa. La energía interna del sistema es la misma al principio y al final del proceso. Calcule el cambio de volumen del sistema. (El sistema *no* tiene comportamiento ideal).

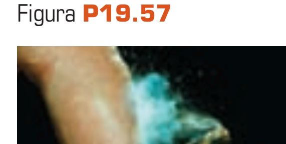
19.54 • **CALC** Un cilindro con un pistón móvil sin fricción, como el de la figura 19.5, contiene una cantidad de helio gaseoso. En un principio, su presión es de 1.00×10^5 Pa, su temperatura es de 300 K y ocupa un volumen de 1.50 L. Después, el gas se somete a dos procesos. En el primero, el gas se calienta y se permite que el pistón se mueva a modo de mantener la temperatura constante en 300 K. Esto continúa hasta que la presión alcanza 2.50×10^4 Pa. En el segundo proceso, el gas se comprime a presión constante hasta que vuelve a su volumen original de 1.50 L. Suponga que el gas tiene comportamiento ideal. *a*) Muestre ambos procesos en una gráfica *pV*. *b*) Calcule el volumen del gas al final del primer proceso, y la presión y temperatura del gas al final del segundo proceso. *c*) Calcule el trabajo total efectuado por el gas durante ambos procesos. *d*) ¿Qué tendría que hacer con el gas para hacerlo volver a su presión y temperatura originales?

19.55 •• **PA** **Proceso termodinámico en un líquido.** Un ingeniero químico está estudiando las propiedades del metanol (CH_3OH) líquido. Usa un cilindro de acero con área de sección transversal de 0.0200 m^2 que contiene 1.20×10^{-2} m^3 de metanol. El cilindro está equipado con un pistón ajustado que sostiene una carga de 3.00×10^4 N. La temperatura del sistema se aumenta de 20.0 a 50.0°C. El coeficiente de expansión volumétrica del metanol es de 1.20×10^{-3} K^{-1}, su densidad es de 791 kg/m^3 y su calor específico a presión constante es $c_p = 2.51 \times 10^3$ J/kg·K. Se puede despreciar la expansión del cilindro de acero. Calcule *a*) el aumento de volumen del metanol; *b*) el trabajo mecánico efectuado por el metanol contra la fuerza de 3.00×10^4 N; *c*) la cantidad de calor agregada al metanol; *d*) el cambio de energía interna del metanol. *e*) Con base en sus resultados, explique si hay una diferencia apreciable entre los calores específicos c_P (a presión constante) y c_V (a volumen constante) del metanol en estas condiciones.

19.56 • **PA** **Proceso termodinámico en un sólido.** Un cubo de cobre de 2.00 cm por lado cuelga de una cuerda. (Las propiedades físicas del cobre se dan en las tablas 14.1, 17.2 y 17.3). Con un mechero, el cubo se calienta de 20.0 a 90.0°C. El aire que rodea al cubo está a presión atmosférica (1.01×10^5 Pa). Calcule *a*) el aumento de volumen del cubo; *b*) el trabajo mecánico efectuado por el cubo para expandirse contra la presión del aire circundante; *c*) la cantidad de calor agregada al cubo; *d*) el cambio de energía interna del cubo. *e*) Con base en sus resultados, explique si hay una diferencia sustancial entre los calores específicos c_p (a presión constante) y c_V (a volumen constante) del cobre en estas condiciones.

19.57 • **BIO** **Proceso termodinámico en un insecto.** El escarabajo bombardero africano *Stenaptinus insignis* puede emitir un chorro de líquido repelente por la punta móvil de su abdomen (figura P19.57). El cuerpo del insecto tiene depósitos de dos sustancias; cuando se molesta al escarabajo, las sustancias se combinan en una cámara de reacción, produciendo un compuesto que se calienta de 20 a 100°C por el calor de reacción. La elevada presión que se genera permite expulsar el compuesto con una rapidez de hasta 19 m/s (68 km/h) para asustar a depredadores de todo tipo. (El escarabajo que se observa en la figura mide 2 cm de largo). Calcule el calor de reacción de las dos sustancias (en J/kg). Suponga que el calor específico de las dos sustancias y del producto es igual al del agua, 4.19×10^3 J/kg·K, y que la temperatura inicial de las sustancias es de 20°C.

Figura **P19.57**



19.58 ••• **Investigación de gran altura.** Un globo de investigación grande contiene 2.00×10^3 m^3 de helio gaseoso a 1.00 atm y a una temperatura de 15.0°C. El globo se eleva rápidamente desde el nivel del suelo hasta una altura donde la presión atmosférica es de solo 0.900 atm (figura P19.58). Suponga que el helio se comporta como un gas ideal y que el globo sube tan rápido que permite mucho intercambio de calor con el aire circundante. *a*) Calcule el volumen del gas a la máxima altura. *b*) Determine la temperatura del gas a la máxima altura. *c*) ¿Cuál es el cambio en la energía interna del helio conforme el globo se eleva a su máxima altura?

Figura **P19.58**

19.59 ••• ***Chinook*.** En ciertas épocas del año, fuertes vientos llamados *chinooks* soplan desde el oeste, bajando por las faldas orientales de las Rocallosas hacia Denver y regiones circunvecinas. Aunque las montañas son frías, el viento en Denver es muy caliente; pocos minutos después de llegar el *chinook*, la temperatura llega a subir 20 C°. (*Chinook* es una palabra en una lengua indígena norteamericana que significa "devorador de nieve"). Se presentan vientos similares en los Alpes (llamados favones) y en el sur de California (donde se llaman "Santa Anas"). *a*) Explique por qué la temperatura del viento *chinook* aumenta al descender las laderas. ¿Por qué es importante que el viento sea rápido? *b*) Suponga que sopla un viento fuerte hacia Denver (elevación, 1630 m) desde el Pico Grays (80 km al oeste de Denver, con una elevación de 4350 m),

donde el aire tiene una presión de 5.60×10^4 Pa y una temperatura de $-15.0°C$. La temperatura y la presión en Denver antes de que llegue el viento son 2.0°C y 8.12×10^4 Pa, respectivamente. ¿En cuántos grados Celsius subirá la temperatura en Denver cuando llegue el *chinook*?

19.60 •• La capacidad calorífica molar a volumen constante de cierto gas con comportamiento ideal es C_V. Una muestra de este gas ocupa inicialmente un volumen V_0 a una presión p_0 y una temperatura absoluta T_0. El gas se expande isobáricamente a un volumen $2V_0$ y luego se sigue expandiendo adiabáticamente hasta un volumen final de $4V_0$. *a*) Dibuje una gráfica *pV* para esta sucesión de procesos. *b*) Calcule el trabajo total efectuado por el gas en esta sucesión de procesos. *c*) Calcule la temperatura final del gas. *d*) Determine el valor absoluto $|Q|$ del flujo total de calor que entra en el gas o sale de él durante esta sucesión de procesos, e indique la dirección del flujo.

19.61 ••• Una bomba de aire tiene un cilindro de 0.250 m de longitud, con un pistón móvil. La bomba se utiliza para comprimir aire de la atmósfera (a una presión absoluta de 1.01×10^5 Pa) e introducirlo en un tanque muy grande, cuya presión manométrica es de 4.20×10^5 Pa. (Para el aire, $C_V = 20.8$ J/mol·K). *a*) El pistón inicia la carrera de compresión en el extremo abierto del cilindro. ¿Qué distancia se ha movido el pistón en el cilindro cuando comienza a fluir aire del cilindro al tanque? Suponga que la compresión es adiabática. *b*) Si el aire se introduce en la bomba a 27.0°C, ¿qué temperatura tendrá una vez comprimido? *c*) ¿Cuánto trabajo efectúa la bomba al introducir 20.0 moles de aire en el tanque?

19.62 •• **Turbocargadores e interenfriadores (radiadores) para motores.** La potencia desarrollada por un motor de automóvil es directamente proporcional a la masa de aire que se puede introducir en el volumen de los cilindros del motor, para reaccionar químicamente con la gasolina. Muchos automóviles tienen un *turbocargador* que comprime el aire antes de que entre en el motor, para que haya mayor masa de aire en el mismo volumen. Esta compresión rápida, prácticamente adiabática, también calienta el aire. Con la finalidad de comprimir el aire aún más, se le hace pasar por un *interenfriador*, en el cual intercambia calor con su entorno a presión prácticamente constante. Después, el aire es succionado hacia los cilindros. En una instalación típica, se introduce aire en el turbocargador a presión atmosférica (1.01×10^5 Pa), densidad $\rho = 1.23$ kg/m^3 y temperatura de 15.0°C. Se le comprime adiabáticamente a 1.45×10^5 Pa. En el interenfriador, el aire se enfría a la temperatura original de 15.0°C a presión constante de 1.45×10^5 Pa. *a*) Dibuje una gráfica *pV* para esta sucesión de procesos. *b*) Si el volumen de uno de los cilindros del motor es de 575 cm^3, ¿qué masa de aire que sale del interenfriador llenará el cilindro a 1.45×10^5 Pa? En comparación con la potencia desarrollada por un motor que admite aire a 1.01×10^5 Pa a 15.0°C, ¿qué porcentaje de aumento de potencia se obtiene empleando un turbocargador y un interenfriador? *c*) Si no se usa el interenfriador, ¿qué masa de aire que sale del turbocargador llenará el cilindro a 1.45×10^5 Pa? En comparación con la potencia desarrollada por un motor que admite aire a 1.01×10^5 Pa a 15.0°C, ¿qué porcentaje de aumento de potencia se obtiene empleando un turbocargador solo?

19.63 • Un gas monoatómico con comportamiento ideal se expande lentamente al doble de su volumen original, efectuando 300 J de trabajo en el proceso. Calcule el calor agregado al gas y el cambio de energía interna del gas, si el proceso es *a*) isotérmico, *b*) adiabático, *c*) isobárico.

19.64 •• **CALC** Un cilindro con pistón contiene 0.250 moles de oxígeno a 2.40×10^5 Pa y 355 K. El oxígeno se puede tratar como gas ideal. Primero, el gas se expande isobáricamente al doble de su volumen original. Después, se comprime isotérmicamente a su volumen original y, por último, se enfría isocóricamente hasta su presión original. *a*) Muestre esta serie de procesos en una gráfica *pV*. *b*) Calcule la temperatura durante la compresión isotérmica. *c*) Calcule la presión máxima. *d*) Calcule el trabajo total efectuado por el pistón sobre el gas durante la serie de procesos.

19.65 • Considere las condiciones y los procesos del problema 19.64 para calcular *a*) el trabajo efectuado por el gas, el calor agregado a este y su cambio de energía interna durante la expansión inicial; *b*) el trabajo efectuado, el calor agregado y el cambio de energía interna durante el enfriamiento final; *c*) el cambio de energía interna durante la compresión isotérmica.

19.66 •• **CALC** Un cilindro con pistón contiene 0.150 moles de nitrógeno a 1.80×10^5 Pa y 300 K. El nitrógeno se puede tratar como un gas ideal. Primero, el gas se comprime isobáricamente a la mitad de su volumen original. Luego, se expande adiabáticamente hasta su volumen original. Por último, se calienta isocóricamente hasta su presión original. *a*) Muestre esta serie de procesos en una gráfica *pV*. *b*) Calcule las temperaturas al principio y al final de la expansión adiabática. *c*) Calcule la presión mínima.

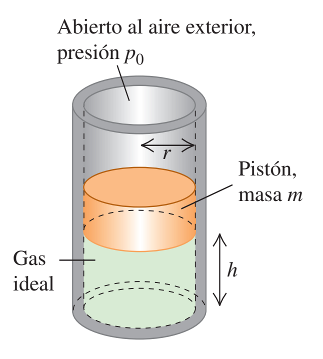
19.67 • Considere las condiciones y los procesos del problema 19.66 para calcular *a*) el trabajo efectuado por el gas, el calor agregado a este y su cambio de energía interna durante la compresión inicial; *b*) el trabajo efectuado por el gas, el calor agregado a este y el cambio de energía interna durante la expansión adiabática; *c*) el trabajo efectuado, el calor agregado y el cambio de energía interna durante el calentamiento final.

19.68 • **Comparación de procesos termodinámicos.** En un cilindro, 1.20 moles de un gas monoatómico con comportamiento ideal, a 3.60×10^5 Pa y 300 K, se expande hasta triplicar su volumen. Calcule el trabajo efectuado por el gas, si la expansión es *a*) isotérmica, *b*) adiabática, *c*) isobárica. *d*) Muestre cada proceso en una gráfica *pV*. ¿En qué caso es máximo el valor absoluto del trabajo efectuado por el gas? ¿Y mínimo? *e*) ¿En qué caso es máximo el valor absoluto de la transferencia de calor? ¿Y mínimo? *f*) ¿En qué caso es máximo el valor absoluto del cambio de energía interna del gas? ¿Y mínimo?

PROBLEMAS DE DESAFÍO

19.69 ••• **PA** **Oscilaciones de un pistón.** Un cilindro vertical de radio *r* contiene una cantidad de gas ideal, y está provisto de un pistón con masa *m* que puede moverse libremente (figura P19.69). El pistón y las paredes del cilindro carecen de fricción, y el cilindro completo se coloca en un baño a temperatura constante. La presión del aire exterior es p_0. En equilibrio, el pistón está a una altura *h* sobre la base del cilindro. *a*) Calcule la presión absoluta del gas atrapado bajo el pistón cuando está en equilibrio. *b*) Se tira del pistón para subirlo una distancia corta y después se suelta. Determine la fuerza neta que actúa sobre el pistón cuando su base está a una distancia $h + y$ sobre la base del cilindro, donde *y* es mucho menor que *h*. *c*) Después de que el pistón se desplaza del equilibrio y se suelta, oscila verticalmente. Calcule la frecuencia de estas pequeñas oscilaciones. Si el desplazamiento no es pequeño, ¿las oscilaciones son armónicas simples? ¿Cómo lo sabe?

Figura **P19.69**



Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

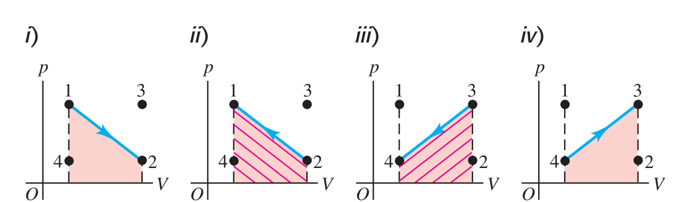
No. El trabajo efectuado por un gas cuando su volumen cambia de V_1 a V_2 es igual a la integral $\int p\,dV$ entre esos dos límites de volumen. Si el gas se contrae, el volumen final V_2 es menor que el volumen inicial V_1, y el gas efectúa trabajo negativo. Para impulsar la locomotora, el gas debe efectuar trabajo positivo, por lo que el gas no contribuye a la propulsión mientras se contrae.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

19.1 Respuestas: negativo, positivo, positivo Sale calor del café, por lo que $Q_{\text{café}} < 0$; entra calor en la taza de aluminio, por lo que $Q_{\text{aluminio}} > 0$. En mecánica, diríamos que se efectúa trabajo negativo *sobre* el bloque, porque la superficie ejerce sobre este una fuerza que se opone al movimiento del bloque. En termodinámica, en cambio, usamos la convención opuesta y decimos que $W > 0$, lo cual implica que el bloque efectúa trabajo positivo sobre la superficie.

19.2 Respuesta: ii. El trabajo efectuado en una expansión se representa mediante el área bajo la curva de presión p contra volumen V. En una expansión isotérmica, la presión se reduce conforme el volumen aumenta, por lo que la gráfica pV se asemeja a la figura 19.6*a* y el trabajo efectuado es igual al área sombreada bajo la curva azul desde el punto 1 hasta el punto 2. No obstante, si la expansión es a presión constante, la curva de p contra V sería la misma que la línea horizontal punteada a presión p_2 de la figura 19.6*a*. El área bajo esta línea punteada es menor que el área bajo la curva azul para una expansión isotérmica, de manera que se efectúa menos trabajo en una expansión a presión constante que en una expansión isotérmica.

19.3 Respuesta: i y iv (empate), ii y iii (empate) La siguiente figura muestra las gráficas pV para cada uno de los cuatro procesos. El área trapezoidal bajo la curva y, por lo tanto, el valor absoluto del trabajo, es la misma en los cuatro casos. En los casos **i** y **iv** el volumen aumenta, de manera que el sistema realiza trabajo positivo conforme se expande contra su entorno. En los casos **ii** y **iii** el volumen se reduce, por lo que el sistema efectúa trabajo negativo (que se indica con el "achurado") conforme el entorno empuja hacia adentro contra él.



19.4 Respuesta: ii, i y iv (empate); iii. En la expresión $\Delta U = Q - W$, Q es el calor *agregado* al sistema y W es el trabajo efectuado *por* el sistema. Si se transfiere calor desde el sistema hacia su entorno, Q es negativo; si se realiza trabajo sobre el sistema, W es negativo. Por ello, tenemos **i.** $Q = -250$ J, $W = -250$ J, $\Delta U = -250\text{ J} - (-250\text{ J}) = 0$; **ii.** $Q = 250$ J, $W = -250$ J, $\Delta U = 250\text{ J} - (-250\text{ J}) = 500$ J; **iii.** $Q = -250$ J, $W = 250$ J, $\Delta U = -250\text{ J} - 250\text{ J} = -500$ J, y **iv.** $Q = 250$ J, $W = 250$ J, $\Delta U = 250\text{ J} - 250\text{ J} = 0$.

19.5 Respuestas $1 \rightarrow 4$ y $3 \rightarrow 2$ son isocóricos; $1 \rightarrow 3$ y $4 \rightarrow 2$ son isobáricos; no En un diagrama pV como los de la figura 19.7, los procesos isocóricos se representan con líneas verticales (de volumen constante); y los procesos isobáricos, con líneas horizontales (de presión constante). El proceso $1 \rightarrow 2$ de la figura 19.7 se representa con una línea curva que, a primera vista, se parece a los procesos adiabático e isotérmico del gas ideal en la figura 19.16. Pero sin más información, es imposible saber si el proceso $1 \rightarrow 2$ es isotérmico, adiabático o ninguno de ellos.

19.6 Respuesta: no Utilizando el modelo de un sólido de la figura 18.20, vemos que la energía interna de un sólido *sí* depende de su volumen. Comprimir el sólido implica comprimir los "resortes" que hay entre los átomos, aumentando la energía potencial que almacenan y, por ende, la energía interna del sólido.

19.7 Respuesta: i. Para un número dado n de moles y un cambio de temperatura ΔT dado, la cantidad de calor que se debe transferir fuera de un volumen fijo de aire es $Q = nC_V\Delta T$. Así, la cantidad de transferencia de calor necesaria es menor para el gas con el valor de C_V menor. De acuerdo con la tabla 19.1, el valor de C_V es el menor en los gases monoatómicos.

19.8 Respuesta: ii, iv, i y iii (empate) Las muestras **i** y **iii** están isotérmicamente comprimidas, por lo que pV = constante. El volumen de cada muestra disminuye a la mitad de su valor inicial, por lo que la presión final es del doble de la presión inicial. En cambio, las muestras **ii** y **iv** están adiabáticamente comprimidas, de manera que pV^γ = constante y la presión aumenta en un factor de 2^γ. La muestra **ii** es un gas monoatómico para el que $\gamma = \frac{5}{3}$ y su presión final es $2^{5/3} = 3.17$ veces mayor que la presión inicial. La muestra **iv** es un gas diatómico para el que $\gamma = \frac{7}{5}$ y su presión final es mayor que la presión inicial en un factor de $2^{7/5} = 2.64$.

Problema práctico

Respuestas: *a*) $W = nRT\ln\left[\dfrac{V_2 - nb}{V_1 - nb}\right] + an^2\left[\dfrac{1}{V_2} - \dfrac{1}{V_1}\right]$

b) **i.** $W = 2.80 \times 10^3$ J, **ii.** $W = 3.11 \times 10^3$ J

c) Gas ideal, para el cual no hay atracciones entre las moléculas

20 SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA



? La segunda ley de la termodinámica nos indica que el calor fluye naturalmente de un cuerpo caliente (como la lava fundida que se muestra aquí fluyendo hacia el océano en Hawái) a uno frío (como el agua del océano, la cual se calienta generando vapor). ¿Es posible que *alguna vez* el calor fluya de un cuerpo frío a uno caliente?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al terminar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué determina si un proceso termodinámico es reversible o irreversible.
- Qué es una máquina térmica y como se calcula su eficiencia.
- La física del motor de combustión interna.
- Cómo se relacionan los refrigeradores y las máquinas térmicas, y cómo analizar el funcionamiento de un refrigerador.
- Cómo la segunda ley de la termodinámica establece límites sobre la eficiencia de motores y del coeficiente de rendimiento de refrigeradores.
- Cómo efectuar cálculos con el ciclo de Carnot ideal para motores y refrigeradores.
- Qué se entiende por entropía y cómo utilizar este concepto para analizar los procesos termodinámicos.

Muchos procesos termodinámicos se efectúan de manera natural en una dirección pero no en la opuesta. Por ejemplo, el calor siempre fluye de un cuerpo caliente a uno más frío, nunca a la inversa. El flujo de calor de un cuerpo frío a uno caliente no violaría la primera ley de la termodinámica, pues se conservaría la energía; sin embargo, no ocurre en la naturaleza. ¿Por qué? Como otro ejemplo, observe que es fácil convertir energía mecánica totalmente en calor; esto sucede cada vez que usamos los frenos del automóvil para detenerlo. En la dirección inversa, hay muchos dispositivos que convierten calor *parcialmente* en energía mecánica. (El motor del automóvil es un ejemplo). Pero nadie ha logrado nunca construir una máquina que convierta el calor *totalmente* en energía mecánica. Nuevamente, ¿por qué?

La respuesta a ambas preguntas tiene que ver con la *dirección* de los procesos termodinámicos y constituye la *segunda ley de la termodinámica*. Esta ley impone limitaciones fundamentales a la eficiencia de un motor o una planta de electricidad, así como al aporte de energía mínimo necesario para hacer funcionar un refrigerador. Así que la segunda ley se aplica directamente a muchos problemas prácticos importantes.

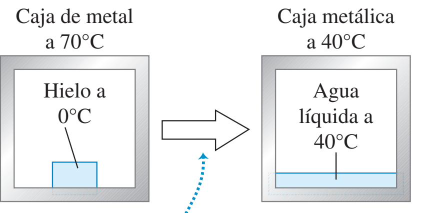
También podemos plantear la segunda ley en términos del concepto de *entropía*, una medida cuantitativa del grado de desorden o aleatoriedad de un sistema. La noción de entropía ayuda a explicar por qué la tinta mezclada con agua nunca se separa espontáneamente y por qué multitud de otros procesos nunca se observan a pesar de que se consideran posibles.

20.1 Dirección de los procesos termodinámicos

Todos los procesos termodinámicos que se dan en la naturaleza son **procesos irreversibles**, es decir, se efectúan espontáneamente en una dirección pero no en la otra (figura 20.1*a*). El flujo de calor de un cuerpo caliente a uno más frío es irreversible, lo mismo que la expansión libre de un gas que vimos en las secciones 19.3 y 19.6.

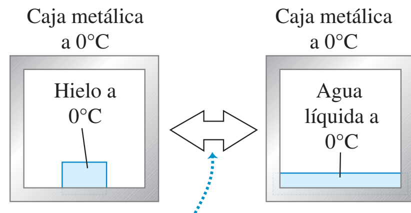
20.1 Procesos reversibles e irreversibles.

a) Un bloque de hielo se derrite *irreversiblemente* cuando lo colocamos en una caja metálica caliente (70°C).



El calor fluye de la caja al hielo y al agua, nunca a la inversa.

b) Un bloque de hielo a 0°C se puede derretir *reversiblemente* si lo colocamos en una caja metálica a 0°C.



Si aumentamos o reducimos infinitesimalmente la temperatura de la caja, podemos hacer que fluya calor hacia el hielo para derretirlo, o extraer calor del agua para volverla a congelar.

Al deslizar un libro sobre una mesa, convertimos la energía mecánica en calor por fricción; este proceso es irreversible, pues nadie ha observado el proceso inverso (en el que un libro inicialmente en reposo sobre una mesa comience a moverse espontáneamente, y se enfríen la mesa y el libro). El tema principal de este capítulo es la *segunda ley de la termodinámica*, la cual determina la dirección preferente de tales procesos.

A pesar de esta dirección preferente para todos los procesos naturales, podemos imaginar un tipo de procesos idealizados que *serían* reversibles. Un sistema que experimenta este **proceso reversible** idealizado siempre está muy cerca del equilibrio termodinámico en su interior y con sus alrededores. Cualquier cambio de estado que se presente podría revertirse con solo modificar infinitesimalmente las condiciones del sistema. Por ejemplo, el flujo de calor entre dos cuerpos cuyas temperaturas difieran solo infinitesimalmente puede revertirse haciendo un cambio muy pequeño en una temperatura o en la otra (figura 20.1*b*).

Entonces, los procesos reversibles son **procesos en equilibrio**, con el sistema siempre en equilibrio termodinámico. Desde luego, si semejante sistema estuviera *realmente* en equilibrio termodinámico, no habría cambio de estado. No habría flujo de calor hacia adentro o hacia afuera de un sistema que tiene una temperatura verdaderamente uniforme en todas sus partes, y un sistema que en verdad está en equilibrio mecánico no se expandiría ni realizaría trabajo sobre sus alrededores. Los procesos reversibles son una idealización que nunca puede lograrse perfectamente en el mundo real, pero, si los gradientes de temperatura y las diferencias de presión en la sustancia son muy pequeños, mantendríamos al sistema muy cerca de estados de equilibrio y haríamos el proceso casi reversible.

En contraste, el flujo de calor debido a una diferencia finita de temperatura, la expansión libre de un gas y la conversión de trabajo en calor por fricción son procesos *irreversibles*; ningún cambio pequeño en las condiciones podría hacer que uno de ellos ocurriera en la dirección opuesta. Estos procesos *no son de equilibrio*, ya que el sistema no está en equilibrio termodinámico en ningún punto solo hasta el final del proceso.

Desorden y procesos termodinámicos

Hay una relación entre la dirección de un proceso y el *desorden* o la *aleatoriedad* del estado resultante. Por ejemplo, imagine un millar de nombres escritos en tarjetas clasificadas en orden alfabético. Lance la pila de tarjetas clasificadas al aire, y probablemente caerán en un estado aleatorio desordenado. En la expansión libre de un gas que vimos en las secciones 19.3 y 19.6, el aire está más desordenado después de expandirse en todo el recipiente que cuando estaba confinado en un lado, exactamente como nuestra ropa está más desordenada cuando está esparcida en el piso que cuando está confinada en un armario.

De forma análoga, la energía cinética macroscópica es energía asociada a movimientos organizados y coordinados de muchas moléculas; mientras que la transferencia de calor supone cambios de energía en un movimiento molecular desordenado, aleatorio. Por lo tanto, la conversión de energía mecánica en calor implica un aumento de la aleatoriedad o el desorden.

En las siguientes secciones presentaremos la segunda ley de la termodinámica considerando dos grandes grupos de dispositivos: las *máquinas térmicas*, que son parcial-

mente exitosas al transformar calor en trabajo, y los *refrigeradores*, que logran transportar parcialmente calor de cuerpos fríos a cuerpos más calientes.

Evalúe su comprensión de la sección 20.1 Nuestras manos normalmente están a la misma temperatura, como la caja metálica y el hielo de la figura 20.1*b*. Frotarnos las manos para calentarlas es **i.** un proceso reversible, o **ii.** un proceso irreversible. ❙

MasteringPHYSICS®

ActivPhysics 8.12: Cyclic Process—Strategies
ActivPhysics 8.13: Cyclic Process—Problems

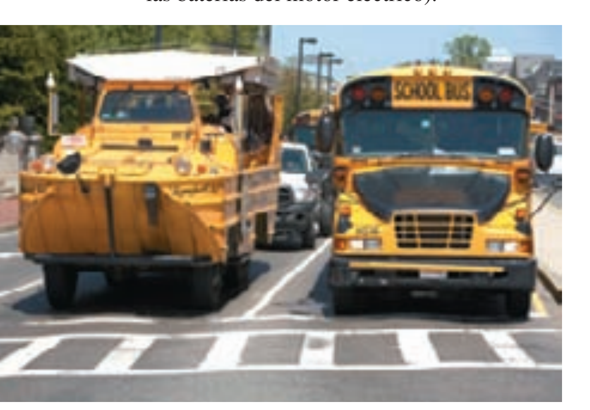
20.2 Máquinas térmicas

La base de nuestra sociedad tecnológica es la capacidad de usar fuentes de energía distintas de la potencia muscular. Hay casos en que la energía mecánica está disponible directamente, como la del agua y la del viento; sin embargo, casi toda nuestra energía proviene de quemar combustibles fósiles (carbón, petróleo y gas) y de reacciones nucleares, que suministran energía que se transfiere como *calor*, el cual se usa directamente para calentar edificios, cocinar y realizar procesos químicos; no obstante, para hacer funcionar una máquina o impulsar un vehículo, necesitamos energía *mecánica*.

Por lo tanto, es importante saber cómo tomar calor de una fuente y convertirlo, tanto como sea posible, en energía mecánica o trabajo. Esto es lo que sucede en los motores de gasolina de los automóviles, los motores a reacción de los aviones, las turbinas de vapor en las plantas de electricidad y muchos otros sistemas. Procesos similares se efectúan en el reino animal; la energía de los alimentos se "quema" (es decir, los carbohidratos se combinan con oxígeno para producir agua, dióxido de carbono y energía), y esa energía se convierte parcialmente en energía mecánica cuando los músculos del animal efectúan trabajo sobre sus alrededores.

Un dispositivo que transforma calor parcialmente en trabajo o energía mecánica es una **máquina térmica** (figura 20.2). Por lo regular, una cantidad de materia dentro de la máquina experimenta entrada y salida de calor, expansión y compresión, y a veces cambia de fase. Llamamos a esta la **sustancia de trabajo** de la máquina. En los motores de combustión interna, como los que se usan en los automóviles, la sustancia de trabajo es una mezcla de aire y combustible; en una turbina de vapor, es el agua.

20.2 Todos los vehículos motorizados, excepto los exclusivamente eléctricos, usan máquinas térmicas para impulsarse. (Los vehículos híbridos usan su motor de combustión interna para ayudar a cargar las baterías del motor eléctrico).



El tipo de máquina más fácil de analizar es aquel donde la sustancia de trabajo efectúa un **proceso cíclico**, es decir, una sucesión de procesos que al final deja la sustancia en el estado en que inició. En una turbina de vapor, el agua se recicla usándose una y otra vez. Los motores de combustión interna no usan el mismo aire una y otra vez, pero de todos modos podemos analizarlos en términos de procesos cíclicos que se aproximan a su funcionamiento real.

Depósitos de calor y frío

Todas las máquinas térmicas *absorben* calor de una fuente a una temperatura relativamente alta, realizan un trabajo mecánico y *desechan* o *rechazan* algo de calor a una temperatura más baja. En lo que a la máquina concierne, el calor desechado se desperdicia. En los motores de combustión interna, este es el calor que se elimina en los gases de escape y en el sistema de enfriamiento; en una turbina de vapor, es el calor restante que sale del vapor usado para condensarlo y reciclar el agua.

Cuando un sistema realiza un proceso cíclico, sus energías internas inicial y final son las mismas. En todo proceso cíclico, la primera ley de la termodinámica establece que

$$U_2 - U_1 = 0 = Q - W \qquad \text{así que} \qquad Q = W$$

Es decir, el calor neto que fluye en la máquina en un proceso cíclico es igual al trabajo neto realizado por la máquina.

Al analizar máquinas térmicas, es útil considerar dos cuerpos con los cuales la sustancia de trabajo puede interactuar. Uno, llamado *depósito caliente*, representa la fuente de calor; proporciona a la sustancia de trabajo grandes cantidades de calor a temperatura constante T_H sin cambiar apreciablemente su propia temperatura. El otro

cuerpo, llamado *depósito frío*, puede absorber grandes cantidades del calor desechado por la máquina a una temperatura constante menor T_C. En un sistema de turbina de vapor, las flamas y los gases calientes de la caldera son el depósito caliente; y el agua fría y el aire empleados para condensar y enfriar el vapor usado constituyen el depósito frío.

Denotamos las cantidades de calor transferido de los depósitos caliente y frío como Q_H y Q_C, respectivamente. Una cantidad de calor Q es positiva cuando se transfiere *a* la sustancia de trabajo, y negativa si sale de dicha sustancia. Así, en una máquina térmica, Q_H es positivo pero Q_C es negativo, pues representa el calor *que sale* de la sustancia de trabajo. Esta convención de signos es congruente con las reglas establecidas en la sección 19.1, reglas que seguiremos usando aquí. Para efectos de claridad, las relaciones se definirán a menudo con valores absolutos de Q y W, porque los valores absolutos siempre son positivos.

Diagramas de flujo de energía y eficiencia

Podemos representar las transformaciones de energía en una máquina térmica con el *diagrama de flujo de energía* de la figura 20.3. La máquina en sí se representa con un círculo. El calor Q_H suministrado a la máquina por el depósito caliente es proporcional al ancho de la "tubería" de entrada en la parte superior del diagrama. El ancho de la tubería de salida en la parte inferior es proporcional a la magnitud $|Q_C|$ del calor cedido al depósito frío. El ramal de la derecha representa la porción del calor suministrado que la máquina convierte en trabajo mecánico, W.

Si una máquina repite el mismo ciclo una y otra vez, Q_H y Q_C representan el calor absorbido y cedido por la máquina *durante un ciclo*; Q_H es positivo, y Q_C, negativo. El calor *neto* Q absorbido por ciclo es

$$Q = Q_H + Q_C = |Q_H| - |Q_C| \qquad (20.1)$$

La salida útil de la máquina es el trabajo neto W efectuado por la sustancia de trabajo. De acuerdo con la primera ley,

$$W = Q = Q_H + Q_C = |Q_H| - |Q_C| \qquad (20.2)$$

Idealmente, nos gustaría convertir *todo* el calor Q_H en trabajo; en tal caso, tendríamos $Q_H = W$ y $Q_C = 0$. La experiencia muestra que esto es imposible; siempre se desperdicia algo de calor y Q_C *nunca es cero*. Definimos la **eficiencia térmica** de una máquina, denotada con e, como el cociente

$$e = \frac{W}{Q_H} \qquad (20.3)$$

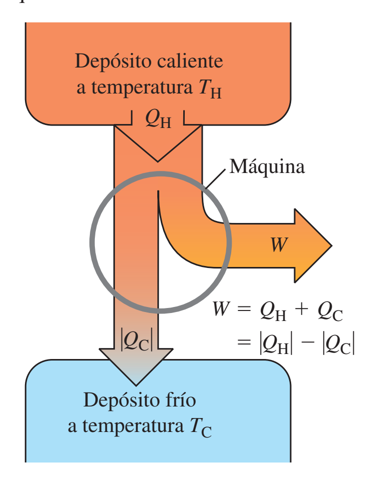
La eficiencia térmica e representa la fracción de Q_H que *se* convierte en trabajo. Dicho de otro modo, e es igual a lo que se obtiene dividido entre lo que se paga, y siempre es menor que 1: ¡una experiencia demasiado común! En términos del diagrama de flujo de la figura 20.3, la máquina más eficiente es aquella en la que el ramal que representa la salida de trabajo es lo más ancho posible, y la tubería de salida que representa el calor cedido es lo más angosta posible.

Si sustituimos las dos expresiones de W dadas por la ecuación (20.2) en la ecuación (20.3), obtenemos las siguientes expresiones equivalentes para e:

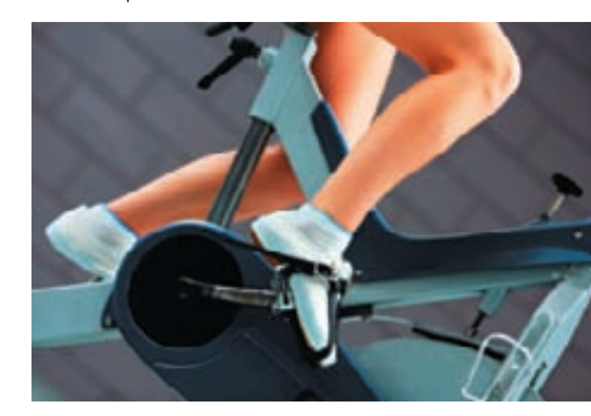
$$e = \frac{W}{Q_H} = 1 + \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \left|\frac{Q_C}{Q_H}\right| \quad \text{(eficiencia térmica de una máquina)} \qquad (20.4)$$

Observe que e es el cociente de dos cantidades de energía y, por lo tanto, es un número puro, sin unidades. Desde luego, siempre debemos expresar W, Q_H y Q_C en las mismas unidades.

20.3 Diagrama de flujo de energía de una máquina térmica.



Aplicación Eficiencia biológica
Aun cuando un organismo biológico no es una máquina térmica, el concepto de eficiencia también se aplica. En este caso, e es la razón de trabajo realizado entre la energía utilizada para efectuarlo. Al ejercitarse en una bicicleta estacionaria, su cuerpo debe convertir primero la energía de los enlaces químicos de la glucosa en trifosfato de adenosina (ATP), luego convertir la energía de este último en movimiento de los músculos de sus piernas y, finalmente, convertir el movimiento muscular en movimiento de los pedales. La eficiencia total de este proceso completo es del 25% aproximadamente. El 75% de energía restante liberada de la glucosa se convierte en calor en su cuerpo.



Estrategia para resolver problemas 20.1 Máquinas térmicas



Los problemas en que intervienen máquinas térmicas son, ante todo, problemas relacionados con la primera ley de la termodinámica. Por lo tanto, se debe revisar la Estrategia para resolver problemas 19.1 (sección 19.4).

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Una máquina térmica es cualquier dispositivo que convierte parcialmente calor en trabajo, como se muestra esquemáticamente en la figura 20.3. En la sección 20.4, veremos que un refrigerador es, en esencia, una máquina térmica que opera a la inversa, así que son válidos muchos de los mismos conceptos.

PLANTEAR *el problema* como se sugiere en la Estrategia para resolver problemas 19.1. Se usa la ecuación (20.4), si la eficiencia térmica de la máquina es importante. Dibuje un diagrama de flujo de energía como el de la figura 20.3.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Tenga mucho cuidado con las convenciones de signos para W y las diversas Q. W es positivo si el sistema se expande y efectúa trabajo, y negativo cuando se comprime y el trabajo se realiza sobre él. Q es positiva si representa calor que entra en el sistema y negativa si representa calor que sale del sistema. Si se sabe que una cantidad es negativa, como Q_C en el análisis anterior, es útil escribirla como $Q_C = -|Q_C|$.
2. La potencia es trabajo por unidad de tiempo ($P = W/t$), y la rapidez de transferencia de calor (corriente de calor) H es calor transferido por unidad de tiempo ($H = Q/t$). En los problemas que incluyen estos conceptos conviene preguntarse: "¿Cuál es W o Q en un segundo (o una hora)?".
3. Teniendo presentes los pasos 1 y 2, despeje las incógnitas.

EVALUAR *la respuesta:* Use la primera ley de la termodinámica para comprobar sus resultados, prestando especial atención a los signos algebraicos.

Ejemplo 20.1 Análisis de una máquina térmica

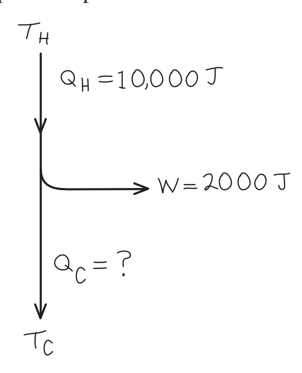


El motor de gasolina de un camión toma 10,000 J de calor y produce 2000 J de trabajo mecánico por ciclo. El calor se obtiene quemando gasolina, cuyo calor de combustión es $L_c = 5.0 \times 10^4$ J/g. *a*) Calcule la eficiencia térmica del motor. *b*) ¿Cuánto calor se desecha en cada ciclo? *c*) Si el motor realiza 25 ciclos por segundo, ¿qué potencia de salida desarrolla en watts y en hp? *d*) ¿Cuánta gasolina se quema en cada ciclo? *e*) ¿Cuánta gasolina se quema por segundo? ¿Y por hora?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El problema se refiere a una máquina térmica, de manera que podemos usar las ideas de esta sección. La figura 20.4 es el diagrama de flujo de energía para un ciclo. En cada ciclo el motor realiza $W = 2000$ J y toma $Q_H = 10,000$ J de calor. Por lo tanto, se usa la ecuación (20.4) en la forma $e = W/Q_H$ para obtener la eficiencia térmica. Se emplea la ecuación (20.2) para calcular la cantidad de calor Q_C cedida en el ciclo. El calor de combustión nos dice cuánta gasolina se quema por ciclo y, por lo tanto, por unidad de tiempo. La potencia de salida es la rapidez a la cual se realiza el trabajo W.

20.4 Diagrama para este problema.



EJECUTAR: *a*) Según la ecuación (20.4), la eficiencia térmica es

$$e = \frac{W}{Q_H} = \frac{2000\ \text{J}}{10{,}000\ \text{J}} = 0.20 = 20\%$$

b) De acuerdo con la ecuación (20.2), $W = Q_H + Q_C$, entonces

$$Q_C = W - Q_H = 2000\ \text{J} - 10{,}000\ \text{J} = -8000\ \text{J}$$

Es decir, 8000 J de calor salen del motor en cada ciclo.

c) La potencia P es el trabajo por ciclo multiplicado por el número de ciclos por segundo:

$$P = (2000\ \text{J/ciclo})(25\ \text{ciclos/s}) = 50{,}000\ \text{W} = 50\ \text{kW}$$

$$= (50{,}000\ \text{W})\frac{1\ \text{hp}}{746\ \text{W}} = 67\ \text{hp}$$

d) Sea m la masa de gasolina quemada en cada ciclo. Entonces, $Q_H = mL_c$ y

$$m = \frac{Q_H}{L_c} = \frac{10{,}000\ \text{J}}{5.0 \times 10^4\ \text{J/g}} = 0.20\ \text{g}$$

e) La masa de gasolina quemada por segundo es la masa por ciclo multiplicada por el número de ciclos por segundo:

$$(0.20\ \text{g/ciclo})(25\ \text{ciclos/s}) = 5.0\ \text{g/s}$$

La masa quemada por hora es

$$(5.0\ \text{g/s})\frac{3600\ \text{s}}{1\ \text{h}} = 18{,}000\ \text{g/h} = 18\ \text{kg/h}$$

EVALUAR: Una eficiencia del 20% es bastante común en automóviles y camiones si W incluye solo el trabajo suministrado a las ruedas. Podemos verificar la masa quemada por hora expresándola en millas por galón ("kilometraje"). La densidad de la gasolina es de cerca de 0.70 g/cm^3, así que esto es aproximadamente 25,700 cm^3, 25.7 L o 6.8 galones de gasolina por hora. Si el camión viaja a 55 mi/h (88 km/h), esto representa un consumo de combustible de 8.1 millas/galón (3.4 km/L). Este es un kilometraje bastante típico de los camiones grandes.

Evalúe su comprensión de la sección 20.2 Ordene en forma decreciente las siguientes máquinas térmicas, según su eficiencia térmica. **i.** Una máquina en la que en un ciclo absorbe 5000 J de calor y cede 4500 J de calor; **ii.** una máquina que en un ciclo absorbe 25,000 J de calor y realiza 2000 J de trabajo; **iii.** una máquina que en un ciclo realiza 400 J de trabajo y cede 2800 J de calor.



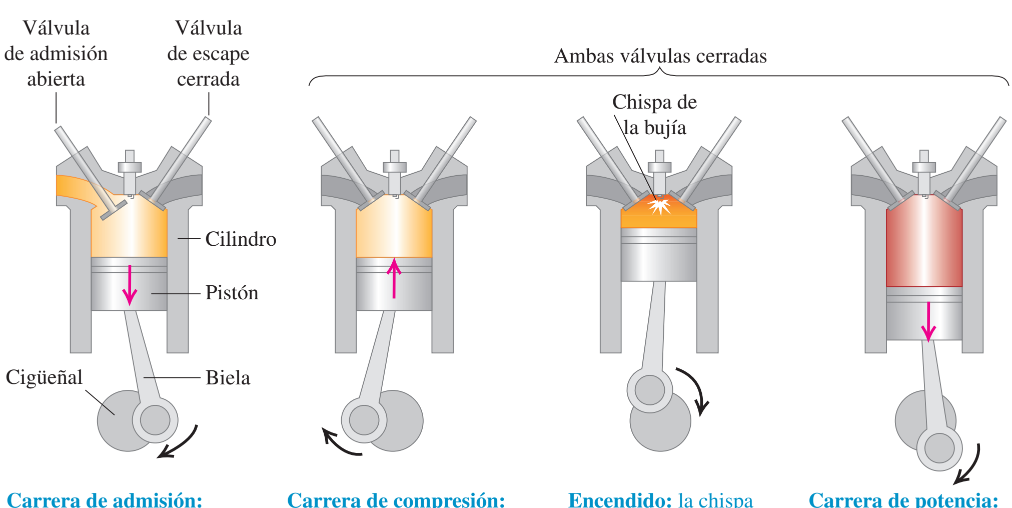
20.3 Motores de combustión interna

El motor de gasolina, empleado en automóviles y muchos otros tipos de maquinaria, es un ejemplo común de máquina térmica. Examinemos su eficiencia térmica. La figura 20.5 muestra el funcionamiento de un tipo de motor de gasolina. Primero, una mezcla de aire y vapor de gasolina fluye al interior de un cilindro por una válvula de admisión abierta mientras el pistón desciende, aumentando el volumen del cilindro desde un mínimo V (cuando el pistón está arriba) hasta un máximo rV (cuando está abajo). La cantidad r se llama **razón de compresión**; en los motores de automóviles modernos, r suele estar entre 8 y 10. Al final de esta *carrera de admisión*, la válvula de admisión se cierra y la mezcla se comprime, de forma aproximadamente adiabática, a un volumen V durante la *carrera de compresión*. Luego, la bujía enciende la mezcla y el gas caliente se expande, de forma aproximadamente adiabática, otra vez al volumen rV, empujando el pistón y efectuando trabajo; esta es la *carrera de potencia*. Por último, se abre la válvula de escape y se expulsan los productos de la combustión (*carrera de escape*) dejando el cilindro listo para la siguiente carrera de admisión.

Ciclo Otto

La figura 20.6 es un diagrama pV de un modelo idealizado de los procesos termodinámicos en un motor de gasolina. Este modelo se llama **ciclo Otto**. En el punto a, la mezcla aire-gasolina ya entró en el cilindro. La mezcla se comprime adiabáticamente hasta el punto b y se enciende. Al quemarse, la gasolina agrega calor Q_H al sistema, siguiendo la línea bc, y la carrera de potencia es la expansión adiabática al punto d. El gas se enfría a la temperatura del aire exterior a lo largo de la línea da, expulsando calor $|Q_C|$. Este gas sale del motor como escape y no vuelve a entrar en él, pero, como entra una cantidad de aire y gasolina equivalente, podemos considerar que el proceso es cíclico.

20.5 Ciclo de un motor de combustión interna de cuatro tiempos.



Carrera de admisión: el pistón baja, creando un vacío parcial en el cilindro; una mezcla aire-gasolina entra en el cilindro por la válvula de admisión abierta.

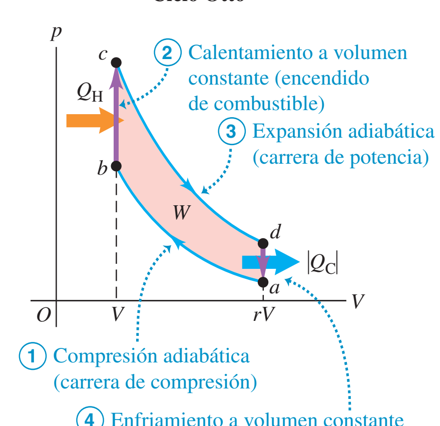
Carrera de compresión: la válvula de admisión se cierra y la mezcla se comprime conforme el pistón sube.

Encendido: la chispa de la bujía enciende la mezcla.

Carrera de potencia: la mezcla quemada se expande y empuja el pistón hacia abajo.

Carrera de escape: la válvula de escape se abre y el pistón sube, expulsando la mezcla quemada hacia afuera del cilindro, dejándolo listo para la siguiente carrera de admisión.

20.6 Diagrama pV del ciclo Otto, un modelo idealizado de los procesos termodinámicos de un motor de gasolina.



Podemos calcular la eficiencia de este ciclo idealizado. Los procesos bc y da son a volumen constante, así que Q_H y Q_C tienen una relación simple con las temperaturas:

$$Q_H = nC_V(T_c - T_b) > 0$$
$$Q_C = nC_V(T_a - T_d) < 0$$

La eficiencia térmica está dada por la ecuación (20.4). Insertando las expresiones anteriores y cancelando el factor común nC_V, obtenemos

$$e = \frac{Q_H + Q_C}{Q_H} = \frac{T_c - T_b + T_a - T_d}{T_c - T_b} \tag{20.5}$$

Para simplificar más esto, usamos la relación temperatura-volumen para procesos adiabáticos de un gas ideal, ecuación (19.22). Para los dos procesos adiabáticos ab y cd,

$$T_a(rV)^{\gamma-1} = T_b V^{\gamma-1} \qquad \text{y} \qquad T_d(rV)^{\gamma-1} = T_c V^{\gamma-1}$$

Dividimos ambas ecuaciones entre el factor común $V^{\gamma-1}$ y sustituimos las expresiones resultantes para T_b y T_c de nuevo en la ecuación (20.5). El resultado es

$$e = \frac{T_d r^{\gamma-1} - T_a r^{\gamma-1} + T_a - T_d}{T_d r^{\gamma-1} - T_a r^{\gamma-1}} = \frac{(T_d - T_a)(r^{\gamma-1} - 1)}{(T_d - T_a)r^{\gamma-1}}$$

Eliminando por división el factor común $(T_d - T_a)$, obtenemos

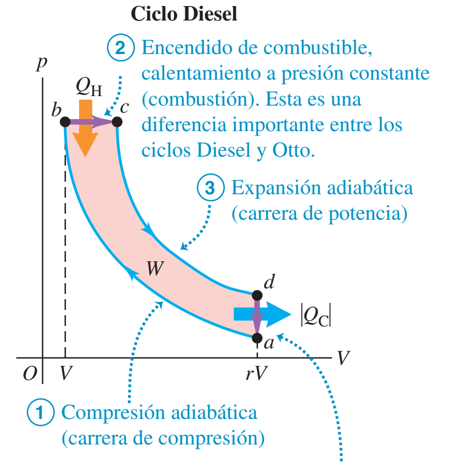
$$e = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \qquad \text{(eficiencia térmica en el ciclo Otto)} \tag{20.6}$$

La eficiencia térmica dada por la ecuación (20.6) siempre es menor que 1, aun para este modelo idealizado. Si $r = 8$ y $\gamma = 1.4$ (el valor para el aire) la eficiencia teórica es $e = 0.56$, es decir, 56%. La eficiencia puede aumentarse incrementando r; sin embargo, esto también aumenta la temperatura al final de la compresión adiabática de la mezcla aire-combustible. Cuando la temperatura es excesiva, la mezcla explota espontáneamente durante la compresión, en lugar de quemarse de manera uniforme después de que la bujía la enciende. Esto se llama *preignicion* o *detonación*; causa un golpeteo y puede dañar el motor. El octanaje de una gasolina es una medida de sus cualidades antidetonantes. La razón de compresión práctica máxima para gasolina de alto octanaje ("premium") es de aproximadamente 10 a 13.

El ciclo Otto es un modelo muy idealizado; supone que la mezcla se comporta como un gas ideal, no toma en cuenta fricción, turbulencia, pérdida de calor en las paredes del cilindro ni muchos otros efectos que reducen la eficiencia de un motor. Las eficiencias de los motores de gasolina reales suelen ser del orden del 35 por ciento.

20.7 Diagrama pV del ciclo Diesel idealizado.





Ciclo Diesel

La operación del motor diesel es similar a la del motor de gasolina. La diferencia más importante es que no hay combustible en el cilindro al principio de la carrera de compresión. Un poco antes de iniciar la carrera de potencia, los inyectores comienzan a inyectar combustible directamente al cilindro, con la rapidez justa para mantener la presión casi constante durante la primera parte de la carrera de potencia. Debido a la elevada temperatura alcanzada durante la compresión adiabática, el combustible se enciende espontáneamente al inyectarse; no se requiere ninguna chispa.

El **ciclo Diesel** idealizado se muestra en la figura 20.7. Comenzando en el punto a, el aire se comprime adiabáticamente hasta el punto b, se calienta a presión constante hasta el punto c, se expande adiabáticamente hasta el punto d y se enfría a volumen constante hasta el punto a. Como no hay combustible en el cilindro durante la mayor parte de la carrera de compresión, no puede haber preignición, y la razón de compresión r puede ser mucho mayor que en un motor de gasolina. Esto mejora la eficiencia

y asegura un encendido confiable al inyectarse el combustible (por la alta temperatura alcanzada durante la compresión adiabática). Son comunes valores de r de 15 a 20; con estos valores y $\gamma = 1.4$, la eficiencia teórica del ciclo Diesel idealizado es de 0.65 a 0.70. Como en el ciclo Otto, la eficiencia de un motor real es mucho menor. Si bien los motores diesel son muy eficientes, deben construirse con tolerancias mucho más estrictas que los motores de gasolina, y el sistema de inyección de combustible requiere un mantenimiento cuidadoso.

Evalúe su comprensión de la sección 20.3 Para un motor de ciclo Otto con cilindros de tamaño fijo y razón de compresión constante, ¿cuál de los siguientes aspectos del diagrama pV de la figura 20.6 cambiarían, al duplicarse la cantidad de combustible quemado por ciclo? (Tal vez haya más de una respuesta correcta). **i.** La distancia vertical entre los puntos b y c; **ii.** la distancia vertical entre los puntos a y d; **iii.** la distancia horizontal entre los puntos b y a.



20.4 Refrigeradores

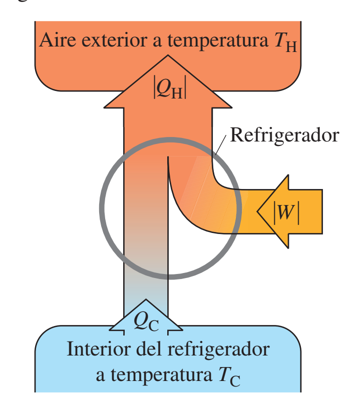
Podemos visualizar un **refrigerador** como una máquina térmica que opera en forma inversa. Una máquina térmica toma calor de un lugar caliente y cede calor a un lugar más frío. Un refrigerador hace lo contrario; toma calor de un lugar frío (el interior del refrigerador) y cede calor a un lugar más caliente (generalmente al aire del sitio donde está el refrigerador). Una máquina térmica tiene una *salida* neta de trabajo mecánico; el refrigerador requiere de una *entrada* neta de trabajo mecánico. Aplicando las convenciones de signo de la sección 20.2 para un refrigerador, Q_C es positivo, pero tanto W como Q_H son negativos, de modo que $|W| = -W$ y $|Q_H| = -Q_H$.

La figura 20.8 muestra un diagrama de flujo de energía de un refrigerador. Por la primera ley para un proceso cíclico,

$$Q_H + Q_C - W = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad -Q_H = Q_C - W$$

es decir, como Q_H y W son negativos,

$$|Q_H| = Q_C + |W| \tag{20.7}$$



20.8 Diagrama de flujo de energía de un refrigerador.

Como muestra el diagrama, el calor $|Q_H|$ que sale de la sustancia de trabajo y entra al depósito caliente siempre es *mayor* que el calor Q_C tomado del depósito frío. Observe que la relación de valor absoluto

$$|Q_H| = |Q_C| + |W| \tag{20.8}$$

es válida tanto para máquinas térmicas como para refrigeradores.

Desde un punto de vista económico, el mejor ciclo de refrigeración es el que saca la cantidad máxima de calor $|Q_C|$ del refrigerador, con el menor gasto de trabajo mecánico, $|W|$. Por lo tanto, la razón relevante es $|Q_C|/|W|$; cuanto mayor sea dicha razón, mejor será el refrigerador. Llamamos a esta razón **coeficiente de rendimiento**, denotado con K. Por la ecuación (20.8), $|W| = |Q_H| - |Q_C|$, así que

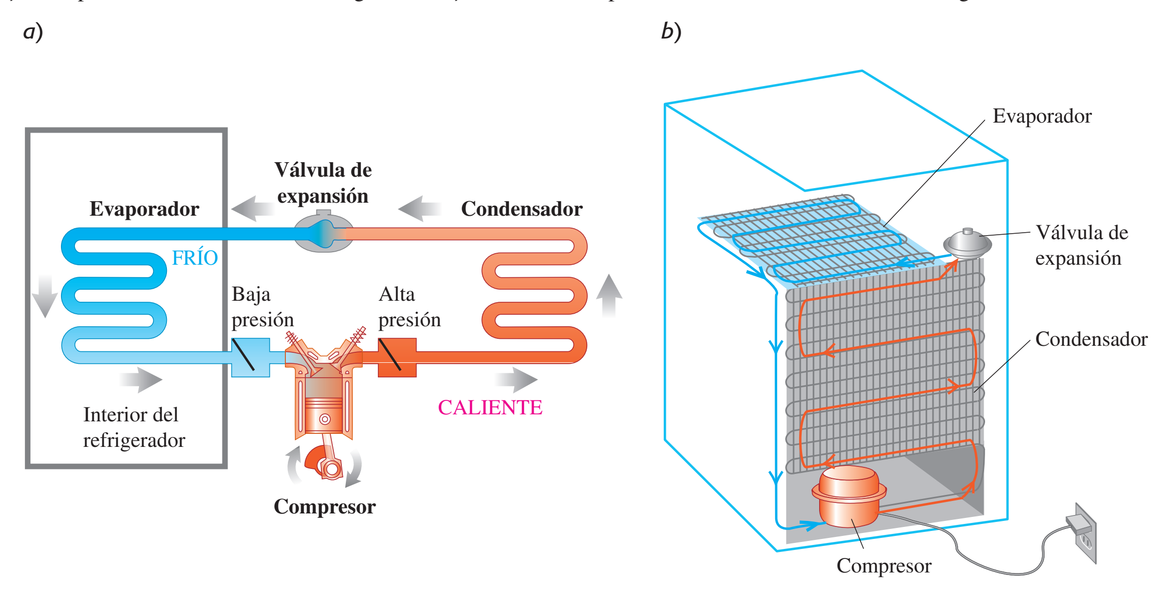
$$K = \frac{|Q_C|}{|W|} = \frac{|Q_C|}{|Q_H| - |Q_C|} \qquad \text{(coeficiente de rendimiento de un refrigerador)} \tag{20.9}$$

Como siempre, medimos Q_H, Q_C y W en las mismas unidades de energía; K es entonces un número adimensional.

Refrigeradores domésticos

En la figura 20.9*a* se muestran esquemáticamente los fundamentos del ciclo de refrigeración común. El "circuito" contiene un fluido refrigerante (la sustancia de trabajo). El lado izquierdo del circuito (que incluye los serpentines de enfriamiento dentro del refrigerador) está a baja temperatura y baja presión; el lado derecho (que incluye los serpentines de condensación fuera del refrigerador) tiene alta temperatura y alta presión. Por lo regular, ambos lados contienen líquido y vapor en equilibrio de fases.

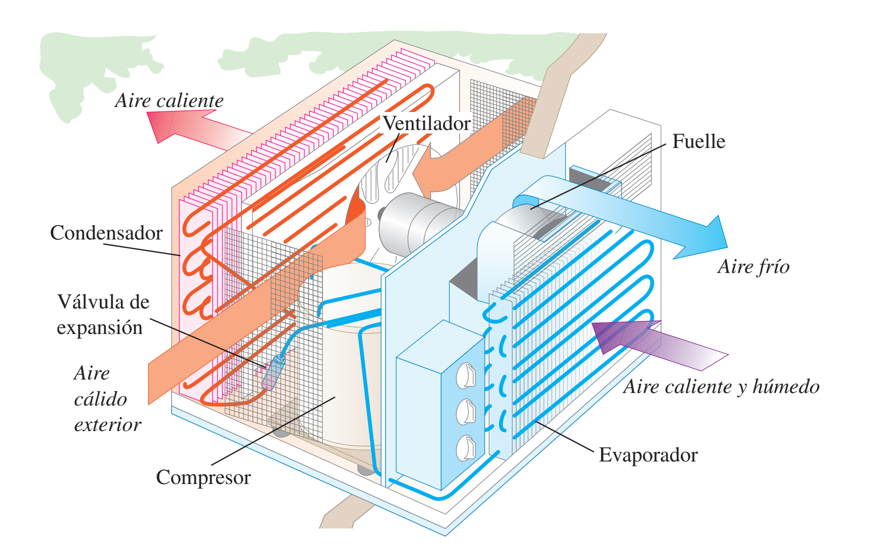
20.9 *a*) Principio del ciclo mecánico de refrigeración. *b*) Cómo están dispuestos los elementos clave en un refrigerador doméstico.



El compresor admite fluido, lo comprime adiabáticamente y lo alimenta al condensador a alta presión. De esta manera, la temperatura del fluido es mayor que la del aire que rodea el condensador, por lo que el refrigerante cede el calor $|Q_H|$ y se condensa parcialmente en líquido. Luego, el fluido se expande adiabáticamente dentro del evaporador con una rapidez controlada por la válvula de expansión. Al expandirse, el fluido se enfría considerablemente, a tal grado que está más frío que el entorno del evaporador. El fluido absorbe calor $|Q_C|$ de sus alrededores, enfriándolo y vaporizándose parcialmente. A continuación, el fluido pasa al compresor para iniciar otro ciclo. El compresor, usualmente impulsado por un motor eléctrico (figura 20.9*b*), requiere aporte de energía y realiza trabajo $|W|$ *sobre* la sustancia de trabajo durante cada ciclo.

Los acondicionadores de aire operan exactamente con el mismo principio. En este caso, la caja del refrigerador es una habitación o todo un edificio. Los serpentines del evaporador están adentro, el condensador está afuera, y los ventiladores recirculan aire por ellos (figura 20.10). En instalaciones grandes, los serpentines del condensador a menudo se enfrían con agua. En los acondicionadores de aire, las cantidades de mayor importancia práctica son la *rapidez* de remoción de calor (la corriente de calor H de la región que está siendo enfriada) y la *potencia* de entrada $P = W/t$ al compresor. Si se

20.10 Un acondicionador de aire funciona con el mismo principio de un refrigerador.



extrae un calor $|Q_C|$ en un tiempo t, entonces $H = |Q_C|/t$, y podemos expresar el coeficiente de rendimiento como

$$K = \frac{|Q_C|}{|W|} = \frac{Ht}{Pt} = \frac{H}{P}$$

Los acondicionadores de aire comunes domésticos tienen rapideces de remoción de calor H de 5000 a 10,000 Btu/h, es decir, de 1500 a 3000 W aproximadamente, y requieren de una potencia eléctrica de entrada de 600 a 1200 W más o menos. Los coeficientes de rendimiento son del orden de 3; los valores reales dependen de las temperaturas interior y exterior.

Una variación sobre este tema es la **bomba de calor**, empleada para calentar edificios al enfriar el aire exterior. La bomba funciona como un refrigerador al revés. Los serpentines del evaporador están afuera, donde toman calor del aire frío, y los del condensador están adentro, donde ceden calor al aire más caliente. Con un diseño adecuado, el calor $|Q_H|$ suministrado al interior cada ciclo puede ser mucho mayor que el trabajo $|W|$ necesario para llevarlo ahí.

Siempre se necesita trabajo para transferir calor de un cuerpo más frío a uno más caliente. El calor fluye espontáneamente en el otro sentido, y para revertir el flujo, se requiere trabajo del exterior. La experiencia muestra que es imposible hacer un refrigerador que transporte calor de un cuerpo más frío a uno más caliente sin agregar trabajo. Si no se necesitara trabajo, el coeficiente de rendimiento sería infinito. Este dispositivo que se conoce como *refrigerador sin trabajo* es un mito, como el unicornio y las comidas gratuitas.

Evalúe su comprensión de la sección 20.4 ¿Es posible enfriar una casa dejando abierta la puerta del refrigerador?

20.5 Segunda ley de la termodinámica

Las pruebas experimentales sugieren que es *imposible* construir una máquina térmica que convierta calor totalmente en trabajo, es decir, una máquina con una eficiencia térmica del 100%. Esta imposibilidad es la base del siguiente enunciado de la **segunda ley de la termodinámica**:

Es imposible que un sistema efectúe un proceso en el que absorba calor de un depósito de temperatura uniforme y lo convierta totalmente en trabajo mecánico, terminando en el mismo estado en que inició.

Llamaremos a este el enunciado de la segunda ley de la "maquina". (Los físicos también lo llaman *enunciado de Kelvin-Planck*).

El fundamento de la segunda ley de la termodinámica es la diferencia entre la naturaleza de la energía interna y la de la energía mecánica macroscópica. En un cuerpo que se mueve, las moléculas tienen un movimiento aleatorio, al que se superpone un movimiento coordinado de todas las moléculas en la dirección de la velocidad del cuerpo. La energía cinética asociada a este movimiento macroscópico *coordinado* es lo que llamamos energía cinética del cuerpo en movimiento. Las energías cinéticas y potenciales asociadas al movimiento *aleatorio* constituyen la energía interna.

Si un cuerpo que se desliza sobre una superficie se detiene a causa de la fricción, el movimiento organizado del cuerpo se convierte en movimiento aleatorio de las moléculas del cuerpo y de la superficie. Como no podemos controlar los movimientos de moléculas individuales, es imposible convertir todo este movimiento aleatorio otra vez en movimiento organizado. Podemos convertir *una parte*, y esto es lo que hace la máquina térmica.

Si la segunda ley *no* se cumpliera, podríamos impulsar un automóvil u operar una planta de electricidad enfriando el aire circundante. Ninguna de estas imposibilidades viola la *primera* ley de la termodinámica. La segunda, por lo tanto, no se deduce de la primera; más bien es una ley natural independiente. La primera ley niega la posibilidad de crear o destruir energía; la segunda limita la *disponibilidad* de la energía y las formas en que puede usarse y convertirse.

Replanteamiento de la segunda ley

El análisis de los refrigeradores de la sección 20.4 es la base de un planteamiento alternativo de la segunda ley de la termodinámica. El calor fluye espontáneamente de los cuerpos más calientes a los más fríos, nunca a la inversa. Un refrigerador lleva calor de un cuerpo más frío a uno más caliente, aunque para funcionar requiere un aporte de energía mecánica o trabajo. Generalizando esta observación, decimos:

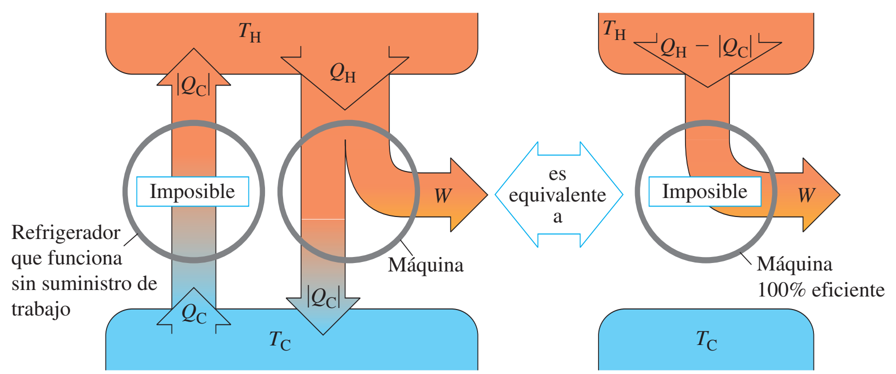
Es imposible que un proceso tenga como único resultado la transferencia de calor de un cuerpo más frío a uno más caliente.

Llamamos a este el enunciado de la segunda ley del "refrigerador". (También se conoce como *enunciado de Clausius*). Tal vez no parezca muy relacionado con el enunciado de la "máquina"; pero en realidad son totalmente equivalentes. Por ejemplo, si pudiéramos construir un refrigerador sin trabajo, violando el enunciado de la segunda ley del "refrigerador", podríamos usarlo junto con una máquina térmica, bombeando el calor rechazado por la máquina de vuelta al depósito caliente para reutilizarlo. Esta máquina compuesta (figura 20.11*a*) violaría el planteamiento de la "máquina" de la segunda ley, porque su efecto neto sería tomar una cantidad neta de calor $Q_H - |Q_C|$ del depósito caliente y transformarlo totalmente en trabajo W.

Alternativamente, si pudiéramos crear una máquina con una eficiencia térmica del 100%, violando el primer enunciado, podríamos operarla tomando calor del depósito caliente y usar el trabajo producido para operar un refrigerador que extraiga calor del depósito frío al caliente (figura 20.11*b*). Este dispositivo compuesto violaría el enunciado del "refrigerador", porque su efecto neto sería tomar un calor Q_C del depósito

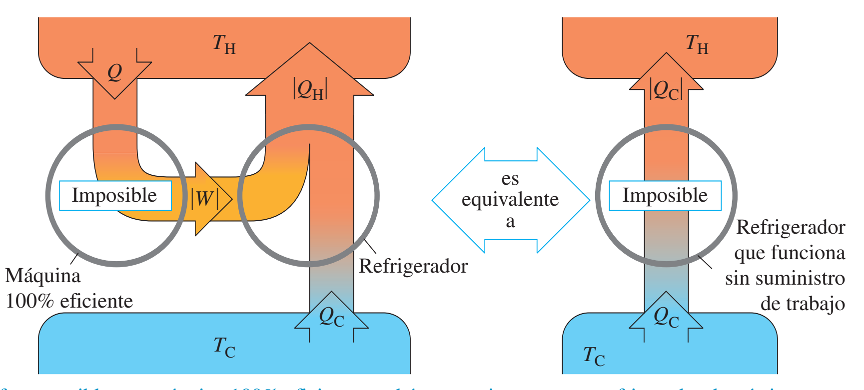
20.11 Diagramas de flujo de energía que muestran que las dos formas de la segunda ley son equivalentes.

a) Enunciado de la segunda ley de la termodinámica de la "máquina"



Si fuera posible que un refrigerador funcionara sin suministro de trabajo, podría usarse junto con una máquina térmica ordinaria para crear una máquina 100% eficiente, convirtiendo el calor $Q_H - |Q_C|$ completamente en trabajo.

b) Enunciado de la segunda ley de la termodinámica del "refrigerador"



Si fuera posible una máquina 100% eficiente, podría usarse junto con un refrigerador doméstico para crear un refrigerador que funcionara sin suministro de trabajo, transfiriendo el calor Q_C del depósito frío al caliente sin aporte de trabajo.

frío y llevarlo al caliente, sin necesidad de aporte de trabajo. Así, cualquier dispositivo que viole una forma de la segunda ley puede servir para construir un dispositivo que viole la otra forma. Si es imposible violar la primera forma, ¡también lo es la violación de la segunda!

Tanto la conversión de trabajo en calor como el flujo de calor de caliente a frío a través de un gradiente de temperatura finito son procesos *irreversibles*. Los planteamientos de "máquina" y "refrigerador" de la segunda ley establecen que tales procesos solo pueden revertirse parcialmente. Podríamos citar otros ejemplos. Los gases siempre fluyen espontáneamente de una región de alta presión a una de baja presión; los gases y líquidos miscibles sin perturbación siempre tienden a mezclarse, no a separarse. La segunda ley de la termodinámica es una expresión del aspecto inherentemente unidireccional de estos y muchos otros procesos irreversibles. La conversión de energía es un aspecto esencial en la vida de plantas y animales, y también de la tecnología, así que la segunda ley de la termodinámica tiene una importancia fundamental.

Evalúe la comprensión de la sección 20.5 ¿Una máquina 100% eficiente (figura 20.11*a*) violaría la *primera* ley de la termodinámica? ¿Y un refrigerador sin suministro de trabajo (figura 20.11*b*)? ❙

20.6 Ciclo de Carnot

De acuerdo con la segunda ley, ninguna máquina térmica puede tener una eficiencia del 100%. ¿Qué tanta eficiencia *puede* tener una máquina, dados dos depósitos de calor a temperaturas T_H y T_C? El ingeniero francés Sadi Carnot (1796-1832) contestó esta pregunta en 1824, cuando desarrolló una máquina térmica idealizada hipotética con la máxima eficiencia posible, congruente con la segunda ley. El ciclo de esta máquina se denomina **ciclo de Carnot**.

Para entender la lógica del ciclo de Carnot, volvamos a la *reversibilidad* y su relación con la dirección de los procesos termodinámicos. La conversión de trabajo en calor es un proceso irreversible; el objetivo de una máquina térmica es una reversión *parcial* de este proceso, la conversión de calor en trabajo con la máxima eficiencia posible. Entonces, para lograrlo, *debemos eliminar todos los procesos irreversibles* (figura 20.12).

20.12 La temperatura de la cámara de combustión de una máquina de vapor es mucho mayor que la temperatura del agua en la caldera, así que el calor fluye irreversiblemente de la cámara de combustión al agua. La búsqueda de Carnot para entender la eficiencia de las máquinas de vapor lo llevó a la idea de que una máquina ideal implicaría solo procesos *reversibles*.



El *flujo de calor* a través de una disminución finita de temperatura es un proceso irreversible. Por lo tanto, durante la transferencia de calor en el ciclo de Carnot, *no* debe haber una diferencia finita de temperatura. Cuando la máquina toma calor del depósito caliente a temperatura T_H, la sustancia de trabajo de la máquina también debe estar a T_H; si no, habría un flujo de calor irreversible. Asimismo, cuando la máquina cede calor al depósito frío a T_C, la máquina misma debe estar a T_C. Es decir, todo proceso que implique transferencia de calor debe ser *isotérmico* ya sea a T_H o a T_C.

Por otro lado, en cualquier proceso en el que la temperatura de la sustancia de trabajo de la máquina sea intermedia entre T_H y T_C, *no* deberá haber transferencia de calor entre la máquina y cualquiera de los depósitos, ya que no podría ser reversible. Por lo tanto, cualquier proceso en el que cambia la temperatura T de la sustancia de trabajo deberá ser *adiabático*.

Lo crucial es que todo proceso de nuestro ciclo idealizado sea isotérmico, o bien, adiabático. Además, se debe mantener el equilibrio térmico y mecánico en todo momento para que cada proceso sea totalmente reversible.

Pasos del ciclo de Carnot



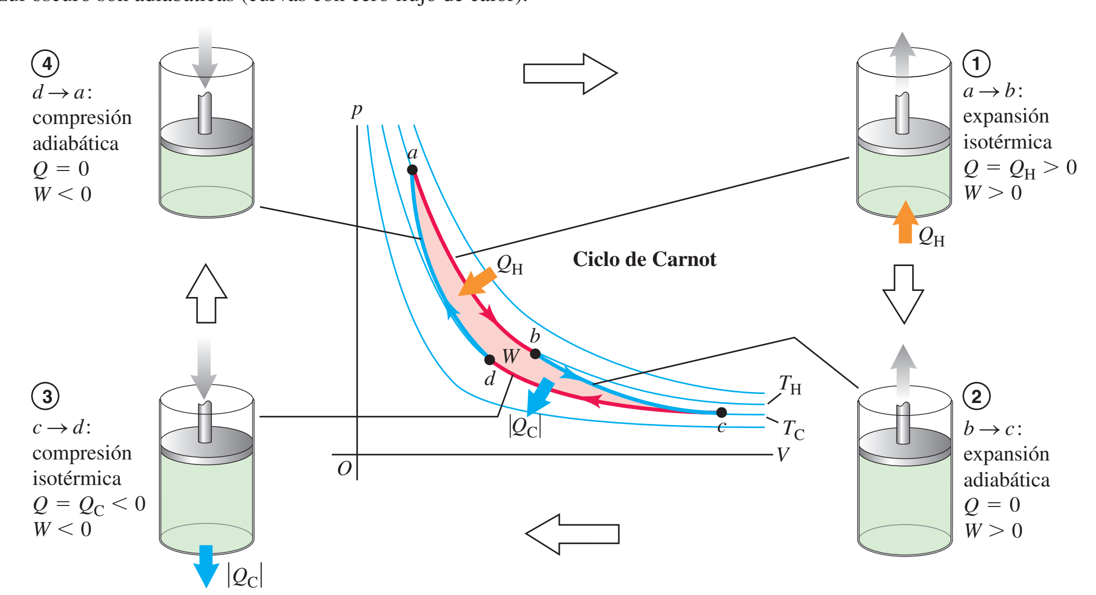
ActivPhysics 8.14: Carnot Cycle

El ciclo de Carnot consiste en dos procesos isotérmicos y dos adiabáticos, todos reversibles. La figura 20.13 muestra un ciclo de Carnot que emplea como sustancia de trabajo un gas ideal en un cilindro con un pistón, y consta de los siguientes pasos:

1. El gas se expande isotérmicamente a temperatura T_H, absorbiendo calor Q_H (*ab*).
2. El gas se expande adiabáticamente hasta que su temperatura disminuye a T_C (*bc*).
3. El gas se comprime isotérmicamente a T_C, cediendo calor $|Q_C|$ (*cd*).
4. El gas se comprime adiabáticamente hasta su estado inicial a temperatura T_H (*da*).

20.13 Ciclo de Carnot para un gas ideal. Las líneas azul claro del diagrama pV son isotermas (curvas de temperatura constante); las líneas azul oscuro son adiabáticas (curvas con cero flujo de calor).





Se puede calcular la eficiencia térmica e de una máquina de Carnot en el caso especial mostrado en la figura 20.13, donde la sustancia de trabajo es un *gas ideal*. Para realizar este cálculo, primero se obtiene la relación Q_C/Q_H de las cantidades de calor transferidas en los dos procesos isotérmicos, y luego se usa la ecuación (20.4) para calcular e.

La energía interna U de un gas ideal depende solo de la temperatura y, por lo tanto, es constante en cualquier proceso isotérmico. Para la expansión isotérmica ab, $\Delta U_{ab} = 0$, y Q_H es igual al trabajo W_{ab} realizado por el gas durante su expansión isotérmica a temperatura T_H. Ya calculamos este trabajo en el ejemplo 19.1 (sección 19.2); usando este resultado, tenemos

$$Q_H = W_{ab} = nRT_H \ln \frac{V_b}{V_a} \tag{20.10}$$

De forma similar,

$$Q_C = W_{cd} = nRT_C \ln \frac{V_d}{V_c} = -nRT_C \ln \frac{V_c}{V_d} \tag{20.11}$$

Puesto que V_d es menor que V_c, Q_C es negativo ($Q_C = -|Q_C|$); el gas cede calor durante la compresión isotérmica a temperatura T_C.

El cociente de las dos cantidades de calor es entonces

$$\frac{Q_C}{Q_H} = -\left(\frac{T_C}{T_H}\right)\frac{\ln(V_c/V_d)}{\ln(V_b/V_a)} \tag{20.12}$$

Esto puede simplificarse aún más usando la relación temperatura-volumen para un proceso adiabático, ecuación (19.22). Para los dos procesos adiabáticos, obtenemos:

$$T_H V_b^{\gamma-1} = T_C V_c^{\gamma-1} \quad \text{y} \quad T_H V_a^{\gamma-1} = T_C V_d^{\gamma-1}$$

Dividiendo la primera expresión entre la segunda, tenemos:

$$\frac{V_b^{\gamma-1}}{V_a^{\gamma-1}} = \frac{V_c^{\gamma-1}}{V_d^{\gamma-1}} \quad \text{y} \quad \frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}$$

Por lo tanto, los dos logaritmos de la ecuación (20.12) son iguales, y esa ecuación se reduce a

$$\frac{Q_C}{Q_H} = -\frac{T_C}{T_H} \quad \text{o bien,} \quad \frac{|Q_C|}{|Q_H|} = \frac{T_C}{T_H} \quad \text{(transferencia de calor en una máquina de Carnot)} \tag{20.13}$$

El cociente entre el calor cedido a T_C y el absorbido a T_H es igual al cociente T_C/T_H. Entonces, por la ecuación (20.4), la eficiencia de la máquina de Carnot es

$$e_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_C}{T_H} = \frac{T_H - T_C}{T_H} \quad \text{(eficiencia de una máquina de Carnot)} \tag{20.14}$$

Este sencillo resultado indica que la eficiencia de una máquina de Carnot solo depende de las temperaturas de los dos depósitos de calor; es grande si la *diferencia* de temperaturas es grande, y muy pequeña cuando las temperaturas son casi iguales. La eficiencia nunca puede ser exactamente 1, a menos que $T_C = 0$; más adelante veremos que esto también es imposible.

CUIDADO **Use temperaturas Kelvin en los cálculos de Carnot** En todos los cálculos del ciclo de Carnot asegúrese de usar solo temperaturas *absolutas* (Kelvin), porque las ecuaciones (20.10) a (20.14) provienen de la ecuación del gas ideal $pV = nRT$, en la que T es la temperatura absoluta.



Ejemplo 20.2 Análisis de una máquina de Carnot I

Una máquina de Carnot absorbe 2000 J de calor de un depósito a 500 K, realiza trabajo, y cede calor a un depósito a 350 K. ¿Cuánto trabajo efectúa, cuánto calor cede y qué eficiencia tiene?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema está relacionado con una máquina de Carnot, así que podemos usar las ideas de esta sección y las de la sección 20.2 (que se aplican a las máquinas térmicas de todas clases). La figura 20.14 muestra el diagrama de flujo de energía. Nos dan $Q_H = 2000$ J, $T_H = 500$ K y $T_C = 350$ K. Usamos la ecuación (20.13) para calcular Q_C, y luego la primera ley de la termodinámica dada por la ecuación (20.2) para calcular W. La eficiencia e se calcula a partir de T_C y T_H usando la ecuación (20.14).

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (20.13),

$$Q_C = -Q_H\frac{T_C}{T_H} = -(2000\ \text{J})\frac{350\ \text{K}}{500\ \text{K}} = -1400\ \text{J}$$

Luego, según la ecuación (20.2), el trabajo realizado es

$$W = Q_H + Q_C = 2000\ \text{J} + (-1400\ \text{J}) = 600\ \text{J}$$

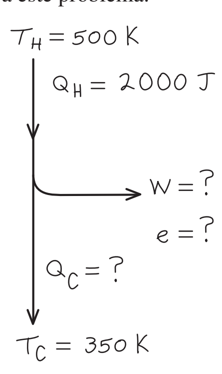
Por la ecuación (20.14), la eficiencia térmica es

$$e = 1 - \frac{T_C}{T_H} = 1 - \frac{350\ \text{K}}{500\ \text{K}} = 0.30 = 30\%$$

EVALUAR: El signo negativo de Q_C es correcto: indica que 1400 J de calor *salen* de la máquina hacia el depósito frío. Podemos comprobar nuestro resultado para e utilizando la definición básica de eficiencia térmica, la ecuación (20.3):

$$e = \frac{W}{Q_H} = \frac{600\ \text{J}}{2000\ \text{J}} = 0.30 = 30\%$$

20.14 Diagrama para este problema.





Ejemplo 20.3 Análisis de una máquina de Carnot II

Suponga que 0.200 moles de un gas ideal diatómico ($\gamma = 1.40$) efectúa un ciclo de Carnot entre 227 y 27°C, partiendo de $p_a = 10.0 \times 10^5$ Pa en el punto a en el diagrama pV de la figura 20.13. El volumen se duplica, durante la expansión isotérmica $a \rightarrow b$. *a*) Calcule la presión y el volumen en los puntos a, b, c y d. *b*) Calcule Q, W y ΔU para cada paso y para todo el ciclo. *c*) Determine la eficiencia directamente de los resultados del inciso *b*) y compárela con el resultado de la ecuación (20.14).

Continúa

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En este problema intervienen las propiedades del ciclo de Carnot y las de un gas ideal. Nos dan el número n de moles y la presión y temperatura en el punto a (que es la más alta de las temperaturas de los dos depósitos), así que podremos calcular el volumen en a utilizando la ecuación del gas ideal $pV = nRT$. Después, obtendremos la presión y el volumen en los puntos b, c y d sabiendo que el volumen se duplica de $a \rightarrow b$, utilizando tanto las ecuaciones dadas en esta sección como $pV = nRT$. Después, para cada paso del ciclo, usaremos las ecuaciones (20.10) y (20.11) para obtener el flujo de calor y el trabajo efectuado, y la ecuación (19.13) para calcular el cambio de energía interna.

EJECUTAR: *a*) Con $T_H = (227 + 273.15)$ K $= 500$ K; y $T_C = (27 + 273.15)$ K $= 300$ K, de la ecuación $pV = nRT$ se obtiene

$$V_a = \frac{nRT_H}{p_a} = \frac{(0.200 \text{ mol})(8.314 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(500 \text{ K})}{10.0 \times 10^5 \text{ Pa}}$$
$$= 8.31 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

El volumen se duplica durante la expansión isotérmica $a \rightarrow b$, así

$$V_b = 2V_a = 2(8.31 \times 10^{-4} \text{ m}^3) = 16.6 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

Como la expansión $a \rightarrow b$ es isotérmica, $p_aV_a = p_bV_b$, así que

$$p_b = \frac{p_aV_a}{V_b} = 5.00 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Para la expansión adiabática $b \rightarrow c$, usamos la ecuación $T_HV_b^{\gamma-1} = T_CV_c^{\gamma-1}$, y en seguida la ecuación (20.12) así como la ecuación de los gases ideales:

$$V_c = V_b\left(\frac{T_H}{T_C}\right)^{1/(\gamma-1)} = (16.6 \times 10^{-4} \text{ m}^3)\left(\frac{500 \text{ K}}{300 \text{ K}}\right)^{2.5}$$
$$= 59.6 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$
$$p_c = \frac{nRT_C}{V_c} = \frac{(0.200 \text{ mol})(8.314 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(300 \text{ K})}{59.6 \times 10^{-4} \text{ m}^3}$$
$$= 0.837 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Para la compresión adiabática $d \rightarrow a$, tenemos $T_CV_d^{\gamma-1} = T_HV_a^{\gamma-1}$ y entonces

$$V_d = V_a\left(\frac{T_H}{T_C}\right)^{1/(\gamma-1)} = (8.31 \times 10^{-4} \text{ m}^3)\left(\frac{500 \text{ K}}{300 \text{ K}}\right)^{2.5}$$
$$= 29.8 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$
$$p_d = \frac{nRT_C}{V_d} = \frac{(0.200 \text{ mol})(8.314 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(300 \text{ K})}{29.8 \times 10^{-4} \text{ m}^3}$$
$$= 1.67 \times 10^5 \text{ Pa}$$

b) Para la expansión isotérmica $a \rightarrow b$, $\Delta U_{ab} = 0$. De la ecuación (20.10):

$$W_{ab} = Q_H = nRT_H \ln\frac{V_b}{V_a}$$
$$= (0.200 \text{ mol})(8.314 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(500 \text{ K})(\ln 2) = 576 \text{ J}$$

Para la expansión adiabática $b \rightarrow c$, $Q_{bc} = 0$. Por la primera ley de la termodinámica, $\Delta U_{bc} = Q_{bc} - W_{bc} = -W_{bc}$; así que el trabajo W_{bc} realizado por el gas en esta expansión adiabática es el negativo del cambio de energía interna del gas. Por la ecuación (19.13), tenemos $\Delta U = nC_V\Delta T$, donde $\Delta T = T_C - T_H$. Usando $C_V = 20.8$ J/mol·K para un gas diatómico ideal, obtenemos

$$W_{bc} = -\Delta U_{bc} = -nC_V(T_C - T_H) = nC_V(T_H - T_C)$$
$$= (0.200 \text{ mol})(20.8 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(500 \text{ K} - 300 \text{ K}) = 832 \text{ J}$$

Para la compresión isotérmica $c \rightarrow d$, $\Delta U_{cd} = 0$; la ecuación (20.11) da

$$W_{cd} = Q_C = nRT_C \ln\frac{V_d}{V_c}$$
$$= (0.200 \text{ mol})(8.314 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(300 \text{ K})\left(\ln\frac{29.8 \times 10^{-4} \text{ m}^3}{59.6 \times 10^{-4} \text{ m}^3}\right)$$
$$= -346 \text{ J}$$

Para la compresión adiabática $d \rightarrow a$, $Q_{da} = 0$, y

$$W_{da} = -\Delta U_{da} = -nC_V(T_H - T_C) = nC_V(T_C - T_H)$$
$$= (0.200 \text{ mol})(20.8 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(300 \text{ K} - 500 \text{ K}) = -832 \text{ J}$$

Podemos tabular los resultados como sigue:

Proceso	Q	W	ΔU
$a \rightarrow b$	576 J	576 J	0
$b \rightarrow c$	0	832 J	−832 J
$c \rightarrow d$	−346 J	−346 J	0
$d \rightarrow a$	0	−832 J	832 J
Total	230 J	230 J	0

c) A partir de la tabla, $Q_H = 576$ J y el trabajo total es 230 J. Así,

$$e = \frac{W}{Q_H} = \frac{230 \text{ J}}{576 \text{ J}} = 0.40 = 40\%$$

Podemos comparar esto con el resultado de la ecuación (20.14):

$$e = \frac{T_H - T_C}{T_H} = \frac{500 \text{ K} - 300 \text{ K}}{500 \text{ K}} = 0.40 = 40\%$$

EVALUAR: La tabla del inciso *b*) muestra que para todo el ciclo, $Q = W$ y $\Delta U = 0$, como se esperaba: en un ciclo completo, el aporte *neto* de calor se utiliza para realizar trabajo con un cambio neto en la energía interna del sistema igual a cero. Observe también que la cantidad de trabajo en los dos procesos adiabáticos es igual pero con signo opuesto. A partir del análisis que condujo a la ecuación (20.13), ¿puede demostrar que esto *siempre* sucede en un ciclo de Carnot?

Refrigerador de Carnot

Puesto que cada paso del ciclo de Carnot es reversible, *todo el ciclo* podría invertirse, convirtiendo la máquina en un refrigerador. El coeficiente de rendimiento del refrigerador de Carnot se obtiene combinando la definición general de K, ecuación (20.9), con la ecuación (20.13) para el ciclo de Carnot. Primero rescribimos la ecuación (20.9) como:

$$K = \frac{|Q_C|}{|Q_H| - |Q_C|} = \frac{|Q_C|/|Q_H|}{1 - |Q_C|/|Q_H|}$$

Luego sustituimos la ecuación (20.13), $|Q_C|/|Q_H| = T_C/T_H$, en esta expresión. El resultado es

$$K_{Carnot} = \frac{T_C}{T_H - T_C} \quad \text{(coeficiente de rendimiento de un refrigerador de Carnot)} \tag{20.15}$$

Si la diferencia de temperatura $T_H - T_C$ es pequeña, K es mucho mayor que 1; en este caso, puede "bombearse" mucho calor de la temperatura inferior a la superior con muy poco gasto de trabajo. Cuanto mayor sea la diferencia de temperatura, menor será K y se requerirá más trabajo para transferir una cantidad dada de calor.

Ejemplo 20.4 Análisis de un refrigerador de Carnot



Si el ciclo descrito en el ejemplo 20.3 se efectúa en sentido inverso como refrigerador, ¿qué coeficiente de rendimiento tiene?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema utiliza las ideas de la sección 20.3 (para refrigeradores en general) y el análisis previo de los refrigeradores de Carnot. La ecuación (20.9) da el coeficiente de rendimiento K de *cualquier* refrigerador, en términos del calor extraído Q_C del depósito frío en cada ciclo y el trabajo W que debe suministrarse en cada ciclo.

EJECUTAR: En el ejemplo 20.3, vimos que, en un ciclo, la máquina de Carnot cede un calor $Q_C = -346$ J al depósito frío y efectúa un trabajo $W = 230$ J. Por lo tanto, cuando la operamos en reversa como refrigerador, el sistema extrae un calor $Q_C = +346$ J del depósito frío, y requiere un aporte de trabajo $W = -230$ J. De acuerdo con la ecuación (20.9)

$$K = \frac{|Q_C|}{|W|} = \frac{346\ \text{J}}{230\ \text{J}} = 1.50$$

Como se trata de un ciclo de Carnot, también podemos usar la ecuación (20.15):

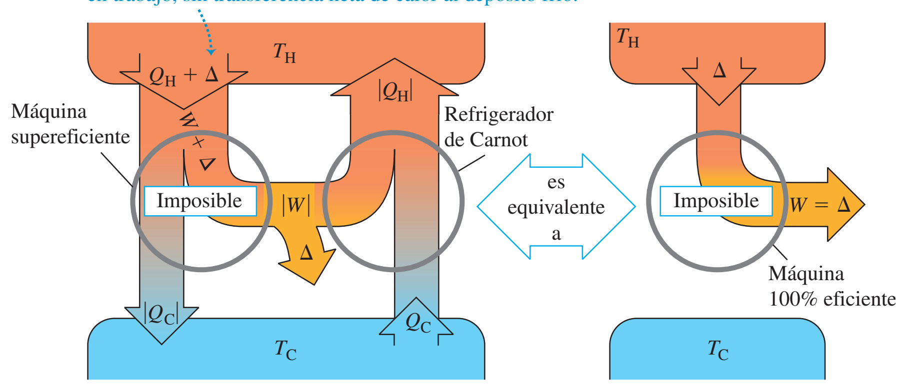
$$K = \frac{T_C}{T_H - T_C} = \frac{300\ \text{K}}{500\ \text{K} - 300\ \text{K}} = 1.50$$

EVALUAR: Las ecuaciones (20.14) y (20.15) muestran que en un ciclo de Carnot, e y K solo dependen de T_H y T_C, y no necesitamos calcular Q y W. Sin embargo, si el ciclo contiene procesos irreversibles, estas ecuaciones no son válidas y se requieren cálculos más detallados.

Ciclo de Carnot y la segunda ley

Podemos demostrar que **ninguna máquina puede ser más eficiente que una máquina de Carnot que opera entre las mismas dos temperaturas**. La clave para demostrarlo es la observación anterior de que, puesto que cada paso del ciclo de Carnot es reversible, *todo el ciclo* puede invertirse. Operada en reversa, la máquina se convierte en un refrigerador. Suponga que tenemos una máquina más eficiente que una de Carnot (figura 20.15). La máquina de Carnot, operada en reversa como refrigerador mediante un aporte de trabajo negativo $-|W|$, toma un calor Q_C del depósito

20.15 Demostración de que la máquina de Carnot tiene la máxima eficiencia posible. Una máquina "supereficiente" (más eficiente que una máquina de Carnot), combinada con un refrigerador de Carnot, podría convertir el calor totalmente en trabajo sin transferencia neta de calor al depósito frío. Esto violaría la segunda ley de la termodinámica.



frío y cede un calor $|Q_H|$ al depósito caliente. La máquina supereficiente expulsa calor $|Q_C|$ pero, para hacerlo, toma una cantidad mayor de calor $Q_H + \Delta$. Así, el trabajo realizado es $W + \Delta$, y el efecto neto de las dos máquinas juntas es tomar una cantidad de calor Δ y convertirla totalmente en trabajo. Esto viola el planteamiento de máquina de la segunda ley. Podríamos elaborar un argumento similar usando una máquina supereficiente para violar el planteamiento de refrigerador de la segunda ley. Observe que no tuvimos que suponer que la máquina supereficiente es reversible. Del mismo modo, podemos demostrar que *ningún refrigerador puede tener un coeficiente de rendimiento mayor que el de un refrigerador de Carnot que opera entre las mismas dos temperaturas*.

Así, la afirmación de que ninguna máquina puede ser más eficiente que una máquina de Carnot es otro planteamiento equivalente de la segunda ley de la termodinámica, y de él se deduce directamente que **todas las máquinas de Carnot que operan entre las mismas dos temperaturas tienen la misma eficiencia, sea cual fuere la naturaleza de la sustancia de trabajo**. Aunque dedujimos la ecuación (20.14) para una máquina de Carnot usando un gas ideal como sustancia de trabajo, la ecuación es válida para *cualquier* máquina de Carnot, sea cual fuere la sustancia de trabajo.

20.16 Para obtener la eficiencia máxima, se busca que las temperaturas dentro de un motor a reacción sean lo más altas posible. Se usan materiales cerámicos raros que resisten temperaturas de más de 1000°C sin fundirse ni reblandecerse.

La ecuación (20.14), que expresa la eficiencia de una máquina de Carnot, establece un límite superior para la eficiencia de una máquina real, como una turbina de vapor. Para maximizar este límite y la eficiencia real de la máquina, el diseñador debe hacer la temperatura de admisión T_H lo más alta posible, y la de escape T_C, lo más baja posible (figura 20.16).

La temperatura de escape no puede ser menor que la temperatura más baja con que se cuenta para enfriar el escape. En el caso de una turbina de vapor en una planta eléctrica, T_C podría ser la temperatura de un río o lago; entonces, queremos que la temperatura de la caldera T_H sea lo más alta posible. La presión de vapor de todos los líquidos aumenta rápidamente con la temperatura, así que estamos limitados por la resistencia mecánica de la caldera. A 500°C, la presión del vapor de agua es de alrededor de 240×10^5 Pa (235 atm); esta es aproximadamente la máxima presión práctica en las calderas grandes de vapor actuales.

Escala de temperatura Kelvin

En el capítulo 17 indicamos la necesidad de una escala de temperatura que no dependiera de las propiedades de un material específico. Ahora podemos usar el ciclo de Carnot para definir tal escala. La eficiencia térmica de una máquina de Carnot que opera entre dos depósitos de calor a temperaturas T_H y T_C es independiente de la naturaleza de la sustancia de trabajo y depende únicamente de las temperaturas. De acuerdo con la ecuación (20.4), la eficiencia es

$$e = \frac{Q_H + Q_C}{Q_H} = 1 + \frac{Q_C}{Q_H}$$

Por lo tanto, la razón Q_C/Q_H es la misma para *todas* las máquinas de Carnot que operan entre dos temperaturas dadas T_H y T_C.

Kelvin propuso que, *por definición*, la razón de temperaturas T_C/T_H fuera igual a la magnitud de la razón de la cantidad de calor cedida y absorbida, Q_C/Q_H:

$$\frac{T_C}{T_H} = \frac{|Q_C|}{|Q_H|} = -\frac{Q_C}{Q_H} \qquad \text{(definición de temperatura Kelvin)} \qquad (20.16)$$

La ecuación (20.16) parece idéntica a la (20.13), pero hay una sutil y crucial diferencia. Las temperaturas de la ecuación (20.13) se basan en un termómetro de gas ideal, definido en la sección 17.3; mientras que la ecuación (20.16) *define* una escala de temperatura con base en el ciclo de Carnot y la segunda ley de la termodinámica, y es independiente del comportamiento de cualquier sustancia específica. Por lo tanto, la **escala de temperatura Kelvin** es en verdad *absoluta*. Para completar la definición de la escala Kelvin, asignamos, como en la sección 17.3, el valor arbitrario de 273.16 K a la temperatura del punto triple del agua. Cuando llevamos una sustancia por un ciclo

de Carnot, la razón de los calores absorbido y cedido, $|Q_H|/|Q_C|$, es igual a la razón de las temperaturas de los depósitos *expresadas en la escala de termómetro de gas* definida en la sección 17.3. Puesto que el punto triple del agua se elige como 273.16 K en ambas escalas, se deduce que *las escalas Kelvin y de gas ideal son idénticas*.

El punto cero de la escala Kelvin se denomina **cero absoluto**. En el cero absoluto, el sistema tiene su *mínima* energía interna total (cinética más potencial) posible. Sin embargo, a causa de efectos cuánticos, *no* es cierto que en $T = 0$ cese todo el movimiento molecular. Hay razones teóricas para creer que no es posible lograr el cero absoluto experimentalmente, aunque se hayan alcanzado temperaturas por debajo de 10^{-7} K. Cuanto más nos acercamos al cero absoluto, más difícil será acercarse más. Un planteamiento de la *tercera ley de la termodinámica* es que es imposible alcanzar el cero absoluto en un número finito de pasos termodinámicos.

Evalúe su comprensión de la sección 20.6 Imagine que un inventor en busca de apoyo financiero acude a usted con una idea para fabricar un motor de gasolina que opera según un novedoso tipo de ciclo termodinámico. El diseño requiere usar exclusivamente cobre en la construcción, y enfriamiento con aire. El inventor asegura que la eficiencia del motor será del 85%. ¿Le conviene invertir en este maravilloso motor? (*Sugerencia:* Véase la tabla 17.4).

20.7 Entropía

La segunda ley de la termodinámica, tal como la planteamos, no es una ecuación ni una relación cuantitativa, sino un planteamiento de *imposibilidad*. No obstante, *sí podemos* expresar esta ley como una relación cuantitativa empleando el concepto de *entropía*, que es el tema de esta sección.

Hemos mencionado varios procesos que se efectúan naturalmente en la dirección de desorden creciente. El flujo de calor irreversible aumenta el desorden porque las moléculas inicialmente están acomodadas en regiones más calientes y más frías; este ordenamiento se pierde cuando el sistema alcanza el equilibrio térmico. La adición de calor a un cuerpo aumenta su desorden porque aumenta las velocidades moleculares medias y, con ello, la aleatoriedad del movimiento molecular. La expansión libre de un gas aumenta su desorden porque las moléculas tienen mayor aleatoriedad de posición después de la expansión. La figura 20.17 muestra otro proceso donde aumenta el desorden.

20.17 Cuando estallan los fuegos pirotécnicos, aumenta el desorden. Las sustancias químicas esmeradamente envueltas dentro de cada petardo se dispersan en todas direcciones, y la energía química almacenada se convierte en energía cinética aleatoria de los fragmentos.



Entropía y desorden

La **entropía** es una medida *cuantitativa* del desorden. Para introducir este concepto, consideremos una expansión isotérmica infinitesimal de un gas ideal. Agregamos calor dQ y dejamos que el gas se expanda apenas lo suficiente para mantener constante la temperatura. Puesto que la energía interna de un gas ideal solo depende de su temperatura, la energía interna también es constante; por lo que, por la primera ley, el trabajo dW efectuado por el gas es igual al calor dQ agregado. Es decir,

$$dQ = dW = p\,dV = \frac{nRT}{V}\,dV \qquad \text{así que} \qquad \frac{dV}{V} = \frac{dQ}{nRT}$$

El gas está más desordenado después de la expansión, porque las moléculas se mueven en un volumen mayor y tienen más aleatoriedad de posición. Por lo tanto, el cambio fraccionario de volumen dV/V es una medida del aumento del desorden, y la ecuación anterior indica que es proporcional a la cantidad dQ/T. Introducimos el símbolo S para la entropía del sistema, y definimos el cambio infinitesimal de entropía dS durante un proceso reversible infinitesimal a la temperatura absoluta T como

$$dS = \frac{dQ}{T} \qquad \text{(proceso infinitesimal reversible)} \qquad (20.17)$$

Si se agrega un calor total Q durante un proceso isotérmico reversible a la temperatura absoluta T, el cambio de entropía total $\Delta S = S_2 - S_1$ está dado por

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{Q}{T} \qquad \text{(proceso isotérmico reversible)} \qquad (20.18)$$

La entropía tiene unidades de energía dividida entre unidades de temperatura; la unidad de entropía en el SI es 1 J/K.

Ahora vemos cómo se relaciona el cociente Q/T con el aumento del desorden. Una temperatura más alta implica mayor aleatoriedad de movimiento. Si la sustancia inicialmente está fría, con poco movimiento molecular, la adición de Q causa un aumento fraccionario considerable en el movimiento molecular y la aleatoriedad. Pero si la sustancia ya está caliente, la misma cantidad de calor aumenta relativamente poco el mayor movimiento molecular que ya existe. Así, el cociente Q/T es una caracterización adecuada del aumento de aleatoriedad o desorden, cuando hay flujo de calor hacia un sistema.

Ejemplo 20.5 Cambio de entropía durante la fusión



Calcule el cambio de entropía de 1 kg de hielo que se funde a 0°C, suponiendo que la fusión es reversible y luego se convierte en agua a 0°C. El calor de fusión del agua es $L_f = 3.34 \times 10^5$ J/kg.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La fusión se efectúa a una temperatura constante de $T = 0°C = 273$ K, así que se trata de un proceso *isotérmico* reversible. Podemos calcular el calor agregado Q requerido para fundir el hielo, y luego calcular el cambio de entropía ΔS usando la ecuación (20.18).

EJECUTAR: El calor necesario para fundir el hielo es $Q = mL_f = 3.34 \times 10^5$ J. Según la ecuación (20.18),

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{Q}{T} = \frac{3.34 \times 10^5 \text{ J}}{273 \text{ K}} = 1.22 \times 10^3 \text{ J/K}$$

EVALUAR: Este incremento en la entropía corresponde al aumento del desorden cuando las moléculas de agua pasan del estado altamente ordenado de un sólido cristalino, al estado mucho más desordenado de un líquido. En *todo* proceso isotérmico reversible, el cambio de entropía es igual al calor transferido dividido entre la temperatura absoluta. Si volvemos a congelar el agua, Q tendrá el signo opuesto, y el cambio de entropía del agua será $\Delta S = -1.22 \times 10^3$ J/K. Las moléculas de agua se reacomodan en un cristal para formar hielo, disminuyendo el desorden y la entropía.

Entropía en los procesos reversibles

Podemos generalizar la definición de cambio de entropía para incluir *cualquier* proceso reversible que lleva de un estado a otro, sea isotérmico o no. Representamos el proceso como una serie de pasos reversibles infinitesimales. Durante un paso, se agrega una cantidad infinitesimal de calor dQ al sistema a temperatura absoluta T. Luego sumamos (integramos) los cocientes dQ/T para todo el proceso, es decir:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad \text{(cambio de entropía en un proceso reversible)} \quad (20.19)$$

Los límites 1 y 2 se refieren a los estados inicial y final.

Como la entropía es una medida del desorden de un sistema en un estado específico, depende solo del estado actual del sistema, no de su historia. (Después demostraremos esto). Cuando un sistema pasa de un estado inicial con entropía S_1 a uno final con entropía S_2, el cambio de entropía $\Delta S = S_2 - S_1$ definido por la ecuación (20.19) no depende de la trayectoria que lleva del estado inicial al final; es el mismo para *todos* los procesos posibles que conduzcan del estado 1 al 2. Por lo tanto, la entropía de un sistema también debe tener un valor definido para cualquier estado dado del sistema. Recordemos que la *energía interna*, introducida en el capítulo 19, también tiene esta propiedad, aunque la entropía y la energía interna son cantidades muy distintas.

Puesto que la entropía solo es función del estado de un sistema, también podemos calcular cambios de entropía en procesos *irreversibles* (sin equilibrio), para los que no son válidas las ecuaciones (20.17) y (20.19). Basta con inventar una trayectoria que conecte los estados inicial y final dados, que *esté* formada totalmente con procesos reversibles en equilibrio, y calcular el cambio de entropía total para esa trayectoria. No será la trayectoria real, pero el cambio de entropía debe ser el mismo de la trayectoria verdadera.

Al igual que con la energía interna, el análisis anterior no nos indica cómo calcular la entropía en sí, solo el cambio de entropía en un proceso dado. Como hicimos con la energía interna, podemos asignar arbitrariamente un valor a la entropía de un sistema en un estado de referencia específico y luego calcular la entropía de cualquier otro estado en relación con este.



Ejemplo 20.6 Cambio de entropía en un cambio de temperatura

Un kilogramo de agua a 0°C se calienta a 100°C. Calcule su cambio de entropía. Suponga que el calor específico del agua es constante, a 4190 J/kg·K en este rango de temperatura.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El cambio de entropía del agua solo depende de los estados inicial y final del sistema, sin importar si el proceso es reversible o irreversible. Podemos imaginar un proceso reversible en el que la temperatura del agua se eleva en una serie de pasos infinitesimales una cantidad infinitesimal dT. Entonces usamos la ecuación (20.19) para integrar sobre todos esos pasos y calcular el cambio de entropía para este proceso reversible. (Calentar el agua en una estufa cuya superficie de cocción se mantiene a 100°C sería un proceso irreversible. Sin embargo, el cambio de entropía sería el mismo).

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (17.14), el calor requerido para efectuar cada paso infinitesimal es $dQ = mc\,dT$. Sustituyendo esto en la ecuación (20.19) e integrando, obtenemos

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} mc\frac{dT}{T} = mc\,\ln\frac{T_2}{T_1}$$

$$= (1.00\ \text{kg})(4190\ \text{J/kg}\cdot\text{K})\left(\ln\frac{373\ \text{K}}{273\ \text{K}}\right)$$

$$= 1.31 \times 10^3\ \text{J/K}$$

EVALUAR: El cambio de entropía es positivo, como debe ser en un proceso en el que el sistema absorbe calor. Nuestro supuesto acerca de que el calor específico c no depende de la temperatura es muy bueno, pues c del agua solo aumenta 1% entre 0 y 100°C.

CUIDADO **Cuándo se puede (y no) usar $\Delta S = Q/T$** Al resolver este problema, el lector podría sentirse tentado a evitar la integración empleando la expresión más sencilla de la ecuación (20.18), $\Delta S = Q/T$. Sin embargo, sería un error, porque esa ecuación solo es válida para procesos *isotérmicos*, y en nuestro ejemplo las temperaturas inicial y final *no* son las mismas. La *única* forma correcta de calcular el cambio de entropía en un proceso en el que las temperaturas inicial y final son distintas es usar la ecuación (20.19).



Ejemplo conceptual 20.7 Cambio de entropía en un proceso adiabático reversible

Un gas se expande de forma adiabática y reversible. Calcule el cambio de entropía.

SOLUCIÓN

En un proceso adiabático, no entra ni sale calor del sistema. Por lo tanto, $dQ = 0$ y la entropía *no* cambia en este proceso reversible, $\Delta S = 0$. Todo proceso adiabático *reversible* es de entropía constante. (Por ello, estos procesos se conocen también como procesos *isentrópicos*). El aumento en el desorden debido a que el gas ocupa un volumen mayor es exactamente igual a la disminución en el desorden asociada a la disminución de temperatura y la reducción de las rapideces moleculares.

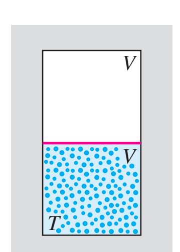


Ejemplo 20.8 Cambio de entropía en una expansión libre

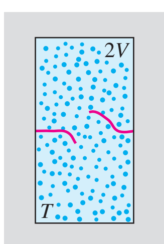
Una caja térmicamente aislada está dividida en dos compartimentos, cada uno con volumen V (figura 20.18). Inicialmente, un compartimento contiene n moles de gas ideal a temperatura T, y el otro está vacío. Se rompe la división de los compartimentos y el gas se expande hasta llenar ambos. Calcule el cambio de entropía en este proceso de expansión libre.

20.18 *a*), *b*) Expansión libre de un gas ideal aislado. *c*) El proceso de expansión libre no pasa por estados de equilibrio de a a b, pero el cambio de entropía $S_b - S_a$ puede calcularse usando la trayectoria isotérmica mostrada o *cualquier* trayectoria reversible de a a b.

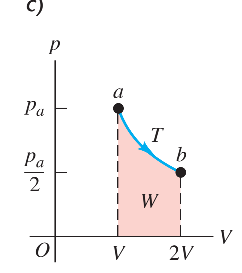
a)



b)



c)



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Para este proceso, $Q = 0$, $W = 0$, $\Delta U = 0$ y (puesto que el sistema es un gas ideal) $\Delta T = 0$. Podríamos pensar que el cambio de entropía es cero porque no hay intercambio de calor. Pero la ecuación (20.19) solo se puede usar para calcular los cambios de entropía en procesos *reversibles*; esta expansión libre *no* es reversible, y *sí* hay un cambio de entropía. Como mencionamos al principio de esta sección, la entropía aumenta en una expansión libre porque las posiciones de las moléculas son más aleatorias que antes de la expansión. Para calcular ΔS, recordemos que el cambio de entropía depende solo de los estados inicial y final. Podemos diseñar un proceso *reversible* que tenga los mismos extremos que los de la expansión libre y, en general, podemos usar entonces la ecuación (20.19) para calcular el cambio de entropía, el cual será el mismo de la expansión libre. Un proceso

Continúa

reversible adecuado sería una expansión *isotérmica* de V a $2V$ a temperatura T, que permita el uso de la ecuación más sencilla (20.18) para calcular ΔS. El gas efectúa un trabajo W durante esta expansión, así que debe suministrarse una cantidad de calor Q igual para mantener constante la energía interna.

EJECUTAR: Vimos en el ejemplo 19.1 que el trabajo efectuado por n moles de gas ideal en una expansión isotérmica de V_1 a V_2 es $W = nRT \ln(V_2/V_1)$. Usando $V_1 = V$ y $V_2 = 2V$, tenemos

$$Q = W = nRT \ln \frac{2V}{V} = nRT \ln 2$$

Según la ecuación (20.18), el cambio de entropía es

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = nR \ln 2$$

EVALUAR: Para 1 mol, $\Delta S = (1 \text{ mol})(8.314 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(\ln 2) = 5.76 \text{ J/K}$. El cambio de entropía es positivo, como lo anticipamos. El factor (ln 2) de nuestra respuesta es resultado de que el volumen haya aumentado en un factor de 2, de V a $2V$. ¿Puede demostrar que, si el volumen hubiera aumentado de V a xV durante la expansión libre, donde x es un número arbitrario, el cambio de entropía habría sido $\Delta S = nR \ln x$?

Ejemplo 20.9 Entropía y el ciclo de Carnot



Para la máquina de Carnot del ejemplo 20.2 (sección 20.6), calcule el cambio de entropía total durante un ciclo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Los cuatro pasos del ciclo de Carnot son reversibles (véase figura 20.13), de manera que podemos utilizar la expresión para el cambio de entropía ΔS en un proceso reversible. Calcularemos ΔS para cada paso y los sumaremos para obtener ΔS para el ciclo completo.

EJECUTAR: No hay cambio de entropía durante la expansión adiabática $b \rightarrow c$ ni durante la compresión adiabática $d \rightarrow a$. Durante la expansión isotérmica $a \rightarrow b$ a $T_H = 500$ K, la máquina admite 2000 J de calor, y por la ecuación (20.18),

$$\Delta S_H = \frac{Q_H}{T_H} = \frac{2000 \text{ J}}{500 \text{ K}} = 4.0 \text{ J/K}$$

Durante la compresión isotérmica $c \rightarrow d$ a $T_C = 350$ K, la máquina cede 1400 J de calor y

$$\Delta S_C = \frac{Q_C}{T_C} = \frac{-1400 \text{ J}}{350 \text{ K}} = -4.0 \text{ J/K}$$

El cambio total de entropía en la máquina durante un ciclo es $\Delta S_{total} = \Delta S_H + \Delta S_C = 4.0 \text{ J/K} + (-4.0 \text{ J/K}) = 0$.

EVALUAR: El resultado $\Delta S_{total} = 0$ nos dice que, cuando la máquina de Carnot completa un ciclo, tiene la misma entropía que tenía al principio del ciclo. Exploraremos este resultado en el siguiente apartado.

¿Cuál es el cambio total de entropía del *entorno* de la máquina durante este ciclo? En la expansión isotérmica reversible $a \rightarrow b$, el depósito caliente (500 K) cede 2000 J de calor, así que su cambio de entropía es $(-2000 \text{ J})/(500 \text{ K}) = -4.0 \text{ J/K}$; el depósito frío (350 K) absorbe 1400 J de calor durante la compresión isotérmica reversible $c \rightarrow d$, así que su cambio de entropía es $(+1400 \text{ J})/(350 \text{ K}) = +4.0 \text{ J/K}$. Por lo que, cada depósito individual experimenta un cambio de entropía; pero la suma de esos cambios —es decir, el cambio total de entropía del entorno del sistema— es cero.

Estos resultados son válidos para el caso especial del ciclo de Carnot, en el que *todos* los procesos son reversibles. En este caso, vemos que el cambio total de entropía del sistema y su entorno es cero. Veremos que, si el ciclo incluye procesos irreversibles (como sucede con el ciclo Otto o el ciclo Diesel de la sección 20.3), el cambio total de entropía del sistema y el entorno *no puede* ser cero; además, debe ser positivo.

Entropía en procesos cíclicos

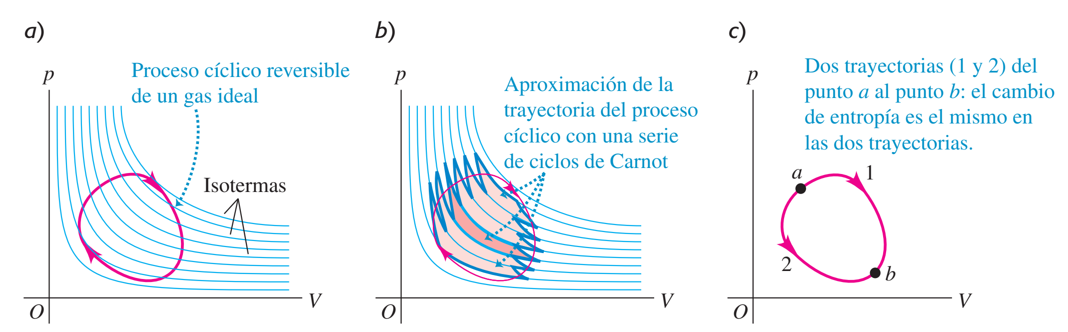
El ejemplo 20.9 mostró que el cambio total de entropía para un ciclo de una máquina de Carnot dada, con gas ideal como sustancia de trabajo, es cero. Este resultado es consecuencia directa de la ecuación (20.13), que podemos rescribir como

$$\frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_C}{T_C} = 0 \qquad (20.20)$$

El cociente Q_H/T_H es igual a ΔS_H, el cambio de entropía de la máquina que se da en $T = T_H$. Asimismo, Q_C/T_C es igual a ΔS_C, el cambio de entropía (negativo) de la máquina que se da en $T = T_C$. Por lo tanto, la ecuación (20.20) indica que $\Delta S_H + \Delta S_C = 0$; es decir, el cambio neto de entropía en el ciclo es cero.

¿Qué sucede con las máquinas de Carnot que usan una sustancia de trabajo distinta? La segunda ley nos dice que *cualquier* máquina de Carnot que opere entre dos temperaturas dadas T_H y T_C tiene la misma eficiencia $e = 1 - T_C/T_H$ [ecuación (20.14)]. Si combinamos esta expresión con la ecuación (20.4), $e = 1 + Q_C/Q_H$, reproducimos la ecuación (20.20). Por lo tanto, la ecuación (20.20) es válida para cualquier máquina de Carnot que opere entre estas temperaturas, sea su sustancia de trabajo un gas ideal o no. Concluimos que *el cambio de entropía total en un ciclo de cualquier máquina de Carnot es cero*.

20.19 *a*) Proceso cíclico reversible para un gas ideal, identificado con una trayectoria cerrada roja en un diagrama *pV*. Se muestran varias isotermas de gas ideal en azul. *b*) Podemos aproximar la trayectoria de *a*) con una serie de ciclos de Carnot largos y delgados; se destaca un ciclo en tono más oscuro. El cambio de entropía total es cero para cada ciclo de Carnot y para el proceso cíclico real. *c*) El cambio de entropía entre los puntos *a* y *b* es independiente de la trayectoria.

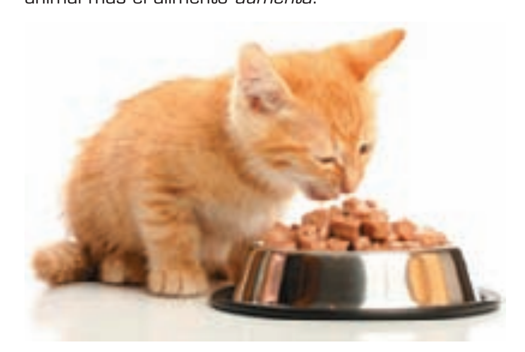


Este resultado puede generalizarse para demostrar que el cambio total de entropía durante *cualquier* proceso reversible cíclico es cero. En un diagrama *pV*, un proceso cíclico reversible aparece como una trayectoria cerrada (figura 20.19*a*). Podemos aproximar esta trayectoria tanto como queramos con una sucesión de procesos isotérmicos y adiabáticos que formen parte de muchos ciclos de Carnot largos y delgados (figura 20.19*b*). El cambio de entropía total para el ciclo completo es la suma de los cambios para cada ciclo de Carnot pequeño, cada uno de los cuales es cero. Por lo tanto, **el cambio de entropía total en *cualquier* ciclo reversible es cero**:

$$\int \frac{dQ}{T} = 0 \qquad \text{(proceso cíclico reversible)} \tag{20.21}$$

Se deduce que, cuando un sistema experimenta un proceso reversible que lo lleva de un estado *a*, hacia cualquier otro estado *b*, *el cambio de entropía del sistema es independiente de la trayectoria* (figura 20.19*c*). Si el cambio de entropía para la trayectoria 1 fuera diferente del cambio para la trayectoria 2, el sistema podría llevarse por la trayectoria 1 y regresar por la 2 al punto de partida, con un cambio neto de entropía distinto de cero. Esto violaría la conclusión de que el cambio total de entropía en un proceso cíclico debe ser cero. Como el cambio de entropía en estos procesos es independiente de la trayectoria, concluimos que, en cualquier estado dado, el sistema tiene un valor definido de entropía que solo depende del estado, no de los procesos que lo llevaron a él.

Aplicación Cambios de entropía en un organismo vivo
Cuando un gatito u otro animal en crecimiento comen, toman energía química ordenada del alimento y la utilizan para formar nuevas células que tienen incluso un mayor grado de orden. Este proceso, por sí solo, reduce la entropía. Pero la mayor parte de la energía en el alimento se excreta en las heces del animal, o bien, se utiliza para generar calor; ambos procesos conducen a un gran aumento de la entropía. Así que, mientras la entropía del animal disminuye, la entropía *total* del animal más el alimento *aumenta*.



Entropía en procesos irreversibles

En un proceso reversible idealizado que incluye solo estados de equilibrio, el cambio total de entropía del sistema y sus alrededores es cero. En cambio, todos los procesos *irreversibles* implican un aumento de entropía. A diferencia de la energía, *la entropía no se conserva*. La entropía de un sistema aislado *puede* cambiar, pero, como veremos, nunca disminuye. La expansión libre de un gas, descrita en el ejemplo 20.8, es un proceso irreversible en un sistema aislado en el que hay un aumento de entropía.

Ejemplo 20.10 Cambio de entropía en un proceso irreversible

Suponga que 1.00 kg de agua a 100°C se coloca en contacto térmico con 1.00 kg de agua a 0°C. Calcule el cambio total de entropía. Considere que el calor específico del agua tiene un valor constante de 4190 J/kg · K en este intervalo de temperatura.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este proceso implica flujo irreversible de calor debido a la diferencia de temperaturas. Como hay masas iguales de agua a 0 y 100°C, la temperatura final es el promedio de estas dos temperaturas, es decir, 50°C = 323 K. Aunque los procesos son irreversibles, calcularemos los cambios de entropía para el agua (inicialmente) caliente y el agua (inicialmente) fría suponiendo que el proceso es reversible. Como en el ejemplo 20.6, se debe usar la ecuación (20.19) con la finalidad de calcular ΔS para cada sustancia porque las temperaturas no son constantes.

Continúa

EJECUTAR: Los cambios de entropía del agua caliente (subíndice H) y el agua fría (subíndice C) son

$$\Delta S_H = mc\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = (1.00\ \text{kg})(4190\ \text{J/kg}\cdot\text{K})\int_{373\ \text{K}}^{323\ \text{K}}\frac{dT}{T}$$

$$= (4190\ \text{J/K})\left(\ln\frac{323\ \text{K}}{373\ \text{K}}\right) = -603\ \text{J/K}$$

$$\Delta S_C = (4190\ \text{J/K})\left(\ln\frac{323\ \text{K}}{273\ \text{K}}\right) = +705\ \text{J/K}$$

El cambio *total* de entropía del sistema es

$$\Delta S_{\text{total}} = \Delta S_H + \Delta S_C = (-603\ \text{J/K}) + 705\ \text{J/K} = +102\ \text{J/K}$$

EVALUAR: Un flujo irreversible de calor en un sistema aislado va acompañado de un aumento de entropía. Podríamos haber llegado al mismo estado final mezclando las dos cantidades de agua, lo cual también es un proceso irreversible; el cambio total de entropía, que solo depende de los estados inicial y final del sistema, sería otra vez el mismo, 102 J/K.

Observe que la entropía del sistema aumenta *continuamente* conforme las dos cantidades de agua se acercan al equilibrio térmico. Por ejemplo, los primeros 4190 J de calor transferido enfrían el agua caliente a 99°C y calientan el agua fría a 1°C. El cambio neto de entropía para este paso es aproximadamente

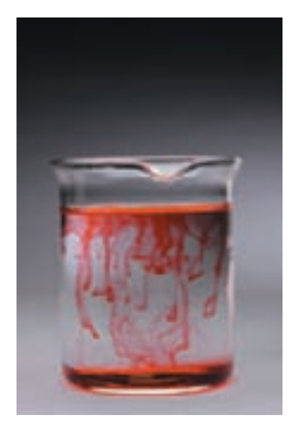
$$\Delta S = \frac{-4190\ \text{J}}{373\ \text{K}} + \frac{4190\ \text{J}}{273\ \text{K}} = +4.1\ \text{J/K}$$

¿Puede demostrar de manera similar que el cambio neto de entropía es positivo para *cualquier* cambio de temperatura de un grado que conduce a la condición de equilibrio?

Entropía y la segunda ley

Los resultados del ejemplo 20.10 con respecto al flujo de calor de una temperatura mayor a una menor son característicos de *todos* los procesos naturales (es decir, irreversibles). Si incluimos los cambios de entropía de todos los sistemas que participan en un proceso, los aumentos de entropía siempre son mayores que las disminuciones. En el caso especial de un proceso *reversible*, los aumentos y las disminuciones son iguales, por lo que podemos enunciar el siguiente principio general: **si se incluyen todos los sistemas que participan en un proceso, la entropía se mantiene constante, o bien, aumenta.** En otras palabras, **no es posible un proceso en el que la entropía total disminuya, si se incluyen todos los sistemas que participan en el proceso**. Esta es otra formulación de la segunda ley de la termodinámica en términos de entropía, así que es equivalente a los planteamientos de "máquina" y "refrigerador" que vimos antes. La figura 20.20 muestra un ejemplo específico de este principio general.

El aumento de entropía en todos los procesos naturales irreversibles mide el aumento del desorden o la aleatoriedad del Universo asociado con ese proceso. Consideremos otra vez el ejemplo de mezclar agua caliente y fría (ejemplo 20.10). *Podríamos* haber usado el agua caliente y la fría como depósitos de alta y baja temperatura de una máquina térmica. Al tomar calor del agua caliente y cederlo a la fría, podríamos haber obtenido algo de trabajo mecánico. Sin embargo, una vez que las dos aguas se mezclan y alcanzan una temperatura uniforme, esa oportunidad de convertir calor en trabajo mecánico se pierde irremediablemente. El agua tibia nunca se *separará* en porciones fría y caliente. No hay disminución de *energía* cuando se mezclan las aguas fría y caliente; lo que se pierde es la *oportunidad* de convertir parte del calor del agua caliente en trabajo mecánico. Por lo tanto, cuando la entropía aumenta, la energía está menos *disponible*, y el Universo se vuelve más aleatorio o "gastado".


20.20 La mezcla de tinta y agua parte de un estado de orden relativo (baja entropía) en el que cada fluido está separado y es distinto del otro. El estado final es más desordenado (tiene mayor entropía). La separación espontánea de la tinta y el agua, un proceso en el que habría una disminución neta de la entropía, nunca se ha visto.

Evalúe su comprensión de la sección 20.7 Suponga que 2.00 kg de agua a 50°C cambian espontáneamente de temperatura, de manera que la mitad del agua se enfría a 0°C mientras que la otra mitad se calienta a 100°C. (Toda el agua sigue siendo líquida: no se congela ni se vaporiza). ¿Cuánto cambiaría la entropía del agua? ¿Es posible este proceso? (*Sugerencia:* Véase el ejemplo 20.10).

20.8 Interpretación microscópica de la entropía

En la sección 19.4 vimos que podemos calcular la energía interna de un sistema, al menos en principio, sumando todas las energías cinéticas de sus partículas constituyentes y todas las energías potenciales de interacción entre las partículas. Esto se llama cálculo *microscópico* de la energía interna. También podemos realizar un cálculo microscópico de la entropía S de un sistema. A diferencia de la energía, sin embargo, la entropía no es algo que pertenezca a cada partícula o par de partículas individuales del sistema; más bien, es una medida del desorden del sistema en su totalidad. Para saber cómo calcular microscópicamente la entropía, primero debemos analizar la idea de los *estados macroscópicos* y *microscópicos*.

Suponga que lanza N monedas idénticas al piso, y la mitad muestra cara y la mitad cruz. Esta es una descripción del **estado macroscópico** del sistema de N monedas. Una descripción del **estado microscópico** del sistema incluye información acerca de cada moneda individual: la moneda 1 es cara, la 2 cruz, la 3 cruz, etcétera. Puede haber muchos estados microscópicos que correspondan a la misma descripción macroscópica. Por ejemplo, con $N = 4$ monedas hay seis posibles estados en los que la mitad son cara y la mitad cruz (figura 20.21). El número de estados microscópicos crece rápidamente al aumentar N; con $N = 100$ hay $2^{100} = 1.27 \times 10^{30}$ estados microscópicos, de los que 1.01×10^{29} son mitad cara y mitad cruz.

Los resultados menos probables del lanzamiento de monedas son los casos en que aparecen solo caras o solo cruces. Sin duda es posible lanzar 100 caras seguidas, pero no apueste a ello; la probabilidad de lograrlo es de solo 1 en 1.27×10^{30}. El resultado más probable de lanzar N monedas es que la mitad sean cara y la mitad cruz. La razón es que este estado *macroscópico* tiene el mayor número de estados *microscópicos* correspondientes, como se aprecia en la figura 20.21.

Para vincular esto con el concepto de entropía, observe que N monedas que son todas cara constituyen un estado macroscópico totalmente ordenado; la descripción "todas cara" especifica por completo el estado de cada una de las N monedas. Lo mismo se cumple si todas las monedas son cruz. En cambio, la descripción macroscópica "mitad cara, mitad cruz" por sí sola nos dice muy poco acerca del estado (cara o cruz) de cada moneda individual. Decimos que el sistema está *desordenado* porque sabemos muy poco acerca de su estado microscópico. En comparación con el estado "todas cara" o "todas cruz", el estado "mitad cara, mitad cruz" tiene un número mucho mayor de posibles estados microscópicos, mucho mayor desorden y, por lo tanto, mucha mayor entropía (que es una medida cuantitativa del desorden).

Ahora, en lugar de N monedas, consideremos un mol de gas ideal que contiene el número de Avogadro de moléculas. El estado macroscópico de este gas está dado por su presión p, volumen V y temperatura T; una descripción del estado microscópico implica dar la posición y velocidad de cada molécula del gas. A una presión, volumen y temperatura dados, el gas podría estar en cualquiera de un número astronómicamente grande de estados microscópicos, dependiendo de las posiciones y velocidades de sus 6.02×10^{23} moléculas. Si el gas se expande libremente para alcanzar un mayor volumen, la gama de posibles posiciones aumenta, al igual que el número de estados microscópicos posibles; el sistema se desordena más y la entropía aumenta como se calculó en el ejemplo 20.8 (sección 20.7).

Podemos obtener la siguiente conclusión general. **Para cualquier sistema, el estado macroscópico más probable es el que tiene el mayor número de estados microscópicos correspondientes, el cual es también el estado macroscópico con el mayor desorden y la mayor entropía.**

20.21 Todos los posibles estados microscópicos de cuatro monedas. Puede haber varios estados microscópicos posibles para cada estado macroscópico.

Estado macroscópico — Estados microscópicos correspondientes

Cuatro caras

Tres caras, una cruz

Dos caras, dos cruces

Una cara, tres cruces

Cuatro cruces

Cálculo de la entropía: estados microscópicos

Sea w el número de posibles estados microscópicos para un estado macroscópico dado. (Para las cuatro monedas de la figura 20.21, el estado de cuatro caras tiene $w = 1$, el de tres caras y una cruz tiene $w = 4$, y así sucesivamente). Entonces, puede demostrarse que la entropía S de un estado macroscópico es

$$S = k \ln w \qquad \text{(expresión de la entropía microscópica)} \qquad (20.22)$$

donde $k = R/N_A$ es la constante de Boltzmann (constante de los gases por molécula) que se explicó en la sección 18.3. Como muestra la ecuación (20.22), al aumentar el número de estados microscópicos posibles w aumenta la entropía S.

Lo que importa en un proceso termodinámico no es la entropía absoluta S, sino la *diferencia* de entropía entre los estados inicial y final. Por lo tanto, una definición igualmente válida y útil sería $S = k \ln w + C$, donde C es una constante, ya que C se cancela en cualquier cálculo de diferencia de entropía entre dos estados. No obstante, es mejor igualar esta constante a cero y usar la ecuación (20.22). Así, y dado que el valor más pequeño posible de w es 1, el valor más pequeño posible de S para cualquier sistema es $k \ln 1 = 0$. La entropía *nunca* puede ser negativa.

En la práctica resulta difícil calcular w, por lo que la ecuación (20.22) solo suele usarse para calcular la entropía absoluta S de ciertos sistemas especiales. No obstante, podemos usar esta relación para calcular *diferencias* de entropía entre un estado y otro. Considere un sistema que experimenta un proceso termodinámico que lo lleva del estado macroscópico 1, que tiene w_1 posibles estados microscópicos, al estado macroscópico 2, que tiene w_2 estados microscópicos. El cambio de entropía en este proceso es

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln w_2 - k \ln w_1 = k \ln \frac{w_2}{w_1} \qquad (20.23)$$

La *diferencia* de entropía entre los dos estados macroscópicos depende de la *razón* de los números de posibles estados microscópicos.

Como ilustra el siguiente ejemplo, usar la ecuación (20.23) para calcular un cambio de entropía de un estado macroscópico a otro da el mismo resultado que considerar un proceso reversible que conecta esos dos estados y usar la ecuación (20.19).

Ejemplo 20.11 Cálculo microscópico de un cambio de entropía

Use la ecuación (20.23) para calcular el cambio de entropía en la expansión libre de n moles del gas a temperatura T que se describió en el ejemplo 20.8 (figura 20.22).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se nos pide calcular el cambio de entropía con base en el número de microestados en los estados macroscópicos inicial y final (figuras 20.22*a* y *b*). Cuando se rompe la división, las velocidades de las moléculas no cambian, ya que no se efectúa trabajo; pero ahora cada molécula tiene el doble de volumen para moverse y, por lo tanto, dos veces más de posiciones posibles. Esto es todo lo que necesitamos para calcular el cambio de entropía con la ecuación (20.23).

EJECUTAR: Sea w_1 el número de estados microscópicos del sistema como un todo cuando el gas ocupa el volumen V (figura 20.22*a*). El número de moléculas es $N = nN_A$ y cada molécula tiene el doble de posibles estados después de romperse la división. Por lo tanto, el número w_2 de posibles estados microscópicos cuando el gas ocupa el volumen $2V$ (figura 20.22*b*) aumenta en un factor de 2^N; es decir, $w_2 = 2^N w_1$. El cambio de entropía en este proceso es

$$\Delta S = k \ln \frac{w_2}{w_1} = k \ln \frac{2^N w_1}{w_1} = k \ln 2^N = Nk \ln 2$$

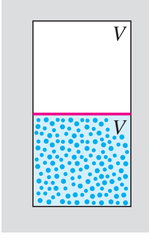
Puesto que $N = nN_A$ y $k = R/N_A$, esto se convierte en

$$\Delta S = (nN_A)(R/N_A) \ln 2 = nR \ln 2$$

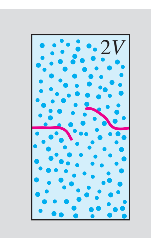
EVALUAR: Este es el mismo resultado del ejemplo 20.8, pero sin referencia a la trayectoria termodinámica seguida.

20.22 En una expansión libre de N moléculas en la que el volumen se duplica, el número de posibles estados microscópicos aumenta en 2^N.

a) El gas ocupa un volumen V; número de microestados $= w_1$.



b) El gas ocupa un volumen $2V$; número de microestados $= w_2 = 2^N w_1$.



Estados microscópicos y la segunda ley

La relación entre entropía y el número de estados microscópicos nos permite entender mejor el planteamiento de entropía de la segunda ley de la termodinámica: la entropía de un sistema cerrado nunca puede disminuir. De acuerdo con la ecuación (20.22), esto significa que un sistema cerrado nunca puede experimentar espontáneamente un proceso que reduzca el número de estados microscópicos posibles.

Un ejemplo de semejante proceso prohibido sería si todo el aire de una habitación se moviera espontáneamente a una mitad de la habitación, dejando vacío en la otra mitad. Tal "compresión libre" sería lo contrario de la expansión libre de los ejemplos 20.8 y 20.11, y reduciría en un factor de 2^N el número de posibles estados microscópicos. En sentido estricto, ¡este proceso no es imposible! La probabilidad de hallar una molécula dada en una mitad de la habitación es de $\frac{1}{2}$, así que la probabilidad de hallar todas las moléculas en la misma mitad es $(\frac{1}{2})^N$. (Esta es exactamente la probabilidad de obtener N caras seguidas al lanzar una moneda). Esta probabilidad *no* es cero. Sin embargo, por si le preocupa encontrarse repentinamente sin aire en la mitad evacuada de su habitación, considere que esta podría contener 1000 moles de aire, de manera que $N = 1000N_A = 6.02 \times 10^{26}$ moléculas. La probabilidad de que todas las moléculas estén en la misma mitad del cuarto es entonces $(\frac{1}{2})^{6.02\times 10^{26}}$. Expresado como decimal, ¡este número tiene más de 10^{26} ceros a la derecha del punto decimal!

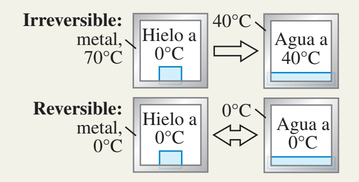
Considerando la probabilidad tan insignificante de que tal "compresión libre" ocurra, es casi seguro que nunca ha ocurrido en el Universo desde el principio del tiempo. Concluimos que, en la práctica, la segunda ley de la termodinámica nunca se viola.

Evalúe su comprensión de la sección 20.8 Una cantidad de N moléculas de un gas ideal ocupan inicialmente un volumen V. Luego, el gas se expande a un volumen $2V$. El número de estados microscópicos del gas aumenta con esta expansión. ¿En cuál de las siguientes circunstancias aumentará al máximo este número? **i.** La expansión es reversible e isotérmica; **ii.** la expansión es reversible y adiabática; **iii.** el número cambiará en la misma cantidad para ambas circunstancias.

RESUMEN

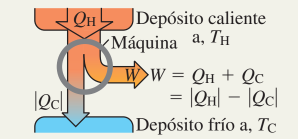


Procesos reversibles e irreversibles: Un proceso reversible es uno cuya dirección puede invertirse con un cambio infinitesimal en sus condiciones, y en el cual el sistema siempre está en equilibrio térmico o muy cerca de él. Todos los demás procesos termodinámicos son irreversibles.



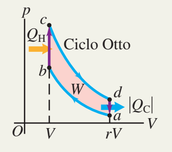
Máquinas térmicas: Una máquina térmica toma calor Q_H de un depósito, convierte parte de él en trabajo W y cede el resto $|Q_C|$ a una temperatura menor. La eficiencia térmica e de una máquina térmica mide qué tanto del calor absorbido se convierte en trabajo. (Véase el ejemplo 20.1).

$$e = \frac{W}{Q_H} = 1 + \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \left|\frac{Q_C}{Q_H}\right| \quad (20.4)$$



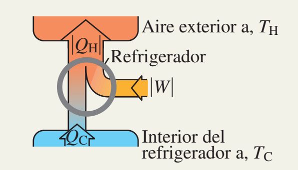
Ciclo Otto: Un motor de gasolina que opera según el ciclo Otto tiene una eficiencia térmica máxima teórica e que depende de la razón de compresión r y de la razón de capacidades caloríficas γ de la sustancia de trabajo.

$$e = 1 - \frac{1}{r^{\gamma - 1}} \quad (20.6)$$

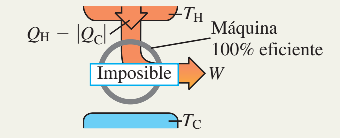


Refrigeradores: Un refrigerador toma el calor Q_C de un lugar más frío, tiene una entrada de trabajo $|W|$ y desecha el calor $|Q_H|$ a un lugar más caliente. La eficiencia del refrigerador está dada por su coeficiente de rendimiento K.

$$K = \frac{|Q_C|}{|W|} = \frac{|Q_C|}{|Q_H| - |Q_C|} \quad (20.9)$$



Segunda ley de la termodinámica: La segunda ley de la termodinámica describe la direccionalidad de los procesos termodinámicos naturales y puede plantearse de varias formas equivalentes. El planteamiento de *máquina* es que ningún proceso cíclico puede convertir calor totalmente en trabajo; el planteamiento de *refrigerador* es que ningún proceso cíclico puede transferir calor de un lugar más frío a uno más caliente sin aporte de trabajo mecánico.

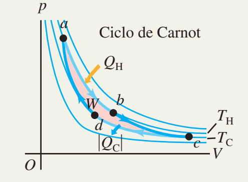


Ciclo de Carnot: El ciclo de Carnot opera entre dos depósitos de calor a temperaturas T_H y T_C y está formado solo por procesos reversibles. Su eficiencia térmica depende únicamente de T_H y T_C. Otro planteamiento equivalente de la segunda ley es que ninguna máquina que opere entre dos temperaturas dadas puede ser más eficiente que una máquina de Carnot que opera entre las mismas temperaturas. (Véase los ejemplos 20.2 y 20.3).

Una máquina de Carnot operada a la inversa es un refrigerador de Carnot; su coeficiente de rendimiento depende únicamente de T_H y T_C. Otra forma de la segunda ley dice que ningún refrigerador que opere entre dos temperaturas dadas puede tener un mayor coeficiente de rendimiento que un refrigerador de Carnot. (Véase el ejemplo 20.4).

$$e_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_C}{T_H} = \frac{T_H - T_C}{T_H} \quad (20.14)$$

$$K_{\text{Carnot}} = \frac{T_C}{T_H - T_C} \quad (20.15)$$



Entropía: La entropía es una medida cuantitativa del desorden de un sistema. El cambio de entropía en cualquier proceso reversible depende de la cantidad de flujo de calor y de la temperatura absoluta T. La entropía solo depende del estado del sistema, y el cambio de entropía entre un estado inicial y uno final es el mismo para todos los procesos que llevan de un estado al otro. Esto puede servir para calcular el cambio de entropía en un proceso irreversible. (Véase los ejemplos 20.5 a 20.10).

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad (20.19)$$

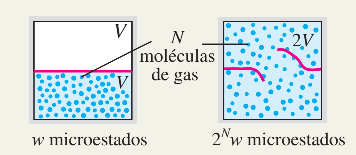
(proceso reversible)



Un planteamiento importante de la segunda ley de la termodinámica es que la entropía de un sistema aislado puede aumentar pero nunca disminuir. Si un sistema interactúa con sus alrededores, el cambio total de entropía del sistema y de los alrededores nunca puede disminuir. Si la interacción implica solo procesos reversibles, la entropía total es constante y $\Delta S = 0$; si hay procesos irreversibles, la entropía total aumenta y $\Delta S > 0$.

Entropía y estados microscópicos: Cuando un sistema se encuentra en cierto estado macroscópico, las partículas que lo componen pueden estar en cualquiera de w posibles estados microscópicos. Cuanto mayor es w, mayor es la entropía. (Véase el ejemplo 20.11).

$$S = k \ln w \quad (20.22)$$



PROBLEMA PRÁCTICO Cambios de entropía: hielo frío en agua caliente



Un recipiente aislado de masa despreciable contiene 0.600 kg de agua a 45.0°C. Se coloca un cubo de hielo de 0.0500 kg a −15.0°C en el agua. *a*) Calcule la temperatura final del agua una vez que el hielo se ha fundido. *b*) Calcule el cambio en la entropía del sistema.

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Elabore una lista de las cantidades conocidas y desconocidas e identifique las incógnitas.
2. ¿Cómo calculará la temperatura final de la mezcla hielo-agua? ¿Cómo sabrá si todo el hielo se funde?
3. Teniendo la temperatura final de la mezcla, ¿cómo determinará los cambios de entropía en **i.** el hielo inicialmente a −15.0°C y **ii.** el agua inicialmente a 45.0°C?

EJECUTAR

4. Use los métodos del capítulo 17 para calcular la temperatura final T. (*Sugerencia:* Primero suponga que se funde todo el hielo, luego escriba una ecuación que diga que el calor que fluye hacia el hielo es igual al calor que fluye hacia afuera del agua. Si el supuesto es correcto, la temperatura final que se calcule será mayor que 0°C. Si el supuesto es incorrecto, la temperatura final será 0°C o menor, lo cual quiere decir que sobra algo de hielo. Entonces será necesario rehacer los cálculos para explicar esto).
5. Use el resultado del paso 4 para calcular los cambios de entropía del hielo y del agua. (*Sugerencia:* Se debe incluir el flujo de calor asociado con los cambios de temperatura, igual que en el ejemplo 20.6, así como el flujo de calor asociado con el cambio de fase).
6. Calcule el cambio total de la entropía en el sistema.

EVALUAR

7. ¿Los signos de los cambios de entropía son lógicos? ¿Por qué?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P20.1 Una olla está llena a la mitad con agua y se tapa con un sello hermético que no permite el escape de vapor. La olla se calienta en una estufa, formándose vapor de agua dentro de ella. La estufa se apaga y el vapor se condensa. ¿Este ciclo es reversible o irreversible? ¿Por qué?

P20.2 Cite dos ejemplos de procesos reversibles y dos de procesos irreversibles en sistemas puramente mecánicos, como bloques que se deslizan por planos, resortes, poleas y cuerdas. Explique qué hace a cada proceso reversible o irreversible.

P20.3 ¿Qué procesos irreversibles se efectúan en un motor de gasolina? ¿Por qué son irreversibles?

P20.4 Suponga que trata de enfriar su cocina dejando abierta la puerta del refrigerador. ¿Qué sucede? ¿Por qué? ¿El resultado sería el mismo si se dejara abierta una hielera llena de hielo? Explique las diferencias, si las hay.

P20.5 Un congresista de Estados Unidos sugirió un plan para generar energía. Se rompen moléculas de agua (H_2O) para producir hidrógeno y oxígeno. El hidrógeno se quema (se combina con oxígeno) para liberar energía. El único producto de esta combustión es agua, así que no hay contaminación. A la luz de la segunda ley de la termodinámica, ¿qué piensa usted de este plan?

P20.6 Convertir energía mecánica totalmente en calor, ¿viola la segunda ley de la termodinámica? ¿Y convertir calor totalmente en trabajo? Explique sus respuestas.

P20.7 Imagine un filtro de aire especial colocado en la ventana de una casa. Los diminutos orificios en el filtro solo permiten la salida de moléculas de aire cuya rapidez sea mayor de cierto valor, y solo permite la entrada de moléculas cuya rapidez sea menor que ese valor. Explique por qué este filtro enfriaría la casa y por qué la segunda ley de la termodinámica imposibilita la construcción de semejante filtro.

P20.8 El eje de un motor eléctrico está acoplado al de un generador eléctrico. El motor impulsa al generador, y una parte de la corriente de este opera el motor. El resto de la corriente se usa para iluminar una casa. ¿Qué defecto tiene este esquema?

P20.9 Si un trapo mojado se cuelga en el desierto, donde hay viento caliente, se enfría por evaporación a una temperatura hasta 20 C° menor que la del aire. Analice esto a la luz de la segunda ley de la termodinámica.

P20.10 Compare el diagrama *pV* para el ciclo Otto en la figura 20.6 con el diagrama para la máquina térmica de Carnot de la figura 20.13. Explique algunas diferencias importantes entre los dos ciclos.

P20.11 Si ninguna máquina real puede ser tan eficiente como una máquina de Carnot que opera entre las mismas temperaturas, ¿qué caso tiene deducir y usar la ecuación (20.14)?

P20.12 La eficiencia de las máquinas térmicas se eleva cuando la diferencia de temperatura entre los depósitos caliente y frío es grande. Por otro lado, los refrigeradores funcionan mejor cuando la diferencia de temperatura es pequeña. Considerando el ciclo mecánico del refrigerador de la figura 20.9, explique en términos físicos por qué requiere menos trabajo para extraer calor de la sustancia de trabajo si los dos depósitos (el interior del refrigerador y el aire exterior) están casi a la misma temperatura, que si el aire exterior está mucho más caliente que el interior del refrigerador.

P20.13 ¿Qué eficiencia tendría una máquina de Carnot que opera con $T_H = T_C$? ¿Y si $T_C = 0$ K y T_H fuera cualquier temperatura mayor que 0 K? Interprete sus respuestas.

P20.14 Las máquinas térmicas reales, como el motor de gasolina de un auto, siempre tienen fricción entre sus piezas móviles, aunque los lubricantes la reducen al mínimo. ¿Una máquina térmica con piezas totalmente sin fricción sería 100% eficiente? ¿Por qué? ¿La respuesta depende de si la máquina realiza un ciclo de Carnot o no? ¿Por qué?

P20.15 ¿Un refrigerador lleno de alimentos con una temperatura ambiente de 20°C consume más potencia si la temperatura es de 15°C? ¿O el consumo es el mismo? Explique su razonamiento.

P20.16 En el ejemplo 20.4, un refrigerador de Carnot requiere un trabajo de entrada de solo 230 J para extraer 346 J de calor del depósito frío. ¿Esta discrepancia implica una violación de la ley de conservación de la energía? Explique por qué.

P20.17 Explique por qué cada uno de los siguientes procesos es un ejemplo de desorden o aleatoriedad creciente: la mezcla de agua caliente y fría; expansión libre de un gas; flujo irreversible de calor; producción de calor por fricción mecánica. ¿Hay aumentos de entropía en todos ellos? ¿Por qué?

P20.18 La expansión libre de un gas es un proceso adiabático, por lo que no hay transferencia de calor. No se realiza trabajo, de manera que la energía interna no cambia. Por lo tanto, $Q/T = 0$; sin embargo, el desorden del sistema y, por consiguiente, la entropía se incrementan después de la expansión. ¿Por qué la ecuación (20.19) no se aplica a esta situación?

P20.19 ¿La Tierra y el Sol están en equilibrio térmico? ¿Hay cambios de entropía asociados a la transmisión de energía del Sol a la Tierra? ¿La radiación es diferente de otros modos de transferencia de calor con respecto a los cambios de entropía? Explique su razonamiento.

P20.20 Analice los cambios de entropía implicados en la preparación y el consumo de un *hot fudge sundae* (helado bañado con jarabe de chocolate caliente).

P20.21 Si proyectamos una película en reversa, es como si se invirtiera la dirección del tiempo. En esta proyección, ¿veríamos procesos que violan la conservación de la energía? ¿La conservación del momento lineal? ¿Y la segunda ley de la termodinámica? En cada caso, si hay procesos que violan una ley, dé ejemplos.

P20.22 **BIO** Algunos críticos de la evolución biológica aseguran que esta viola la segunda ley de la termodinámica, pues implica organismos simples que dan origen a otros más complejos y ordenados. Explique por qué este no es un argumento válido contra la evolución.

P20.23 **BIO** Al crecer, una planta crea una estructura muy compleja y organizada a partir de materiales simples, como aire, agua y minerales. ¿Viola esto la segunda ley de la termodinámica? Explique por qué. ¿Cuál es la fuente de energía final de la planta? Explique su razonamiento.

EJERCICIOS

Sección 20.2 Máquinas térmicas

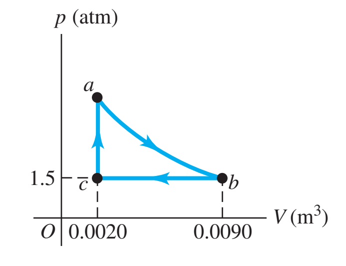
20.1 • Un motor diesel realiza 2200 J de trabajo mecánico y cede 4300 J de calor en cada ciclo. *a*) ¿Cuánto calor debe suministrarse al motor en cada ciclo? *b*) Calcule la eficiencia térmica del motor.

20.2 • Un motor de avión recibe 9000 J de calor y cede 6400 J cada ciclo. *a*) Calcule el trabajo mecánico efectuado por el motor en un ciclo. *b*) Calcule la eficiencia térmica del motor.

20.3 • **Motor de gasolina.** Un motor de gasolina recibe 1.61×10^4 J de calor y realiza 3700 J de trabajo por ciclo. El calor se obtiene quemando gasolina que tiene un calor de combustión de 4.60×10^4 J/g. *a*) Calcule la eficiencia térmica. *b*) ¿Cuánto calor cede en cada ciclo? *c*) ¿Qué masa de gasolina se quema en cada ciclo? *d*) Si el motor opera a 60.0 ciclos/s, determine su potencia de salida en kilowatts y en caballos de potencia.

20.4 • Un motor de gasolina desarrolla una potencia de 180 kW (aproximadamente 241 hp). Su eficiencia térmica es del 28.0%. *a*) ¿Cuánto calor debe suministrarse al motor por segundo? *b*) ¿Cuánto calor desecha el motor cada segundo?

Figura **E20.5**



20.5 •• El diagrama *pV* de la figura E20.5 muestra un ciclo de una máquina térmica que usa 0.250 moles de un gas ideal que tiene $\gamma = 1.40$. La parte curva *ab*

del ciclo es adiabática. *a*) Calcule la presión del gas en el punto *a*. *b*) ¿Cuánto calor absorbe este gas por ciclo, y en qué parte del ciclo ocurre? *c*) ¿Cuánto calor cede este gas por ciclo, y en qué parte del ciclo ocurre? *d*) ¿Cuánto trabajo realiza esta máquina en un ciclo? *e*) ¿Cuál es la eficiencia térmica de la máquina?

Sección 20.3 Motores de combustión interna

20.6 • *a*) Calcule la eficiencia teórica de una máquina con ciclo Otto que tiene $\gamma = 1.40$ y $r = 9.50$. *b*) Si este motor consume 10,000 J de calor de la quema de su combustible, ¿cuánto calor desecha hacia el aire exterior?

20.7 •• El ciclo Otto de un motor Mercedes-Benz SLK230 tiene una razón de compresión de 8.8. *a*) ¿Cuál es la eficiencia ideal del motor? Use $\gamma = 1.40$. *b*) El motor de un Dodge Viper GT2 tiene una razón de compresión un poco arriba de 9.6. ¿Qué aumento en la eficiencia ideal resulta de este aumento en la razón de compresión?

Sección 20.4 Refrigeradores

20.8 • El coeficiente de rendimiento $K = H/P$ es un número adimensional. Su valor es independiente de las unidades de H y P, siempre y cuando tengan las mismas unidades, como watts, para las dos cantidades. Sin embargo, es práctica común expresar H en Btu/h y P en watts. Cuando se usan estas unidades juntas, la razón H/P se conoce como tasa de eficiencia de energía (EER, por las siglas de *energy efficiency rating*). Si una habitación con aire acondicionado tiene un coeficiente de rendimiento $K = 3.0$, ¿cuál es su EER?

20.9 • Un refrigerador tiene un coeficiente de rendimiento de 2.10. Durante cada ciclo, absorbe 3.40×10^4 J de calor del depósito frío. *a*) ¿Cuánta energía mecánica se requiere en cada ciclo para operar el refrigerador? *b*) Durante cada ciclo, ¿cuánto calor se desecha al depósito caliente?

20.10 • Un acondicionador de aire tiene un coeficiente de rendimiento de 2.9 en un día caluroso, y utiliza 850 W de energía eléctrica. *a*) ¿Cuántos joules de calor extrae el sistema de aire acondicionado de la habitación en un minuto? *b*) ¿Cuántos joules de calor entrega el sistema de aire acondicionado al aire caliente del exterior en 1 minuto? *c*) Explique por qué las respuestas a los incisos *a*) y *b*) son diferentes.

20.11 •• Un refrigerador tiene un coeficiente de rendimiento de 2.25, opera con 95 W de energía eléctrica y su compartimento interior tiene una temperatura de 5°C. Si se coloca una docena de botellas de plástico con 1 L de agua a 31°C en este refrigerador, ¿cuánto tiempo les tomará enfriarse a 5°C? (Ignore el calor que desecha el plástico).

20.12 •• Un congelador tiene un coeficiente de rendimiento de 2.40, y debe convertir 1.80 kg de agua a 25.0°C en 1.80 kg de hielo a −5.0°C en 1 hora. *a*) ¿Cuánto calor es necesario extraer del agua a 25.0°C para convertirla en hielo a −5.0°C? *b*) ¿Cuánta energía eléctrica consume el congelador en esa hora? *c*) ¿Cuánto calor es cedido al cuarto donde está el congelador?

Sección 20.6 Ciclo de Carnot

20.13 • Una máquina de Carnot cuyo depósito de alta temperatura está a 620 K recibe 550 J de calor a esta temperatura en cada ciclo y cede 335 J al depósito de baja temperatura. *a*) ¿Cuánto trabajo mecánico realiza la máquina en cada ciclo? *b*) ¿A qué temperatura está el depósito frío? *c*) Calcule la eficiencia térmica del ciclo.

20.14 • Una máquina de Carnot opera entre dos depósitos de calor a 520 y 300 K. *a*) Si la máquina recibe 6.45 kJ de calor del depósito a 520 K en cada ciclo, ¿cuántos joules de calor por ciclo cede al depósito a 300 K? *b*) ¿Cuánto trabajo mecánico realiza la máquina en cada ciclo? *c*) Determine la eficiencia térmica de la máquina.

20.15 • Una máquina de Carnot tiene una eficiencia del 59% y realiza 2.5×10^4 J de trabajo en cada ciclo. *a*) ¿Cuánto calor extrae la máquina de su fuente de calor en cada ciclo? *b*) Suponga que la máquina expulsa calor a temperatura ambiente (20.0°C). ¿Cuál es la temperatura de su fuente de calor?

20.16 •• Una máquina para hacer hielo opera en un ciclo de Carnot; toma calor de agua a 0.0°C y desecha calor a una habitación a 24.0°C. Suponga que 85.0 kg de agua a 0.0°C se convierten en hielo a 0.0°C. *a*) ¿Cuánto calor se descarga hacia la habitación? *b*) ¿Cuánta energía debe suministrarse al aparato?

20.17 • Un refrigerador de Carnot opera entre dos depósitos de calor a temperaturas de 320 y 270 K. *a*) Si en cada ciclo el refrigerador recibe 415 J de calor del depósito a 270 K, ¿cuántos joules de calor cede al depósito a 320 K? *b*) Si el refrigerador realiza 165 ciclos/min, ¿qué potencia de entrada se requiere para operarlo? *c*) Calcule el coeficiente de rendimiento del refrigerador.

20.18 •• Cierta marca de congeladores afirma en su publicidad que sus productos utilizan 730 kW·h al año. *a*) Suponiendo que el congelador opera durante 5 horas cada día, ¿cuánta potencia requiere mientras está operando? *b*) Si el congelador mantiene su interior a una temperatura de −5.0°C en una habitación a 20.0°C, ¿cuál es el coeficiente de rendimiento máximo teórico? *c*) ¿Cuál es la cantidad teórica máxima de hielo que este congelador puede hacer en 1 hora, comenzando con agua a 20.0°C?

20.19 •• Una máquina de Carnot tiene una eficiencia térmica de 0.600 y la temperatura de su depósito caliente es de 800 K. Si cede 3000 J de calor al depósito frío en un ciclo, ¿cuánto trabajo efectuará en un ciclo?

20.20 •• Una máquina térmica de Carnot utiliza un depósito caliente que consiste en una gran cantidad de agua en ebullición y un depósito frío que consiste en una tina grande llena de hielo y agua. En 5 minutos de operación, el calor expulsado por la máquina derrite 0.0400 kg de hielo. En ese tiempo, ¿cuánto trabajo W efectúa la máquina?

20.21 •• Usted diseña una máquina que toma 1.50×10^4 J de calor a 650 K en cada ciclo y expulsa calor a una temperatura de 350 K. La máquina completa 240 ciclos en 1 minuto. ¿Cuál es la potencia de salida teórica máxima de esa máquina en caballos de potencia?

Sección 20.7 Entropía

20.22 • Un bloque de hielo de 4.50 kg a 0.00°C cae en el océano y se funde. La temperatura media del océano es de 3.50°C, incluyendo las aguas profundas. ¿En qué medida la fusión de este hielo cambia la entropía del mundo? ¿La aumenta o la disminuye? (*Sugerencia:* ¿Usted cree que el océano cambia significativamente su temperatura cuando el hielo se derrite?).

20.23 • Un estudiante de segundo grado no tiene nada mejor que hacer que calentar un hielo de 0.350 kg a 0.0°C hasta fundirlo. *a*) ¿Cuál es el cambio de la entropía del agua? *b*) La fuente de calor es un cuerpo de gran masa a una temperatura de 25.0°C. ¿Cuál es el cambio en la entropía de este cuerpo? *c*) ¿Cuál es el cambio total en la entropía del agua y la fuente de calor?

20.24 • **CALC** Usted decide tomar un reconfortante baño caliente, pero descubre que su desconsiderado compañero de cuarto consumió casi toda el agua caliente. Usted llena la tina con 270 kg de agua a 30.0°C e intenta calentarla más vertiendo 5.00 kg de agua que alcanzó la ebullición en una estufa. *a*) ¿Se trata de un proceso reversible o irreversible? Utilice un razonamiento de física para explicar el hecho. *b*) Calcule la temperatura final del agua para el baño. *c*) Calcule el cambio neto de entropía del sistema (agua del baño + agua en ebullición), suponiendo que no hay intercambio de calor con el aire o con la tina misma.

20.25 •• Un bloque de hielo de 15.0 kg a 0.0°C se convierte en agua líquida a 0.0°C dentro de una habitación grande cuya temperatura es

de 20.0°C. Considere el hielo y la habitación como un sistema aislado y suponga que la habitación es lo bastante grande como para despreciar su cambio de temperatura. *a*) ¿El proceso de la fusión del hielo es reversible o irreversible? Explique su razonamiento con argumentos físicos sencillos, sin recurrir a ninguna ecuación. *b*) Calcule el cambio neto de entropía del sistema durante este proceso. Explique si el resultado es congruente o no con su respuesta en el inciso *a*).

20.26 •• CALC Usted prepara té con 0.250 kg de agua a 85.0°C y lo deja enfriar a temperatura ambiente (20.0°C) antes de beberlo. *a*) Calcule el cambio de entropía del agua mientras se enfría. *b*) En esencia, el proceso de enfriamiento es isotérmico para el aire de su cocina. Calcule el cambio de entropía del aire mientras el té se enfría, suponiendo que todo el calor que pierde el agua va al aire. ¿Cuál es el cambio total de entropía del sistema constituido por el té + aire?

20.27 • Tres moles de gas ideal experimentan una compresión isotérmica reversible a 20.0°C, durante la cual se realizan 1850 J de trabajo sobre el gas. Calcule el cambio de entropía del gas.

20.28 •• Calcule el cambio de entropía de 0.130 kg de helio gaseoso en el punto de ebullición normal del helio cuando todo se condensa isotérmicamente en 1.00 L de helio líquido. (*Sugerencia:* Véase la tabla 17.4 de la sección 17.6).

20.29 • *a*) Calcule el cambio de entropía cuando 1.00 kg de agua a 100°C se vaporiza y se convierte en vapor a 100°C. (Véase la tabla 17.4). *b*) Compare su respuesta con el cambio de entropía cuando 1.00 kg de hielo se funde a 0°C, calculado en el ejemplo 20.5 (sección 20.7). ¿El cambio de entropía es mayor para la fusión o para la vaporización? Interprete su respuesta con base en la idea de que la entropía es una medida de la aleatoriedad de un sistema.

20.30 • *a*) Calcule el cambio de entropía cuando 1.00 mol de agua (masa molecular de 18.0 g/mol) a 100°C se evapora para formar vapor de agua a 100°C. *b*) Repita el cálculo del inciso *a*) para 1.00 mol de nitrógeno líquido, 1.00 mol de plata y 1.00 mol de mercurio cuando cada uno se vaporiza a su punto de ebullición normal. (Tome los calores de vaporización de la tabla 17.4 y las masas molares del apéndice D. Recuerde que la molécula de nitrógeno es N_2). *c*) Sus resultados de los incisos *a*) y *b*) deberán ser muy similares. (Esto se conoce como *regla de Drepez y Trouton*). Explique por qué es natural que así suceda, con base en la idea de que la entropía es una medida de la aleatoriedad de un sistema.

20.31 •• Un tanque de gas de 10.0 L que contiene 3.20 moles de helio gaseoso ideal a 20.0°C se coloca dentro de una campana aislada completamente vacía, de 35.0 L. Un pequeño agujero en el tanque permite al helio fugarse adentro de la campana hasta que el gas alcanza un estado de equilibrio final, después de lo cual no hay más fuga. *a*) ¿Cuál es el cambio en la entropía de este sistema debido a la fuga del gas? *b*) ¿El proceso es reversible o irreversible? ¿Cómo lo sabe?

Sección 20.8 Interpretación microscópica de la entropía

20.32 • Una caja se divide, mediante una membrana, en dos partes de igual volumen. El lado izquierdo contiene 500 moléculas de nitrógeno gaseoso; el derecho contiene 100 moléculas de oxígeno gaseoso. Los dos gases están a la misma temperatura. La membrana se perfora y finalmente se logra el equilibrio. Suponga que el volumen de la caja es suficientemente grande para que cada gas sufra una expansión libre y no cambie de temperatura. *a*) En promedio, ¿cuántas moléculas de cada tipo habrá en cada mitad de la caja? *b*) Calcule el cambio de entropía del sistema cuando se perfora la membrana. *c*) Calcule la probabilidad de que las moléculas se encuentren en la misma distribución que tenían antes de la perforación, esto es, 500 moléculas de nitrógeno en la mitad izquierda y 100 moléculas de oxígeno en la derecha.

20.33 • CALC Dos moles de gas ideal ocupan un volumen V. El gas se expande isotérmica y reversiblemente a un volumen de $3V$. *a*) ¿Cambia la distribución de velocidades por esta expansión isotérmica? Explique. *b*) Use la ecuación (20.23) para calcular el cambio de entropía del gas. *c*) Use la ecuación (20.18) para calcular el cambio de entropía del gas. Compare este resultado con el del inciso *b*).

20.34 • CALC Un solitario globo de una fiesta con un volumen de 2.40 L y que contiene 0.100 moles de aire se deja a la deriva en la Estación Espacial Internacional, temporalmente inhabitada y despresurizada. La luz solar que pasa por una ventanilla incide sobre el globo y hace que explote provocando que el aire en su interior experimente una expansión libre en la estación vacía, cuyo volumen total es de 425 m^3. Calcule el cambio de entropía del aire durante la expansión.

PROBLEMAS

20.35 •• PA Una máquina de Carnot ideal opera entre 500 y 100°C con un suministro de calor de 250 J por ciclo. *a*) ¿Cuánto calor se entrega al depósito frío en cada ciclo? *b*) ¿Qué número mínimo de ciclos se requieren para que la máquina levante una piedra de 500 kg a una altura de 100 m?

20.36 • Se está diseñando una máquina de Carnot que usa 2 moles de CO_2 como sustancia de trabajo; el gas puede tratarse como ideal. El gas debe tener una temperatura máxima de 527°C y una presión máxima de 5.00 atm. Con un calor de entrada de 400 J por ciclo, se desea obtener 300 J de trabajo útil. *a*) Calcule la temperatura del depósito frío. *b*) ¿Durante cuántos ciclos debe operar esta máquina para derretir totalmente un bloque de hielo con masa de 10.0 kg que inicialmente estaba a 0.0°C, empleando únicamente el calor cedido por la máquina?

20.37 •• PA Cierta máquina térmica que opera en un ciclo de Carnot absorbe 150 J de calor por ciclo de su depósito de calor a 135°C y tiene una eficiencia térmica de 22.0%. *a*) ¿Cuánto trabajo realiza esta máquina por ciclo? *b*) ¿Cuánto calor cede la máquina cada ciclo? *c*) ¿Cuál es la temperatura del depósito frío? *d*) ¿Cuánto cambia la máquina la entropía del mundo en cada ciclo? *e*) ¿Qué masa de agua puede bombear esta máquina de un pozo de 35.0 m de profundidad por ciclo?

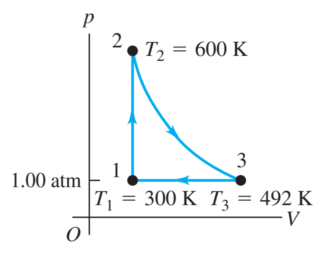
20.38 •• BIO Entropía del metabolismo. Una persona promedio, durante el sueño, metaboliza a razón de 80 W mediante la digestión o quemando grasa. Normalmente, el 20% de esta energía se usa en funciones corporales, como reparación de células, bombeo de sangre y otras aplicaciones de energía mecánica, y el resto se disipa como calor. La mayoría de las personas se deshacen de todo este exceso de calor transfiriéndolo (por conducción y por el flujo de sangre) a la superficie del cuerpo, donde es irradiado. La temperatura interna normal del cuerpo (donde el metabolismo tiene lugar) es de 37°C, y la piel normalmente es 7 C° más fría. ¿Cuánto cambia por segundo la entropía de la persona debido a esta transferencia de calor?

20.39 •• BIO Cambio de entropía por digestión de la grasa. La digestión de la grasa produce 9.3 calorías alimenticias por gramo de grasa y normalmente el 80% de esta energía se convierte en calor cuando se metaboliza. (Una caloría alimenticia equivale a 1000 calorías y, por lo tanto, es igual a 4186 J). Entonces el cuerpo mueve todo este calor a la superficie en una combinación de conductividad térmica y circulación de la sangre. La temperatura interna del cuerpo (donde se realiza la digestión) es normalmente de 37°C, y la superficie está normalmente a unos 30°C. ¿En cuánto cambia la entropía del cuerpo la digestión y el metabolismo de 2.50 g de mantequilla? ¿Aumenta o disminuye?

20.40 • Una máquina térmica usa como sustancia de trabajo 0.350 moles de un gas diatómico ideal que efectúa el ciclo que se muestra en el diagrama pV de la figura 20.40. El proceso $1 \rightarrow 2$ es a volumen

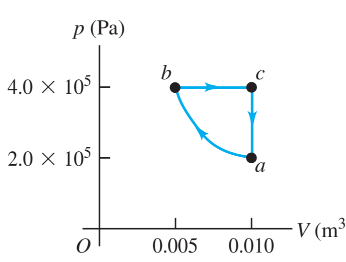
constante, de 2 → 3 es adiabático y de 3 → 1 es a presión constante de 1.00 atm. Para este gas, $\gamma = 1.40$. *a*) Calcule la presión y el volumen en los puntos 1, 2 y 3. *b*) Calcule Q, W y ΔU para cada uno de los tres procesos. *c*) Calcule el trabajo neto efectuado por el gas en el ciclo. *d*) Calcule el flujo neto de calor de la máquina en un ciclo. *e*) Determine la eficiencia térmica de la máquina y compárela con la de una máquina de Carnot que opera entre las mismas temperaturas mínima y máxima T_1 y T_2.

Figura **P20.40**



20.41 •• CALC Usted construye una máquina térmica que somete 1.00 mol de un gas diatómico ideal al ciclo mostrado en la figura P20.41. *a*) Demuestre que el segmento *ab* es una compresión isotérmica. *b*) ¿Durante cuál segmento (o segmentos) del ciclo el gas absorbe calor? ¿Durante cuál segmento (o segmentos) se cede calor? ¿Cómo lo sabe? *c*) Calcule la temperatura en los puntos *a*, *b* y *c*. *d*) Calcule el calor neto intercambiado con los alrededores y el trabajo neto que realiza la máquina en un ciclo. *e*) Calcule la eficiencia térmica de la máquina.

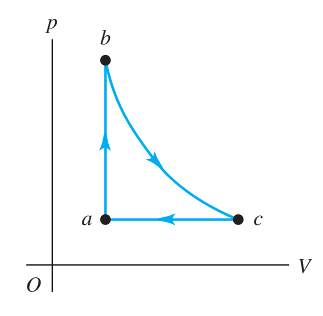
Figura **P20.41**



20.42 • Bomba de calor. Una bomba de calor es una máquina térmica operada en reversa. En invierno bombea calor del aire frío exterior al aire más cálido del interior de un edificio, manteniéndolo a una temperatura agradable. En verano bombea calor del aire más fresco dentro del edificio al aire más cálido del exterior, actuando como acondicionador de aire. *a*) Si la temperatura exterior en invierno es de −5.0°C y la temperatura interior es de 17.0°C, ¿cuántos joules de calor suministrará la bomba al interior por cada joule de energía eléctrica empleado para operar la unidad, suponiendo un ciclo ideal de Carnot? *b*) Suponga que tiene la opción de usar calefacción por resistencia eléctrica en lugar de una bomba de calor. ¿Cuánta energía eléctrica necesitaría para suministrar al interior de la casa la misma cantidad de calor que en el inciso *a*)? Considere una bomba de calor de Carnot que suministra calor al interior de una casa para mantenerla a 68°F. Demuestre que la bomba de calor suministra menos calor por cada joule de energía eléctrica empleado para operar la unidad a medida que disminuye la temperatura exterior. Observe que este comportamiento es opuesto a la dependencia de la eficiencia de una máquina térmica de Carnot con respecto a la diferencia entre las temperaturas de los depósitos. Explique a qué se debe esto.

20.43 • CALC Una máquina térmica opera empleando el ciclo de la figura P20.43. La sustancia de trabajo es de 2.00 moles de helio gaseoso, que alcanza una temperatura máxima de 327°C. Suponga que el helio se puede tratar como gas ideal. El proceso *bc* es isotérmico. La presión en los estados *a* y *c* es de 1.00×10^5 Pa, y en el estado *b*, de 3.00×10^5 Pa. *a*) ¿Cuánto calor entra en el gas y cuánto sale del gas en cada ciclo? *b*) ¿Cuánto trabajo efectúa la máquina en cada ciclo y qué eficiencia tiene? *c*) Compare la eficiencia de esta máquina con la máxima eficiencia posible que puede lograrse con los depósitos caliente y frío que se usan en este ciclo.

Figura **P20.43**

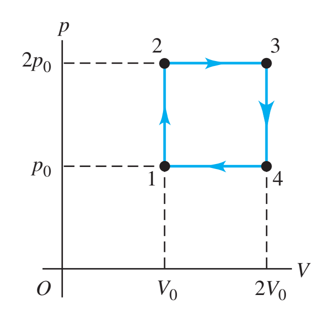


20.44 • PA Imagine que, como ingeniero mecánico, le piden diseñar una máquina de Carnot que use como sustancia de trabajo 2.00 moles de un gas ideal monoatómico y opere con un depósito caliente a 500°C. La máquina debe levantar 2.00 m una masa de 15.0 kg en cada ciclo, empleando un suministro de calor de 500 J. El gas en la cámara de la máquina puede tener un volumen mínimo de 5.00 L durante el ciclo. *a*) Dibuje un diagrama *pV* para este ciclo, indicando dónde entra calor en el gas y dónde sale de él. *b*) ¿A qué temperatura debe estar el depósito frío? *c*) Calcule la eficiencia térmica de la máquina. *d*) ¿Cuánta energía térmica gasta esta máquina en cada ciclo? *e*) Calcule la presión máxima que tendrá que resistir la cámara de gas.

20.45 ••• Una planta de electricidad experimental en el Laboratorio de Energía Natural de Hawái genera electricidad a partir del gradiente de temperatura del océano. Las temperaturas superficial y de aguas profundas son de 27 y 6°C, respectivamente. *a*) Calcule la eficiencia teórica máxima de esta planta. *b*) Si la planta debe producir 210 kW de potencia, ¿con qué rapidez debe extraerse calor del agua tibia? ¿Con qué rapidez debe absorber calor el agua fría? Suponga la eficiencia teórica máxima. *c*) El agua fría que ingresa en la planta sale a 10°C. Calcule la rapidez, en kg/h y en L/h, con que debe fluir el agua fría por el sistema.

20.46 •• Calcule la eficiencia térmica de una máquina en la que *n* moles de un gas ideal diatómico realizan el ciclo 1 → 2 → 3 → 4 → 1 que se muestra en la figura P20.46.

Figura **P20.46**



20.47 • CALC Un cilindro contiene oxígeno a una presión de 2.00 atm. El volumen es de 4.00 L y la temperatura de 300 K. Suponga que el oxígeno se puede tratar como gas ideal, y que se somete a los siguientes procesos:

i. Calentamiento a presión constante del estado inicial (estado 1) al estado 2, donde $T = 450$ K.
ii. Enfriamiento a volumen constante a 250 K (estado 3).
iii. Compresión a temperatura constante a un volumen de 4.00 L (estado 4).
iv. Calentamiento a volumen constante a 300 K, regresando el sistema al estado 1.

a) Muestre estos cuatro procesos en un diagrama *pV*, dando los valores numéricos de *p* y *V* en cada estado. *b*) Calcule *Q* y *W* para cada proceso. *c*) Calcule el trabajo neto efectuado por el oxígeno en el ciclo completo. *d*) Determine la eficiencia de este dispositivo como máquina térmica y compárela con la de una máquina de ciclo de Carnot que opera entre las mismas temperaturas mínima y máxima de 250 y 450 K.

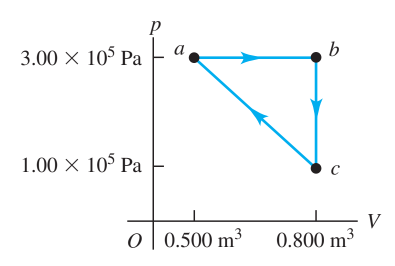
20.48 •• PA BIO Entropía humana. Una persona, cuya piel tiene un área de 1.85 m^2 y una temperatura de 30.0°C, está descansando en una habitación aislada donde la temperatura ambiente es de 20.0°C. En esta situación, la persona se deshace del calor excesivo por radiación. ¿Cuánto cambia la persona la entropía del aire cada segundo en esta habitación? (Recuerde que la habitación devuelve radiación a la persona y que la emisividad de la piel es de 1.00).

20.49 •• PA BIO Máquina humana. Usted decide usar su cuerpo como una máquina térmica de Carnot. El gas de operación está en un tubo con uno de sus extremos en su boca (donde la temperatura es de 37.0°C) y el otro en la superficie de su piel, a 30.0°C. *a*) ¿Cuál es la eficiencia máxima de esta máquina térmica? ¿Esta máquina tendría alguna utilidad? *b*) Suponga que desea utilizar esta máquina humana para levantar una caja de 2.50 kg del piso a una mesa de 1.20 m arriba del suelo. ¿Cuánto debe aumentar la energía potencial gravitacional y cuánto calor de entrada se necesita para hacer esto? *c*) Si una barra de su caramelo favorito tiene 350 calorías alimenticias (1 caloría alimenticia = 4186 J) y el 80% de la energía alimenticia se convierte en calor, ¿cuántas barras de caramelo debe consumir para levantar la caja de este modo?

20.50 •• PA Cambio de entropía debida al Sol. El Sol irradia desde su superficie a 5800 K (con una emisividad de 1.0) hacia el espacio vacío cercano, el cual está a una temperatura de 3 K. *a*) ¿En cuánto cambia el Sol la entropía del Universo cada segundo? (Consulte el apéndice F). *b*) ¿El proceso es reversible o irreversible? ¿La respuesta del inciso *a*) es consistente con esta conclusión? Explique su respuesta.

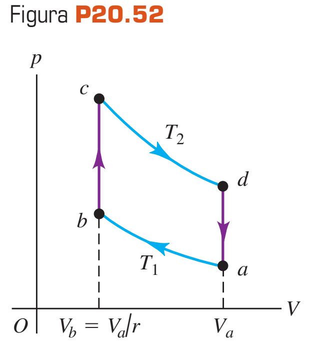
20.51 • Un gas ideal monoatómico realiza el ciclo de la figura P20.51 en el sentido que se indica. La trayectoria del proceso $c \rightarrow a$ es una recta en el diagrama pV. *a*) Calcule Q, W y ΔU para cada proceso: $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$ y $c \rightarrow a$. *b*) Calcule Q, W y ΔU para un ciclo completo. *c*) Determine la eficiencia del ciclo.

Figura **P20.51**



20.52 •• CALC Motor de ciclo Stirling. El *ciclo Stirling* es similar al ciclo Otto, excepto que la compresión y expansión del gas se efectúan a temperatura constante, no adiabáticamente. El ciclo Stirling se usa en motores de combustión *externa* (de hecho, no se necesita quemar combustible; se puede utilizar *cualquier* forma para producir una diferencia de temperatura: gradiente de temperatura solar, geotérmica, oceánica, etcétera), lo que implica que el gas del interior del cilindro no participa en la combustión. El calor se suministra quemando combustible de manera constante afuera del cilindro, no explosivamente en su interior como en el ciclo Otto. Por ello, los motores de ciclo Stirling son más silenciosos, pues no hay válvulas de admisión y escape (una fuente importante de ruido). Si bien se usan motores Stirling pequeños para diversos propósitos, las versiones para automóvil no han tenido éxito porque son más grandes, pesadas y costosas que los motores convencionales de automóviles. La secuencia de pasos del fluido de trabajo dentro del ciclo (figura P20.52) es:

Figura **P20.52**



i. Compresión isotérmica a temperatura T_1 del estado inicial a al estado b, con una razón de compresión r.
ii. Calentamiento a volumen constante al estado c a temperatura T_2.
iii. Expansión isotérmica a T_2 al estado d.
iv. Enfriamiento a volumen constante de regreso al estado a.

Suponga que el fluido de trabajo es n moles de gas ideal (cuya C_V es independiente de la temperatura). *a*) Calcule Q, W y ΔU para cada proceso, $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$, $c \rightarrow d$ y $d \rightarrow a$. *b*) En el ciclo Stirling, las transferencias de calor en $b \rightarrow c$ y $d \rightarrow a$ no implican fuentes de calor externas, sino que usan *regeneración*: la misma sustancia que transfiere calor al gas del interior del cilindro en el proceso $b \rightarrow c$ absorbe calor del gas en el proceso $d \rightarrow a$. Por lo tanto, los calores transferidos $Q_{b \rightarrow c}$ y $Q_{d \rightarrow a}$ no afectan la eficiencia del motor. Explique esta afirmación comparando las expresiones para $Q_{b \rightarrow c}$ y $Q_{d \rightarrow a}$ calculadas en el inciso *a*). *c*) Calcule la eficiencia de un motor de ciclo Stirling en términos de las temperaturas T_1 y T_2 y compárela con la de una máquina de ciclo de Carnot que opera entre las mismas temperaturas. (Históricamente, el ciclo Stirling se diseñó antes que el de Carnot). ¿Este resultado viola la segunda ley de la termodinámica? Explique. Por desgracia, los motores de ciclo Stirling reales no pueden lograr esta eficiencia a causa de problemas con los procesos de transferencia de calor y pérdidas de presión en el motor.

20.53 •• Una máquina de Carnot opera entre dos depósitos de calor a temperaturas T_H y T_C. Un inventor propone aumentar la eficiencia operando una máquina entre T_H y una temperatura intermedia T', y una segunda máquina entre T' y T_C usando el calor expulsado por la primera. Calcule la eficiencia de este sistema compuesto y compárela con la de la máquina original.

20.54 ••• Una planta generadora de energía eléctrica de 1000 MW, alimentada con carbón, tiene una eficiencia térmica del 40%. *a*) ¿Cuál es la rapidez de suministro de calor a la planta? *b*) La planta quema carbón de piedra (antracita), que tiene un calor de combustión de 2.65×10^7 J/kg. ¿Cuánto carbón consume la planta al día, si opera de manera continua? *c*) ¿A qué rapidez es cedido el calor hacia el depósito frío, que es un río cercano? *d*) La temperatura del río es de 18.0°C antes de llegar a la planta de energía y de 18.5°C después de que recibe el calor de desecho de la planta. Calcule la rapidez de flujo del río en metros cúbicos por segundo. *e*) ¿En cuánto aumenta la entropía del río cada segundo?

20.55 • Termodinámica de un motor de automóvil. Un Volkswagen Passat tiene un motor de ciclo Otto de seis cilindros con razón de compresión $r = 10.6$. El diámetro de cada cilindro, llamado *barreno* del motor, es de 82.5 mm. La distancia que el pistón se mueve durante la compresión en la figura 20.5, la *carrera* del motor, es de 86.4 mm. La presión inicial de la mezcla aire-combustible (en el punto a de la figura 20.6) es de 8.50×10^4 Pa, y la temperatura inicial es de 300 K (la del aire exterior). Suponga que, en cada ciclo, se agregan 200 J de calor a cada cilindro al quemarse la gasolina y que el gas tiene $C_V = 20.5$ J/mol·K y $\gamma = 1.40$. *a*) Calcule el trabajo total que realiza cada cilindro del motor en un ciclo y el calor disipado cuando el gas se enfría a la temperatura del aire exterior. *b*) Calcule el volumen de la mezcla aire-combustible en el punto a del ciclo. *c*) Calcule la presión, el volumen y la temperatura del gas en los puntos b, c y d del ciclo. Dibuje un diagrama pV que muestre los valores numéricos de p, V y T para cada uno de los cuatro estados. *d*) Compare la eficiencia de este motor con la de una máquina de Carnot que opera entre las mismas temperaturas máxima y mínima.

20.56 • Un sistema de aire acondicionado opera con 800 W de potencia y tiene un coeficiente de rendimiento de 2.80 a una temperatura ambiente de 21.0°C y una temperatura exterior de 35.0°C. *a*) Calcule la rapidez a la que esta unidad elimina el calor. *b*) Calcule la rapidez a la que se descarga calor al aire exterior. *c*) Calcule el cambio total de entropía en la habitación si el sistema de aire acondicionado funciona durante una hora. Calcule el cambio total de entropía en el aire exterior durante el mismo periodo. *d*) Calcule el cambio neto de entropía para el sistema (habitación + aire exterior).

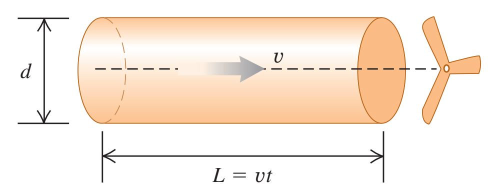
20.57 •• **CALC** **Energía no disponible.** Según el análisis de la entropía y la segunda ley que hicimos después del ejemplo 20.10 (sección 20.7), el aumento de entropía durante un proceso irreversible está asociado con una disminución en la disponibilidad de energía. Considere un ciclo de Carnot que usa un depósito frío con temperatura Kelvin T_c. Se trata de un depósito verdadero, es decir, lo bastante grande como para que no cambie su temperatura cuando acepta calor de la máquina. Esta última acepta calor de un objeto a temperatura T', donde $T' > T_c$. El objeto tiene tamaño finito, así que se enfría cuando se extrae calor de él. La máquina sigue operando hasta que $T' = T_c$. *a*) Demuestre que la magnitud total del calor cedido al depósito de baja temperatura es $T_c|\Delta S_h|$, donde ΔS_h es el cambio de entropía del depósito caliente. *b*) Aplique el resultado del inciso *a*) a 1.00 kg de agua que inicialmente está a una temperatura de 373 K, como fuente de calor para la máquina, y $T_c = 273$ K. ¿Cuánto trabajo mecánico total puede efectuar la máquina hasta detenerse? *c*) Repita el inciso *b*) para 2.00 kg de agua a 323 K. *d*) Compare la cantidad de trabajo que puede obtenerse de la energía contenida en el agua del ejemplo 20.10 antes y después de mezclarse. Indique si su resultado demuestra que ahora hay menos energía disponible.

20.58 ••• **PA** La potencia máxima que puede extraer una turbina de viento de una corriente de aire es aproximadamente

$$P = kd^2v^3$$

donde d es el diámetro de las aspas, v es la rapidez del viento y la constante $k = 0.5\ \text{W}\cdot\text{s}^3/\text{m}^5$. *a*) Explique la dependencia de P con respecto a d y a v considerando un cilindro de aire que pasa por las aspas en un tiempo t (figura P20.58). Este cilindro tiene diámetro d, longitud $L = vt$ y densidad ρ. *b*) La turbina de viento Mod-5B de Kahaku en la isla hawaiana de Oahu tiene un diámetro de aspas de 97 m (un poco más largo que un campo de fútbol americano), está sobre una torre de 58 m y genera 3.2 MW de potencia eléctrica. Suponiendo una eficiencia del 25%, ¿qué rapidez del viento, en m/s y km/h, se requiere para obtener esa potencia? *c*) Las turbinas de viento comerciales suelen colocarse en cañones montañosos o lugares por donde pasa el viento. ¿Por qué?

Figura **P20.58**



20.59 •• **CALC** *a*) Para el ciclo Otto de la figura 20.6, calcule los cambios en entropía del gas en cada uno de los procesos a volumen constante $b \rightarrow c$ y $d \rightarrow a$ en términos de las temperaturas T_a, T_b, T_c y T_d, y el número de moles n y la capacidad calorífica C_V del gas. *b*) Calcule el cambio total de entropía en el motor durante un ciclo. (*Sugerencia:* Use la relación entre T_a y T_b y entre T_d y T_c). *c*) Los procesos $b \rightarrow c$ y $d \rightarrow a$ se efectúan irreversiblemente en un motor Otto real. Explique cómo puede conciliarse esto con el resultado del inciso *b*).

20.60 •• **CALC** **Diagrama *TS*.** *a*) Dibuje una gráfica de un ciclo de Carnot, con la temperatura Kelvin en el eje vertical y la entropía en el horizontal. Esto es un diagrama de temperatura-entropía, o *TS*. *b*) Demuestre que el área bajo cualquier curva que representa una trayectoria reversible en un diagrama de temperatura-entropía representa el calor absorbido por el sistema. *c*) A partir de su diagrama deduzca la expresión para la eficiencia térmica de un ciclo de Carnot. *d*) Dibuje un diagrama de temperatura-entropía para el ciclo Stirling, descrito en el problema 20.52. Use este diagrama para relacionar las eficiencias de los ciclos de Carnot y Stirling.

20.61 • Un estudiante de física sumerge un extremo de una varilla de cobre en agua hirviendo a 100°C y el otro en una mezcla agua-hielo a 0°C. Los costados de la varilla están aislados. Una vez que la varilla alcanza condiciones de estado estable, 0.120 kg de hielo se derrite en cierto tiempo. Para este lapso, calcule *a*) el cambio de entropía del agua en ebullición; *b*) el cambio de entropía de la mezcla agua-hielo; *c*) el cambio de entropía de la varilla de cobre; *d*) el cambio total de entropía del sistema completo.

20.62 •• **CALC** Imagine que para calentar una taza de agua (250 cm^3) y preparar café, coloca un calentador eléctrico en la taza. Mientras la temperatura del agua aumenta de 20 a 78°C, la temperatura del elemento calefactor permanece en 120°C. Calcule el cambio de entropía de *a*) el agua, *b*) el elemento calefactor, *c*) el sistema de agua y elemento calefactor. (Use el mismo supuesto acerca del calor específico del agua que usamos en el ejemplo 20.10 de la sección 20.7 y desprecie el calor que fluye a la taza en sí). *d*) ¿Este proceso es reversible o irreversible? Explique.

20.63 •• **CALC** Un objeto de masa m_1, calor específico c_1 y temperatura T_1 se coloca en contacto con otro de masa m_2, calor específico c_2 y temperatura $T_2 > T_1$. Como resultado, la temperatura del primer objeto aumenta a T y la del segundo baja a T'. *a*) Demuestre que el aumento de entropía del sistema es

$$\Delta S = m_1c_1 \ln\frac{T}{T_1} + m_2c_2 \ln\frac{T'}{T_2}$$

y que la conservación de la energía exige que

$$m_1c_1(T - T_1) = m_2c_2(T_2 - T')$$

b) Demuestre que el cambio de entropía ΔS, considerado como función de T, es *máximo* si $T = T'$, la condición de equilibrio termodinámico. *c*) Analice el resultado del inciso *b*) en términos de la idea de entropía como medida del desorden.

PROBLEMA DE DESAFÍO

20.64 ••• Considere un ciclo Diesel que inicia (punto a de la figura 20.7) con aire a una temperatura T_a. El aire puede tratarse como gas ideal. *a*) Si la temperatura en el punto c es T_c, deduzca una expresión para la eficiencia del ciclo en términos de la razón de compresión r. *b*) Calcule la eficiencia si $T_a = 300$ K, $T_c = 950$ K, $\gamma = 1.40$ y $r = 21.0$.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

Sí. Eso es lo que hace un refrigerador: hace que fluya calor del interior frío al exterior cálido. La segunda ley de la termodinámica dice que no puede haber un flujo *espontáneo* de calor de un cuerpo frío a uno caliente. El refrigerador cuenta con un motor que efectúa trabajo sobre el sistema para *forzar* al calor a que fluya en ese sentido.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

20.1 Respuesta: ii. Al igual que deslizar un libro por una mesa, el hecho de frotarse las manos utiliza fricción para convertir energía mecánica en calor. En el proceso opuesto (que es imposible), ¡las manos se enfriarían espontáneamente y la energía así liberada haría que las manos se movieran rítmicamente hacia atrás y hacia adelante!

20.2 Respuesta: iii, i, ii. A partir de la ecuación (20.4), la eficiencia es $e = W/Q_H$, y de la ecuación (20.2), $W = Q_H + Q_C = |Q_H| - |Q_C|$. Para la máquina **i,** $Q_H = 5000$ J y $Q_C = -4500$ J, de manera que $W = 5000$ J + (−4500 J) = 500 J y $e = (500 \text{ J})/(5000 \text{ H}) = 0.100$. Para la máquina **ii**, $Q_H = 25{,}000$ J y $W = 2000$ J, por lo que $e = (2000 \text{ J})/(25{,}000 \text{ J}) = 0.080$. Para la máquina **iii**, $W = 400$ J y $Q_C = -2800$ J, de manera que $Q_H = W - Q_C = 400 \text{ J} - (-2800 \text{ J}) = 3200$ J y $e = (400 \text{ J})/(3200 \text{ J}) = 0.125$.

20.3 Respuestas: i, ii. Duplicar la cantidad de combustible quemado por ciclo significa que Q_H se duplica, de manera que el aumento resultante en la presión de b a c en la figura 20.6 es mayor. La razón de compresión y, por lo tanto, la eficiencia permanecen iguales, así que $|Q_C|$ (la cantidad de calor expulsado hacia el ambiente) debe incrementarse en el mismo factor que Q_H. Por consiguiente, la caída de presión de d a a en la figura 20.6 también es mayor. El volumen V y la razón de compresión r no cambian, de manera que las dimensiones horizontales del diagrama pV no se alteran.

20.4 Respuesta: no Un refrigerador utiliza un suministro de trabajo para transferir calor de un sistema (el interior del refrigerador) a otro (su exterior, que incluye la casa donde el refrigerador está instalado). Si la puerta está abierta, estos dos sistemas son en realidad el *mismo* sistema, y tarde o temprano estarán a la misma temperatura. Por la primera ley de la termodinámica, todo el suministro de trabajo al motor del refrigerador se convertirá en calor y la temperatura de la casa *aumentará*. Para enfriar la casa se requiere un sistema que transfiera calor de esta al mundo exterior, como un acondicionador de aire o una bomba de calor.

20.5 Respuestas: no, no Tanto la máquina 100% eficiente de la figura 20.11*a* como el refrigerador de la figura 20.11*b* al que no se le suministra trabajo, al final de un ciclo, regresan al mismo estado que al principio, así que el cambio neto en energía interna de cada sistema es cero ($\Delta U = 0$). Para la máquina 100% eficiente, el flujo neto de calor hacia la máquina es igual que el trabajo neto realizado, por lo que $Q = W$, $Q - W = 0$, y se cumple la primera ley ($\Delta U = Q - W$). En el caso del refrigerador, no se realiza ningún trabajo neto (así que $W = 0$) y fluye tanto calor hacia dentro como hacia fuera ($Q = 0$); de nuevo, $Q - W = 0$ y $\Delta U = Q - W$ de acuerdo con la primera ley. La *segunda* ley de la termodinámica nos dice que tanto la máquina 100% eficiente como el refrigerador al que no se le suministra trabajo son imposibles.

20.6 Respuesta: no La eficiencia no puede ser mayor que la de una máquina de Carnot que opera entre los mismos límites de temperatura, $e_{\text{Carnot}} = 1 - (T_C/T_H)$ [ecuación (20.14)]. La temperatura T_C del depósito frío de este motor enfriado por aire es cercana a 300 K (temperatura ambiente) y la temperatura T_H del depósito caliente no puede exceder el punto de fusión del cobre, 1356 K (véase la tabla 17.4). Por lo tanto, la máxima eficiencia posible de Carnot que puede lograrse es $e = 1 - (300 \text{ K})/(1356 \text{ K}) = 0.78$, es decir, 78%. La temperatura de cualquier motor real sería menor, así que el motor del inventor jamás podrá alcanzar una eficiencia del 85%. Mejor invierta su dinero en otro proyecto.

20.7 Respuestas: −102 J/K, no El proceso descrito es exactamente opuesto al empleado en el ejemplo 20.10. Este resultado viola la segunda ley de la termodinámica, que establece que la entropía de un sistema aislado no puede disminuir.

20.8 Respuesta: i. Con respecto a **i**, en el ejemplo 20.8 (sección 20.7) vimos que, para un gas ideal, el cambio de entropía durante una expansión libre es igual al de una expansión isotérmica. De acuerdo con la ecuación (20.23), esto implica que la razón del número de estados microscópicos después y antes de la expansión, w_2/w_1, también es la misma en los dos casos. Por el ejemplo 20.11, $w_2/w_1 = 2^N$, así que el número de estados microscópicos aumenta en un factor de 2^N. Con respecto a **ii,** en una expansión reversible, el cambio de entropía es $\Delta S = \int dQ/T = 0$; si la expansión es adiabática, no hay flujo de calor, así que $\Delta S = 0$. Según la ecuación (20.23), $w_2/w_1 = 1$ y el número de estados microscópicos *no* cambia. La diferencia es que, durante una expansión adiabática, la temperatura disminuye y las moléculas se mueven más lentamente, de manera que pueden estar en menos estados microscópicos que durante una expansión isotérmica.

Problema práctico

Respuestas: ***a***) 34.83°C ***b***) +12.1 J/K

APÉNDICE A

EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

El *Système International d'Unités*, abreviado SI, es el sistema desarrollado por la Conferencia General de Pesos y Medidas y adoptado por casi todas las naciones industriales del mundo. El siguiente material es una adaptación del National Institute of Standards and Technology (**http://physics.nist.gov/cuu**).

Cantidad	Nombre de la unidad	Símbolo	
	Unidades básicas del SI		
longitud	metro	m	
masa	kilogramo	kg	
tiempo	segundo	s	
corriente eléctrica	ampere	A	
temperatura termodinámica	kelvin	K	
cantidad de sustancia	mol	mol	
intensidad lumínica	candela	cd	
	Unidades derivadas del SI		**Unidades equivalentes**
área	metro cuadrado	m^2	
volumen	metro cúbico	m^3	
frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}
densidad de masa (densidad)	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3	
rapidez, velocidad	metro por segundo	m/s	
velocidad angular	radián por segundo	rad/s	
aceleración	metro por segundo al cuadrado	m/s^2	
aceleración angular	radián por segundo al cuadrado	rad/s^2	
fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
presión (tensión mecánica)	pascal	Pa	N/m^2
viscosidad cinemática	metro cuadrado por segundo	m^2/s	
viscosidad dinámica	newton-segundo por metro cuadrado	$N \cdot s/m^2$	
trabajo, energía, cantidad de calor	joule	J	$N \cdot m$
potencia	watt	W	J/s
cantidad de electricidad	coulomb	C	$A \cdot s$
diferencia de potencia, fuerza electromotriz	volt	V	J/C, W/A
fuerza de campo eléctrico	volt por metro	V/m	N/C
resistencia eléctrica	ohm	Ω	V/A
capacitancia	farad	F	$A \cdot s/V$
flujo magnético	weber	Wb	$V \cdot s$
inductancia	henry	H	$V \cdot s/A$
densidad de flujo magnético	tesla	T	Wb/m^2
fuerza de campo magnético	ampere por metro	A/m	
fuerza magnetomotriz	ampere	A	
flujo luminoso	lumen	lm	$cd \cdot sr$
luminancia	candela por metro cuadrado	cd/m^2	
iluminancia	lux	lx	lm/m^2
número de onda	1 por metro	m^{-1}	
entropía	joule por kelvin	J/K	
capacidad de calor específico	joule por kilogramo-kelvin	$J/kg \cdot K$	
conductividad térmica	watt por metro-kelvin	$W/m \cdot K$	

Cantidad	Nombre de la unidad	Símbolo	Unidades equivalentes
intensidad radiante	watt por esterradián	W/sr	
actividad (de una fuente radiactiva)	becquerel	Bq	s^{-1}
dosis de radiación	gray	Gy	J/kg
dosis de radiación equivalente	sievert	Sv	J/kg
	Unidades complementarias del SI		
ángulo plano	radián	rad	
ángulo sólido	esterradián	sr	

Definiciones de las unidades del SI

metro (m) El *metro* es la longitud igual a la distancia recorrida por la luz, en el vacío, en un tiempo de 1/299,792,458 segundos.

kilogramo (kg) El *kilogramo* es la unidad de masa; es igual a la masa del prototipo internacional del kilogramo (que es un cilindro particular de una aleación de platino-iridio que la Oficina Internacional de Pesas y Medidas conserva en una bóveda de seguridad en Sèvres, Francia).

segundo (s) El *segundo* es la duración de 9,192,631,770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

ampere (A) El *ampere* es la corriente constante que, si se mantiene en dos conductores rectos y paralelos de longitud infinita, de sección transversal circular despreciable y separados por una distancia de 1 metro en el vacío, produciría entre ellos una fuerza igual a 2×10^{-7} newtons por metro de longitud.

kelvin (K) El *kelvin*, unidad de temperatura termodinámica, es la fracción 1/273.16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.

ohm (Ω) El *ohm* es la resistencia eléctrica entre dos puntos de un conductor cuando una diferencia constante de potencial de 1 volt, aplicada entre ellos, produce en el conductor una corriente de 1 ampere, sin que el conductor sea fuente de ninguna fuerza electromotriz.

coulomb (C) El *coulomb* es la cantidad de electricidad transportada en 1 segundo por una corriente de 1 ampere.

candela (cd) La *candela* es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} hertz y que tiene una intensidad radiante en esa dirección de 1/683 watts por esterradián.

mol (mol) El *mol* es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos de carbono hay en 0.012 kg de carbono 12. Las entidades elementales deben estar especificadas y pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones, otras partículas o grupos especificados de esas partículas.

newton (N) El *newton* es la fuerza que da a una masa de 1 kilogramo una aceleración de 1 metro por segundo por segundo.

joule (J) El *joule* es el trabajo realizado cuando el punto de aplicación de una fuerza constante de 1 newton se desplaza una distancia de 1 metro en la dirección de esa fuerza.

watt (W) El *watt* es la potencia que da lugar a la generación de energía a razón de 1 joule por segundo.

volt (V) El *volt* es la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos de un alambre conductor que transporta una corriente constante de 1 ampere, cuando la potencia disipada entre tales puntos es igual a 1 watt.

weber (Wb) El *weber* es el flujo magnético que, al cerrar un circuito de una vuelta, produce en este una fuerza electromotriz de 1 volt conforme se reduce a cero a una tasa uniforme de 1 segundo.

lumen (lm) El *lumen* es el flujo luminoso emitido en un ángulo sólido de 1 esterradián por una fuente puntual uniforme que tiene una intensidad de 1 candela.

farad (F) El *farad* es la capacitancia de un capacitor entre cuyas placas hay una diferencia de potencial de 1 volt cuando tiene una carga de electricidad igual a 1 coulomb.

henry (H) El *henry* es la inductancia de un circuito cerrado en el que se produce una fuerza electromotriz de 1 volt cuando la corriente eléctrica en el circuito varía de manera uniforme a razón de 1 ampere por segundo.

radián (rad) El *radián* es el ángulo plano entre dos radios de un círculo que recorre en la circunferencia un arco igual a la longitud del radio.

esterradián (sr) El *esterradián* es el ángulo sólido que, cuando tiene su vértice en el centro de una esfera, recorre una área de la superficie de la esfera igual a la de un cuadrado cuyos lados tienen una longitud igual al radio de la esfera.

prefijos del SI Los nombres de los múltiplos y submúltiplos de unidades del SI se forman con la aplicación de los prefijos listados en el apéndice F.

APÉNDICE B

RELACIONES MATEMÁTICAS ÚTILES

Álgebra

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^{(x+y)} = a^x a^y \qquad a^{(x-y)} = \frac{a^x}{a^y}$$

Logaritmos: Si $\log a = x$, entonces $a = 10^x$. $\log a + \log b = \log(ab)$ $\quad \log a - \log b = \log(a/b)$ $\quad \log(a^n) = n \log a$

Si $\ln a = x$, entonces $a = e^x$. $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ $\quad \ln a - \ln b = \ln(a/b)$ $\quad \ln(a^n) = n \ln a$

Fórmula cuadrática: Si $ax^2 + bx + c = 0$, $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Teorema del binomio

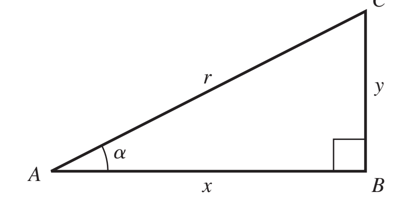
$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \cdots$$

Trigonometría

En el triángulo rectángulo ABC, $x^2 + y^2 = r^2$.

Definiciones de las funciones trigonométricas:

$\operatorname{sen}\alpha = y/r \qquad \cos\alpha = x/r \qquad \tan\alpha = y/x$



Identidades:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

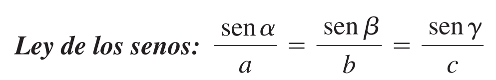
$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \pi/2) = \pm\cos\alpha \qquad \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

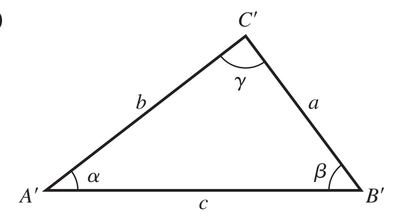
$$\cos(\alpha \pm \pi/2) = \mp\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Para *cualquier* triángulo $A'B'C'$ (no necesariamente un triángulo rectángulo) de lados a, b y c y ángulos α, β y γ:



Ley de los senos: $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$

Ley de los cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



Geometría

Circunferencia de un círculo de radio r: $\quad C = 2\pi r$
Área de un círculo de radio r: $\quad A = \pi r^2$
Volumen de una esfera de radio r: $\quad V = 4\pi r^3/3$
Área de la superficie de una esfera de radio r: $\quad A = 4\pi r^2$
Volumen de un cilindro de radio r y altura h: $\quad V = \pi r^2 h$

Cálculo

Derivadas:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} ax = a\cos ax \qquad \frac{d}{dx}\cos ax = -a\operatorname{sen} ax$$

Integrales:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln x \qquad \int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax \qquad \int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) \qquad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \qquad \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Series de potencias (convergentes para el intervalo de x que se indica):

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (\text{todas las } x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (\text{todas las } x)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad (|x| < \pi/2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (\text{todas las } x)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (|x| < 1)$$

APÉNDICE C

EL ALFABETO GRIEGO

Nombre	Mayúscula	Minúscula	Nombre	Mayúscula	Minúscula	Nombre	Mayúscula	Minúscula
Alfa	A	α	Iota	I	ι	Rho	P	ρ
Beta	B	β	Kappa	K	κ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mu	M	μ	Ípsilon	Υ	υ
Épsilon	E	ϵ	Nu	N	ν	Fi	Φ	ϕ
Zeta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	X	χ
Eta	H	η	Ómicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	θ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω

APÉNDICE D

TABLA PERIÓDICA DE LOS ELEMENTOS

Grupo / Periodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1 **H** 1.008																	2 **He** 4.003
2	3 **Li** 6.941	4 **Be** 9.012											5 **B** 10.811	6 **C** 12.011	7 **N** 14.007	8 **O** 15.999	9 **F** 18.998	10 **Ne** 20.180
3	11 **Na** 22.990	12 **Mg** 24.305											13 **Al** 26.982	14 **Si** 28.086	15 **P** 30.974	16 **S** 32.065	17 **Cl** 35.453	18 **Ar** 39.948
4	19 **K** 39.098	20 **Ca** 40.078	21 **Sc** 44.956	22 **Ti** 47.867	23 **V** 50.942	24 **Cr** 51.996	25 **Mn** 54.938	26 **Fe** 55.845	27 **Co** 58.933	28 **Ni** 58.693	29 **Cu** 63.546	30 **Zn** 65.409	31 **Ga** 69.723	32 **Ge** 72.64	33 **As** 74.922	34 **Se** 78.96	35 **Br** 79.904	36 **Kr** 83.798
5	37 **Rb** 85.468	38 **Sr** 87.62	39 **Y** 88.906	40 **Zr** 91.224	41 **Nb** 92.906	42 **Mo** 95.94	43 **Tc** (98)	44 **Ru** 101.07	45 **Rh** 102.906	46 **Pd** 106.42	47 **Ag** 107.868	48 **Cd** 112.411	49 **In** 114.818	50 **Sn** 118.710	51 **Sb** 121.760	52 **Te** 127.60	53 **I** 126.904	54 **Xe** 131.293
6	55 **Cs** 132.905	56 **Ba** 137.327	71 **Lu** 174.967	72 **Hf** 178.49	73 **Ta** 180.948	74 **W** 183.84	75 **Re** 186.207	76 **Os** 190.23	77 **Ir** 192.217	78 **Pt** 195.078	79 **Au** 196.967	80 **Hg** 200.59	81 **Tl** 204.383	82 **Pb** 207.2	83 **Bi** 208.980	84 **Po** (209)	85 **At** (210)	86 **Rn** (222)
7	87 **Fr** (223)	88 **Ra** (226)	103 **Lr** (262)	104 **Rf** (261)	105 **Db** (262)	106 **Sg** (266)	107 **Bh** (264)	108 **Hs** (269)	109 **Mt** (268)	110 **Ds** (271)	111 **Rg** (272)	112 **Uub** (285)	113 **Uut** (284)	114 **Uuq** (289)	115 **Uup** (288)	116 **Uuh** (292)	117 **Uus** (294)	118 **Uuo**

Lantánidos	57 **La** 138.905	58 **Ce** 140.116	59 **Pr** 140.908	60 **Nd** 144.24	61 **Pm** (145)	62 **Sm** 150.36	63 **Eu** 151.964	64 **Gd** 157.25	65 **Tb** 158.925	66 **Dy** 162.500	67 **Ho** 164.930	68 **Er** 167.259	69 **Tm** 168.934	70 **Yb** 173.04
Actínidos	89 **Ac** (227)	90 **Th** (232)	91 **Pa** (231)	92 **U** (238)	93 **Np** (237)	94 **Pu** (244)	95 **Am** (243)	96 **Cm** (247)	97 **Bk** (247)	98 **Cf** (251)	99 **Es** (252)	100 **Fm** (257)	101 **Md** (258)	102 **No** (259)

Para cada elemento, se indica la masa atómica media del conjunto de isótopos que existen en la naturaleza. Para los elementos que no tienen un isótopo estable, la masa atómica aproximada del isótopo de vida más larga se indica entre paréntesis. Para los elementos cuya existencia se ha pronosticado pero que aún no se ha detectado, no se da la masa atómica. Todas las masas atómicas están expresadas en unidades de masa atómica ($1\ u = 1.660538782(83) \times 10^{-27}$ kg), equivalente a gramos por mol (g/mol).

APÉNDICE E

FACTORES DE CONVERSIÓN DE UNIDADES

Longitud

$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm} = 10^6\ \mu\text{m} = 10^9 \text{ nm}$
$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 0.6214 \text{ mi}$
$1 \text{ m} = 3.281 \text{ ft} = 39.37 \text{ in}$
$1 \text{ cm} = 0.3937 \text{ in}$
$1 \text{ in} = 2.540 \text{ cm}$
$1 \text{ ft} = 30.48 \text{ cm}$
$1 \text{ yd} = 91.44 \text{ cm}$
$1 \text{ mi} = 5280 \text{ ft} = 1.609 \text{ km}$
$1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m} = 10^{-8} \text{ cm} = 10^{-1} \text{ nm}$
1 milla náutica = 6080 ft
1 año luz $= 9.461 \times 10^{15}$ m

Área

$1 \text{ cm}^2 = 0.155 \text{ in}^2$
$1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2 = 10.76 \text{ ft}^2$
$1 \text{ in}^2 = 6.452 \text{ cm}^2$
$1 \text{ ft}^2 = 144 \text{ in}^2 = 0.0929 \text{ m}^2$

Volumen

1 litro $= 1000 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3 = 0.03531 \text{ ft}^3 = 61.02 \text{ in}^3$
$1 \text{ ft}^3 = 0.02832 \text{ m}^3$ = 28.32 litros = 7.477 galones
1 galón = 3.788 litros

Tiempo

1 min = 60 s
1 h = 3600 s
1 día = 86,400 s
1 año $= 365.24 \text{ d} = 3.156 \times 10^7$ s

Ángulo

$1 \text{ rad} = 57.30° = 180°/\pi$
$1° = 0.01745 \text{ rad} = \pi/180 \text{ rad}$
1 revolución $= 360° = 2\pi$ rad
1 rev/min (rpm) = 0.1047 rad/s

Rapidez

1 m/s = 3.281 ft/s
1 ft/s = 0.3048 m/s
1 mi/min = 60 mi/h = 88 ft/s
1 km/h = 0.2778 m/s = 0.6214 mi/h
1 mi/h = 1.466 ft/s = 0.4470 m/s = 1.609 km/h
1 furlong/14 días $= 1.662 \times 10^{-4}$ m/s

Aceleración

$1 \text{ m/s}^2 = 100 \text{ cm/s}^2 = 3.281 \text{ ft/s}^2$
$1 \text{ cm/s}^2 = 0.01 \text{ m/s}^2 = 0.03281 \text{ ft/s}^2$
$1 \text{ ft/s}^2 = 0.3048 \text{ m/s}^2 = 30.48 \text{ cm/s}^2$
$1 \text{ mi/h} \cdot \text{s} = 1.467 \text{ ft/s}^2$

Masa

$1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g} = 0.0685 \text{ slug}$
$1 \text{ g} = 6.85 \times 10^{-5} \text{ slug}$
1 slug = 14.59 kg
$1 \text{ u} = 1.661 \times 10^{-27} \text{ kg}$
1 kg tiene un peso de 2.205 lb cuando $g = 9.80 \text{ m/s}^2$

Fuerza

1 N $= 10^5$ dinas = 0.2248 lb
1 lb $= 4.448 \text{ N} = 4.448 \times 10^5$ dinas

Presión

$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 1.450 \times 10^{-4} \text{ lb/in}^2 = 0.209 \text{ lb/ft}^2$
$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
$1 \text{ lb/in}^2 = 6895 \text{ Pa}$
$1 \text{ lb/ft}^2 = 47.88 \text{ Pa}$
$1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 1.013 \text{ bar}$
$\quad = 14.7 \text{ lb/in}^2 = 2117 \text{ lb/ft}^2$
1 mm Hg = 1 torr = 133.3 Pa

Energía

1 J $= 10^7$ ergs = 0.239 cal
1 cal = 4.186 J (basada en caloría de 15°)
$1 \text{ ft} \cdot \text{lb} = 1.356 \text{ J}$
$1 \text{ Btu} = 1055 \text{ J} = 252 \text{ cal} = 778 \text{ ft} \cdot \text{lb}$
$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$
$1 \text{ kWh} = 3.600 \times 10^6 \text{ J}$

Equivalencia masa-energía

$1 \text{ kg} \leftrightarrow 8.988 \times 10^{16} \text{ J}$
$1 \text{ u} \leftrightarrow 931.5 \text{ MeV}$
$1 \text{ eV} \leftrightarrow 1.074 \times 10^{-9} \text{ u}$

Potencia

1 W = 1 J/s
$1 \text{ hp} = 746 \text{ W} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$
1 Btu/h = 0.293 W

APÉNDICE F

CONSTANTES NUMÉRICAS

Constantes físicas fundamentales*

Nombre	Símbolo	Valor
Rapidez de la luz en el vacío	c	2.99792458×10^{8} m/s
Magnitud de la carga eléctrica de un electrón	e	$1.602176487(40) \times 10^{-19}$ C
Constante gravitacional	G	$6.67428(67) \times 10^{-11}$ N · m²/kg²
Constante de Planck	h	$6.62606896(33) \times 10^{-34}$ J · s
Constante de Boltzmann	k	$1.3806504(24) \times 10^{-23}$ J/K
Número de Avogadro	N_A	$6.02214179(30) \times 10^{23}$ moléculas/mol
Constante de los gases	R	8.314472(15) J/mol · K
Masa del electrón	m_e	$9.10938215(45) \times 10^{-31}$ kg
Masa del protón	m_p	$1.672621637(83) \times 10^{-27}$ kg
Masa del neutrón	m_n	$1.674927211(84) \times 10^{-27}$ kg
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ Wb/A · m
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854187817\ldots \times 10^{-12}$ $C^2/N \cdot m^2$
	$1/4\pi\epsilon_0$	$8.987551787\ldots \times 10^{9}$ $N \cdot m^2/C^2$

Otras constantes útiles*

Equivalente mecánico del calor		4.186 J/cal (caloria 15°)
Presión atmosférica estándar	1 atm	1.01325×10^{5} Pa
Cero absoluto	0 K	−273.15°C
Electrón volt	1 eV	$1.602176487(40) \times 10^{-19}$ J
Unidad de masa atómica	1 u	$1.660538782(83) \times 10^{-27}$ kg
Energía del electrón en reposo	$m_e c^2$	0.510998910(13) MeV
Volumen del gas ideal (0°C y 1 atm)		22.413996(39) litro/mol
Aceleración debida a la gravedad (estándar)	g	9.80665 m/s²

Fuente:* National Institute of Standards and Technology (http://physics.nist.gov/cuu**). Los números entre paréntesis indican la incertidumbre en los dígitos finales del número principal; por ejemplo, el número 1.6454(21) significa 1.6454 ± 0.0021. Los valores sin incertidumbre son exactos.

Datos astronómicos†

Cuerpo	Masa (kg)	Radio (m)	Radio de la órbita (m)	Periodo de la órbita
Sol	1.99×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—
Luna	7.35×10^{22}	1.74×10^{6}	3.84×10^{8}	27.3 d
Mercurio	3.30×10^{23}	2.44×10^{6}	5.79×10^{10}	88.0 d
Venus	4.87×10^{24}	6.05×10^{6}	1.08×10^{11}	224.7 d
Tierra	5.97×10^{24}	6.38×10^{6}	1.50×10^{11}	365.3 d
Marte	6.42×10^{23}	3.40×10^{6}	2.28×10^{11}	687.0 d
Júpiter	1.90×10^{27}	6.91×10^{7}	7.78×10^{11}	11.86 a
Saturno	5.68×10^{26}	6.03×10^{7}	1.43×10^{12}	29.45 a
Urano	8.68×10^{25}	2.56×10^{7}	2.87×10^{12}	84.02 a
Neptuno	1.02×10^{26}	2.48×10^{7}	4.50×10^{12}	164.8 a
Plutón‡	1.31×10^{22}	1.15×10^{6}	5.91×10^{12}	247.9 a

†*Fuente:* NASA Jet Propulsion Laboratory Solar System Dynamics Group (**http://ssd.jpl.nasa.gov**) y P. Kenneth Seidelmann, ed., ***Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*** (University Science Books, Mill Valley, CA, 1992), pp. 704-706. Para cada cuerpo, el "radio" es el radio en su ecuador, y el "radio de la órbita" es su distancia promedio desde el Sol o desde la Tierra (para la Luna).

‡En agosto de 2006, la Unión Astronómica Internacional reclasificó a Plutón y otros objetos pequeños que giran en órbita alrededor del Sol como "planetas enanos".

Prefijos para potencias de 10

Potencia de 10	Prefijo	Abreviatura
10^{-24}	yocto-	y
10^{-21}	zepto-	z
10^{-18}	atto-	a
10^{-15}	femto-	f
10^{-12}	pico-	p
10^{-9}	nano-	n
10^{-6}	micro-	μ
10^{-3}	mili-	m
10^{-2}	centi-	c
10^{3}	kilo-	k
10^{6}	mega-	M
10^{9}	giga-	G
10^{12}	tera-	T
10^{15}	peta-	P
10^{18}	exa-	E
10^{21}	zetta-	Z
10^{24}	yotta-	Y

Ejemplos:

1 femtómetro $= 1$ fm $= 10^{-15}$ m

1 picosegundo $= 1$ ps $= 10^{-12}$ s

1 nanocoulomb $= 1$ nC $= 10^{-9}$ C

1 microkelvin $= 1\mu$K $= 10^{-6}$ K

1 milivolt $= 1$ mV $= 10^{-3}$ V

1 kilopascal $= 1$ kPa $= 10^{3}$ Pa

1 megawatt $= 1$ MW $= 10^{6}$ W

1 gigahertz $= 1$ GHz $= 10^{9}$ Hz

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS CON NÚMERO IMPAR

Capítulo 1

1.1 a) 1.61 km b) 3.28×10^3 ft
1.3 1.02 ns
1.5 5.36 L
1.7 31.7 a
1.9 a) 23.4 km/L b) 1.4 tanques
1.11 9.0 cm
1.13 a) 1.1×10^{-3}% b) no
1.15 0.45%
1.17 a) no b) no c) no d) no e) no
1.19 $\approx 10^6$
1.21 $\approx 4 \times 10^8$
1.23 $\approx$$70 millones
1.25 $\approx 10^4$
1.27 7.8 km, 38° al norte del este
1.29 144 m, 41° al sur del oeste
1.31 $A_x = 0$, $A_y = -8.00$ m, $B_x = 7.50$ m, $B_y = 13.0$ m, $C_x = -10.9$ m, $C_y = -5.07$ m, $D_x = -7.99$ m, $D_y = 6.02$ m
1.33 a) -8.12 m b) 15.3 m
1.35 a) 9.01 m, 33.8° b) 9.01 m, 33.7° c) 22.3 m, 250° d) 22.3 m, 70.3°
1.37 3.39 km, 31.1° al norte del oeste
1.39 a) 2.48 cm, 18.4° b) 4.09 cm, 83.7° c) 4.09 cm, 264°
1.41 $\vec{A} = -(8.00\text{ m})\hat{\jmath}$, $\vec{B} = (7.50\text{ m})\hat{\imath} + (13.0\text{ m})\hat{\jmath}$, $\vec{C} = (-10.9\text{ m})\hat{\imath} + (-5.07\text{ m})\hat{\jmath}$, $\vec{D} = (-7.99)\hat{\imath} + (6.02\text{ m})\hat{\jmath}$
1.43 a) $\vec{A} = (1.23\text{ m})\hat{\imath} + (3.38\text{ m})\hat{\jmath}$, $\vec{B} = (-2.08\text{ m})\hat{\imath} + (-1.20\text{ m})\hat{\jmath}$ b) $\vec{C} = (12.0\text{ m})\hat{\imath} + (14.9\text{ m})\hat{\jmath}$ c) 19.2 m, 51.2°
1.45 a) -104 m² b) -148 m² c) 40.6 m²
1.47 a) 165° b) 28° c) 90°
1.49 a) $-63.9\text{ m}^2\hat{k}$ b) $63.9\text{ m}^2\hat{k}$
1.51 a) -6.62 m² b) $5.55\text{ m}^2\hat{k}$
1.53 a) $A = 5.38$, $B = 4.36$ b) $-5.00\hat{\imath} + 2.00\hat{\jmath} + 7.00\hat{k}$ c) 8.83, sí
1.55 a) 1.64×10^4 km b) $2.57 r_E$
1.57 a) 2200 g b) 2.1 m
1.59 a) (2.8 ± 0.3) cm³ b) 170 ± 20
1.61 $\approx 6 \times 10^{27}$
1.63 9×10^{14}, 3×10^6 por persona
1.65 196 N, 392 N, 57.7° al este del norte; 360 N, 720 N, 57.7° al este del sur
1.67 b) $A_x = 3.03$ cm, $A_y = 8.10$ cm c) 8.65 cm, 69.5°
1.69 144 m, 41° al sur del oeste
1.71 954 N, 16.8° arriba de la dirección hacia adelante
1.73 3.30 N
1.75 a) 45.5 N b) 139°
1.77 a) (87, 258) b) 136, 25° debajo de la línea horizontal hacia la izquierda $(-x)$
1.79 160 N, 13° debajo de la horizontal
1.81 911 m, 8.9° al oeste del sur
1.83 29.6 m, 18.6° al este del sur
1.85 26.2 m, 34.2° al este del sur
1.87 124°
1.89 170 m²
1.91 a) 54.7° b) 35.3°
1.93 28.0 m
1.95 $C_x = 8.0$, $C_y = 6.1$
1.97 b) 72.2
1.99 38.5 yd, 24.6° a la derecha del campo inferior
1.101 a) 76.2 años luz b) 129°

Capítulo 2

2.1 25.0 m
2.3 1 h 10 min
2.5 a) 0.312 m/s b) 1.56 m/s
2.7 a) 12.0 m/s b) i. 0 ii. 15.0 m/s iii. 12.0 m/s c) 13.3 m/s
2.9 a) 2.33 m/s, 2.33 m/s b) 2.33 m/s, 0.33 m/s
2.11 6.7 m/s, 6.7 m/s, 0, -40.0 m/s, -40.0 m/s, -40.0 m/s, 0
2.13 a) no b) i. 12.8 m/s² ii. 3.50 m/s² iii. 0.718 m/s²
2.15 a) 2.00 cm/s, 50.0 cm, -0.125 cm/s² b) 16.0 s c) 32.0 s d) 6.20 s, 1.23 cm/s; 25.8 s, -1.23 cm/s; 36.4 s, -2.55 cm/s
2.17 a) 0.500 m/s² b) 0, 1.00 m/s²
2.19 a) 5.0 m/s b) 1.43 m/s²
2.21 a) 675 m/s² b) 0.0667 s
2.23 1.70 m
2.25 38 cm
2.27 a) 3.1×10^6 m/s² $= 3.2g$ b) 1.6 ms c) no
2.29 a) i. 5.59 m/s² ii. 7.74 m/s² b) i. 179 m ii. 1.28×10^4 m
2.31 a) 0, 6.3 m/s², -11.2 m/s² b) 100 m, 230 m, 320 m
2.33 a) 20.5 m/s² hacia arriba, 3.8 m/s² hacia arriba, 53.0 m/s² hacia arriba b) 722 km
2.35 a) 2.94 m/s b) 0.600 s
2.37 1.67 s
2.39 a) 33.5 m b) 15.8 m/s
2.41 a) $t = \sqrt{2d/g}$ b) 0.190 s
2.43 a) 646 m b) 16.4 s, 112 m/s
2.45 a) 249 m/s² b) 25.4 c) 101 m d) no (si a es constante)
2.47 0.0868 m/s²
2.49 a) 3.3 s b) $9H$
2.51 a) 467 m b) 110 m/s
2.53 a) $v_x = (0.75\text{ m/s}^3)t^2 - (0.040\text{ m/s}^4)t^3$, $x = (0.25\text{ m/s}^3)t^3 - (0.010\text{ m/s}^4)t^4$ b) 39.1 m/s
2.55 a) 10.0 m b) i. 8.33 m/s ii. 9.09 m/s iii. 9.52 m/s
2.57 b) 0.627 s, 1.59 s c) negativa en 0.627 s, positiva en 1.59 s d) 1.11 s e) 2.45 m f) 2.00 s, 0
2.59 250 km
2.61 a) 197 m/s b) 169 m/s
2.63 a) 82 km/h b) 31 km/h
2.65 a) 3.5 m/s² b) 0 c) 1.5 m/s²
2.67 a) 92.0 m b) 92.0 m
2.69 50.0 m
2.71 4.6 m/s²
2.73 a) 6.17 s b) 24.8 m c) automóvil: 21.0 m/s, camión: 13.0 m/s
2.75 a) 7.85 cm/s b) 5.00 cm/s
2.77 a) 15.9 s b) 393 m c) 29.5 m/s
2.79 a) -4.00 m/s b) 12.0 m/s
2.81 a) $2.64H$ b) $2.64T$
2.83 a) no b) sí, 14.4 m/s, no se puede obtener físicamente
2.85 a) 6.69 m/s b) 4.49 m c) 1.42 s
2.87 a) 7.7 m/s b) 0.78 s c) 0.59 s d) 1.3 m
2.89 a) 380 m b) 184 m
2.91 a) 20.5 m/s b) sí
2.93 a) 945 m b) 393 m
2.95 a) automóvil A b) 2.27 s, 5.73 s c) 1.00 s, 4.33 s d) 2.67 s
2.97 a) 9.55 s, 47.8 m b) 1.62 m/s d) 8.38 m/s e) no f) 3.69 m/s, 21.7 s, 80.0 m
2.99 a) 8.18 m/s b) i. 0.411 m ii. 1.15 km c) 9.80 m/s d) 4.90 m/s

Capítulo 3

3.1 a) 1.4 m/s, -1.3 m/s b) 1.9 m/s, 317°
3.3 a) 7.1 cm/s, 45° b) 5.0 cm/s, 90°; 7.1 cm/s, 45°; 11 cm/s, 27°
3.5 b) -8.67 m/s², -2.33 m/s² c) 8.98 m/s², 195°
3.7 b) $\vec{v} = \alpha\hat{\imath} - 2\beta t\hat{\jmath}$, $\vec{a} = -2\beta\hat{\jmath}$ c) 5.4 m/s, 297°; 2.4 m/s², 270° d) acelerando y girando a la derecha
3.9 a) 0.600 m b) 0.385 m c) $v_x = 1.10$ m/s, $v_y = -3.43$ m/s, 3.60 m/s, 72.2° abajo de la horizontal
3.11 3.32 m
3.13 a) 30.6 m/s b) 36.3 m/s
3.15 1.28 m/s²
3.17 a) 0.683 s, 2.99 s b) 24.0 m/s, 11.3 m/s; 24.0 m/s, -11.3 m/s c) 30.0 m/s, 36.9° debajo de la horizontal
3.19 a) 1.5 m b) -0.89 m/s
3.21 a) 13.6 m b) 34.6 m/s c) 103 m
3.23 a) 296 m b) 176 m c) 198 m d) i. $v_x = 15.0$ m/s, $v_y = -58.8$ m/s ii. $v_x = 15.0$ m/s, $v_y = -78.8$ m/s
3.25 a) 0.034 m/s² $= 0.0034g$ b) 1.4 h
3.27 140 m/s = 310 mph
3.29 a) 3.50 m/s² hacia arriba b) 3.50 m/s² hacia abajo c) 12.6 s
3.31 a) 14 s b) 70 s
3.33 0.36 m/s, 52.5° al sur del oeste
3.35 a) 4.7 m/s, 25° al sur del este b) 190 s c) 380 m
3.37 b) -7.1 m/s, -42 m/s c) 43 m/s, 9.6° al oeste del sur
3.39 a) 24° al oeste del sur b) 5.5 h
3.41 a) $A = 0$, $B = 2.00$ m/s², $C = 50.0$ m, $D = 0.500$ m/s³ b) $\vec{v} = 0$, $\vec{a} = (4.00\text{ m/s}^2)\hat{\imath}$ c) $v_x = 40.0$ m/s, $v_y = 150$ m/s, 155 m/s d) $\vec{r} = (200\text{ m})\hat{\imath} + (550\text{ m})\hat{\jmath}$
3.43 $2b/3c$
3.45 4.41 s
3.47 a) 123 m b) 280 m
3.49 22 m/s
3.51 31 m/s
3.53 274 m
3.55 795 m
3.57 33.7 m
3.59 a) 42.8 m/s b) 42.0 m
3.61 a) $\sqrt{2gh}$ b) 30.0° c) $6.93h$
3.63 a) 1.50 m/s b) 4.66 m
3.65 a) 6.91 m c) no
3.67 a) 17.8 m/s b) en el río, 28.4 m horizontalmente desde el punto de lanzamiento
3.69 a) 81.6 m b) en el carrito c) 245 m d) 53.1°
3.71 a) 49.5 m/s b) 50 m
3.73 a) 2000 m b) 2180 m
3.75 $\pm 25.4°$
3.77 61.2 km/h, 140 km/h
3.79 b) $v_x = R\omega(1 - \cos\omega t)$, $v_y = R\omega \operatorname{sen}\omega t$; $a_x = R\omega^2 \operatorname{sen}\omega t$, $a_y = R\omega^2 \cos\omega t$ c) $t = 0, 2\pi/\omega, 4\pi/\omega, \ldots$; $x = 0, 2\pi R, 4\pi R, \ldots$; $y = 0$; $a = R\omega^2$ en la dirección $+y$ d) no
3.81 a) 44.7 km/h, 26.6° al oeste del sur b) 10.5° al norte del oeste
3.83 7.39 m/s, 12.4° al norte del este
3.85 a) 0.659 s b) i. 9.09 m/s ii. 6.46 m/s c) 3.00 m, 2.13 m
3.87 a) 49.3°, 17.5° al nivel del suelo b) $-17.0°$
3.89 a) 1.5 km/h b) 3.5 km/h

Capítulo 4

4.1 a) 0° b) 90° c) 180°
4.3 3.15 N
4.5 494 N, 31.8°

4.7 46.7 N, opuesta al movimiento del patinador
4.9 16.0 kg
4.11 a) 3.12 m, 3.12 m/s
b) 21.9 m, 6.24 m/s
4.13 a) 45.0 N, entre 2.0 y 4.0 s
b) entre 2.0 y 4.0 s
c) 0 s, 6.0 s
4.15 a) $A = 100$ N, $B = 12.5$ N/s²
b) i. 21.6 N, 2.70 m/s² ii. 134 N, 16.8 m/s²
c) 26.6 m/s²
4.17 2940 N
4.19 a) 4.49 kg b) 4.49 kg, 8.13 N
4.21 825 N, el bloque
4.23 20 N
4.25 7.4×10^{-23} m/s²
4.27 b) sí
4.29 a) sí b) no
4.31 b) 142 N
4.33 2.03 s
4.35 1840 N, 135°
4.37 a) 17 N, 90° en sentido horario a partir del eje $+x$ b) 840 N
4.39 a) 4.85 m/s
b) 16.2 m/s² hacia arriba
c) 1470 N hacia arriba (sobre él), 2360 N hacia abajo (sobre el suelo)
4.41 a) 153 N
4.43 a) 2.50 m/s² b) 10.0 N
c) hacia la derecha, $F > T$
d) 25.0 N
4.45 a) 4.4 m b) 300 m/s
c) (i) 2.7×10^4 N (ii) 9.0×10^3 N
4.47 a) $T > mg$
b) 79.6 N
4.49 b) 0.049 N c) 410mg
4.51 a) 7.79 m/s
b) 50.6 m/s² hacia arriba
c) 4530 N hacia arriba, 6.16mg
4.53 a) w b) 0 c) $w/2$
4.55 b) 1395 N
4.57 a) 4.34 kg
b) 5.30 kg
4.59 $F_x(t) = -6mBt$
4.61 7.78 m

Capítulo 5

5.1 a) 25.0 N b) 50.0 N
5.3 a) 990 N, 735 N
b) 926 N
5.5 48°
5.7 a) $T_A = 0.732w$, $T_B = 0.897w$, $T_C = w$
b) $T_A = 2.73w$, $T_B = 3.35w$, $T_C = w$
5.9 a) 337 N b) 343 N
5.11 a) 1.10×10^8 N b) 5w
c) 8.4 s
5.13 a) 4610 m/s² = 470g
b) 9.70×10^5 N = 471w
c) 0.0187 s
5.15 b) 2.96 m/s² c) 191 N
5.17 b) 2.50 m/s² c) 1.37 kg
d) 0.75mg
5.19 a) 0.832 m/s² b) 17.3 s
5.21 a) 3.4 m/s (c) 2.2w
5.23 a) 14.0 m
b) 18.0 m/s
5.25 50°
5.27 a) 22 N b) 3.1 m
5.29 a) 0.710, 0.472 b) 258 N
c) i. 51.8 N ii. 4.97 m/s²
5.31 a) 57.1 N
b) 146 N arriba de la rampa
5.33 a) 54.0 m b) 16.3 m/s
5.35 a) $\mu_k(m_A + m_B)g$ b) $\mu_k m_A g$
5.37 a) 0.218 m/s
b) 11.7 N
5.39 a) $\dfrac{\mu_k mg}{\cos\theta - \mu_k \operatorname{sen}\theta}$
b) $1/\tan\theta$
5.41 a) 0.44 kg/m b) 42 m/s
5.43 a) 3.61 m/s b) la parte inferior c) 3.33 m/s
5.45 a) 21.0°, no b) 11,800 N; 23,600 N
5.47 1410 N, 8370 N
5.49 a) 1.5 rev/min
b) 0.92 rev/min
5.51 a) 38.3 m/s = 138 km/h
b) 3580 N
5.53 2.42 m/s
5.55 a) 1.73 m/s²
c) 0.0115 N hacia arriba
d) 0.0098 N
5.57 a) la cuerda haciendo un ángulo de 60° b) 6400 N
5.59 a) 470 N b) 163 N
5.61 762 N
5.63 a) i. −3.80 m/s ii. 24.6 m/s
b) 4.36 m c) 2.45 s
5.65 a) 11.4 N b) 2.57 kg
5.67 10.4 kg
5.69 0.0259 (presión baja), 0.00505 (presión alta)
5.71 a) $m_1(\operatorname{sen}\alpha + \mu_k \cos\alpha)$
b) $m_1(\operatorname{sen}\alpha - \mu_k \cos\alpha)$
c) $m_1(\operatorname{sen}\alpha - \mu_s \cos\alpha) \le m_2 \le m_1(\operatorname{sen}\alpha + \mu_s \cos$ a)
5.73 a) 1.80 N b) 2.52 N
5.75 a) 1.3×10^{-4} N = 62mg
b) 2.9×10^{-4} N, en t = 1.2 ms
c) 1.2 m/s
5.77 920 N
5.79 a) 11.5 m/s b) 7.54 m/s
5.81 0.40
5.83 a) $g\dfrac{m_B + m_{\text{cuerda}}(d/L)}{m_A + m_B + m_{\text{cuerda}}}$, aumenta b) 0.63 m
c) no se moverá con ningún valor de d
5.85 a) 88.0 N hacia el norte
b) 78 N hacia el sur
5.87 a) 294 N, 152 N, 152 N b) 40.0 N
5.89 3.0 N
5.91 a) 12.9 kg
b) $T_{AB} = 47.2$ N, $T_{BC} = 101$ N
5.93 $a_1 = \dfrac{2m_2 g}{4m_1 + m_2}$, $a_2 = \dfrac{m_2 g}{4m_1 + m_2}$
5.95 1.46 m arriba del piso
5.97 g/μ_s
5.99 b) 0.452
5.101 0.34
5.103 b) 8.8 N c) 31.0 N
d) 1.54 m/s²
5.105 a) se mueve hacia arriba
b) permanece constante
c) permanece constante
d) desacelera a la misma tasa que el mono
5.107 a) 6.00 m/s²
b) 3.80 m/s²
c) 7.36 m/s
d) 8.18 m/s
e) 7.78 m, 6.29 m/s, 1.38 m/s²
f) 3.14 s
5.109 a) 0.015, 0.36 N · s²/m²
b) 29 m/s
c) $v/v_t = \sqrt{\operatorname{sen}\beta - (0.015)\cos\beta}$
5.111 a) $v_y(t) = v_0 e^{-kt/m} + v_t(1 - e^{-kt/m})$
5.113 a) 120 N
b) 3.79 m/s
5.115 b) 0.28 c) no
5.117 a) a la derecha b) 120 m
5.119 a) 81.1° b) no
c) La cuenta permanece en la parte inferior del aro.
5.121 a) $F = \dfrac{\mu_k w}{\cos\theta + \mu_k \operatorname{sen}\theta}$
b) $\theta = \tan^{-1}(\mu_k)$, 14.0°
5.123 $F = (M + m)g \tan\alpha$
5.125 a) $g\dfrac{-4m_1m_2 + m_2m_3 + m_1m_3}{4m_1m_2 + m_2m_3 + m_1m_3}$
b) $a_B = -a_3$
c) $g\dfrac{4m_1m_2 - 3m_2m_3 + m_1m_3}{4m_1m_2 + m_2m_3 + m_1m_3}$
d) $g\dfrac{4m_1m_2 - 3m_1m_3 + m_2m_3}{4m_1m_2 + m_2m_3 + m_1m_3}$
e) $g\dfrac{4m_1m_2m_3}{4m_1m_2 + m_2m_3 + m_1m_3}$
f) $g\dfrac{8m_1m_2m_3}{4m_1m_2 + m_2m_3 + m_1m_3}$
g) Todas las aceleraciones son iguales a cero, $T_A = m_2 g$, $T_C = 2m_2 g$.
5.127 $\cos^2\beta$

Capítulo 6

6.1 a) 3.60 J b) −0.900 J
c) 0 d) 0
e) 2.70 J
6.3 a) 74 N b) 333 J
c) −330 J d) 0, 0
e) 0
6.5 a) −1750 J b) no
6.7 a) i. 9.00 J ii. −9.00 J
b) i. 0 ii. 9.00 J iii. −9.00 J iv. 0
c) cero para cada bloque
6.9 a) i. 0 ii. 0
b) i. 0 ii. −25.1 J
6.11 a) 324 J b) −324 J
c) 0
6.13 a) 36,000 J b) 4
6.15 a) 1.0×10^{16} J b) 2.4
6.17 a) 7.50 N b) i. 9.00 J ii. 5.40 J
c) 14.4 J, igual d) 2.97 m/s
6.19 a) 43.2 m/s b) 101 m/s
c) 5.80 m d) 3.53 m/s
e) 7.35 m
6.21 $\sqrt{2gh(1 + \mu_k/\tan\alpha)}$
6.23 32.0 N
6.25 a) 4.48 m/s b) 3.61 m/s
6.27 a) 4.96 m/s b) 1.43 m/s², 4.96 m/s
6.29 a) $\dfrac{v_0^2}{2\mu_k g}$ b) i. $^1/_2$ ii. 4 iii. 2
6.31 a) 40.0 N/m b) 0.456 N
6.33 b) 14.4 cm, 13.6 cm, 12.8 cm
6.35 a) 2.83 m/s b) 3.46 m/s
6.37 8.5 cm
6.39 a) 1.76 b) 0.666 m/s
6.41 a) 4.0 J b) 0
c) −1.0 J d) 3.0 J
e) −1.0 J
6.43 a) 2.83 m/s b) 2.40 m/s
6.45 a) 0.0565 m b) 0.57 J, no
6.47 8.17 m/s
6.49 a) 360,000 J b) 100 m/s
6.51 $3.9 \times 10^{13}P$
6.53 745 W ≈ 1 hp
6.55 a) 84.6/min b) 22.7/min
6.57 29.6 kW
6.59 0.20 W
6.61 877 J
6.63 a) 532 J b) −315 J
c) 0 d) −202 J
e) 15 J f) 1.2 m/s
6.65 a) 987 J b) 3.02 s
6.67 a) 2.59×10^{12} J b) 4800 J
6.69 a) 1.8 m/s = 4.0 mph
b) 180 m/s² ≈ 18g, 900 N
6.71 a) $k\left(\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}\right)$, negativo
b) $k\left(\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right)$, positivo
c) igual magnitud pero signos opuestos porque el trabajo neto es cero
6.73 a) 5.11 m b) 0.304
c) 10.3 m
6.75 a) 0.11 N b) 7.1 N c) 0.33 J
6.77 a) 2.56 m/s b) 3.52 N c) 13.1 J
6.79 6.3×10^4 N/m
6.81 1.1 m
6.83 a) 1.02×10^4 N/m, 8.16 m
6.85 a) 0.600 m b) 1.50 m/s
6.87 0.786
6.89 1.3 m
6.91 a) 1.10×10^5 J b) 1.30×10^5 J
c) 3.99 kW
6.93 3.6 h
6.95 a) 1.26×10^5 J b) 1.46 W
6.97 a) 2.4 MW b) 61 MW c) 6.0 MW
6.99 a) 513 W b) 354 W c) 52.1 W

6.101 a) 358 N b) 47.1 hp c) 4.06 hp d) 2.03%

6.103 a) $\frac{Mv^2}{6}$ b) 6.1 m/s c) 3.9 m/s d) 0.40 J, 0.60 J

Capítulo 7

7.1 a) 6.6×10^5 J b) -7.7×10^5 J

7.3 a) 820 N b) i. 0 ii. 740 J

7.5 a) 24.0 m/s b) 24.0 m/s c) inciso b)

7.7 a) 2.0 m/s b) 9.8×10^{-7} J, 2.0 J/kg c) 200 m, 63 m/s d) 5.9 J/kg

7.9 a) i. 0 ii. 0.98 J b) 2.8 m/s c) solo la gravedad es constante d) 5.1 N

7.11 −5400 J

7.13 a) 880 J b) −157 J c) 470 J d) 253 J e) 3.16 m/s², 7.11 m/s, 253 J

7.15 a) 80.0 J b) 5.0 J

7.17 a) i. $4U_0$ ii. $U_0/4$ b) i. $x_0\sqrt{2}$ ii. $x_0/\sqrt{2}$

7.19 a) 6.32 cm b) 12 cm

7.21 ±0.092 m

7.23 a) 3.03 m/s, cuando ya no hay contacto con el resorte b) 95.9 m/s², cuando el resorte tiene su compresión máxima

7.25 a) 4.46×10^5 N/m b) 0.128 m

7.27 a) −308 J b) −616 J c) no conservativa

7.29 a) −3.6 J b) −3.6 J c) −7.2 J d) no conservativa

7.31 a) −59 J b) −42 J c) −59 J d) no conservativa

7.33 a) 8.41 m/s b) 638 J

7.35 2.46 N, dirección $x+$

7.37 130 m/s², 132° sentido antihorario a partir del eje $+x$

7.39 a) $F(r) = (12a/r^{13}) - (6b/r^7)$ b) $(2a/b)^{1/6}$, estable c) $b^2/4a$ d) $a = 6.67 \times 10^{-138}$ J · m^{12}, $b = 6.41 \times 10^{-78}$ J · m^6

7.41 a) cero, 637 N b) 2.99 m/s

7.43 0.41

7.45 a) 16.0 m/s b) 11,500 N

7.47 a) 20.0 m a lo largo de la parte inferior de la parte áspera b) −78.4 J

7.49 a) 22.2 m/s b) 16.4 m c) no

7.51 0.602 m

7.53 15.5 m/s

7.55 4.4 m/s

7.57 a) no b) sí, $150

7.59 a) 7.00 m/s b) 8.82 N

7.61 a) $mg(1 - h/d)$ b) 441 N c) $\sqrt{2gh(1 - y/d)}$

7.63 48.2°

7.65 a) 0.392 b) −0.83 J

7.67 a) $U(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{3}\beta x^3$ b) 7.85 m/s

7.69 7.01 m/s

7.71 a) $\frac{m(g + a)^2}{2gh}$ b) $\frac{2gh}{g + a}$

7.73 a) 0.480 m/s b) 0.566 m/s

7.75 a) 3.87 m/s b) 0.10 m

7.77 0.456 N

7.79 a) 4.4×10^{12} J b) 2.7×10^3 m^3, 9.0×10^{-4} m

7.81 119 J

7.83 a) −50.6 J b) −67.5 J c) no conservativa

7.85 b) 0, 3.38 J, 0, 0; 3.38 J c) no conservativa

7.87 b) $v(x) = \sqrt{\frac{2\alpha}{mx_0^2}\left[\frac{x_0}{x} - \left(\frac{x_0}{x}\right)^2\right]}$ c) $x = 2x_0$, $v = \sqrt{\frac{\alpha}{2mx_0^2}}$ d) 0 e) $v(x) = \sqrt{\frac{2\alpha}{mx_0^2}\left[\frac{x_0}{x} - \left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - \frac{2}{9}\right]}$ f) primer caso: x_0, ∞; segundo caso: $3x_0/2$, $3x_0$

Capítulo 8

8.1 a) 1.20×10^5 kg · m/s b) i. 60.0 m/s ii. 26.8 m/s

8.3 b) 0.526, béisbol c) 0.641, mujer

8.5 a) 22.5 kg · m/s, a la izquierda b) 838 J

8.7 562 N, no significativo

8.9 a) 10.8 m/s, a la derecha b) 0.750 m/s, a la izquierda

8.11 a) 500 N/s² b) 5810 N · s c) 2.70 m/s

8.13 a) 2.50 N · s, en la dirección de la fuerza b) i. 6.25 m/s, a la derecha ii. 3.75 m/s, a la derecha

8.15 0.593 kg · m/s

8.17 0.87 kg · m/s, en la misma dirección en que viaja la bala

8.19 a) 6.79 m/s b) 55.2 J

8.21 a) 0.790 m/s b) −0.0023 J

8.23 1.53 m/s para ambos

8.25 a) 0.0559 m/s b) 0.0313 m/s

8.27 a) 7.20 m/s, 38.0° desde la dirección original de Rebeca b) −680 J

8.29 a) 3.56 m/s

8.31 a) 29.3 m/s, 20.7 m/s b) 19.6%

8.33 a) 0.846 m/s b) 2.10 J

8.35 a) -1.4×10^{-6} km/h, no b) -6.7×10^{-8} km/h, no

8.37 5.9 m/s, 58° al norte del este

8.39 a) Ambos automóviles tienen la misma magnitud en el cambio de momento lineal, pero el automóvil más ligero tiene un cambio de velocidad mayor. b) $2.50\Delta v$ c) los ocupantes del automóvil pequeño

8.41 19.5 m/s, 21.9 m/s

8.43 a) 2.93 cm b) 866 J c) 1.73 J

8.45 186 N

8.47 a) 3.33 J, 0.333 m/s b) 1.33 m/s, 0.667 m/s

8.49 a) $v_1/3$ b) $K_1/9$ c) 10

8.51 (0.0444 m, 0.0556 m)

8.53 2520 km

8.55 0.700 m a la derecha y 0.700 m hacia arriba

8.57 0.47 m/s

8.59 $F_x = -(1.50\ \text{N/s})t$, $F_y = 0.25$ N, $F_z = 0$

8.61 a) 0.053 kg b) 5.19 N

8.63 a) 0.442 b) 800 m/s c) 530 m/s

8.65 45.2

8.67 a) 0.474 kg · m/s, hacia arriba b) 237 N, hacia arriba

8.69 a) −1.14 N · s, 0.330 N · s b) 0.04 m/s, 1.8 m/s

8.71 2.40 m/s, 3.12 m/s

8.73 a) 1.75 m/s, 0.260 m/s b) −0.092 J

8.75 3.65×10^5 m/s

8.77 0.946 m

8.79 1.8 m

8.81 12 m/s, 21 m/s

8.83 a) 2.60 m/s b) 325 m/s

8.85 a) 5.3 m/s b) 5.7 m

8.87 53.7°

8.89 102 N

8.91 a) 0.125 b) 248 J c) 0.441 J

8.93 b) $M = m$ c) cero

8.95 a) 9.35 m/s b) 3.29 m/s

8.97 a) 3.56 m/s b) 5.22 m/s c) 4.66 m/s

8.99 13.6 m/s, 6.34 m/s, 65.0°

8.101 0.0544%

8.103 1.61×10^{-22} kg · m/s, a la izquierda

8.105 1.33 m

8.107 0.400 m/s

8.109 a) 71.6 m/s, 14.3 m/s b) 347 m

8.111 a) sí b) disminuye en 4800 J

8.113 a) $1.37v_{ex}$ b) $1.18v_{ex}$ c) $2.38v_{ex}$ d) 2.94 km/s

8.115 b) $2L/3$

Capítulo 9

9.1 a) 34.4° b) 6.27 cm c) 1.05 m

9.3 a) rad/s, rad/s³ b) i. 0 ii. 15.0 rad/s² c) 9.50 rad

9.5 a) $\omega_z = \gamma + 3\beta t^2$ b) 0.400 rad/s c) 1.30 rad/s, 0.700 rad/s

9.7 a) $\pi/4$ rad, 2.00 rad/s, −0.139 rad/s³ b) 0 c) 19.5 rad, 9.36 rad/s

9.9 a) 2.25 rad/s b) 4.69 rad

9.11 a) 24.0 s b) 68.8 rev

9.13 10.5 rad/s

9.15 a) 300 rpm b) 75.0 s, 312 rev

9.17 9.00 rev

9.19 a) 1.99×10^{-7} rad/s b) 7.27×10^{-5} rad/s c) 2.98×10^4 m/s d) 464 m/s e) 0.0337 m/s², 0

9.21 a) 15.1 m/s² b) 15.1 m/s²

9.23 a) 0.180 m/s², 0, 0.180 m/s² b) 0.180 m/s², 0.377 m/s², 0.418 m/s² c) 0.180 m/s², 0.754 m/s², 0.775 m/s²

9.25 0.107 m, no

9.27 a) 0.831 m/s b) 109 m/s²

9.29 a) 2.29 b) 1.51 c) 15.7 m/s, 108g

9.31 a) i. 0.469 kg · m^2 ii. 0.117 kg · m^2 iii. 0 b) i. 0.0433 kg · m^2 ii. 0.0722 kg · m^2 c) i. 0.0288 kg · m^2 ii. 0.0144 kg · m^2

9.33 a) 2.33 kg · m^2 b) 7.33 kg · m^2 c) 0 d) 1.25 kg · m^2

9.35 0.193 kg · m^2

9.37 8.52 kg · m^2

9.39 5.61 m/s

9.41 a) 3.15×10^{23} J b) 158 a, no

9.43 0.600 kg · m^2

9.45 7.35×10^4 J

9.47 a) 0.673 m b) 45.5%

9.49 46.5 kg

9.51 a) f^5 b) 6.37×10^8 J

9.53 un eje que es paralelo al diámetro y se encuentra a 0.516R del centro

9.55 $\frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$

9.57 a) $ML^2/12$ b) $ML^2/12$

9.59 $^1/_2\, MR^2$

9.61 a) 14.2 rad/s b) 59.6 rad

9.63 9.41 m

9.65 a) 0.600 m/s³ b) $\alpha = (2.40\ \text{rad/s}^3)t$ c) 3.54 s d) 17.7 rad

9.67 a) 0.0333 rad/s² b) 0.200 rad/s c) 2.40 m/s² e) 3.12 m/s², 3.87 kN f) 50.2°

9.69 a) 1.70 m/s b) 94.2 rad/s

9.71 2.99 cm

9.73 b) 1.50 m/s² d) 0.208 kg · m^2

9.75 a) 7.36 m b) 327 m/s²

9.77 a) 2.14×10^{29} J b) 2.66×10^{33} J

9.79 a) $Mb^2/6$ b) 182 J

9.81 a) −0.882 J b) 5.42 rad/s c) 5.42 m/s d) 5.42 m/s comparado con 4.43 m/s

9.83 $\sqrt{\frac{2gd(m_B - \mu_k m_A)}{m_A + m_B + I/R^2}}$

9.85 $\sqrt{g(1 - \cos\beta)/R}$

9.87 a) 2.25×10^{-3} kg · m^2 b) 3.40 m/s c) 4.95 m/s

9.89 13.9 m

9.91 a) $\frac{247}{512}MR^2$ b) $\frac{383}{512}MR^2$

9.93 a) 1.05 rad/s b) 5.0 J c) 78.5 J d) 6.4%

9.95 $\frac{1}{4}M(R_1^2 + R_2^2)$

9.97 a) $\frac{3}{5}MR^2$ b) más grande

9.99 a) 55.3 kg b) 0.804 kg · m^2

9.101 a) $s(\theta) = r_0\theta + \frac{\beta}{2}\theta^2$ b) $\theta(t) = \frac{1}{\beta}\left(\sqrt{r_0^2 + 2\beta vt} - r_0\right)$ c) $\omega_z(t) = \frac{v}{\sqrt{r_0^2 + 2\beta vt}}$, $\alpha_z(t) = -\frac{\beta v^2}{(r_0^2 + 2\beta vt)^{3/2}}$, no d) 25.0 mm, 0.247 μm/rad, 2.13×10^4 rev

Capítulo 10

10.1 a) 40.0 N·m, hacia afuera de la página
b) 34.6 N·m, hacia afuera de la página
c) 20.0 N·m, hacia afuera de la página
d) 17.3 N·m, hacia la página
e) 0 f) 0
10.3 2.50 N·m, hacia afuera de la página
10.5 b) $-\hat{k}$ c) $(-1.05\ \text{N}\cdot\text{m})\hat{k}$
10.7 a) 8.7 N·m en sentido antihorario, 0, 5.0 N·m en sentido horario, 10.0 N·m en sentido horario b) 6.3 N·m en sentido horario
10.9 13.1 N·m
10.11 a) 14.8 rad/s² b) 1.52 s
10.13 a) 7.5 N, 18.2 N b) 0.016 kg·m²
10.15 0.255 kg·m²
10.17 a) 32.6 N, 35.4 N b) 2.72 m/s²
c) 32.6 N, 55.0 N
10.19 a) 1.80 m/s b) 7.13 J
c) i. 3.60 m/s a la derecha ii. 0
iii. 2.55 m/s a 45° por debajo de la horizontal
d) i. 1.80 m/s a la derecha ii. 1.80 m/s a la izquierda iii. 1.80 m/s hacia abajo
10.21 a) 1/3 b) 2/7 c) 2/5 d) 5/13
10.23 a) 0.613 b) no c) sin deslizamiento
10.25 11.7 m
10.27 a) 3.76 m b) 8.58 m/s
10.29 a) 67.9 rad/s b) 8.35 J
10.31 a) 0.309 rad/s b) 100 J c) 6.67 W
10.33 a) 0.377 N·m b) 157 rad
c) 59.2 J d) 59.2 J
10.35 a) 358 N·m b) 1790 N c) 83.8 m/s
10.37 a) 115 kg·m²/s hacia la página
b) 125 kg·m²/s² hacia afuera de la página
10.39 4.71×10^{-6} kg·m²/s
10.41 4600 rad/s
10.43 1.14 rev/s
10.45 a) 1.38 rad/s b) 1080 J, 495 J
10.47 a) 0.120 rad/s b) 3.20×10^{-4} J
c) del trabajo realizado por el bicho
10.49 a) 5.88 rad/s
10.51 a) 1.71 rad/s
10.53 a) 1.62 N b) 1800 rev/min
10.55 a) se reduce a la mitad b) se duplica
c) se reduce a la mitad d) se duplica
e) permanece igual
10.57 a) 67.6 N b) 62.9 N c) 3.27 s
10.59 0.483
10.61 7.47 N
10.63 a) 16.3 rad/s² b) disminuye c) 5.70 rad/s
10.65 a) FR b) FR c) $\sqrt{4F/MR}$
d) $2F/M$ e) $4F/M$
10.67 0.730 m/s², 6.08 rad/s², 36.3 N, 21.1 N
10.69 a) 293 N b) 16.2 rad/s²
10.71 a) 2.88 m/s² b) 6.13 m/s²
10.73 270 N
10.75 $a=\dfrac{2g}{2+(R/b)^2}$, $\alpha=\dfrac{2g}{2b+R^2/b}$,
$T=\dfrac{2mg}{2(b/R)^2+1}$
10.77 a) 1.41 s, 70.5 m/s b) t más grande, v más pequeña
10.79 $\dfrac{3}{5}H_0$
10.81 29.0 m/s
10.83 a) 26.0 m/s b) sin cambio
10.85 a) $\sqrt{20hy/7}$ b) no
c) fricción por rodamiento d) $\sqrt{8hy/3}$
10.87 $g/3$
10.89 1.87 m
10.91 a) $\dfrac{6}{19}v/L$ b) 3/19
10.93 a) 5.46 rad/s b) 3.17 cm c) 1010 m/s
10.95 a) 2.00 rad/s b) 6.58 rad/s
10.97 0.30 rad/s en sentido horario
10.99 0.710 m
10.101 a) $a=\mu_{\text{k}}g$, $\alpha=\dfrac{2\mu_{\text{k}}g}{R}$
b) $\dfrac{R^2\omega_0^2}{18\mu_{\text{k}}g}$ c) $-\dfrac{MR^2\omega_0^2}{6}$
10.103 a) $mv_1^2r_1^2/r^3$
b) $\dfrac{mv_1^2}{2}r_1^2\left(\dfrac{1}{r_2^2}-\dfrac{1}{r_1^2}\right)$
c) iguales

Capítulo 11

11.1 29.8 cm
11.3 1.35 m
11.5 5.45 kN
11.7 a) 1000 N, 0.800 m a partir del extremo donde se aplica la fuerza de 600 N
b) 800 N, 0.75 m a partir del extremo donde se aplica la fuerza de 600 N
11.9 a) 550 N
b) 0.614 m de A
11.11 a) 1920 N b) 1140 N
11.13 a) $T=2.60w$; $3.28w$, 37.6°
b) $T=4.10w$; $5.39w$, 48.8°
11.15 272 N en cada mano, 130 N en cada pie
11.17 246 N, 0.34 m adelante de los pies
11.19 270 N, 303 N, 40°
11.21 a) 0.800 m b) en sentido horario
c) 0.800 m, en sentido horario
11.23 b) 208 N
11.25 1.4 mm
11.27 2.0×10^{11} Pa
11.29 a) 3.1×10^{-3}(superior), 2.0×10^{-3} (inferior)
b) 1.6 mm (superior), 1.0 mm (inferior)
11.31 a) 150 atm b) 1.5 km, no
11.33 8.6°
11.35 4.8×10^{9} Pa, 2.1×10^{-10} Pa^{-1}
11.37 b) 6.6×10^{5} N c) 1.8 mm
11.39 3.41×10^{7} Pa
11.41 10.2 m/s²
11.43 20.0 kg
11.45 a) 525 N b) 222 N, 328 N c) 1.48
11.47 cola: 600 N hacia abajo, ala: 7300 N hacia arriba
11.49 a) 140 N b) 6 cm a la derecha
11.51 a) 379 N b) 141 N
11.53 160 N a la derecha, 213 N hacia arriba
11.55 49.9 cm
11.57 a) 370 N b) cuando comienza a elevar su pierna c) no
11.59 a) $V=mg+w$, $H=T=\left(w+\dfrac{mg}{4}\right)\cot\theta$
b) 926 N c) 6.00°
11.61 4900 N
11.63 b) 2000 N $=2.72mg$ c) 4.4 mm
11.65 a) 4.90 m b) 60 N
11.67 a) 175 N en cada mano, 200 N en cada pie
b) 91 N en cada mano y en cada pie
11.69 a) 1150 N b) 1940 N
c) 918 N d) 0.473
11.71 590 N (persona de arriba), 1370 N (persona de abajo); persona de arriba
11.73 a) $\dfrac{T_{\text{máx}}hD}{L\sqrt{h^2+D^2}}$
b) positiva, $\dfrac{T_{\text{máx}}h}{L\sqrt{h^2+D^2}}\left(1-\dfrac{D^2}{h^2+D^2}\right)$
11.75 a) 7140 N, paredes altas b) 7900 N
11.77 a) 268 N b) 232 N
c) 366 N
11.79 a) 0.424 N (A), 1.47 N (B), 0.424 N (C)
b) 0.848 N
11.81 a) 27° para volcarse, 31° para deslizarse, se vuelca primero
b) 27° para volcarse, 22° para deslizarse, se desliza primero
11.83 a) 80 N (A), 870 N (B) b) 1.92 m
11.85 a) $T=3700$ N, 2000 N hacia arriba
11.87 a) 0.36 mm b) 0.045 mm
c) 0.33 mm
11.89 a) 0.54 cm b) 0.42 cm
11.91 a) 0.70 m de A b) 0.60 m de A
11.93 a) 1.63 m
b) latón: 2.00×10^{8} Pa, níquel: 4.00×10^{8} Pa
c) latón: 2.22×10^{-3}, níquel: 1.90×10^{-3}
11.95 0.0542 L
11.97 a) 600 N b) 13.5 kN
c) $F=\dfrac{\mu_s w}{\operatorname{sen}\theta-\mu_s\cos\theta}$ (para deslizarse),
$F=\dfrac{w}{(1/9)\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta}$ (para volcarse), 66°
11.99 $h^2/L+L/2$; L si $h>L/\sqrt{2}$
11.101 a) 0.66 mm b) 0.022 J c) 8.35×10^{-3} J
d) -3.04×10^{-2} J e) 3.04×10^{-2} J

Capítulo 12

12.1 41.8 N, no
12.3 7020 kg/m³, sí
12.5 1.6
12.7 61.6 N
12.9 a) 1.86×10^{6} Pa b) 184 m
12.11 0.581 m
12.13 a) 1.90×10^{4} Pa
b) provoca una fuerza adicional sobre las paredes de los vasos sanguíneos
12.15 2.8 m
12.17 6.0×10^{4} Pa
12.19 2.27×10^{5} N
12.21 a) 636 Pa b) i. 1170 Pa ii. 1170 Pa
12.23 10.9
12.25 0.107 m
12.27 6.43×10^{-4} m³, 2.78×10^{3} kg/m³
12.29 a) $\rho<\rho_{\text{fluido}}$
c) arriba: $1-\dfrac{\rho}{\rho_{\text{fluido}}}$, sumergido: $\dfrac{\rho}{\rho_{\text{fluido}}}$
d) 32%
12.31 a) 116 Pa b) 921 Pa c) 0.822 kg, 822 kg/m³
12.33 1910 kg/m³
12.35 9.6 m/s
12.37 a) 17.0 m/s b) 0.317 m
12.39 0.956 m
12.41 28.4 m/s
12.43 1.47×10^{5} Pa
12.45 2.03×10^{4} Pa
12.47 2.25×10^{5} Pa
12.49 $1.19D$
12.51 a) $(p_0-p)\pi\dfrac{D^2}{4}$ b) 776 N
12.53 a) 5.9×10^{5} N b) 1.8×10^{5} N
12.55 c) independiente del área de la superficie
12.57 0.964 cm, se eleva
12.59 a) 1470 Pa b) 13.9 cm
12.61 9.8×10^{6} kg, sí
12.63 a) 0.30 b) 0.70
12.65 3.50×10^{-4} m³, 3.95 kg
12.67 a) 8.27×10^{3} m³ b) 83.8 kN
12.69 2.05 m
12.71 a) $H/2$ b) H
12.73 0.116 kg
12.75 33.4 N
12.77 b) 12.2 N c) 11.8 N
12.79 b) 2.52×10^{-4} m³, 0.124
12.81 5.57×10^{-4} m
12.83 a) $1-\dfrac{\rho_B}{\rho_L}$ b) $\left(\dfrac{\rho_L-\rho_B}{\rho_L-\rho_a}\right)L$ c) 4.60 cm
12.85 a) al/g b) $\omega^2l^2/2g$
12.89 a) $2\sqrt{h(H-h)}$ b) h
12.91 a) 0.200 m³/s b) 6.97×10^{4} Pa
12.93 $3h_1$
12.95 a) $r=\dfrac{r_0\sqrt{v_0}}{(v_0^2+2gy)^{1/4}}$ b) 1.10 m
12.97 a) 80.4 N

Capítulo 13

13.1 2.18
13.3 a) 1.2×10^{-11} m/s² b) 15 días
c) aumenta
13.5 2.1×10^{-9} m/s², hacia abajo
13.7 a) 2.4×10^{-3} N
b) $F_{\text{Luna}}/F_{\text{Tierra}}=3.5\times10^{-6}$
13.9 a) 0.634 m de $3m$
b) i. inestable ii. estable

13.11 1.38×10^7 m
13.13 a) 0.37 m/s² b) 1700 kg/m³
13.15 610 N, 735 N (sobre la Tierra)
13.17 a) 5020 m/s b) 60,600 m/s
13.19 a) 7460 m/s b) 1.68 h
13.21 6200 m/s
13.23 a) 4.7 m/s = 11 mph, fácil de alcanzar b) 2.23 h
13.25 a) 82,700 m/s b) 14.5 días
13.27 b) Plutón: 4.45×10^{12} m, Neptuno: 4.55×10^{12} m c) 248 años
13.29 2.3×10^{30} kg $= 1.2M_S$
13.31 a) i. 5.31×10^{-9} N ii. 2.67×10^{-9} N
13.33 a) $-\dfrac{GmM}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ b) $-GmM/x$ c) $\dfrac{GmMx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$, de atracción d) GmM/x^2 e) $U = -GMm/a$, $F_x = 0$
13.35 a) 53 N b) 52 N
13.37 a) 4.3×10^{37} kg $= 2.1 \times 10^7 M_S$ b) no c) 6.32×10^{10} m, sí
13.39 a) 4.64×10^{11} m b) 6.26×10^{36} kg $= 3.15 \times 10^6 M_S$ c) 9.28×10^9 m
13.41 9.16×10^{13} N
13.43 a) 9.67×10^{-12} N, a 45° arriba del eje $+x$ b) 3.02×10^{-5} m/s
13.45 a) 1.62 m/s² b) 0.69 N c) 4.2 N
13.47 a) 2.9×10^{15} kg, 0.0077 m/s² b) 6.2 m/s
13.49 b) i. 1.49×10^{-5} m/s, 7.46×10^{-6} m/s ii. 2.24×10^{-5} m/s c) 26.4 m
13.51 a) 3.59×10^7 m
13.53 177 m/s
13.55 a) 1.39×10^7 m b) 3.59×10^7 m
13.57 $(0.01)R_E = 6.4 \times 10^4$ m
13.59 1.83×10^{27} kg
13.61 0.28%
13.63 6060 km/h
13.65 $v_2 = \sqrt{\dfrac{2Gm_E h}{R_E(R_E + h)}}$
13.67 a) 13,700 m/s b) 13,300 m/s c) 13,200 m/s
13.69 a) i. 2.84 a ii. 6.11 a b) 4.90×10^{11} m c) 4.22×10^{11} m
13.71 a) $GM^2/4R^2$ b) $v = \sqrt{GM/4R}$, $T = 4\pi\sqrt{R^3/GM}$ c) $GM^2/4R$
13.73 6.8×10^4 m/s
13.75 a) 12,700 kg/m³ (en $r = 0$), 3150 kg/m³ (en $r = R$)
13.77 a) 7910 s b) 1.53 c) 5510 m/s (apogeo), 8430 m/s (perigeo) d) 2410 m/s (perigeo), 3250 m/s (apogeo); perigeo
13.79 5.36×10^9 J
13.81 9.36 m/s²
13.83 $GmMx/(a^2 + x^2)^{3/2}$
13.85 a) $U(r) = \dfrac{Gm_E m}{2R_E^3} r^2$ b) 7.90×10^3 m/s
13.87 a) contra la dirección del movimiento en ambos casos b) 259 días c) 44.1°
13.89 $\dfrac{2GMm}{a^2}\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)$

Capítulo 14

14.1 a) 2.15 ms, 2930 rad/s b) 2.00×10^4 Hz, 1.26×10^5 rad/s c) 4.3×10^{14} Hz $\le f \le 7.5 \times 10^{14}$ Hz; 1.3×10^{-15} s $\le T \le 2.3 \times 10^{-15}$ s d) 2.0×10^{-7} s, 3.1×10^7 rad/s
14.3 5530 rad/s, 1.14 ms
14.5 0.0500 s
14.7 a) 0.167 s b) 37.7 rad/s c) 0.0844 kg
14.9 a) 0.150 s b) 0.0750 s
14.11 a) 0.98 m b) $\pi/2$ rad c) $x = (-0.98\text{ m})\,\text{sen}\,[(12.2\text{ rad/s})t]$
14.13 a) −2.71 m/s² b) $x = (1.46\text{ cm})\cos[(15.7\text{ rad/s})t + 0.715\text{ rad}]$, $v_x = (-22.9\text{ cm/s})\,\text{sen}\,[(15.7\text{ rad/s})t + 0.715\text{ rad}]$, $a_x = (-359\text{ cm/s}^2)\cos[(15.7\text{ rad/s})t + 0.715\text{ rad}]$
14.15 120 kg
14.17 a) 0.253 kg b) 1.21 cm c) 3.03 N
14.19 a) 1.51 s b) 26.0 N/m c) 30.8 cm/s d) 1.92 N e) −0.0125 m, 30.4 cm/s, 0.216 m/s² f) 0.324 N
14.21 a) $x = (0.0030\text{ m})\cos[(2760\text{ rad/s})t]$ b) 8.3 m/s, 2.3×10^4 m/s² c) $da_x/dt = (6.3 \times 10^7\text{ m/s}^3) \times \text{sen}\,[(2760\text{ rad/s})t]$, 6.3×10^7 m/s³
14.23 127 m/s²
14.25 a) 1.48 m/s b) 2.96×10^{-5} J
14.27 a) 1.20 m/s b) 1.11 m/s c) 36 m/s² d) 13.5 m/s² e) 0.36 J
14.29 $3M$, $^3/_4$
14.31 0.240 m
14.33 $A/\sqrt{2}$
14.35 a) 0.0778 m b) 1.28 Hz c) 0.624 m/s
14.37 a) 4.06 cm b) 1.21 m/s c) 29.8 rad/s
14.39 b) 23.9 cm, 1.45 Hz
14.41 a) 2.7×10^{-8} kg · m² b) 4.3×10^{-6} N · m/rad
14.43 0.0512 kg · m²
14.45 a) 0.25 s b) 0.25 s
14.47 0.407 balanceos por segundo
14.49 10.7 m/s²
14.51 a) 2.84 s b) 2.89 s c) 2.89 s, −2%
14.53 0.129 kg · m²
14.55 A: $2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$, B: $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\left(2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}\right)$, péndulo A
14.57 A: $2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$, B: $\sqrt{\dfrac{11}{10}}\left(2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}\right)$, péndulo B
14.59 a) 0.393 Hz b) 1.73 kg/s
14.61 a) A b) $-Ab/2m$ c) $A\left(\dfrac{b^2}{2m^2} - \dfrac{k}{m}\right)$; negativo si $b < \sqrt{2km}$, cero si $b = \sqrt{2km}$, positivo si $b > \sqrt{2km}$
14.63 a) kg/s c) i. $5.0\dfrac{F_{\text{máx}}}{k}$ ii. $2.5\dfrac{F_{\text{máx}}}{k}$
14.65 0.353 m
14.67 a) 1.11×10^4 m/s² b) 5.00×10^3 N c) 23.6 m/s, 125 J d) 37.5 kW e) 1.21×10^4 N, 36.7 m/s, 302 J, 141 kW
14.69 a) no cambia ninguna de ellas b) disminuye a una cuarta parte c) disminuye a la mitad d) disminuye a $1/\sqrt{5}$ e) la energía potencial es la misma, la energía cinética disminuye a 1/5 parte
14.71 a) 24.4 cm b) 0.221 s c) 1.19 m/s
14.73 a) 0.373 Hz, 0.426 m, 2.68 s b) 1.34 s
14.75 2.00 m
14.77 a) 0.107 m b) 2.42 s
14.79 $(0.921)\left(\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{L}}\right)$
14.81 a) 1.49 s b) -2.12×10^{-4} s por s, más corto c) 0.795 s
14.83 a) 0.150 m/s b) 0.112 m/s² hacia abajo c) 0.700 s d) 4.38 m
14.85 a) 2.6 m/s b) 0.21 m c) 0.49 s
14.87 9.08×10^{24} kg
14.89 1.17 s
14.91 0.505 s
14.93 c) -7.57×10^{-19} J e) 8.39×10^{12} Hz
14.95 0.705 Hz, 14.5°
14.97 $2\pi\sqrt{\dfrac{M}{3k}}$
14.99 $\dfrac{1}{4\pi}\sqrt{\dfrac{6g}{\sqrt{2}L}}$
14.101 a) $k_1 + k_2$ b) $k_1 + k_2$ c) $\dfrac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$ d) $\sqrt{2}$
14.103 a) $Mv^2/6$ c) $\omega = \sqrt{\dfrac{3k}{M}}$, $M' = M/3$

Capítulo 15

15.1 a) 0.439 m, 1.28 ms b) 0.219 m
15.3 220 m/s = 800 km/h
15.5 a) 1.7 cm a 17 m b) 4.3×10^{14} Hz a 7.5×10^{14} Hz c) 1.5 cm d) 6.4 cm
15.7 a) 25.0 Hz, 0.0400 s, 19.6 rad/m b) $y(x, t) = (0.0700\text{ m})\cos[(19.6\text{ m}^{-1})x + (157\text{ rad/s})t]$ c) 4.95 cm d) 0.0050 s
15.9 a) sí b) sí c) no d) $v_y = \omega A\cos(kx + \omega t)$, $a_y = -\omega^2 A\,\text{sen}\,(kx + \omega t)$
15.11 a) 4 mm b) 0.040 s c) 0.14 m, 3.5 m/s d) 0.24 m, 6.0 m/s e) no
15.13 b) dirección $+x$
15.15 a) 16.3 m/s b) 0.136 m c) ambos se incrementan en un factor de $\sqrt{2}$
15.17 0.337 kg
15.19 a) 18.6 N b) 29.1 m/s
15.21 a) 10.0 m/s b) 0.250 m c) $y(x, t) = (3.00\text{ cm})\cos[\pi(8.00\text{ rad/m})x - (80.0\pi\text{ rad/s})t]$ d) 1890 m/s² e) sí
15.23 4.51 mm
15.25 a) 95 km b) 0.25 μW/m² c) 110 kW
15.27 a) 0.050 W/m² b) 22 kJ
15.29 9.48×10^{27} W
15.37 a) $(1.33\text{ m})n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ b) $(1.33\text{ m})(n + {}^1/_2)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
15.41 a) 96.0 m/s b) 461 N c) 1.13 m/s, 426 m/s²
15.43 b) 2.80 cm c) 277 cm d) 185 cm, 7.96 Hz, 0.126 s, 1470 cm/s e) 280 cm/s f) $y(x, t) = (5.60\text{ cm}) \times \text{sen}\,[(0.0906\text{ rad/cm})x]\,\text{sen}\,[(133\text{ rad/s})t]$
15.45 a) $y(x, t) = (4.60\text{ mm}) \times \text{sen}\,[(6.98\text{ rad/m})x]\,\text{sen}\,[(742\text{ rad/s})t]$ b) 3er. armónico c) 39.4 Hz
15.47 a) 45.0 cm b) no
15.49 a) 311 m/s b) 246 Hz c) 245 Hz, 1.40 m
15.51 a) 20.0 Hz, 126 rad/s, 3.49 rad/m b) $y(x, t) = (2.50 \times 10^{-3}\text{ m}) \times \cos[(3.49\text{ rad/m})x - (126\text{ rad/s})t]$ c) $y(0, t) = (2.50 \times 10^{-3}\text{ m}) \times \cos[(126\text{ rad/s})t]$ d) $y(1.35\text{ m}, t) = (2.50 \times 10^{-3}\text{ m}) \times \cos[(126\text{ rad/s})t - 3\pi/2\text{ rad}]$ e) 0.315 m/s f) -2.50×10^{-3} m, 0
15.53 a) $\dfrac{7L}{2}\sqrt{\dfrac{\mu_1}{F}}$ b) no

15.55 a) $\frac{2\pi A}{\lambda}\sqrt{\frac{FL}{M}}$ b) F se incrementa en un factor de 4
15.57 a) $\frac{4\pi^2 F\Delta x}{\lambda^2}$
15.59 32.4 Hz
15.61 1.83 m
15.63 330 Hz (copper), 447 Hz (aluminio)
15.65 c) C/B
15.67 b) ω debe disminuir en un factor de $1/\sqrt{2}$, k debe disminuir en un factor $1/\sqrt{8}$
15.69 a) 7.07 cm b) 0.400 kW
15.71 d) $P(x, t) = -Fk\omega A^2 \operatorname{sen}^2(kx + \omega t)$
15.73 (0.800 Hz)n, $n = 1, 2, 3, \ldots$
15.75 c) $2A$, $2A\omega$, $2A\omega^2$
15.77 233 N
15.79 a) 0, L b) 0, $L/2$, L d) no
15.81 1780 kg/m^3
15.83 a) $r = 0.640$ mm, $L = 0.40$ m b) 380 Hz
15.85 b) $u_k = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t)$ e) $u_p = \frac{1}{2}Fk^2A^2 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t)$

Capítulo 16

16.1 a) 0.344 m b) 1.2×10^{-5} m c) 6.9 m, 50 Hz
16.3 a) 7.78 Pa b) 77.8 Pa c) 778 Pa
16.5 a) 90 m b) 102 kHz c) 1.4 cm d) 4.4 a 8.8 mm e) 6.2 MHz
16.7 90.8 m
16.9 81.4°C
16.11 0.208 s
16.13 a) 5.5×10^{-15} J b) 0.074 mm/s
16.15 a) 9.44×10^{-11} m, 0.434 m b) 5.66×10^{-9} m, 0.100 m
16.17 a) 1.95 Pa b) 4.58×10^{-3} W/m^2 c) 96.6 dB
16.19 a) 4.4×10^{-12} W/m^2 b) 6.4 dB c) 5.8×10^{-11} m
16.21 14.0 dB
16.23 a) 2.0×10^{-7} W/m^2 b) 6.0 m c) 290 m
16.25 a) *fundamental:* nodo de desplazamiento en 0.60 m, nodos de presión en 0 y 1.20 m; *primer sobretono:* nodos de desplazamiento en 0.30 y 0.90 m, nodos de presión en 0, 0.60, 1.20 m; *segundo sobretono:* nodos de desplazamiento en 0.20, 0.60, 1.00 m, nodos de presión en 0, 0.40, 0.80, 1.20 m
b) *fundamental:* nodo de desplazamiento en 0, nodo de presión en 1.20 m; *primer sobretono:* nodos de desplazamiento en 0, 0.80 m, nodos de presión en 0.40, 1.20 m; *segundo sobretono:* nodos de desplazamiento en 0, 0.48, 0.96 m, nodos de presión en 0.24, 0.72, 1.20 m
16.27 506 Hz, 1517 Hz, 2529 Hz
16.29 a) 767 Hz b) no
16.31 a) 614 Hz b) 1230 Hz
16.33 a) 172 Hz b) 86 Hz
16.35 0.125 m
16.37 destructiva
16.39 a) 433 Hz b) aflojar
16.41 1.3 Hz
16.43 780 m/s
16.45 a) 375 Hz b) 371 Hz c) 4 Hz
16.47 a) 0.25 m/s b) 0.91 m
16.49 19.8 m/s
16.51 a) 1910 Hz b) 0.188 m
16.53 0.0950c, hacia nosotros
16.55 a) 36.0° b) 2.23 s
16.57 b) 0.68%
16.59 a) 1.00 b) 8.00 c) 4.73×10^{-8} m = 47.3 nm
16.61 b) $3f_0$
16.63 flauta armónica $3N$ resonando con una cuerda armónica $4N$, $N = 1, 3, 5, \ldots$
16.65 a) cerrado b) séptimo y noveno c) 0.439 m
16.67 a) 375 m/s b) 1.39 c) 0.8 cm
16.69 1.27
16.71 a) 548 Hz b) 652 Hz
16.73 a) 2186 Hz, 0.157 m b) 2920 Hz, 0.118 m c) 734 Hz
16.75 a) 0.0674 m b) 147 Hz
16.77 b) 2.0 m/s
16.79 a) 1.2×10^6 m/s b) 3.6×10^{16} m = 3.8 años luz c) 5200 años luz, aproximadamente 4100 AC
16.81 a) $f_0\left(\frac{2v_w}{v - v_w}\right)$ b) $f_0\left(\frac{2v_w}{v + v_w}\right)$
16.83 d) 9.69 cm/s, 667 m/s^2

Capítulo 17

17.1 a) −81.0°F b) 134.1°F c) 88.0°F
17.3 a) 27.2 C° b) −55.6 C°
17.5 a) −18.0 F° b) −10.0 C°
17.7 0.964 atm
17.9 a) −282°C b) 47,600 Pa, no
17.11 0.39 m
17.13 Valle de la Muerte: 1.9014 cm, Groenlandia: 1.8964 cm
17.15 0.26 mm
17.17 49.4°C
17.19 1.7×10^{-5} (C°)$^{-1}$
17.21 a) 1.431 cm^2 b) 1.436 cm^2
17.23 a) 3.2×10^{-5} (C°)$^{-1}$ b) 2.6×10^9 Pa
17.25 a) 5.0 mm b) -8.4×10^7 Pa
17.27 5.79×10^5 J
17.29 240 J/kg·K
17.31 23 min
17.33 a) −1.54 kJ b) 0.0121 C°
17.35 45.2 C°
17.37 0.0613 C°
17.39 a) 215 J/kg·K b) agua c) muy pequeño
17.41 27.5°C
17.43 a) 5.9 C° b) sí
17.45 150°C
17.47 7.6 min
17.49 36.4 kJ, 8.70 kcal, 34.5 Btu
17.51 357 m/s
17.53 3.45 L
17.55 5.05×10^{15} kg
17.57 0.0674 kg
17.59 2.10 kg
17.61 190 g
17.63 a) 222 K/m b) 10.7 W c) 73.3°C
17.65 a) − 5.8°C b) 11 W/m^2
17.67 4.0×10^{-3} W/m·C°
17.69 105.5°C
17.71 a) 21 kW b) 6.4 kW
17.73 2.1 cm^2
17.75 a) 1.61×10^{11} m b) 5.43×10^6 m
17.77 a) 35.1°M b) 39.6 C°
17.79 53.3°C
17.81 35.0°C
17.83 23.0 cm, 7.0 cm
17.85 b) 1.9×10^8 Pa
17.87 a) 99.4 N c) −4.2 Hz, cae
17.89 a) 87°C b) −80°C
17.91 20.2°C
17.93 a) 54.3
17.95 a) 83.6 J b) 1.86 J/mol·K c) 5.60 J/mol·K
17.97 a) 2.70×10^7 J b) 6.89 C° c) 19.3 C°
17.99 2.5 cm
17.101 a) 86.1°C b) sin hielo, sin vapor, 0.130 kg de agua líquida
17.103 a) 100°C b) 0.0214 kg de vapor, 0.219 kg de agua líquida
17.105 1.743 kg
17.107 a) 93.9 W b) 1.35
17.109 2.9
17.111 c) 170 h d) 1.5×10^{10} s ≈ 500 a, no
17.113 0.106 W/m·K
17.115 5.82 g
17.117 a) 1.04 kW b) 87.1 W c) 1.13 kW d) 28 g e) 1.1 botellas
17.119 a) 69.6°C
17.121 1.76 C°
17.123 b) 0°C d) 3140 C°/m e) 121 W f) cero g) 1.1×10^{-4} m^2/s h) −11 C°/s i) 9.17 s j) disminuya k) −7.71 C°/s
17.125 a) 103°C b) 27 W
17.127 a) i. 280 W ii. 0.248 W iii. 2.10 kW iv. 116 W; radiación del Sol b) 3.72 L/h c) 1.4 L/h

Capítulo 18

18.1 a) 0.122 mol b) 14,700 Pa, 0.145 atm
18.3 0.100 atm
18.5 a) 0.0136 kg/m^3 (Marte), 67.6 kg/m^3 (Venus), 5.39 kg/m^3 (Titán)
18.7 503°C
18.9 16.8 kPa
18.11 0.159 L
18.13 0.0508V
18.15 a) 70.2°C b) sí
18.17 850 m
18.19 a) 6.95×10^{-16} kg b) 2.32×10^{-13} kg/m^3
18.21 22.8 kPa
18.23 a) $8720 b) 3.88 cm
18.25 a) 8.2×10^{-17} atm b) no
18.27 55.6 mol, 3.35×10^{25} moléculas
18.29 a) 9.00×10^{-5} m^3 b) 3.1×10^{-10} m c) aproximadamente igual
18.31 b) 1.004
18.33 (d) debe ser verdadero, los otros pueden ser
18.35 a) 1.93×10^6 m/s, no b) 7.3×10^{10} K
18.37 a) 6.21×10^{-21} J b) 2.34×10^5 m^2/s^2 c) 484 m/s d) 2.57×10^{-23} kg·m/s e) 1.24×10^{-19} N f) 1.24×10^{-17} Pa g) 8.17×10^{21} moléculas h) 2.45×10^{22} moléculas
18.39 3800°C
18.41 a) 2600 J b) 1560 J
18.43 a) 741 J/kg·K, $c_w = 5.65c_{N_2}$ b) 5.65 kg c) 4.85 m^3
18.45 a) 923 J/kg·K b) El valor calculado es muy grande por 1.4% aproximadamente.
18.47 a) 337 m/s b) 380 m/s c) 412 m/s
18.49 a) 610 Pa b) 22.12 MPa
18.51 no, no
18.53 a) 11.8 kPa b) 0.566 L
18.55 272°C
18.57 0.213 kg
18.59 a) −179°C b) 1.2×10^{26} moléculas/m^3 c) La atmósfera de Titán es 4.8 veces más densa que la de la Tierra.
18.61 1.92 atm
18.63 a) 30.7 cilindros b) 8420 N c) 7800 N
18.65 a) 26.2 m/s b) 16.1 m/s, 5.44 m/s c) 1.74 m
18.67 $\approx 5 \times 10^{27}$ átomos
18.69 a) A b) B c) 4250°C d) B
18.71 a) 4.65×10^{-26} kg b) 6.11×10^{-21} J c) 2.04×10^{24} moléculas d) 12.5 kJ
18.73 b) r_2 c) $r_1 = \frac{R_0}{2^{1/6}}$, $r_2 = R_0$, $2^{-1/6}$ d) U_0
18.75 a) 517 m/s b) 298 m/s
18.77 b) 1.40×10^5 K (N), 1.01×10^4 K (H) c) 6370 K (N), 459 K (H)
18.79 a) 1.24×10^{-14} kg b) 4.16×10^{11} moléculas c) 2.95 μm, no
18.81 a) $2R = 16.6$ J/mol·K b) menor
18.83 CO_2: 20.79 J/mol·K, 27%; SO_2: 24.94 J/mol·K, 21%; H_2S: 24.94 J/mol·K, 3.9%
18.85 $3kT/m$
18.87 b) 0.0421N c) $2.94 \times 10^{-21}N$ d) 0.0297N, $2.08 \times 10^{-21}N$ e) 0.0595N, $4.15 \times 10^{-21}N$
18.89 42.6%
18.91 a) 4.5×10^{11} m b) 703 m/s, 6.4×10^8 s (aproximadamente 20 años) c) 1.4×10^{-14} Pa d) 650 m/s, se evapora f) 2×10^5 K, >3 veces la temperatura del Sol, no

Capítulo 19

19.1 b) 1330 J
19.3 b) −6180 J
19.5 a) 0.942 atm
19.7 a) $(p_1 - p_2)(V_2 - V_1)$ b) El negativo del trabajo realizado en dirección inversa
19.9 a) 34.7 kJ b) 80.4 kJ c) no
19.11 a) 278 K b) 0, 162 J c) 53 J
19.13 a) 16.4 min b) 139 m/s = 501 km/h
19.15 a) 0 b) $T_b = 2T_a$ c) $U_b = U_a + 700$ J
19.17 a) positivo b) $W_I > 0$, $W_{II} < 0$ c) hacia el sistema d) hacia el sistema para el lazo I, afuera del sistema para el lazo II
19.19 b) 208 J c) sobre el pistón d) 712 J e) 920 J f) 208 J
19.21 a) 948 K b) 900 K
19.23 2/5
19.25 a) 25.0 K b) 17.9 K c) más alto en a)
19.27 a) −605 J b) 0 c) libera 605 J
19.29 a) 476 kPa b) −10.6 kJ c) 1.59, caliente
19.31 5.05 kJ, la energía interna y la temperatura aumentan
19.33 b) 224 J c) −224 J
19.35 11.6°C
19.37 a) 600 J afuera del gas b) −1500 J, disminuye
19.39 a) aumenta b) 4800 J
19.41 a) 45.0 J b) libera 65.0 J c) 23.0 J, 22.0 J
19.43 a) son iguales b) absorbe 4.0 kJ c) 8.0 kJ
19.45 b) −2460 J
19.47 a) 0.80 L b) 305 K, 1220 K, 1220 K c) *ab:* 76 J, hacia el gas; *ca:* −107 J, hacia afuera del gas *bc:* 56 J, hacia el gas d) *ab:* 76 J, aumenta *bc:* 0, no cambia *ca:* −76 J, disminuye
19.49 a) 3.00 kJ, hacia el gas b) 2.00 kJ, hacia el gas c) $Q_a > Q_b$
19.51 a) 899°C b) 12.2 kJ c) 42.6 kJ d) 45.6 kJ
19.53 −0.226 m³
19.55 a) 4.32×10^{-4} m³ b) 648 J c) 715 kJ d) 715 kJ e) no hay una diferencia importante
19.57 3.4×10^5 J/kg
19.59 b) 11.9 C°
19.61 a) 0.173 m b) 207°C c) 74.7 kJ
19.63 a) $Q = 300$ J, $\Delta U = 0$ b) $Q = 0$, $\Delta U = -300$ J c) $Q = 750$ J, $\Delta U = 450$ J
19.65 a) $W = 738$ J, $Q = 2590$ J, $\Delta U = 1850$ J b) $W = 0$, $Q = -1850$ J, $\Delta U = -1850$ J c) $\Delta U = 0$
19.67 a) $W = -187$ J, $Q = -654$ J, $\Delta U = -467$ J b) $W = 113$ J, $Q = 0$, $\Delta U = -113$ J c) $W = 0$, $Q = 580$ J, $\Delta U = 580$ J
19.69 a) $p_0 + \dfrac{mg}{\pi r^2}$ b) $-\left(\dfrac{y}{h}\right)(p_0\pi r^2 + mg)$ c) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{h}\left(1 + \dfrac{p_0\pi r^2}{mg}\right)}$, no

Capítulo 20

20.1 a) 6500 J b) 34%
20.3 a) 23% b) 12,400 J c) 0.350 g d) 222 kW = 298 hp
20.5 a) 12.3 atm b) 5470 J (*ca*) c) 3723 J (*bc*) d) 1747 J e) 31.9%
20.7 a) 58% b) 1.4%
20.9 a) 16.2 kJ b) 50.2 kJ
20.11 1.7 h
20.13 a) 215 J b) 378 K c) 39.0%
20.15 a) 42.4 kJ b) 441°C
20.17 a) 492 J b) 212 W c) 5.4
20.19 4.5 kJ
20.21 37.1 hp
20.23 a) 429 J/K b) −393 J/k c) 36 J/K
20.25 a) irreversible b) 1250 J/K
20.27 −6.31 J/K
20.29 a) 6.05 kJ/K b) aproximadamente cinco veces más grande para la vaporización
20.31 a) 33.3 J/K b) irreversible
20.33 a) no b) 18.3 J/K c) 18.3 J/K
20.35 a) 121 J b) 3800 ciclos
20.37 a) 33 J b) 117 J c) 45°C d) 0 e) 96.2 g
20.39 −5.8 J/K, disminuye
20.41 b) absorbido durante *bc*, rechazado durante *ab* y *ca* c) $T_a = T_b = 241$ K, $T_c = 481$ K d) 610 J, 610 J e) 8.7%
20.43 a) 21.0 kJ (entra), 16.6 kJ (sale) b) 4.4 kJ, 21% c) 67%
20.45 a) 7.0% b) 3.0 MW, 2.8 MW c) 6×10^5 kg/h = 6×10^5 L/h
20.47 a) 2.00 atm, 4.00 L; 2.00 atm, 6.00 L; 1.11 atm, 6.00 L; 1.67 atm, 4.00 L b) 1 → 2: 1422 J, 405 J; 2 → 3: −1355 J, 0; 3 → 4: −274 J, −274 J; 4 → 1: 339 J, 0 c) 131 J d) 7.44%, 44.4%
20.49 a) 2.26% b) 29.4 J (gravitacional), 1.30 kJ c) 1.11×10^{-3} barras de dulces
20.51 a) *ab:* 225 kJ, 90 kJ, 135 kJ; *bc:* −240 kJ, 0, −240 kJ; *ca:* 45 kJ, −60 kJ, 105 kJ b) 30 kJ, 30 kJ, 0 c) 11.1%
20.53 $1 - T_C/T_H$
20.55 a) 122 J, −78 J b) 5.10×10^{-4} m³ c) en *b:* 2.32 MPa, 4.81×10^{-5} m³, 771 K; en *c:* 4.01 MPa, 4.81×10^{-5} m³, 1332 K; en *d:* 0.147 MPa, 5.10×10^{-4} m³, 518 K d) 61.1%, 77.5%
20.57 b) 357 kJ, 62 kJ c) 385 kJ, 34 kJ
20.59 a) $nC_V \ln(T_c/T_b)$, $nC_V \ln(T_a/T_d)$ b) cero
20.61 a) −107 J/K b) 147 J/K c) 0 d) 39.4 J/K

CRÉDITOS DE FOTOGRAFÍAS

Acerca del autor Hugh D. Young; John P. Surey

Capítulo 1 1.1*a*: Shutterstock; 1.1*b*: CERN/Eropean Organization for Nuclear Research; 1.4: National Institute of Standards and Technology (NIST); 1.5*a*: R. Williams (STScI), equipo HDF-S y NASA; 1.5*b*: SOHO (ESA & NASA); 1.5*c*: Cortesía de NASA/JPL/Caltech; 15*f*: Purdue University. Veeco Instruments, Inc.; 1.5*g*: SPL/Photo Researchers, Inc.; 1.6: Pearson Education; 1.7: Liaison/Getty Images; Aplicación 1.1: Scott Bauer – USDA Agriculture Research Service

Capítulo 2 2.5: Shutterstock; Aplicación 2.1: NASA; 2.22: Richard Megna/ Fundamental Photographs

Capítulo 3 Aplicación 3.1: Luca Lozzi/Getty Images; 3.16: Richard Megna/ Fundamental Photographs; 3.19*a*: Richard Megna/Fundamental Photographs; 3.19*b*: Fotolia; Aplicación 3.20: David Wall/Alamy

Capítulo 4 Foto inicial: Brian Cleary/Getty Images; Aplicación 4.1 Fotolia; 4.12: Wayne Eastep/Getty Images; 4.17: Shutterstock; Aplicación 4.20: Shutterstock; 4.29: Shutterstock

Capítulo 5 Foto inicial: U.S. Air Force Photo por Tech. Sgt. Jeremy Lock/ Released; 5.11: NASA; Aplicación 5.2: David Scharf/Photo Researches, Inc.; 5.26*b*: Joggie Botman/iStockphoto; 5.35: AOPA/Aircraft Owners y Pilots Association; 5.38*a*; NASA; 5.38*b*: Helen Hansma, University of California, Santa Bárbara; 5.38*d*: David Malin, Anglo-Australian Observatory

Capítulo 6 Aplicación 6.1: Steve Gschmeissner/Photo Researchers Inc.; Aplicación 6.2: Steve Gschmeissner/Photo Researchers Inc.; 6.26: Hulton Archive/Getty Images; 6.27*a*: Keystone/Getty Images; 6.27*b*: Adrian Pingstone; 6.28: Shutterstock

Capítulo 7 7.1: Shutterstock; Aplicación 7.1 Yuji Sakai/Getty Images; 7.3: Robert F. Bukaty/AP; 7.5: Joggie Botman/iStockPhoto; Aplicación 7.2 iStockPhoto; Aplicación 7.4 Peter Menzel/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 8 Foto inicial: Flickr RM/Getty Images; 8.2: David Woods/Corbis; Aplicación 8.1: Shutterstock; 8.4: Jim Cummins/Getty Images; 8.29: Richard Megna/Fundamental Photographs; 8.31*b*: Shutterstock; 8.33: NASA

Capítulo 9 9.3: Mike Powell/Getty Images; Aplicación 9.1: Hybrid Medical Animation/Photo Researchers, Inc.; Aplicación 9.2*a*: Shutterstock; 9.18: David J. Philipp/AP; 9.21: NASA/Johnson Space Center; P9.98: NASA

Capítulo 10 Foto inicial: Ilia Shalamaev/Photolibrary; Aplicación 10.1 (derecha): Shutterstock; Aplicación 10.1 (izquierda): David Lentnik/SPL/ Photo Researchers, Inc.; 10.14: James Warren/iStockPhoto; 10.22: Images Source/Getty Images; 10.28: Gerard Lacz/Natural History Photographic Agency

Capítulo 11 11.3: Jeremy Woodhouse/Getty Images; 11.12*c*: Photodisc Green/Getty Images; Aplicación 11.2: Dante Fenolio/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 12 Foto inicial: Digital Vision/AGE Fotostock; 12.6: Cenco Physics; 12.9: Shutterstock; 12.14: Fotolia; 12.19: Pearson Education; 12.27: Shutterstock; 12.29*a*: Photodisc Green/Getty Images.

Capítulo 13 Foto inicial: NASA/JPL/Space Science Institute; 13.3: NASA/JPL/Caltech; 13.6: NASA; Aplicación 13.1 NASA; 13.13 NASA y Telescopio Espacial Hubble; 13.16: NASA; 13.17 NASA; Aplicación 1313.2 NASA; 13.20*b*: NASA; 13.26: NASA; 13.27 NASA; 13.28 Prof. Andrea Ghez/UCLA – W.M. Keck Telescopes

Capítulo 14 14.7: American Diagnostic Corporation; Aplicación 14.2: Shutterstock

Capítulo 15 Foto inicial: REUTERS/Nick Loh; Aplicación 15.1: MARCO POLO COLLECTION/Alamy 15.2: REUTER/Charles Platiau; 15.5: David Parker/Photo Researchers, Inc.; 15.18: Reproducida de *PSSC Physics*, 2a. ed. (1965), D.C. Heath & Company with Educational Development Center, Inc., Newton Massachusetts; 15.23: Richard Megna/Fundamental Photographs; 15.27: National Optical Astronomy Observatories

Capítulo 16 16.9: Kretztechnik/Photo Researchers, Inc.; 16.20: Martin Bough/Fundamental Photographs; 16.25: Shutterstock; 16.35*c*: NASA/ Langley Research Center

Capítulo 17 Foto inicial: Shutterstock; 17.4: Exergen Corporation; 17.5: Sargent-Welch/V WR International; Cortesía de Cenco Physics; 17.11: NASA/Jim Ross, Dryden Flight Research Center; 17.13: Eric Schrader – Pearson Science; 17.16: Roger Freedman; 17.18: Paul Seheult/Corbis; 17.19: Adam Hart-Davis/Photo Researchers; 17.20: Richard Megna/Fundamental Photographs; 17.22: Shutterstock; Aplicación 17.2*a*: iStockphoto; Aplicación 17.2*b*: Paul Nicklen/National Geographic Creative/Getty Image; 17.27: Hugh D. Young; 17.28: Dr. Arthur Tucker/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 18 Foto inicial: iStockphoto; 18.2: John Powell/The Image Works; 18.10: ThermoMicroscopes/Park Scientific Instruments; 18.13: Stone/Getty Images; 18.14: ARCTIC IMAGES/Alamy; Aplicación 18.2: Ray Coleman/ Photo Researchers Inc.; E18.25: David Malin, Royal Observatory, Edinburgh y Anglo-Australian Telescope Board; P18.91: David Malin, Royal Observatory, Edinburgh y Anglo-Australian Telescope Board

Capítulo 19 19.1: John P. Surey; 19.10: Shutterstock; 19.15: Shutterstock; P19.57: Photolibrary

Capítulo 20 Foto inicial: G. Brad Lewis/Getty Images; 20.2: Shutterstock; Aplicación 20.1: Shutterstock; 20.12: Bill Bachman/Photo Researchers; 20.16: Fuerza aérea de Estados Unidos fotografía del sargento Robert Zoellner; 20.17: Erich Schrempp/Photo Researchers, Inc.; Aplicación 20.2: iStockphoto; 20.20: Eric Shrader – Pearson Science

ÍNDICE ANALÍTICO

Nota: Una f después del número de página indica que se hace referencia a una figura; una t significa que se hace referencia a una tabla.

A

Aceleración
- alrededor de una curva, 74, 88
- angular, 282-285, 284t, 311-314
  - cálculo de, 283
  - como vector, 283
  - constante, 283-285, 284t
  - contra aceleración lineal, 284t
  - instantánea, 282
  - media, 282
  - torca y, 311-314
  - velocidad angular y, 282
- cálculo por integración, 55-57
- centrípeta, 86-87, 154
- componente
  - centrípeta de, 286-287
  - tangencial de, 286
- constante, 46-52
  - de cuerpos en caída libre, 52-55
  - debida a la gravedad, 52-55
  - ecuación del movimiento para, 49
  - segunda ley de Newton y, 112-117
- contra velocidad, 42
- de un cohete, 262-264
- de un yo-yo, 319
- de una esfera giratoria, 319-320
- de una partícula en una onda, 480-482
- debida a la gravedad
  - contra gravitación, 403
  - definición de, 52
  - en caída libre, 52-55, 118, 143
  - en diferentes latitudes y elevaciones, 422t
  - ingravidez y, 143
  - magnitud de la, 405
  - masa contra peso y, 118-120
  - peso aparente y, 143, 422
  - variación con la ubicación y, 119
- definición de, 43
- en el movimiento armónico simple, 444, 448
- en una gráfica v_x-t, 44-46
- fuerza neta y, 112-118
- instantánea, 43-44
  - angular, 282
  - componente x de, 43
  - definición de, 43
  - en una gráfica v_x-t, 44-46
- lineal, 282-284t
  - constante, 284t
  - contra aceleración angular, 284t
  - en un cuerpo rígido en rotación, 286-288
- marco inercial de referencia y, 110-112
- masa y, 113, 114, 118-120
- media, 42-43
  - componente x de, 42
  - contra velocidad media, 42
  - definición de, 42
  - en una gráfica v_x-t, 44-46
  - unidades de, 42
- movimiento
  - circular y, 85-87
  - de proyectiles y, 77-80, 87
- peso y, 118-119
- primera ley de Newton y, 108-112
- resistencia de fluidos y, 152-154
- segunda ley de Newton y, 112-117, 140-146
- signos de la, 45, 46
- unidades de, 117
- variable, 55-57

Acondicionadores de aire, 660-661

Acróbatas, en equilibrio inestable, 228

Adición
- cifras significativas en, 9
- de vectores, 12-18

Afelio, 415

Agua
- con sobrenfriado, 567
- expansión térmica del, 560

Agujeros negros, 423-426
- supermasivos, 426

Aire, como aislante, 571

Aislantes, 552, 691

Alas de aves
- frecuencias de aleteo, 438f
- momento de inercia de, 290f

Aleatoriedad, en procesos termodinámicos, 653

Alimentos, valor energético de los, 568

Amortiguamiento, 457
- crítico, 458

Amplitud
- de desplazamiento, 510, 518-519
  - intensidad del sonido y, 518-519
- de ondas de sonido, 510-513
- de oscilaciones, 438
- de presión de, 511-512, 519-521
  - intensidad del sonido y, 519-521
- de un péndulo, 454-455

Análisis
- armónico, 497
- de Fourier, 513

Ángulo(s)
- de fase, 444
- notación de, 71
- radianes y, 279, 287

Antinodos, 492
- desplazamiento de, 523
- presión de, 523

Aristóteles, 52

Armonía, 496

Arrastre, 152-154
- del aire, 152-154

Atmósfera, 355, 375

Átomo(s), interacciones entre, 451-453

Automóvil(es)
- compresión de la gasolina en, 593-595
- distribución de peso en, 349
- movimiento armónico simple vertical en, 451
- segunda ley de Newton y, 115

Avión(es)
- control de ruido en, 531, 532
- curvas de giro y, 158
- elevación del ala y, 388-389
- estampido sónico de, 538
- resonancia del ala en, 460

B

Bacterias, rotación de, 283f

Balanza
- de Cavendish (de torsión), 404
- de resorte, 106
- de torsión, 404

Bar, 375

Barómetros de mercurio, 378-380

Béisbol, bola curva en, 391

Bell, Alexander Graham, 521

Bernoulli, ecuación de, 385-389

Bifurcación de sintonías, 442-443

Bola curva, en béisbol, 391

Bombas de calor, 661

Botella(s)
- de Dewar, 576
- de vacío, 576

Brahe Tycho, 414-415

Brazo
- de momento, 309
- de palanca, 309

C

Caballo(s)
- aceleración alrededor de una curva, 74
- de potencia, 194

Cables, enrollados/desenrollados, 291-292, 313-314

Caída
- Fosbury, 293f
- libre
  - aceleración debida a la gravedad y, 52-55, 118-119
  - definición de, 52
  - resistencia de fluidos y, 152-154

Calamares, propulsión a chorro en, 262f

Cálculo(s)
- aproximados, 10
- de calor, 568-570
- de calorimetría, 568-570
- estimación y, 10
- unidades de medidas en, 6

Calentamiento global, 576-577

Calor
- agregado en un proceso termodinámico, 628-629
- calentamiento global y, 576-577
- cambios de fase y, 565-570
- cantidad de, 562-565
- como energía en tránsito, 605
- contra temperatura, 562
- de combustión, 568
- de fusión, 566
- de sublimación, 567
- de vaporización, 566, 568
- definición de, 562, 563
- del vapor, 567-568
- energía mecánica y, 562
- específico, 562-563
  - molar, 564-565
- fusión y, 565-566
- latente de fusión, 566
- reglas de signos para, 625
- transferencia de energía y, 562-565
- unidades de medida del, 562
- vapor y, 567-568

Caloría (cal), 562

Calorimetría, cambios de fase y, 565-570

Cambio
- de clima, 576-577
- de fase, 565-570
- de volumen, trabajo realizado durante, 596

Caminata en la Luna, 407f

Campos, 406
- de fuerza, 406

Cantidad(es)
- de calor, 562-565
- escalares, 11
  - en la multiplicación vectorial, 13
- físicas
  - definición de, 4
  - unidades de, 4-6
- vectoriales, 11

Canto de aves, 522

Capacidad calorífica, 605-608
- de gases, 605-607
- de sólidos, 607-608
- de un gas ideal, 637-639
- modelo de molécula puntual de, 605
- molar, 564-565, 605-607, 637-639
- razón de, 639
- variación de temperatura de la, 608
- vibración y, 606-608

Cargas inducidas, 692

Carrera en la Luna, 407f

Centro de gravedad, 345-348

Centro de masa, 258-262
- centro de gravedad y, 345-347
- fuerzas externas y, 261-262

movimiento
combinado de rotación-traslación y, 315-316
planetario y, 417-418
torca y, 312
Cero
absoluto, 556, 669
trabajo, 179
Ciclo(s), 438
de Carnot, 663-669
de un refrigerador, 666-667
de una máquina de calor, 663-666
eficiencia de, 667-668
escala de temperatura Kelvin y, 668-669
para un gas ideal, 664-665
reversibilidad de, 667-668
segunda ley de la termodinámica y, 667-668
de oscilación, 438
Otto, 657-658
Cifras significativas, 8-9
Cilindros, momento de inercia de, 295-296
Cinemática
angular contra cinemática lineal, 285-288
definición de, 35
lineal contra angular, 285-288
Circulación de la sangre, turbulencia en, 390f
Círculo
circunferencia de, 279
de referencia, 440-441
vertical, movimiento circular uniforme en, 158-159
Circunferencia, 279
Coeficiente(s)
de expansión lineal, 557-558, 559
de fricción
cinética, 147
estática, 148
de rendimiento, 659
de volumen de expansión, 558-560
Colisiones, 251-258
clasificación de, 254-255
conservación del momento lineal y, 251-258
definición de, 251
elásticas, 251, 254, 255-258
velocidad relativa y, 256
energía cinética en, 252
inelásticas, 251-255
moleculares, 603-605
presión en un gas y, 597-600
totalmente inelásticas, 251-255
Combustibles fósiles, cambio de clima y, 577
Combustión, 568
Cometa Halley, 417
órbita del, 417
Componente(s)
centrípeta de la aceleración, 286-287
de vectores, 14-19, 21-22, 106-107
contra vectores componentes, 14, 106
tangencial de aceleración, 286
Compresibilidad, fluidos, 356, 382
Compresión
definición de, 354
densidad de un fluido y, 476
Condensación, 566
Condiciones de frontera
de ondas, 489-490
Conducción, 570-574
Conductividad térmica, 571
Conductores
de calor, 552-553
térmicos, 552-553
Conservación
de la energía, 176, 209, 224
en el movimiento armónico simple, 446-449
de la masa en un fluido, 383-384
del momento
angular, 325-328
lineal, 247
Consistencia dimensional, 6
Consonancia, 532
Constante
de Boltzmann, 601
de fuerza, 188
de los gases, 517, 592
ideales, 517, 592
de resorte, 188
de Stefan-Boltzmann, 575
de torsión, 451
gravitacional, 403
cálculo de, 404-405
Contenido armónico, 497, 513
Control de ruido
interferencia de ondas en, 531
sincronización de pulso en, 532
Convección, 570, 574
Copérnico, Nicolás, 414
Corriente de calor, 571
Cowan, Clyde, 145
Cuerpo
humano
como sistema termodinámico, 630
momento angular del, 324
radiación del, 575-576
negro, 576
rígido, 278
Curva(s)
aceleración alrededor de, 74, 88
energía potencial gravitacional y, 212-216
inclinadas, 158
movimiento a lo largo de una, 191-193
peraltada, 158
resonancia, 528
teorema trabajo-energía para, 187-191

D

Definición operativa, 4
Deformación(es)
de compresión, 354
de corte, 356-357
definición de, 352
elásticas, ley de Hooke y, 352, 357-358
elasticidad y, 357-358
esfuerzo y, 352-357
ley de Hooke y, 352, 357-358
módulo elástico y, 352
permanente, 358
plástica, 358
por compresión, 354
por corte, 356-357
por tensión, 352-354
elasticidad y, 357-358
plasticidad y, 357-358
reversible, 358
tensor, 352-354
volumétrica, 354-356
voluminosa, 354-356
Densidad, 373-375, 374t
contra presión, 592
de la Tierra, 408
de masa
lineal, 482
razón de volumen y, 373-374
de un fluido, 373-375, 380-381, 476
compresión y, 476
flotabilidad y, 380-382
medición de, 381
refracción y, 476
definición de, 373
lineal de masa, 482
media, 374
medición de la, 374
Depósitos
de calor, 654-655
fríos, 655
Derivadas, 39
parciales, 226-227, 481
Desaceleración, 45
Desplazamiento, 11, 12
angular, 279
torca y, 320-322
definición de, 11
en movimiento armónico simple, 439-440, 443-445
en oscilación, 438
gravitacional al rojo, 425
movimiento rectilíneo y, 36-38
multiplicación de, 13
principio de superposición y, 490-491
pulso de onda y, 489-491
suma vectorial (resultante) de, 12
trabajo y, 177-178, 181-183
Dewar, James, 576
Diagrama(s)
de cuerpo libre, 124-125, 140, 144
de energía, 228-229
de esfuerzo/deformación, 358
de fase, 611
de flujo de energía
para máquinas de calor, 655-656
para refrigeradores, 659
de fuerza, 106-107
de movimiento, 41, 41f, 46f
p-V, 596
Dilatación del tiempo, 425
Dina, 117
Dinámica
celeste, 402
de un fluido, 373, 389-390
viscosidad y, 389-390
definición de, 35, 104
del movimiento
circular, 154-159
de rotación, 308-331
segunda ley de Newton y, 112-117, 140-146
Dinosaurios, péndulo físico y, 456-457
Dióxido de carbono, efecto invernadero y, 576-577
Dirección, 10
de ondas, 479, 481-482
de una fuerza, 10
de vectores, 11, 16
Disco de acreción, 425
Diseño de hélices, 288
Disonancia, 532
Distribución de Maxwell-Boltzmann, 608-609
División
cifras significativas en, 9
de vectores, 70

E

Ebullición, 566
Ecuación(es)
consistencia dimensional en, 6
de Bernoulli, 385-389
de continuidad, 383-384
de estado, 591-596, 612
de movimiento
armónico simple, 440-442
con aceleración constante, 49
de onda, 481, 485
para ondas mecánicas, 481-482, 485
de un gas ideal, 591-595
de Van der Waals, 595-596
unidades de medida en, 6
Efecto
de invernadero, 576-577
Doppler
para ondas electromagnéticas, 537-538
para ondas sonoras, 533-537
Eficiencia
biológica, 655
térmica, de máquinas de calor, 655-656, 658
Einstein, Albert, 91
Eje
de rotación, 281-282, 286-287
a través del centro de masa, 294
cambio de dirección del, 281-282, 286-287
fijo, 278-279
momento de inercia del, 312
movimiento, 320-324
teorema de los ejes paralelos y, 293-294
de simetría, momento angular y, 323-324
elíptico, 415
semimayor, 415, 416

Elasticidad, 344-359
Elevación
 de un peso, equilibrio y, 351
 presión atmosférica y, 594-595
Emanaciones, rapidez de, 387
Emisividad, 575
Energía
 cinética
  capacidades caloríficas y, 605-608
  como cantidad escalar, 182
  con fuerzas constantes, 177-178
  con fuerzas variables, 187-191
  contra momento lineal, 242-246
  definición de, 182
  en colisiones, 252
  en movimiento armónico simple, 446-449
  en sistemas compuestos, 186-187
  energía potencial y, 207, 208, 221-222
  equipartición de, 606
  fuerzas conservativas y, 221-222
  molecular, 597, 600-602, 605-606, 636
  momento de inercia y, 288-291
  presión en un gas y, 600-602
  rotacional, 288-293, 315-316
  teorema trabajo-energía y, 181-187
  torca y, 321
  unidades de, 183
 conservación de, 176, 224
 conversión de, 224
 de activación, 610
 eléctrica, 194
  unidades de, 194
 en movimiento armónico simple, 446-449
 en movimiento ondulatorio, 486-489
 en oscilaciones amortiguadas, 458-459
 equipartición de, 606
 interna, 224, 624, 670
  cambio en, 630-631, 639
  de un gas ideal, 636
  definición de, 629, 631
  en procesos cíclicos, 631-634
  en sistemas aislados, 631-634
  entropía y, 670
  notación de, 629
  primera ley de la termodinámica y, 629-634
  temperatura y, 636
 mecánica
  calor y, 562
  conservación de la, 209, 446-448
  en movimiento armónico simple, 446-449
  fuerzas conservativas contra fuerzas no conservativas y, 221-223
  total, 209
 molecular, 597
 potencial, 207-231
  de moléculas, 597
  definición de, 208
  diagramas de energía y, 228-229
  elástica, 216-221, 225
  en movimiento armónico simple, 446-449
  energía cinética y, 207, 208, 221-222
  equilibrio y, 228-229
  fuerza y, 225-228
  fuerzas conservativas y, 221-229
  fuerzas eléctricas y, 226-227
  fuerzas intermoleculares y, 597
  gradiente de, 227
  gravitacional, 208-216, 293, 317, 409-411
  posición y, 208
  pozos de potencial y, 597
 total, 176
 trabajo y, 177-193
Enfriamiento, evaporación, 568
Entropía, 669
 cálculo de, 676
 definición de, 670
 desorden y, 669-670
 en organismos vivos, 673
 en procesos
  cíclicos, 672-673
  irreversibles, 673
  energía interna y, 670
  interpretación microscópica de, 675-677
  reversibilidad de, 670
  segunda ley de Newton y, 674, 677
Enunciado
 de Clausius, 662
 de Kelvin-Planck, 661
 de la "máquina", de la segunda ley de la termodinámica, 661
 del "refrigerador", de la segunda ley de la termodinámica, 662
Equilibrio, 344-359
 centro de gravedad y, 345-348
 de cuerpos extensos, 345-352
 de fase, 566, 611
 de ondas mecánicas, 473
 de un cuerpo
  extenso, 345-352
  rígido, 345, 348-352
 definición de, 32, 109
 elevación de un peso y, 351
 en dos dimensiones, 137-138
 energía potencial y, 228-229
 estable, 228
 estático, 345
 estrategia de solución de problemas de, 136-139
 fase de, 566, 611
 fuerza neta y, 135
 inestable, 228
 peso y, 345-347
 primera
  condición de, 345
  ley de Newton y, 108-112, 134-139
 rotación y, 345
 segunda condición de, 345
 tensión y, 136-139
 térmico, 552
 torca y, 345
 unidimensional, 136-137
Equipartición de energía, 606
Error(es)
 en valores medidos, 8
 fraccionario
  incertidumbre, 8
  porcentaje, 8
Escala(s)
 centígrada, 553
 de decibeles, 521
 de temperatura, 552
  absoluta, 556, 668-669
  Celsius, 553
  conversión entre, 554
  Fahrenheit, 554
  Kelvin, 555-556, 665, 668-669
 Fahrenheit, 554
 Kelvin, 555-556, 665, 668-669
Escalera, estabilidad de una, 350
Esferas
 distribución de masa y, 418-421
 gravitación y, 403-404
 momento de inercia de, 296
 rodantes, aceleración de, 319-320
Esfuerzo
 de compresión, 354
 de corte, 352f, 356-357
 de ruptura, 358
 de tensión, 352-354, 560-561
  elasticidad y, 357-358
  esfuerzo térmico y, 560-561
  plasticidad y, 357-358
 definición de, 352
 deformación y, 352-357
 elasticidad y, 357-358
 módulo elástico y, 352
 térmico, 560-561
 unidades de, 353
 volumétrico, 352f, 354-356
Estado(s)
 de la materia, 565
 microscópico, 675-677
Estampido, 513
Estándares de referencia, 4
Estática en un fluido, 373
Estimaciones, orden de magnitud, 10
Estrategias de solución de problemas, 2-3
Estrellas
 binarias, 425-426
 sistemas de, 405-406
 supernovas, 160
Evaporación, 568
Exactitud, 8
 contra precisión, 9
Excentricidad orbital, 415
Expansión, 476
 de volumen, 558-560
 isotérmica, de un gas ideal, 627
 libre, 629
 lineal, 557-558, 558t, 559
 térmica, 557-561
  del agua, 560
  en un objeto con un agujero, 558
  lineal, 557-558, 559
  volumen, 558-560
Experimentos, 2

F

Fase(s), 565
 de estado
  diagramas *p-V* y, 596
  superficies *pVT* y, 612-613
 de la materia, 610-613
  interacciones moleculares y, 610
  punto crítico y, 611
  punto triple y, 611
  sublimación y, 611
 gaseosa, 566
 líquida, 566
 de onda, 479
Fasores, 441
Fenómeno de movimiento con tirón, 148, 149
Fibras musculares, trabajo realizado por, 177
Física
 como ciencia experimental, 2
 como proceso, 2
 repaso de, 2
Flotabilidad, 380-382
Fluido(s)
 compresibilidad de, 356, 382
 flujo de un, 382-384
 ideal, 382
 movimiento de, 382-384
 rapidez del sonido en, 514-515
 viscoso, 389-390
Flujo
 de calor, 562
 de un fluido, 382-384
  constante, 382-383
  ecuación de continuidad y, 383-384
  ecuación de flujo de Bernoulli y, 385-389
  laminar, 383, 390
  medición de, 388
  presión y, 385-389
  rapidez de, 385-389
  tasa de, 383-384
  turbulento, 383, 390-391
 en tubos, 383
 estable, 382-383
 laminar, 383, 390
 plástico, 358
 turbulento, 383, 390-391
Fractura, 358
Frecuencia, 438
 angular, 438-439, 442
  contra frecuencia, 442
  en el movimiento armónico simple, 441-442
  natural, 459-460
  periodo y, 438-439
 contra frecuencia angular, 442
 de ondas estacionarias, 496
 fundamental, 496

modo normal, 496
natural angular, 459-460
periodo y, 438-439
pulso de, 531-532
Fricción, 146-154
cinética, 147, 149, 150-151, 222
coeficiente de, 147
como fuerza no conservativa, 222
coeficientes de, 147, 151
definición de, 108, 147
estática, 147-149
fenómeno de movimiento con tirón y, 148, 149
magnitud de, 147
por rodamiento, 151-154, 320
resistencia de un fluido y, 151-152
Fuegos pirotécnicos, entropía y, 669f
Fuerza(s)
central, 416
centrífuga, 155
componentes de, 226-227
conservativas, 221-229
colisiones elásticas y, 255
constante(s), 177-178
contra presión, 355, 376
de acción-reacción, 120-123
de contacto, 105, 146
de flotabilidad, 380
de fricción, 105, 146-154
de interacciones entre partículas, 159-160
de interacciones fuertes, 160
de marea, 425
de rango amplio, 105
de resistencia en un fluido, 151-154
de tensión, 105, 123. *Véase también* Tensión
definición de, 105
diagramas de cuerpo libre de, 124-125
dirección de, 10, 13. *Véase también* Vector(es)
disipativa, 222
eléctrica, 160
energía potencial y, 226-227
energía potencial y, 225-228
externa(s), 247
movimiento del centro de masa y, 261-262
torca y, 312
fundamental(es), 159-160
gravitacional(es), 105, 159-160
como pares de acción-reacción, 403
contra energía potencial gravitacional, 410
impulsora, 459-460
periódica, oscilación amortiguada y, 459-460
interacciones débiles, 160
intermolecular(es), 597-598
internas, 247, 312
torca y, 312
línea de acción de, 309
magnética(s), como fuerza fundamental, 159-160
magnitudes de, 105
masa y, 113-114
medición de, 106
movimiento y, 112-116
neta, 107, 247-248
aceleración y, 112-118
definición de, 107
equilibrio y, 135
momento lineal y, 242-244
movimiento del centro de masa y, 261-262
primera ley de Newton y, 109
segunda ley de Newton y, 112-118
torca y, 311-312, 323, 324
no conservativa(s), 222-224
normal, 105, 146
nuclear fuerte, 160
par de, 308-312
periódica impulsora, 459-460
peso como, 105
por unidad de área, 353
potencia y, 194
propiedades de, 105
que actúa a distancia, 406
restauradora, 438
en movimiento armónico simple, 439-440
en un péndulo, 454
superposición de, 106-108, 404, 405-406
unidades de, 5-6, 105, 117
Función
de distribución, 608
de onda
definición de, 477
gráfica de, 478-480
para ondas longitudinales, 482
para ondas mecánicas, 477-479
para ondas sinusoidales, 477-479
para ondas transversales, 480-482
principio de superposición y, 491
propiedad aditiva de, 491
Fusión, 565-566
nuclear, calor de, 566

G

Galileo Galilei, 2, 52
Galio, temperatura de fusión del, 566
Gas
capacidades caloríficas de, 605-607
diagramas *p-V* de, 596
energía cinética de, 605-606
fuerzas intermoleculares en, 597
ideal, 592
capacidades caloríficas de, 637-639
ciclo de Carnot para, 664-665
energía interna de, 636
expansión isotérmica de, 627
modelo de cinética molecular, 599-605
proceso adiabático de un, 640-642
volumen de, 593
isotermas y, 596
masa de, 591-592
módulo de volumen de un, 355
moléculas en, 597
ondas sonoras en, 517-518
volumen de, 593
Giroscopios, 328-330
Gradiente
de energía potencial, 227
de temperatura, 571
Grados, 553, 555
de libertad, 606
Gráfica(s)
a_x-t, 46-49, 55-57
de aceleración constante, 46-49
de aceleración variable, 55-57
curvatura de, 46, 47
de funciones de onda, 478-480
de ondas sonoras, 511
parabólicas, 48
v_x-t, 44-47, 45f, 46f
aceleración en, 44-46, 47
x-t, 37-38, 40-41
definición de, 37
velocidad en, 37-38, 40-41
Gramos, 5, 5t
Gran teoría unificada, 160
Grasa de ballena, como aislante, 572
Gravedad específica, 374
Gravitación, 105, 159-160, 402-427
a escala cósmica, 406
aceleración debida a la, 52-55
agujeros negros y, 423-426
como fuerza
conservativa, 409, 410
fundamental, 159-160
cuerpos con simetría esférica y, 403-404
distribución esférica de masa y, 418-421
gravedad específica y, 374
importancia de la, 406
ley de Newton de, 402-406
medición de, 404-405
órbitas de satélites y, 411-413
pares de acción-reacción y, 403
peso y, 406-409
rapidez de escape y, 410-411, 413
superposición de fuerzas y, 405-406
trabajo realizado por, 409-410

H

Hidrómetros, 381
Hielo, fusión del, 565-566
Histéresis elástica, 358
Horizonte de eventos, 424
Huevos, energía mecánica de, 209

I

Impulso, 243
del pájaro carpintero, 243
Incertidumbre
en mediciones, 8
fraccionaria (porcentaje), 8
Incógnitas, 3
Incubadoras, 576
Inercia, 109
definición de, 109
masa y, 118
rotacional, 289
Ingravidez
aparente, 142, 413
verdadera, 413
Instrumentos musicales
de cuerdas, 497-498
ondas estacionarias y, 497-498
de viento, 527
ondas estacionarias y, 497-498
órganos
de tubos, 524-527
de viento, 524-527
Integración, velocidad y posición por, 55-77
Integral(es)
de línea, 192
del momento de inercia, 295
Intensidad
amplitud de presión y, 519-521
de onda, 488-489
del sonido, 518-522
escala de decibeles de, 521
pérdida del oído y, 513, 522
valores representativos de, 521t
ley del cuadrado inverso para, 488-489, 520
Interacción(es)
de partículas
débiles, 160
electromagnética, 159-160
fuertes, 160
gravitacionales, 159-160
tipos fundamentales, 159-160
de Van der Waals, 452-453, 595
débiles, 160
eléctricas débiles, 160
electromagnética, 159-160
fuertes, 160
gravitacional, 159-160
Interferencia, 489-492, 529-531
constructiva, 492, 530
definición de, 489
destructiva, 492, 529
en el control del ruido, 531
en ondas de sonido, 529-531
ondas
de sonido e, 529-531
estacionarias e, 492
Intervalo
de temperatura, 554
de validez, 2
Isotermas, 596
p-V, 596

J

Joule, 177, 183, 562

K

Kelvin, 555
Kepler, Johannes, 414-415
Kilocaloría (kcal), 562
Kilogramos, 5, 113
Kilowatt, 193
-hora, 194

L

Lanzamiento de disco, 287
Lenteja de péndulo, 454
Ley(es)
cero de la termodinámica, 552-553
de conservación de la energía, 176, 209, 224
de Coulomb, 597
de Hooke, 188-189, 352, 356
deformación elástica y, 352, 357-358
límites de, 357-358
movimiento armónico simple y, 439
de la física, 2
de la gravitación de Newton, 402-406
de Pascal, 376-377
de Stefan-Boltzmann, 575
del cuadrado inverso, para la intensidad, 488-489, 520
del movimiento de Newton, 104-133
aplicación de, 124-125
diagramas de cuerpo libre y, 124-125
enunciado de, 104
leyes de Kepler y, 414-416, 418
primera ley, 108-112
repaso de, 104-108
segunda ley, 112-117
tercera ley, 120-125
físicas (principios), 2
Libra(s), 117
-pie, 177, 194
por pulgada cuadrada, 353
absolutas (psia), 378
manométricas (psig), 378
Límite elástico, 358
Limpiaparabrisas, 148
Línea
de acción, 309
de corriente, 383
de flujo, 382-383
Líquido(s)
compresibilidad de, 356
fases de, 610-613
moléculas en, 597
rapidez molecular en, 610
Litotricia extracorpórea por ondas de choque, 539
Longitud(es)
de onda, 475
unidades de, 4-5, 6f
Luz
efecto Doppler de, 537-538
rapidez de, 4-5

M

Magnitud, de un vector, 11, 12, 16
Manómetro(s), 378-380
de Bourdon, 379f
medidores de presión, 378-380
Máquina(s)
de calor, 654-656
de Carnot, 663-666
de combustión interna, 642, 657-659
depósitos de calor y frío y, 654-655
diagramas de flujo de energía y, 655
eficiencia térmica de, 655
de Carnot, 663-669
de combustión interna, 642, 657-659
diesel, 658-659
compresión adiabática en, 642
Marco de referencia, 89
inercial, 110-112
primera ley de Newton y, 110-112
segunda ley de Newton y, 115-116
Marte, gravitación en, 408-409
Masa
aceleración y, 113, 114, 118-120
atómica, 598
centro de, 258-262
de un átomo, 598
de un gas, 591-592
de una molécula, 598
definición de, 113
densidad y, 373-374
fuerza y, 113-114
inercia y, 118
inercial, 113
medición de, 114, 119
molar, 517, 564, 591, 598
molecular, 598
peso y, 114, 117-120
por unidad de longitud, 482
rapidez final y, 153-154
razón de volumen, densidad y, 373-374
unidades de, 5, 113-114, 117, 119
Materia
fases de la, 610-613
propiedades moleculares de, 596-598
Material(es)
dúctiles, 358
quebradizo, 358
Mecánica
clásica (newtoniana), 104
de fluidos, 373-392
densidad y, 373-375, 380-381
ecuación de Bernoulli y, 385-389
flotabilidad y, 380-382
flujo de un fluido y, 382-384
presión y, 375-380
tensión superficial y, 382
definición de, 35
Mediciones
exactitud de, 8
cifras significativas en, 8-9
errores en, 8
incertidumbre en, 8
unidades de, 4-6
Medidor(es), 4-5, 438
de Venturi, 388
Medio, de la onda, 473
Metales, como conductores, 571
Milibar, 375
Mitchell, John, 423
Modelo(s)
de moléculas puntuales, de la capacidad calorífica de un gas, 605
definición de, 3
ideales, 3-4, 3f
molecular cinético, de un gas ideal, 599-605
Modo
de corte, 357
de Young, 353-354
elástico, 352
de corte, 356-357
de Young, 353-354
volumétrico, 354-356
normal, 496
volumétrico, 355
Moléculas
de gas, 597, 599
diatómicas, 605-606
en líquidos, 597
fuerzas intermoleculares y, 597-598
poliatómicas, 605-606
sólidas, 597
Moles, 564, 598
Momento
angular
como vector, 324, 328
conservación del, 325-328
de un giroscopio, 328-330
definición de, 322
del cuerpo, 324
eje de simetría y, 323-324
precesión y, 328-330
rapidez de cambio, 323, 324
rotación y, 322, 328
torca y, 323, 324
contra torca, 309
de inercia, 288-291
cálculo de, 290, 294-296, 456
de un cilindro, 295-296
de una esfera, 296
definición de, 289
del ala de una ave, 290f
en el movimiento armónico simple, 451
teorema de los ejes paralelos y, 293-294
torca y, 312
lineal, 241-266, 322
colisiones y, 251-258
como vector, 242, 248
componentes de, 242
conservación de, 247, 255
contra energía cinética, 240, 242-246
definición de, 242
en movimiento armónico simple, 449
fuerza neta y, 242
impulso y, 241-246
magnitud de, 242
propulsión de un cohete y, 262-265
rapidez de onda y, 484-485
razón de cambio de, 242
segunda ley de Newton y, 242
teorema de impulso-momento lineal y, 242-244, 483-484
tercera ley de Newton y, 247
total, 247, 260
transversal, 484-485
unidades de, 242
Montañas rusas, 74, 88
Motores
de combustión interna, 657-659
de gasolina, 546-548
Movimiento
armónico simple, 439-453
aceleración en, 444, 448
amplitud en, 442-443
angular, 451
aplicación de, 450-453
cantidad de movimiento en, 449
como modelo de movimiento periódico, 440
definición de, 440
desplazamiento en, 443-444
ecuaciones de, 440-442
energía en, 446-449
movimiento circular y, 440-442
periodo en, 442-443
velocidad en, 444, 448
vertical, 450-451
circular, 85-88, 154-159, 440-442
aceleración y, 85-87, 88
contra movimiento de proyectiles, 87
dinámica del, 154-159
no uniforme, 159
periodo de, 87
uniforme, 85-87, 88, 154-159
velocidad y, 85-87
de ondas, contra movimiento de partículas, 475
de partículas, contra movimiento de ondas, 475
de proyectiles, 77-85
aceleración y, 77-80, 87
componentes de, 77-78
contra movimiento circular, 87
resistencia del aire y, 77, 79-80
trayectoria y, 77
velocidad y, 77-80
de rotación/rotacional
aceleración angular y, 282-285, 311-314
aceleración lineal en, 286-288
alrededor de un eje de simetría, 323-324
alrededor de un eje fijo, 278-279
cantidad de movimiento angular y, 322-328
con aceleración angular constante, 283-285
con movimiento de traslación, 314-320
coordenadas de, 279
cuerpo rígido, 278-297
de la Tierra, 421-423
de un giroscopio, 328-330
dinámica de, 308-331
dirección de, 279, 309
eje en movimiento, 314-320
eje fijo, 278-279, 283
en bacterias, 283f

en rodamiento sin resbalar, 316-318
energía cinética y, 288-293
energía en, 288-293
equilibrio y, 345
potencia y, 321-322
precesión y, 328-330
rapidez lineal en, 285-286
segunda ley de Newton del movimiento y, 312, 318-320
torca y, 308-314
trabajo y, 320-322
unidades de, 279
velocidad angular en, 279-282
de satélites, 411-413
de traslación, 308, 314-320, 606
con movimiento rotacional, 314-320
definición de, 308
energía cinética molecular y, 606
vibratorio, 606
del centro de masa, 259-262
del eje de rotación, 314-320
en dos/tres dimensiones, 69-103
fuerzas y, 112-116
leyes
de Kepler del, 414-416
de Newton del, 104-133
orbital, 411-413
periódico, 437-462
amplitud de, 438
de ondas, 474-476
de péndulo, 453-457
de un resorte, 437-438
definición de, 437
desplazamiento en, 438
en osciladores armónicos, 439-440
frecuencia de, 438
movimiento armónico simple y, 439-453
repaso, 437-438
resonancia y, 460
vibración molecular y, 451-453
periodo de, 87
planetario, 414-418
centro de masa y, 417-418
leyes de Kepler del, 414-417
rectilíneo, 35-38
con aceleración constante, 46-52
con aceleración instantánea, 42-46
con aceleración media, 42-46
con fricción, 141
con fuerza constante, 141
de cuerpos en caída libre, 52-55
desplazamiento y, 36-38
teorema de trabajo-energía para, 187-191
tiempo y, 37-38
velocidad instantánea y, 38-42
velocidad media y, 36-38
velocidad relativa y, 88-90
Multiplicación
cifras significativas en, 8f, 9
de desplazamientos, 13
de vectores, 13, 16, 20-22, 70
Multiplicadores unitarios, 7
Música, ondas sonoras en, 513-514

N

Nave espacial, en un viaje interplanetario, 416f
Newton, 6, 105, 113-114, 119
Newton-metro, 177, 309
Niebla, 567
Nivel de intensidad de sonido, 521
Nodos, 492
antinodos de desplazamiento, 523
antinodos de presión, 523
de desplazamiento, 523
de presión, 523
Notación
científica (potencias de 10), 9
de potencias de 10, 9
para
ángulos, 71
unidades de medida, 5
vectores, 11, 19
Número
atómico, 690
de Avogadro, 598
de onda, 478
Mach, 539

O

Objetos extensos
energía potencial gravitacional de, 293, 317
Oído, sensibilidad del, 528
Onda(s)
de choque, 538
de sonar, 516-517
electromagnéticas
efecto Doppler, 537-538
potencia de entrada, 488
estacionarias, 491-498
armonías y, 496
complejas, 497
en un resorte fijo, 495-498
frecuencias de, 496
instrumentos de cuerda y, 497-498
interferencia y, 492
nodos y antinodos y, 492
sonoras, 522-527
incidentes, 492-493
longitudinales, 473
función de onda de, 482
periódicas, 475-476
sonoras, 476
mecánicas, 472-499
condiciones de frontera para, 489-490
definición de, 473
descripción matemática de, 477-482
dirección de, 479, 481-482
ecuación de onda para, 481, 485
energía de, 486-489
estacionarias, 491-498
estado de equilibrio para, 473
incidente, 492-493
intensidad de, 488-489
interferencia en, 489
longitud de onda de, 475
longitudinales. *Véase* Ondas longitudinales
patrones de modo normal de, 496
periódicas, 474-477
potencia de, 487-488
propagación de, 474
sinusoidales, 475-482
sonoras, 476
superposición de, 490-491, 497
tipos de, 473-474
transportación de energía por, 474
transversales. *Véase* Ondas transversales
viajeras, 492, 494
medio para, 473
movimiento de una víbora, 473
periódicas, 474-477
descripción matemática de, 477-482
longitudinales, 475-476
sinusoidales, 475, 477-482
transversales, 474-475
reflejadas, 489-490
sinusoidales, 491-495
sinusoidales, 475, 477-482
energía de, 486-489
estacionarias, 491-498
función de onda para, 477-479
reflejadas, 491-495
velocidad/aceleración de una partícula en, 480
viajeras, 492, 494
sonoras, 476, 509-542
amplitud de desplazamiento de, 510, 518-519
amplitud de presión de, 511-512, 519-521
choque, 538
como fluctuaciones de presión, 510-513
contenido armónico de, 497
dirección de, 510
efecto Doppler y, 533-538
en fluidos, 514-515
en sólidos, 515-517
en un gas, 517-518
estacionarias, 522-527
frecuencia de, 513, 520
gráficas de, 511
instrumentos de viento y, 527
interferencia y, 529-531
intervalo audible, 509
musical, 513-514
órganos de tubos y, 524-527
percepción de, 513-514
potencia de, 519
pulsos y, 531-532
rapidez de, 476, 485, 514-518
superposición de, 491
transversales, 473
función de onda para, 480-482
periódicas, 474-475
rapidez de, 482-486
viajeras, 492, 494, 529
Órbita(s)
abiertas, 412
centro de masa y, 417-418
cerradas, 412
circulares, 412-413, 416-417
de satélites, 411-413
del cometa Halley, 417
elípticas, 415-416
semieje mayor de, 415, 416
velocidad de sector y, 415
Orden de magnitud de estimados, 10
Órganos de tubos, 524-527
Oscilación(es), 437-462
amortiguada, 457-460
amplitud de, 438
conducida, 459-460
de ondas periódicas, 474-476
de un péndulo, 453-457
de vibración molecular y, 451-453
definición de, 437
desplazamiento en, 438
en osciladores armónicos, 439-440
en un resorte, 437-438
forzada(s), 459-460, 527
frecuencia de, 438
impulsada, 459-460
movimiento armónico simple y, 439-453
repaso de, 437-438
resonancia y, 460-527
Osciladores armónicos
newtonianos, 439-440

P

Pares de acción-reacción, 120-123
fuerzas gravitacionales como, 403
Partícula(s), 36
definición de, 3
Pascal, 353, 375
Pascal, Blas, 353, 354, 377
Patos, rapidez de nado de, 486
Péndulo
balístico, 253
físico, 455-457
contra péndulo simple, 456
movimiento periódico de, 453-457
simple, 453-455, 456
contra el péndulo físico, 456
Pérdida del oído, intensidad del sonido y, 513, 522
Perihelio, 415
Periodo, 87
de oscilación, 438
en movimiento armónico simple, 443
frecuencia y, 438-439
orbital, 416-417
Perros, jadeo en los, 460
Peso
aceleración y, 118-119

aparente, 142-143, 421-423
aceleración debida a la gravedad y, 143, 422
magnitud de, 422
rotación de la Tierra y, 421-423
como fuerza, 118
definición de, 105, 117
equilibrio y, 345-347
gravitación y, 406-409
masa y, 114, 117-120
medición de, 119
molecular, 564, 591
segunda ley de Newton y, 142-143
torca y, 312
unidades de, 119
verdadero, 421
Pez, esfuerzo volumétrico en un, 355f
Pi, valor de, 8, 8f
Pianos, vibración de cuerdas en, 528
Piel, como aislante, 572
Pintura electrostática, 683
Plasticidad, 357-358
Polen, resistencia de fluidos y, 152
Porcentaje de error (incertidumbre), 8
Posición
energía potencial y, 208
gráficas *x-t* y, 37-38, 38f, 40-42
por integración, 55-57, 55f, 56f
Potencia, 193-195
de ondas, 487-488
sonoras, 519
definición de, 193
eléctrica, 194
fuerza y, 194
instantánea, 193, 194
en ondas, 487-488
media, 193, 487
movimiento rotacional y, 321-322
trabajo y, 487
velocidad y, 194
Pozos de potencial, 597
Precesión, 328-330
Precisión, contra exactitud, 9
Prefijos, de unidades de medida, 5
Presión
absoluta, 377-378
atmosférica, 355, 375-376
elevación y, 594-595
medición de la, 378-380
como cantidad escalar, 355
contra
densidad, 592
fuerza, 355, 376
definición de, 355, 375
del agua, doméstica, 387
del aire, 375-376
doméstica del agua, 387
en un fluido, 355, 375-380
ley de Pascal y, 376-377
medición de, 378-380
profundidad y, 376-377
en un gas
colisiones moleculares y, 597-600
energía cinética molecular y, 600-602
temperatura y, 555
esfuerzo/deformación volumétrica y, 355-356
flujo de fluidos y, 385-389
manométrica, 377-378
medición de, 378-380
rapidez y, 385-389
recíproca, 356
unidades de, 353, 375
Primera condición de equilibrio, 345
Primera ley
de Kepler, 414-415
de la termodinámica, 624-643
definición de, 630
energía interna y, 629-634
procesos cíclicos y, 631-634
sistema aislado y, 631-634
de Newton del movimiento, 108-112
aplicación de, 124-125, 134-139
enunciado de, 108-109
equilibrio y, 109
fuerza neta y, 109
inercia y, 109
marco inercial de referencia y, 110-112
partículas en equilibrio y, 134-139
Principio(s)
de Arquímedes, 380
de integración, 244
diferencial(es), 245
físicos, 2
integrales, 244
Proceso(s)
a presión constante, 635
a temperatura constante, 635
a volumen constante, 635
adiabático, 634-635
ciclo de Carnot y, 663
en un gas ideal, 640-642
cíclico, en máquinas de calor, 654
de equilibrio, 652
irreversible, 652-653
isobárico, 635
isométrico, 635
ciclo de Carnot y, 663
reversibles, 653
termodinámicos, 624, 625
adiabáticos, 634-635, 640-642, 663
calor agregado en, 628-629
cambios infinitesimales de estado en, 634
desorden en, 653-654
dirección de, 652-653
en máquinas de calor, 654-656
equilibrio en, 653
estados intermedios (trayectorias) en, 628-629
isobáricos, 635
isométricos, 635
isotérmicos, 635, 663
reversibilidad de, 652-653, 663
tipos de, 634-636
trabajo realizado en, 628
Producto
cruz (vectorial), 23-25
escalar, punto, 20-22
punto, escalar, 20-22
vectorial (cruz), 23-25
Profundidad, presión de un fluido y, 376-377
Propiedades
macroscópicas
contra propiedades microscópicas, 590
teorías de la materia y, 599
microscópicas contra propiedades macroscópicas, 590
térmicas de la materia, 590-614
Propulsión
a chorro, en calamares, 262
de un cohete, 262-265
Proyectiles, 77
Psia (libras por pulgada cuadrada)
absolutas, 378
manométricas, 378
Pulso(s), 531-532
de onda, 474
Punto
crítico, 611
de referencia, 440-441
triple, 611

R

Radar Doppler, 537
Radiación, 570, 574-577
absorción de, 575
aplicaciones de, 576
calentamiento global y, 576-577
cuerpo negro, 576
definición de, 574
del cuerpo humano, 575-576
electromagnética, 574-577
ley/constante de Stefan-Boltzmann y, 575
solar, 576
Radiador, ideal, 576
Radianes, 279, 287
Radio de Schwarzchild, 424
Rango audible, 509
Rapidez, 39
angular, 280, 286, 329
de precesión, 329
instantánea, 286
tasa de cambio, 286
arrastre del aire y, 152-154
contra velocidad, 39-40, 286
de emanación, 387
de escape, 410-411, 413, 423
de la luz
medición de la, 4-5
de onda(s), 474, 475, 479, 483-486
cálculo de, 483-486
contra rapidez de partículas, 519
de ondas transversales, 482-486
en una cuerda, 482-485
sonoras, 514-518
teoría de impulso-momento lineal y, 483-484
de propagación, 474, 475
de un cohete, 265
de un yo-yo, 317
de una partícula, contra rapidez de una onda, 519
eficaz o raíz cuadrática media (rms), 602
instantánea, 39
angular, 286
lineal, en un cuerpo rígido en rotación, 285-286
media, 39
molecular, 602-603, 608-610
distribución de Maxwell-Boltzmann y, 608-609
orbital, 416-417
raíz cuadrática media (rms), 602
rms, 602
supersónica, 539
terminal, 152-154
trabajo y, 181-183
unidades de, 6f
Razón
de capacidades caloríficas, 517, 639
de compresión, 657
Reacción(es)
energía de activación para, 610
químicas, 610
Red cristalina, 597
Reflector, ideal, 576
Refrigerador(es), 659-661
de Carnot, 666, 667
prácticos, 660-661
sin trabajo, 661
Regla
de Dulong y Petit, 565, 608
de la mano derecha, 23
Reines, Frederick, 145
Relatividad, efecto Doppler, 537-538
Resistencia
a la tensión, 358
última, 358
a la tracción, 151
del aire, movimiento de proyectiles y, 77, 79-80
en un fluido, 151-154
térmica, 571
última, 358
Resonancia, 460, 527-529
definición de, 460
en sistemas mecánicos, 460
Resorte(s)
en equilibrio, 106
energía potencial elástica, 216-221
ideal, 439
movimiento armónico simple en, 439-453
oscilación en, 437-438
tendones, 190
trabajo realizado por/en, 188-189
Resultante, de desplazamiento, 12
Rodamiento sin resbalar, 316-318
Rotación
de un cuerpo rígido, 278-297

aceleración angular en, 282-285
aceleración lineal en, 286-288
alrededor de un eje fijo, 278-279
con movimiento de traslación, 314-320
dinámica de, 308-331
energía cinética en, 288-293
momento de inercia y, 288-291
movimiento alrededor de un eje, 314-320
rapidez lineal en, 285-286
velocidad angular en, 279-282
de un eje fijo, 278-279, 283
Ruido, 514

S

Segunda
condición de equilibrio, 345
ley de Kepler, 415-416
ley de la termodinámica, 652, 661-677
ciclo de Carnot y, 667-668
enunciado de Clausius, 662-663
enunciado de Kelvin-Planck, 661
enunciado de la “máquina” de, 661
enunciado del “refrigerador” de, 662-663
ley del movimiento de Newton, 112-117
análogo giratorio de, 312, 318-320
aplicación de, 115, 124-125, 140-146
ecuaciones de componentes de, 115
entropía y, 674, 677
enunciado de, 114-115
fuerzas externas y, 115
marco inercial de referencia y, 115-116, 118
masa constante y, 115
momento lineal y, 242
resistencia de fluidos y, 152-154
Segundos, 4, 5t, 438
por ciclo, 438
Semieje mayor, 415-416
Semillas de arce, movimiento de, 316
Serie
armónica, 496
de Fourier, 497
Simetría esférica, gravitación y, 403-404
Síntesis newtoniana, 418
Sistema(s)
aislados, 247
energía interna de, 631-634
de coordenadas, mano derecha, 24
de ejes, regla de la mano derecha, 24
de estrellas binarias, 425-426
de mano derecha, 24
de navegación inerciales, 56f
inglés, 5-6, 117
internacional, 4, 5t
métrico cgs, 117
termodinámicos
cuerpo humano como, 630
trabajo realizado en, 625-626, 628
trayectorias en, 628-629
Slug, 117
Sobreamortiguamiento, 458
Sobretonos, 496
Sólidos
capacidades caloríficas de, 607-608
fases de, 610-613
moléculas en, 597
ondas sonoras en, 515-517
Sonido
definición de, 509
estampido de, 513
infrasónico, 510
resonancia y, 527-529
timbre del, 513-514
tono del, 513
ultrasónico, 510
Subamortiguamiento, 458
Sublimación, 567, 611
Suma vectorial, 12
de desplazamientos, 12
Supercalentamiento, 567
Superenfriamiento, 567
Superficies *pVT*, 612-613
Supernovas, 160
Superposición
de fuerzas, 106-108, 404, 405-406
de ondas, 490-491, 497
lineal, 491
principio de, 490-491
Sustancia de trabajo, 654, 655
Sustracción
cifras significativas en, 8f, 9
de vectores, 13

T

Tanque Scuba, masa de aire en, 594
Temperatura, 552-553
absoluta, 517
contra
calor, 562
un intervalo de temperatura, 554
crítica, 596
de ebullición, 566
de fusión, 566
definición macroscópica de, 552
energía
cinética molecular y, 636
interna y, 636
presión de un gas y, 555
unidades de medida de, 553, 555
Tendedero, ondas en, 480
Tendones
como resortes no ideales, 190
módulo de Young de, 353f
Tensión, 105, 123, 353, 354
definición de, 105
fricción estática y, 148
primera ley de Newton y, 136-139
segunda ley de Newton y, 142
superficial, 382
Teorema
de impulso-momento lineal, 242-244, 483-484
de los ejes paralelos, 293-294
de trabajo-energía, 181-187
para el movimiento a lo largo de una curva, 191-193
para fuerzas constantes, 177-178
para fuerzas variables, 187-191
para movimiento rectilíneo, 187-191
para sistemas compuestos, 186-187
del binomio, 451, 452-453
Teoría(s)
definición de, 2
del todo, 160
especial de la relatividad, 91
físicas, 2
Tercera
ley de Kepler, 416-417, 426
ley de la termodinámica, 669
ley de Newton del movimiento, 120-125
aplicación de, 124-125
enunciado de la, 120
momento lineal y, 247
pares de acción-reacción y, 120-123
resistencia de fluidos y, 151-154
tensión y, 123
Termodinámica
aplicaciones de, 625
definición de, 551
ley cero de la, 552-553
primera ley de, 624-643
reglas de los signos para, 625
segunda ley de, 652-679
tercera ley de, 669
Termómetro(s), 552
arterial temporal, 554
bimetálico de tiras, 553
de gas, 554-556, 593, 669
de resistencia, 553-554
de tiras bimetálicas, 553
Termos de botella, 576
Tiempo
gráficas *x-t* y, 37-38, 40-42
movimiento rectilíneo y, 36-38
potencia y, 193
unidades de, 4, 5t
Tierra
densidad de la, 407-408
rotación de, 421-423
temperatura superficial de, 576
Timbre, 513-515
Tiranosaurio rex, péndulo físico y, 456-457
Tono, 513
de diferencia, 532
Topografía, gradiente de energía potencial y, 227
Torca, 308-314
aceleración angular y, 311-314
aplicación de, 310-311
cálculo de, 309-310, 349
centro de masa y, 312
como vector, 310-311
constante, 321
contra momento, 309
de fuerzas internas contra fuerzas externas, 312
definición de, 309
desplazamiento angular y, 320-322
dirección de, 309
energía cinética y, 321
equilibrio y, 345
fricción y, 320
fuerza neta y, 311-312, 323
gravitacional, 346-347
magnitud de, 310
medición de, 309
momento
angular y, 323, 324
de inercia y, 312
neta, 321
peso y, 312
positiva contra negativa, 309
trabajo realizado por, 320-322
unidad de, 309
Torr, 379
Torre inclinada de Pisa, 2, 53, 118
Trabajo, 177-193
cambio en la rapidez y, 181-183
cero, 179
como cantidad escalar, 178
definición de, 177
desplazamiento y, 177-178, 181-183
en sistemas compuestos, 186-187
energía cinética y, 181-187
negativo, 179-180, 183
positivo, 179, 183
potencia y, 193-195, 487
realizado
durante un cambio de volumen, 596, 652
en un sistema termodinámico, 652-626, 628
por el flujo de un fluido, 385-389
por fibras musculares, 177
por fuerzas constantes, 177-178
por fuerzas variables, 187-191
por la gravitación, 409-410
por ondas, 487-488
por una sustancia de trabajo, 655
por una torca, 320-322
por/en un resorte, 188-189
reglas de signos para, 625
tasa de, 193-195
total, 180, 244
unidades de, 177-178
Trampolines, 218-219
Transferencia
de calor, 562-565
mecanismos de, 570-577
por conducción, 570-574
por convección, 574
por radiación, 574-577
de energía
calor y, 562-565
tasas de, 570
Transformación de velocidad galileana, 91
Transiciones de fase, 611-612

Trayectoria(s), 77-79
en un sistema termodinámico, 628-629
libre media, 604
parabólicas, 79, 79f
Trineo, primera ley de Newton y, 109
Tubo(s)
de Kundt, 523
de órgano, 524-527

U

Ultrasonido, 516-517
Unidad(es)
de medida, 4-6
cifras significativas y, 8-9
consistencia de, 6
conversión de, 6-7
de aceleración, 42
de amplitud, 438
de calor, 562
de energía cinética, 183
de frecuencia, 438
de frecuencia angular, 438
de fuerza, 5-6, 105, 117
de longitud, 4-5
de masa, 5, 119
de momento lineal, 242
de periodo, 438
de peso, 119
de presión, 353, 375
de rapidez, 6f
de rotación, 279
de temperatura, 553, 555
de tiempo, 4, 5t, 7
de torca, 309
de trabajo, 177-178
de velocidad, 38
de volumen, 7
en cálculos, 6
en ecuaciones, 6
en el sistema británico, 5-6, 117
en el sistema métrico cgs, 117
en el sistema SI, 4, 5
incertidumbre y, 8
prefijos para, 5
del SI, 4, 5t
térmica británica (Btu, por *British Thermal Unit*), 562

V

Validez, intervalo de, 2
Valores de la rapidez eficaz, 602
Vaporización, 566
calor de, 566, 568
Variables
de estado, 591
incógnitas, 3
Vector(es), 10-25
aceleración, 35, 72-77, 283
adición de, 12-18
antiparalelos, 11, 12
colas de, 12
componentes de, 14-19, 21-22, 106-107
de aceleración, 35, 72-77, 283
componentes paralela y perpendicular de, 75-77
instantánea, 73-75
media, 73-75
de fuerza, 105
componentes de, 106-107
de posición, 70, 72
de velocidad
instantánea, 70-72
media, 70-72
desplazamiento y, 11, 12, 36-38
diagramas con, 11-12
dirección de, 11, 16
división de, 70
fuerza, 105-107
magnitud de, 11, 16
momento
angular, 324, 328
lineal, 242, 248
multiplicación de, 13, 16, 20-22, 70
negativos, 11
notación de, 11, 19
paralelos, 11, 12
productos de, 20-25
puntas de, 12
regla de la mano derecha para, 23
sustracción de, 13
torca, 310-311
unitarios, 19-20
velocidad, 35, 70-72, 281-282
angular, 281-282
Velocidad, 10
angular, 279-282, 286
aceleración angular y, 282
cálculo de, 281
como vector, 281-282
contra velocidad lineal, 280
instantánea, 280
media, 279
razón de cambio, 286
constante, 51
primera ley de Newton y, 108-112
contra
aceleración, 42
rapidez, 39-40, 286
de fase, 479
de sector, 415
de una onda, contra velocidad de una partícula, 519
de una partícula
contra velocidad de una onda, 519
en una onda, 480-482
definición de, 39
diagrama de movimiento de, 41
en movimiento armónico simple, 444, 448
fase de, 479
gráfica *x-t*, 37-38, 40-41
instantánea, 38-42, 39f-41f
componente *x* de, 39
contra rapidez instantánea, 39-40
definición de, 38, 70
en una gráfica *x-t*, 40-41
movimiento rectilíneo y, 38-41
lineal, 280, 282
contra velocidad angular, 280
magnitud de, 38t
media, 36-40
componente *x* de, 36-38
definición de, 36
en una gráfica *x-t*, 37-38
movimiento rectilíneo y, 36-38
velocidad instantánea y, 38-41
movimiento
circular y, 85-87
de proyectiles y, 77-80
por integración, 55-57
potencia y, 194
primera ley de Newton del movimiento y, 108-112
relativa, 88-93
colisiones elásticas y, 256-258
definición de, 88
en dos o tres dimensiones, 90-93
en una dimensión, 88-90, 89f
marco de referencia y, 89
transformaciones galileanas de velocidad y, 91
sector, 415
signos para, 37
unidades de, 38
Verne, Jules, 410
Viaje interplanetario, riesgos biológicos, 416f
Víboras, movimiento ondulatorio de las, 473f
Vibración, 438
capacidades caloríficas y, 606-608
molecular, 451-453, 597, 606-608
Viscosidad, 382, 389-390
Volumen
de un gas, 593
densidad y, 373-374
unidades de, 7

W

Watt, 193-194

Y

Yeager, Chuck, 539
Yo-yo
aceleración de un, común, 319
rapidez de un, 317

CONSTANTES NUMÉRICAS

Constantes físicas fundamentales*

Nombre	Símbolo	Valor
Rapidez de la luz en el vacío	c	2.99792458×10^{8} m/s
Magnitud de la carga del electrón	e	$1.602176487(40) \times 10^{-19}$ C
Constante gravitacional	G	$6.67428(67) \times 10^{-11}$ N · m²/kg²
Constante de Planck	h	$6.62606896(33) \times 10^{-34}$ J · s
Constante de Boltzmann	k	$1.3806504(24) \times 10^{-23}$ J/K
Número de Avogadro	N_A	$6.02214179(30) \times 10^{23}$ moléculas/mol
Constante de los gases	R	8.314472(15) J/mol · K
Masa del electrón	m_e	$9.10938215(45) \times 10^{-31}$ kg
Masa del protón	m_p	$1.672621637(83) \times 10^{-27}$ kg
Masa del neutrón	m_n	$1.674927211(84) \times 10^{-27}$ kg
Permeabilidad del aire	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ Wb/A · m
Permitividad del aire	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854187817\ldots \times 10^{-12}$ C²/N · m²
	$1/4\pi\epsilon_0$	$8.987551787\ldots \times 10^{9}$ N · m²/C²

Otras constantes útiles*

Equivalente mecánico del calor		4.186 J/cal (caloría 15°)
Presión atmosférica estándar	1 atm	1.01325×10^{5} Pa
Cero absoluto	0 K	−273.15°C
Electrón volt	1 eV	$1.602176487(40) \times 10^{-19}$ J
Unidad de masa atómica	1 u	$1.660538782(83) \times 10^{-27}$ kg
Energía en reposo del electrón	$m_e c^2$	0.510998910(13) MeV
Volumen de un gas ideal (0°C y 1 atm)		22.413996(39) litro/mol
Aceleración debida a la gravedad (estándar)	g	9.80665 m/s²

Fuente:* National Institute of Standards and Technology (http://physics.nist.gov/cuu**). Los números entre paréntesis indican la incertidumbre en los dígitos finales de la cifra; por ejemplo, el número 1.6454(21) significa 1.6454 ± 0.0021. Los valores sin incertidumbre son exactos.

Datos astronómicos†

Cuerpo celeste	Masa (kg)	Radio (m)	Radio orbital (m)	Periodo orbital
Sol	1.99×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—
Luna	7.35×10^{22}	1.74×10^{6}	3.84×10^{8}	27.3 d
Mercurio	3.30×10^{23}	2.44×10^{6}	5.79×10^{10}	88.0 d
Venus	4.87×10^{24}	6.05×10^{6}	1.08×10^{11}	224.7 d
Tierra	5.97×10^{24}	6.38×10^{6}	1.50×10^{11}	365.3 d
Marte	6.42×10^{23}	3.40×10^{6}	2.28×10^{11}	687.0 d
Júpiter	1.90×10^{27}	6.91×10^{7}	7.78×10^{11}	11.86 a
Saturno	5.68×10^{26}	6.03×10^{7}	1.43×10^{12}	29.45 a
Urano	8.68×10^{25}	2.56×10^{7}	2.87×10^{12}	84.02 a
Neptuno	1.02×10^{26}	2.48×10^{7}	4.50×10^{12}	164.8 a
Plutón‡	1.31×10^{22}	1.15×10^{6}	5.91×10^{12}	247.9 a

†*Fuente:* NASA Jet Propulsion Laboratory Solar System Dynamics Group (**http://ssd.jpl.nasa.gov**), y P. Kenneth Seidelmann, ed., ***Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*** (University Science Books, Mill Valley, CA, 1992), pp. 704-706. Para cada cuerpo, el “radio” es el radio en el ecuador y el “radio orbital” es la distancia media al Sol o (en el caso de la Luna) a la Tierra.

‡En agosto de 2006, la International Astronomical Union reclasificó a Plutón y a otros pequeños cuerpos celestes que orbitan al Sol como “planetas enanos”.

Física universitaria es un texto con más de seis décadas de liderazgo e innovación en la enseñanza de la física. Está dirigido a estudiantes de carreras de ciencias e ingeniería que cursan la materia de física y tienen algunas bases de cálculo.

Al preparar esta décimo tercera edición, mejoramos y desarrollamos aún más el contenido para asimilar las mejores ideas de la investigación educativa, entre las que destacan las siguientes:

- La enseñanza basada en la solución de problemas, con estrategias de solución que muestran cómo resolver problemas a partir de la reflexión, y no solo aplicando las matemáticas de manera directa.

- La pedagogía visual y conceptual con base en figuras de estilo gráfico simplificado, enfocadas en la situación física y con notas explicativas. Se cuenta, además, con videos de las soluciones de todos los ejemplos del libro y con videos tutoriales, disponibles mediante la lectura de códigos QR.

Física universitaria utiliza **MasteringPhysics**, el sistema de tareas y de enseñanza en línea probado pedagógicamente y de mayor uso en el mundo. Las actividades de MasteringPhysics permiten visualizar demostraciones de principios físicos, trabajar con simulaciones por computadora y recurrir a videos que son un asistente de enseñanza virtual accesible las 24 horas del día.

Consulte los recursos adicionales en el sitio Web:
www.pearsonenespañol.com/sears

Visite MasteringPhysics en:
www.masteringphysics.com




ISBN 978-607-32-2124-5
90000
9 786073 221245

Visítenos en:
www.pearsonenespañol.com